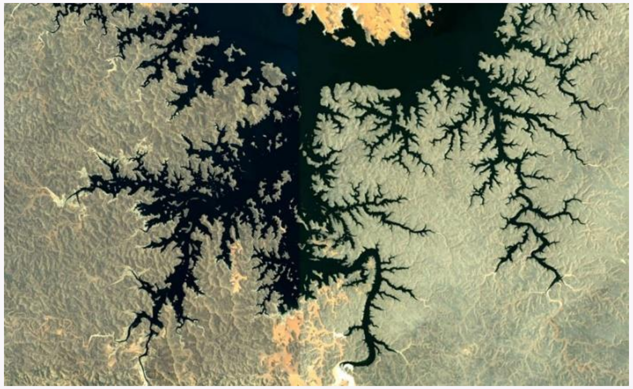
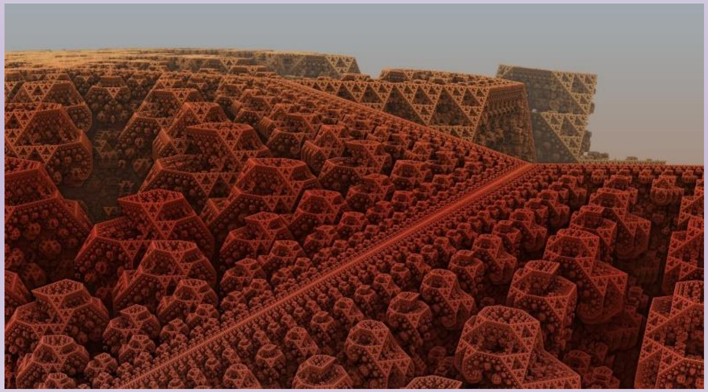
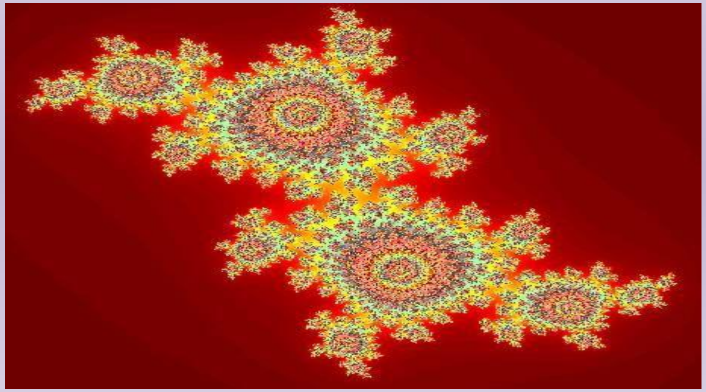
Мир фракталов



Академик
Национальной академии наук Украины,
Лауреат Государственной премии Украины,
Главный научный сотрудник ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины,
Профессор

Борисенко Александр Андреевич





Фракталы как объекты математики были давно.
Но слово «**фрактал**» (от латинского *fractus* – сломанный, разбитый) изобрел **Бенуа Мандельброт.**

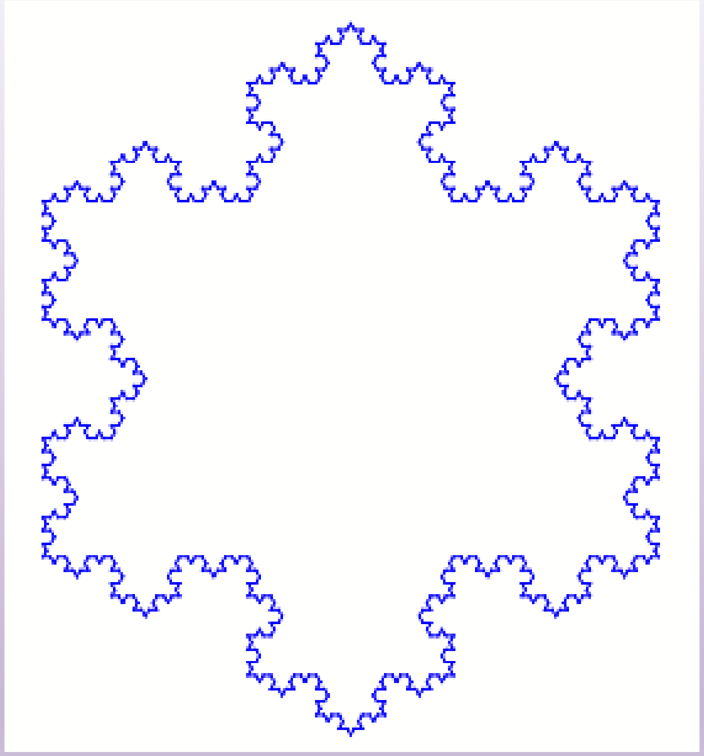
Кстати, его дядя учился в Харьковском университете.

Единого определения фрактала нет.

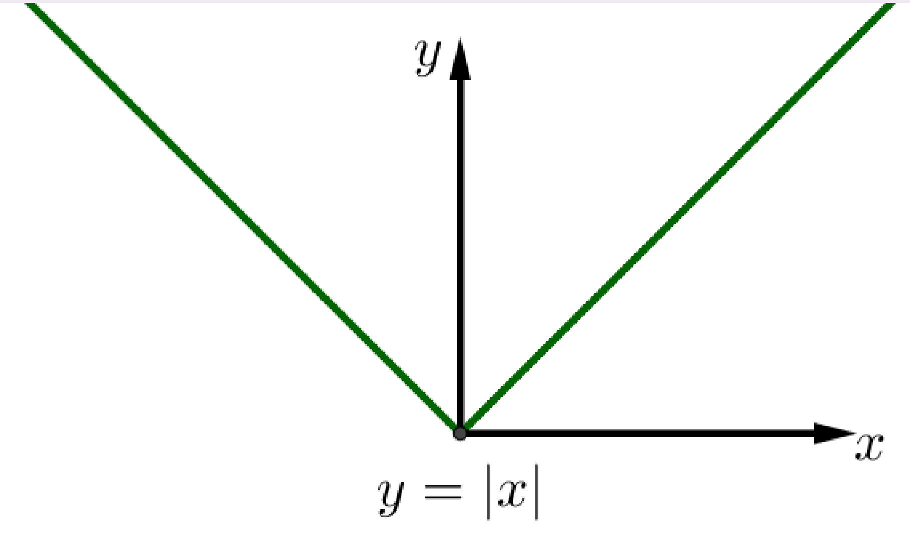
Одно из свойств фракталов:
самоподобие и непрерывность.

Второе:
фрактал – это **множество, хаусдорфова размерность которого больше топологической.**

Определения будут даны ниже.



Пример функции, которая не имеет производной в нуле



Функция Вейерштрасса

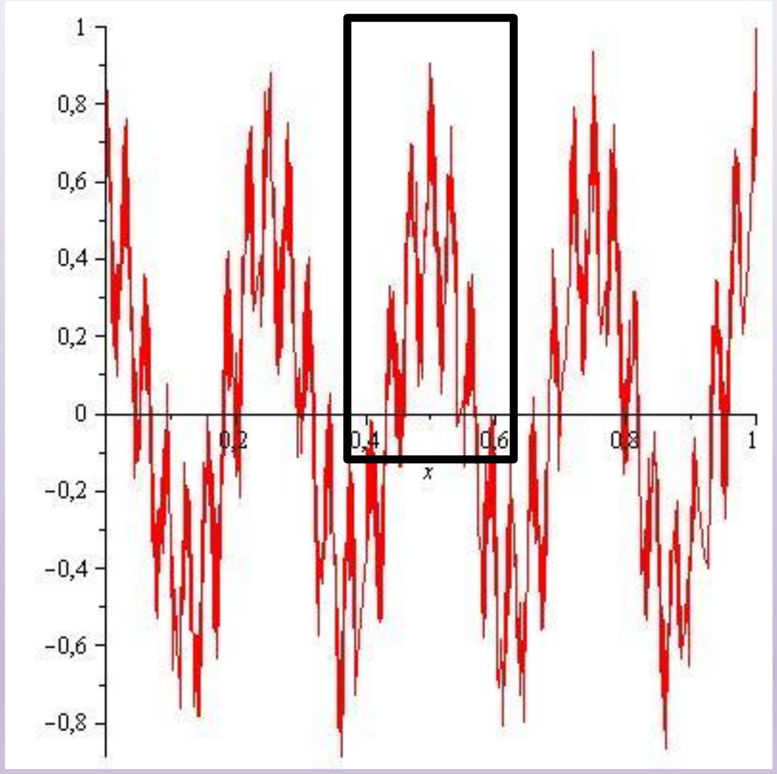
$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x)$

непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция.

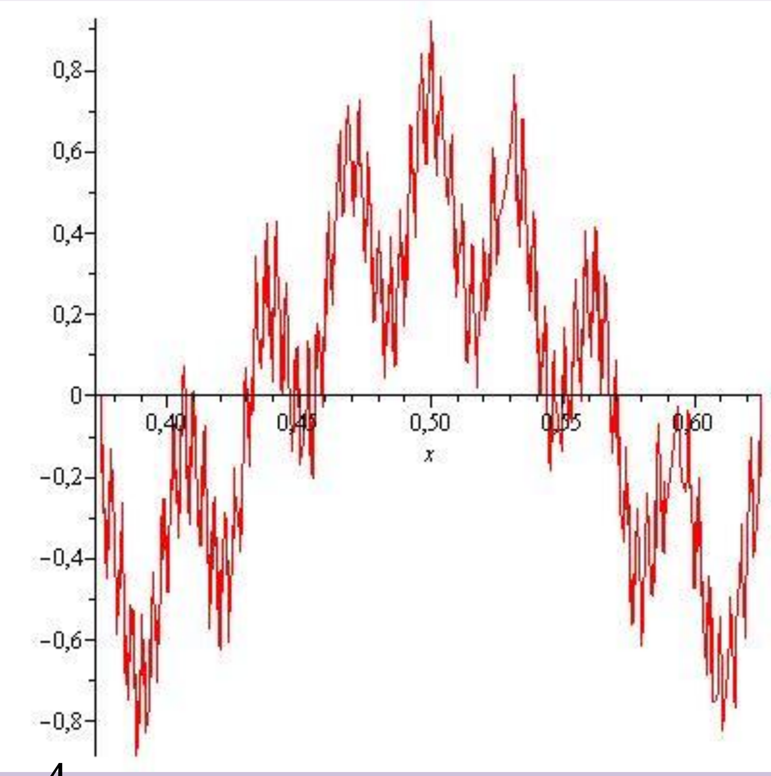
При $0 < a < 1, b$ −нечетное число и $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$.

(*1916 г. Харди ослабил условие:* $a < 1, b > 1, ab > 1$).

Карл Вейерштрасс



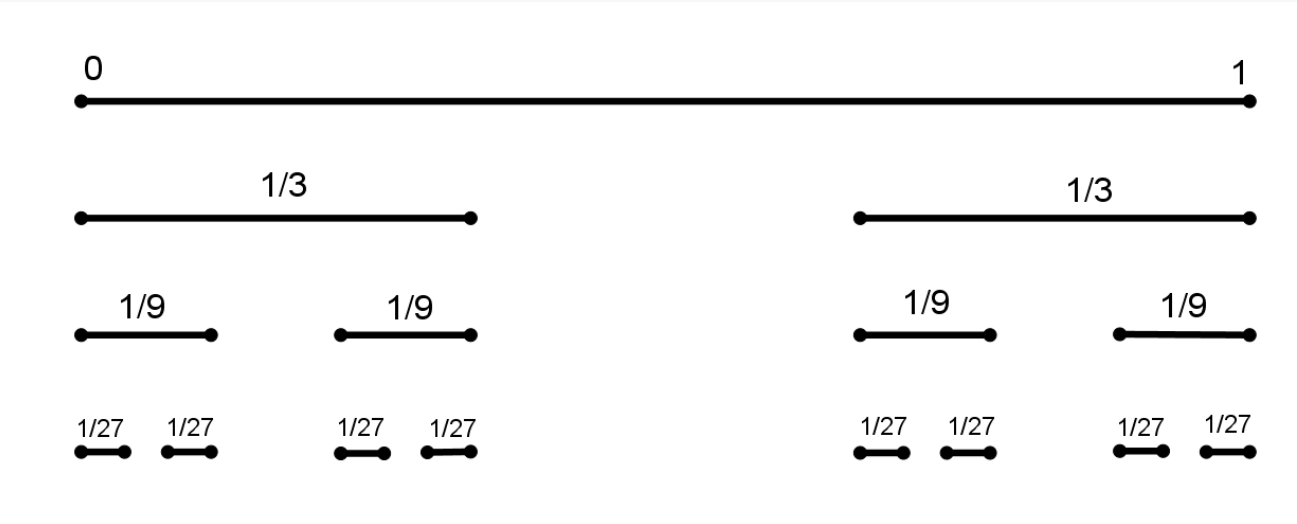
$0 \leq x \leq 1$

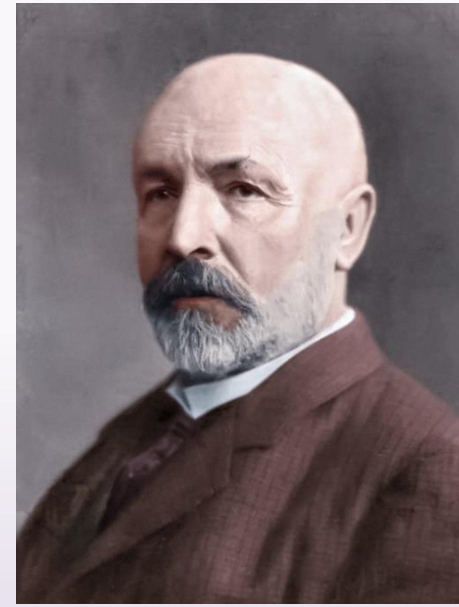


$0.375 \leq x \leq 0.625$

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{4}{a}$

Множество Кантора





Георг Кантор

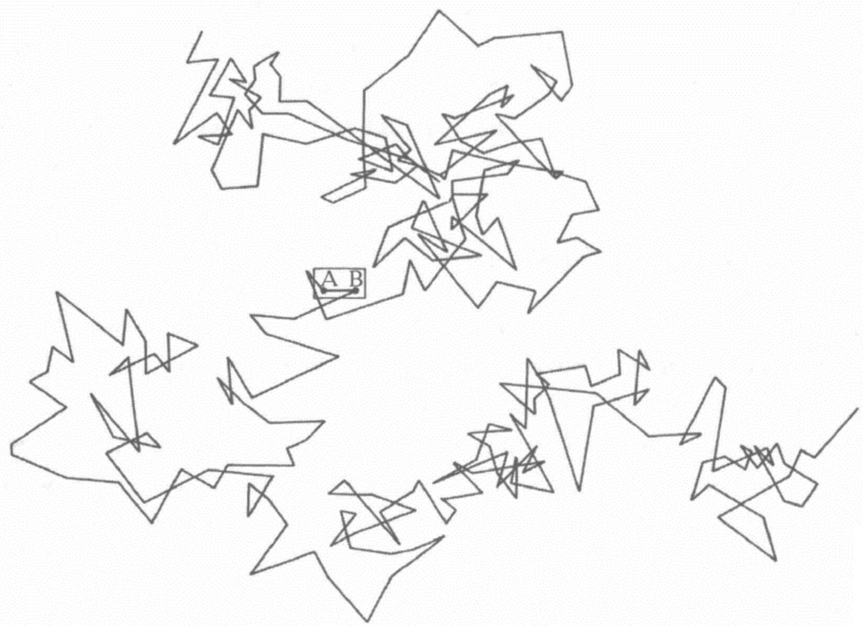
Суммарная длинна интервалов, удаленных при построении множества Кантора равна 1.

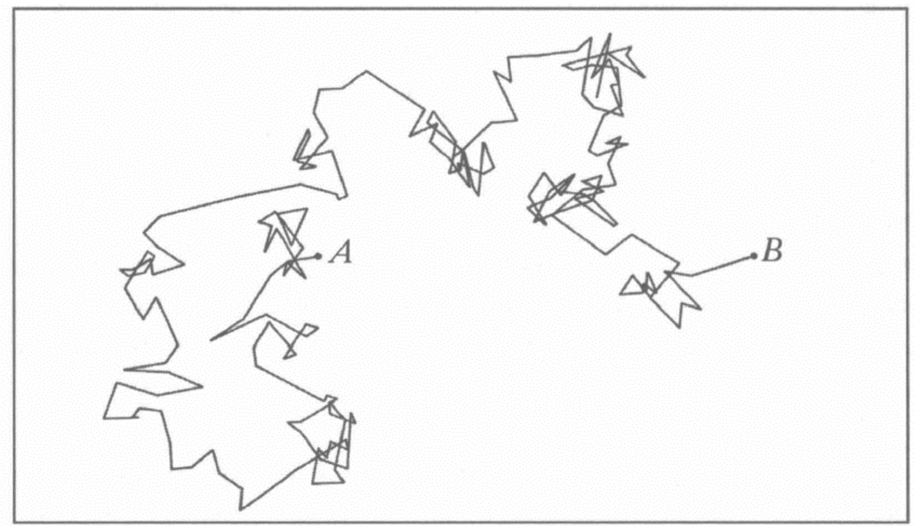
$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^n}+\cdots=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}^2+\cdots\right]=\frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=1$$

Взаимно однозначное соответствие между точками множества Кантора
и точками отрезка [0,1].

Броуновское движение

В начале XIX века Роберт Броун, шотландский ботаник, изучал движение частиц пыльцы в воде. И эти частицы совершали хаотическое движение.





Увеличенное изображение траектории движения между точками A и B – положение частиц с интервалом в 0,3с.

Положение частиц с интервалом 30с

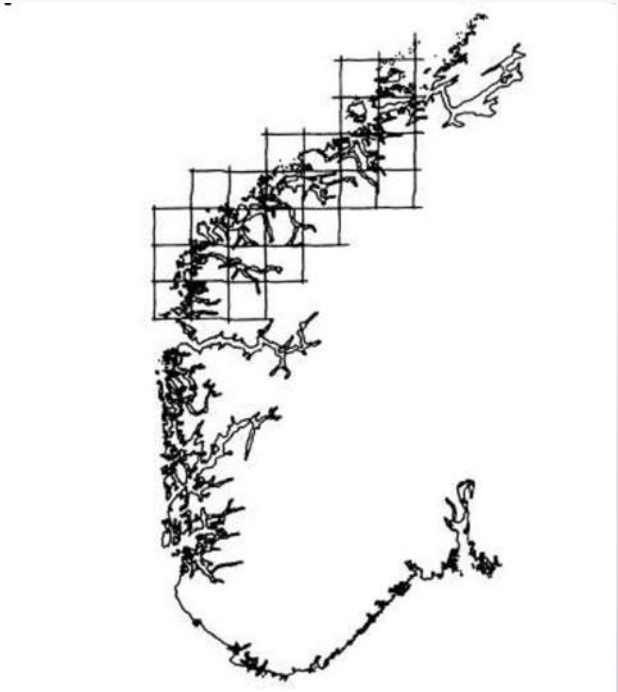
Броуновское движение стало одним из первых явлений природы, в котором прослеживается самоподобия в различном масштабе.

Траектория броуновской частицы имеет одинаково сложную структуру вне зависимости от выбора временнóго интервала наблюдений.

Для выбранной точки траектории броуновской частицы нельзя провести касательную.

Длина границ

В 1961 г. вышла работа английского геофизика Льюиса Фрай Ричардсона (1881-1953), посвященная измерению длин береговых линий.



Карта побережья южной части Норвегии. Квадратная сетка вверху имеет шаг δ=50км

Разные страны приводят разную длину их общих границ.

Испания (987 км) – Португалия (1214 км),

Голландия (380 км) – Бельгия (449 км).

Почти 20% различия. Почему?

Единица измерения, используемая одной страной, может быть намного меньше, чем единица измерения, применяемая в другой стране.

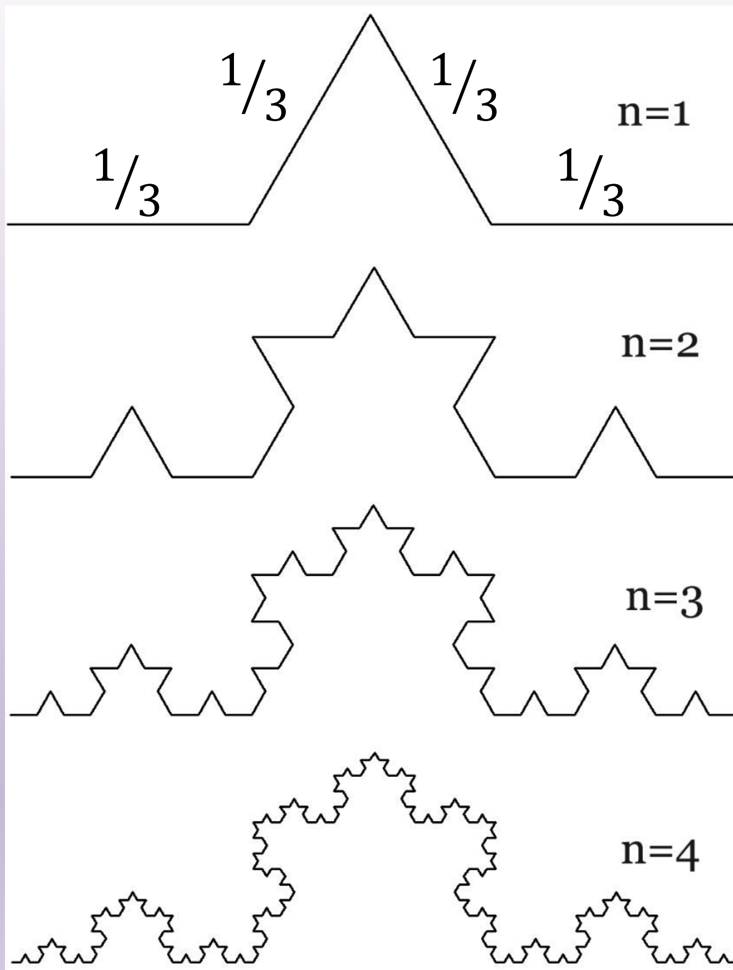
«**Эффект Ричардсона**»:

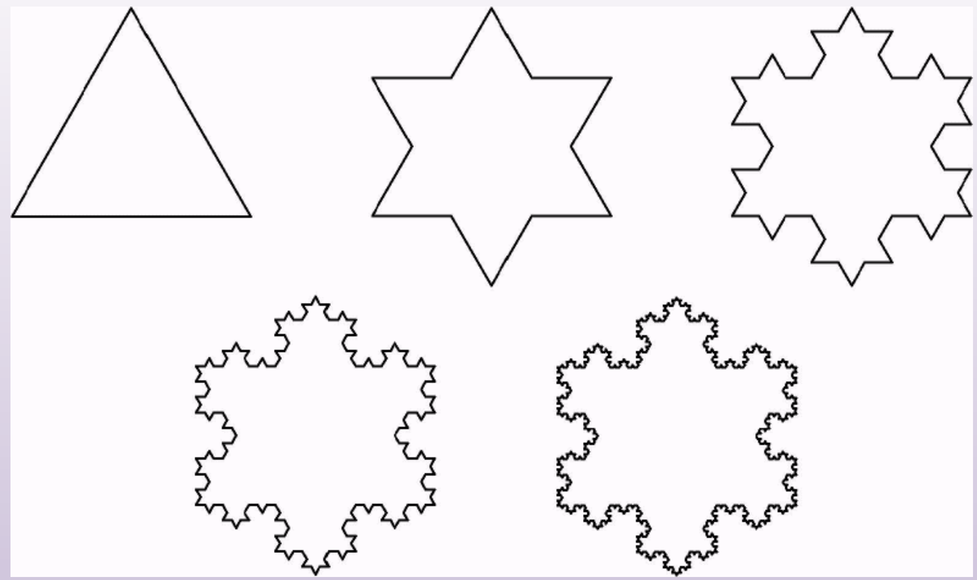
Результат измерений будет бесконечно возрастать по мере уменьшения единицы измерения и увеличения масштаба карты.

Кривая Коха (1904)

Объект обладает **самоподобием**, если имеет ту же форму, что и его части.

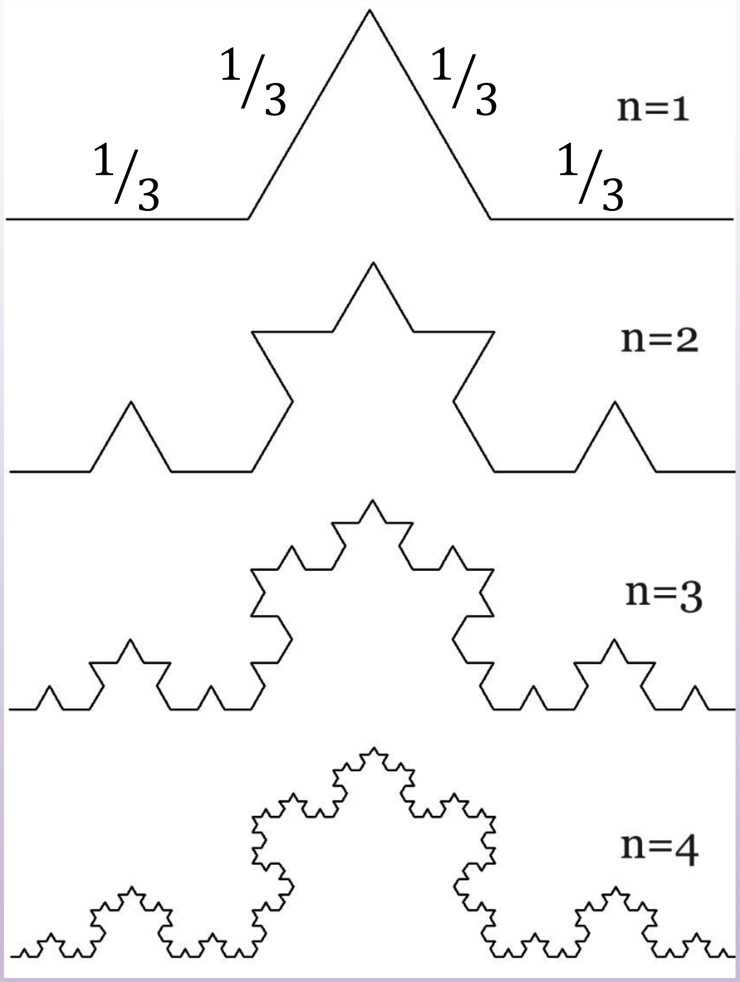
Если мы возьмем кривую Коха, уменьшим ее в три раза и сделаем 4 копии уменьшенной кривой, то сможем соединить их так, что получится новая **кривая Коха.**





Если построить три копии кривой Коха на сторонах равностороннего треугольника, получится **снежинка Коха.** Она обладает следующим свойством: ее длина бесконечна, а площадь ограниченной области – нет.

Размерность подобия кривой



N – количество частей, на который делится объект,
r – коэффициент уменьшения.

Тогда для кривой Коха $N = 4$, $\boldsymbol{r} = 1/3$.

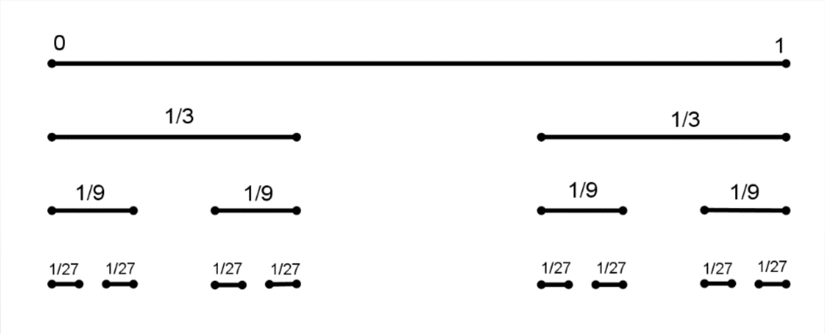
Связь: $4 = 3^D$,

где D – **размерность подобия кривой**

$$D = \log N / \log(1/r)$$

Тут $D = \log 4 / \log 3 = 1{,}2629$.

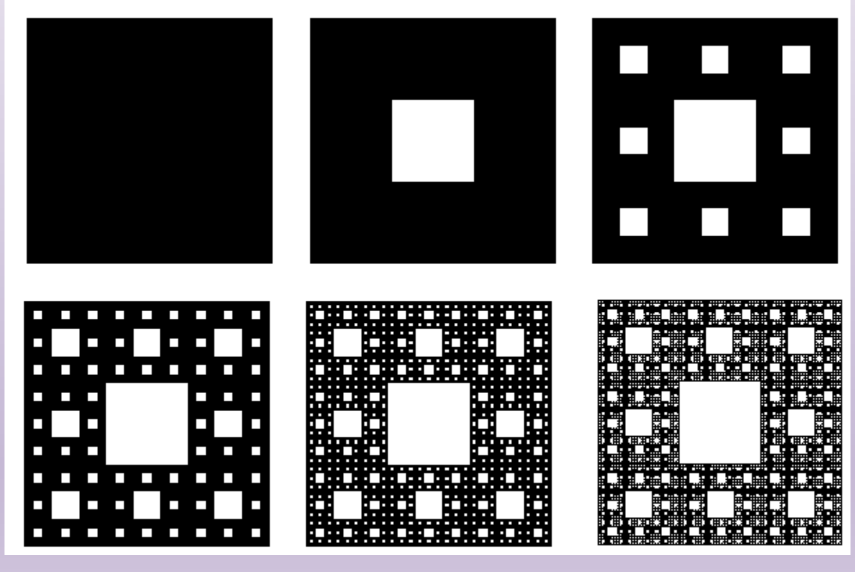
Размерность множества Кантора



N = 2, r = 1/3

$D = \log 2/\log 3 = 0{,}6309$

Размерность ковра Серпинского

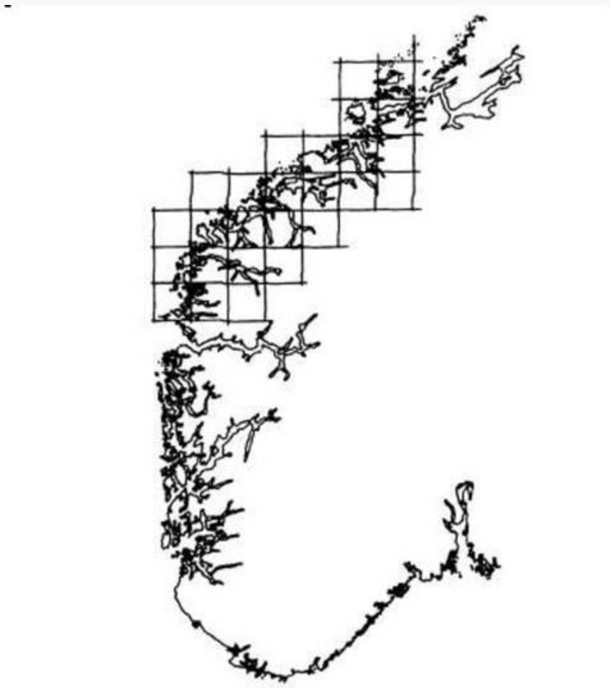


N = 8, r = 1/3

$D = \log 8/\log 3 = 1{,}8929$

Вернемся к береговой линии

В 1961 г. вышла работа английского геофизика Льюиса Фрай Ричардсона (1881-1953), посвященная измерению длин береговых линий.



Карта побережья южной части Норвегии. Квадратная сетка вверху имеет шаг δ=50км

L – длина береговой линии
δ – шаг, $N(\delta)$ – количество шагов.

При уменьшении шага δ длина аппроксимирующей ломанной $L(\delta) = N(\delta)\cdot \delta$ неограниченно растет.

Неизменным остается значение $\alpha = N(\delta)\cdot \delta^D$, где D = const > 1.

Из этих формул получаем, что длина аппроксимирующей ломаной равна

$$L(\delta) = \alpha\cdot\delta^{1-D}$$

D называется ***фрактальной размерностью береговой линии (размерность подобия)***

Вычислим *D* по данным, полученным при измерении длины береговой линии.

$$\mathrm{L}(\delta) = \alpha \cdot \delta^{1-D}$$

$$\log \mathrm{L}(\delta) = \log \alpha + (1-D) \cdot \log \delta$$

Получаем линейную зависимость между $\log \mathrm{L}(\delta)$ и $\log \delta$ - прямую Ричардсона.

$d = 1 - D$ – наклон прямой Ричардсона.

Соответственно, определить фрактальную размерность береговой линии можно, измеряя угловой коэффициент графика $\log \mathrm{L}(\delta)$ как функции от $\log \delta$ (прямая Ричардсона).

Аналогично $\log N(\delta) = \log \alpha - D \cdot \log \delta$

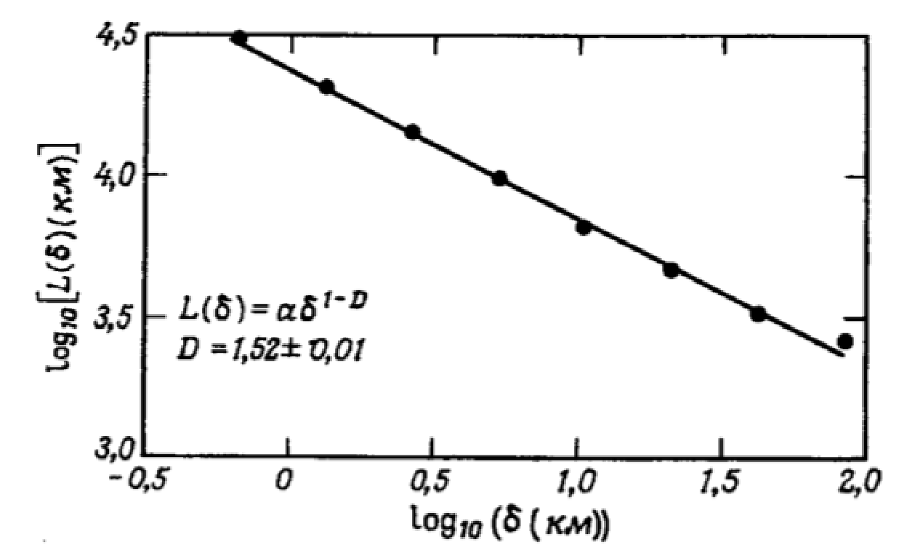
Пример:

$d = -\,0{,}25$ для побережья Британии

$d = -\,0{,}14$ для границы Испании с Португалией

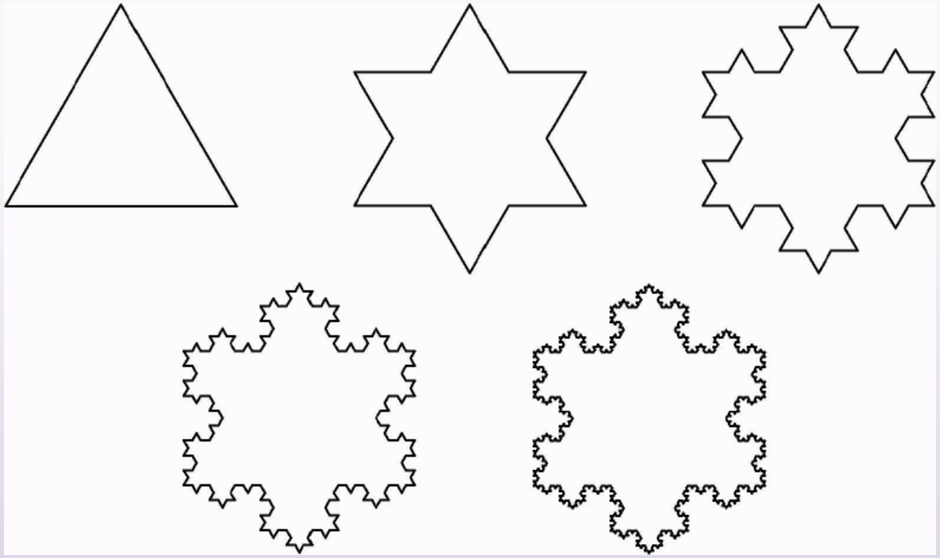
$d = -\,0{,}15$ для границы Германии

$d = -\,0{,}52$ для побережья Норвегии



Измерительная длина побережья Норвегии в зависимости от шага сетки. *D* = 1,52

Размерность острова Коха



n = 0

$N(\delta_0) = 3,\ \delta_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{L}(\delta_0) = 3$

n = 1

$N(\delta_1) = 4 \cdot N(\delta_0) = 3 \cdot 4,$

$\delta_1 = 1/3\ \delta_0 = 1/3 \quad \Rightarrow \mathrm{L}(\delta_1) = 3 \cdot 4/3$

n = 2

$N(\delta_2) = 4 \cdot N(\delta_1) = 3 \cdot 4^2,$

$\delta_2 = 1/3\ \delta_1 = (1/3)^2 \quad \Rightarrow \mathrm{L}(\delta_2) = 3 \cdot (4/3)^2$

На шаге n: $\delta_{\mathrm{n}} = (1/3)^{\mathrm{n}} \quad N(\delta_{\mathrm{n}}) = 3 \cdot 4^{\mathrm{n}}$

Тогда число шагов $\mathrm{n} = -\ln \delta / \ln 3$ и длина береговой линии

$$\mathrm{L}(\delta) = 3 \cdot (4/3)^{\mathrm{n}} = 3 \cdot \exp\left(n \cdot \ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) = 3 \cdot \exp\left(\left(1 - \frac{\ln 4}{\ln 3}\right) \ln \delta\right) =$$

$$= 3 \cdot \exp\left(\ln \delta^{1 - \ln 4/\ln 3}\right) = 3 \cdot \delta^{1 - \ln 4/\ln 3}.$$

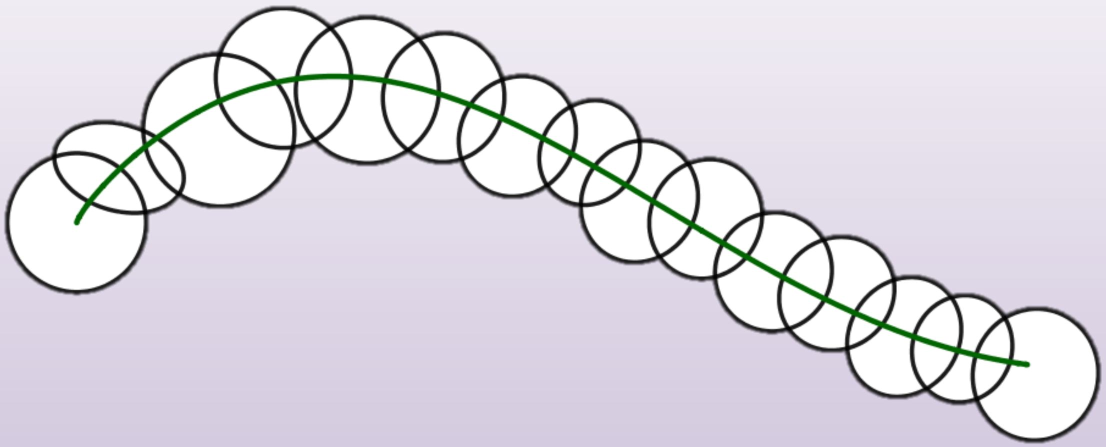
Вспомнив формулу $\mathrm{L}(\delta) = \alpha \cdot \delta^{1-D}$, получаем $D = \log 4/\log 3 = 1{,}2629$.

Топологическая размерность

Пуанкаре: *пространство имеет размерность n, если его можно каким-либо способом разделить пространством, имеющим размерность $n-1$.*

Топологическая размерность Лебега:

Покрытием подмножества S на $\mathbb{R}^n$ является семейство открытых множеств таких, что их объединение содержит множество S.

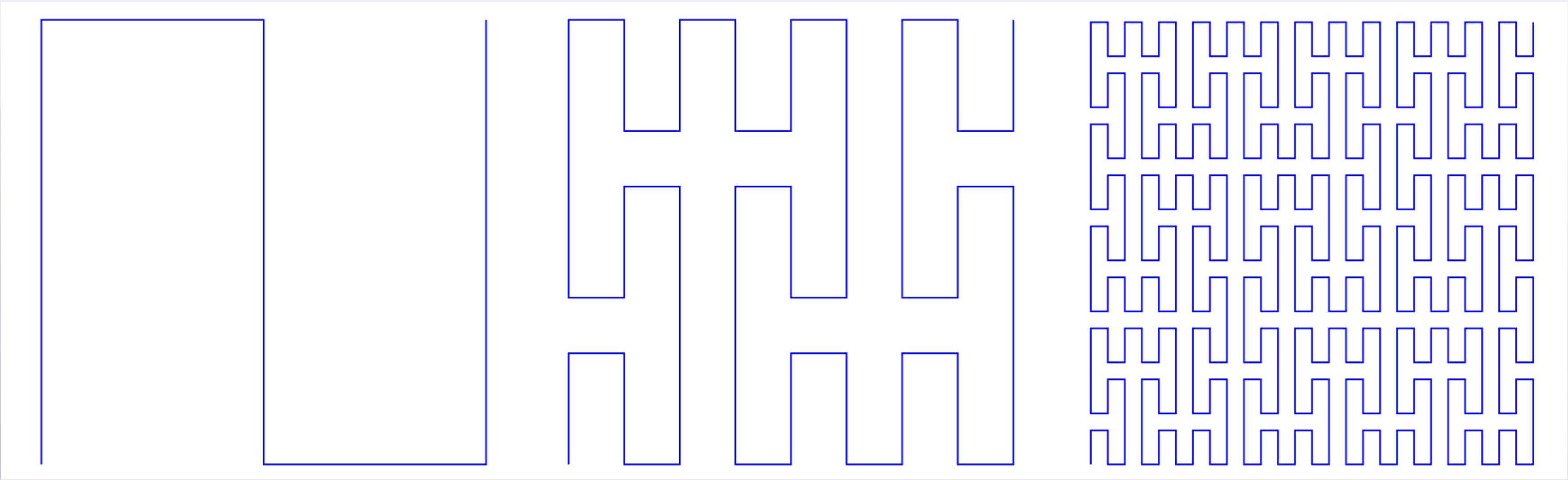


Множество имеет топологическую размерность n, если наименьшая возможная кратность его покрытия равна $n+1$.

Кривая Пеано

В 1890 г. итальянский математик Джузеппе Пеано открыл **непрерывную кривую, проходящую через все точки квадрата с единичной стороной,**
то есть кривую размерности 1, которую можно преобразовать в объект размерности 2.

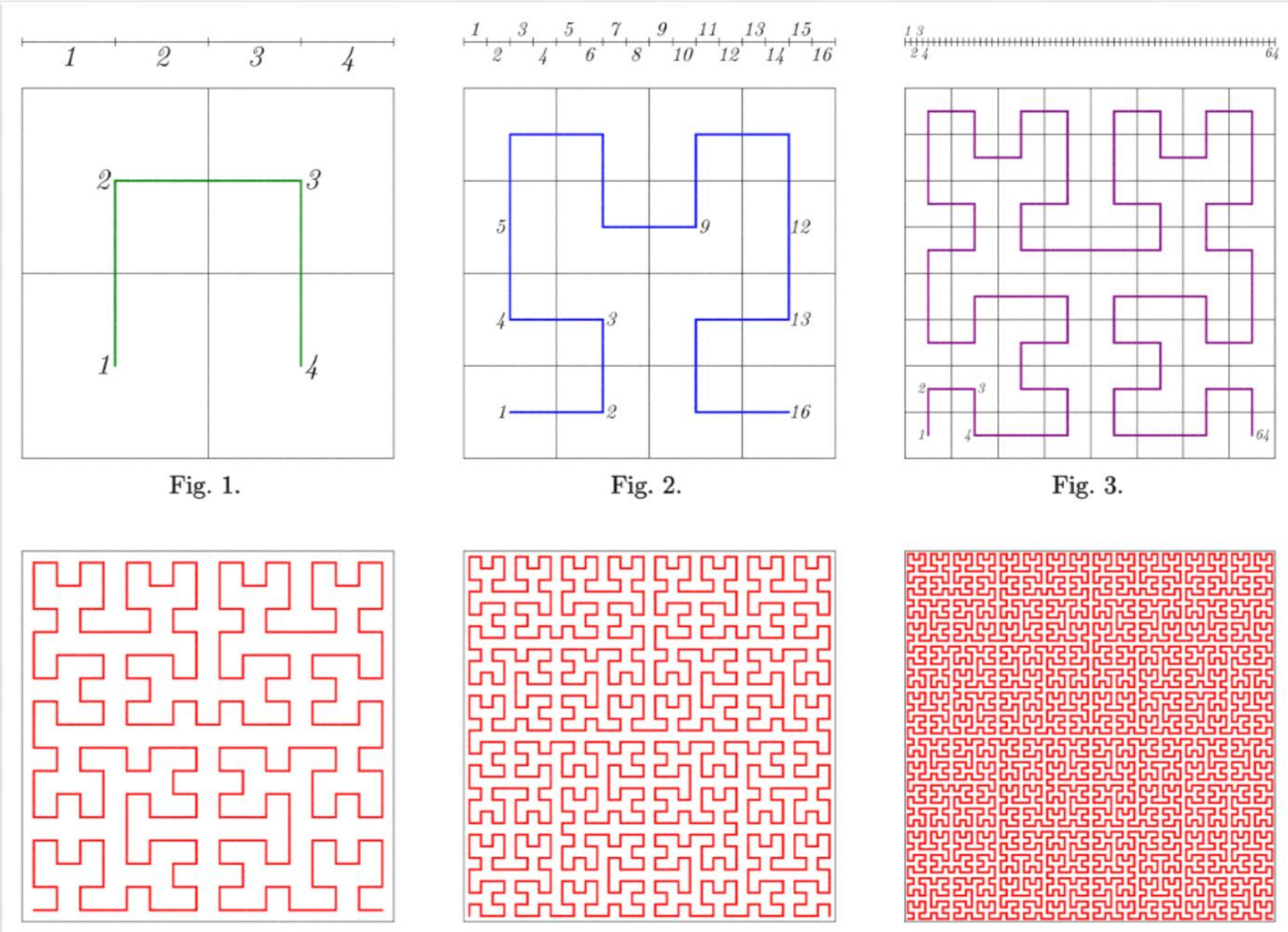
Непрерывная кривая – непрерывный образ отрезка.



Сам Пеано нашел лишь аналитическое построение такой кривой, и даже не изобразил ее графически. Другие математики в попытках графически представить абстрактную функцию Пеано, предложили итеративный алгоритм ее построения.

Кривая Гильберта

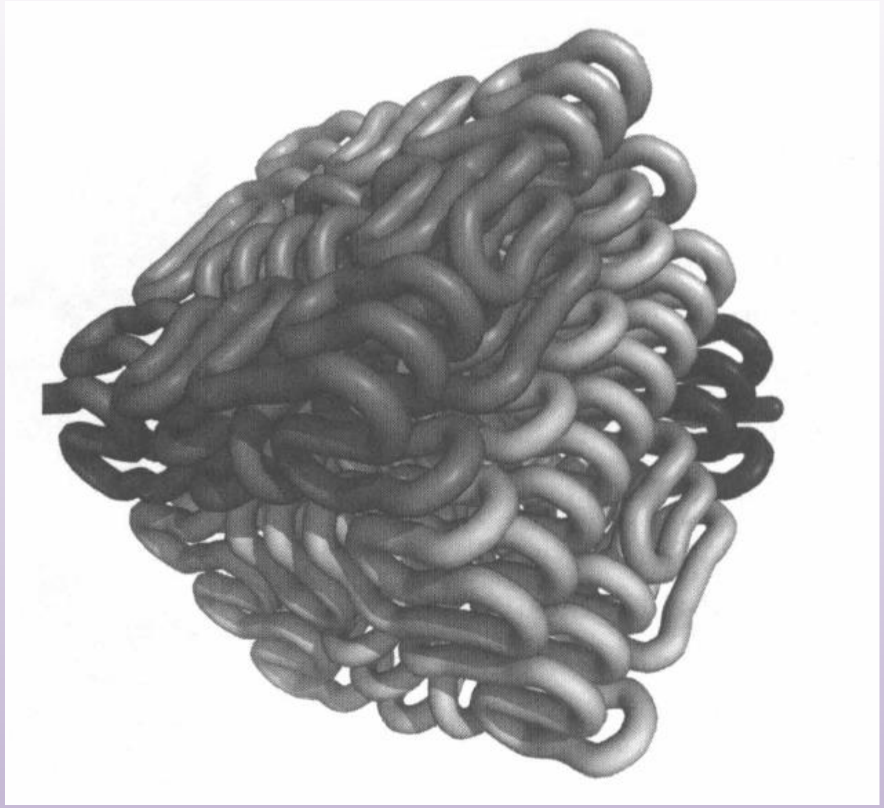
Пример кривой Пеано, построенный Д. Гильбертом (1891 г.).
Он использует уже не один шаблон, а несколько, и к каждому из них применяет различные правила.

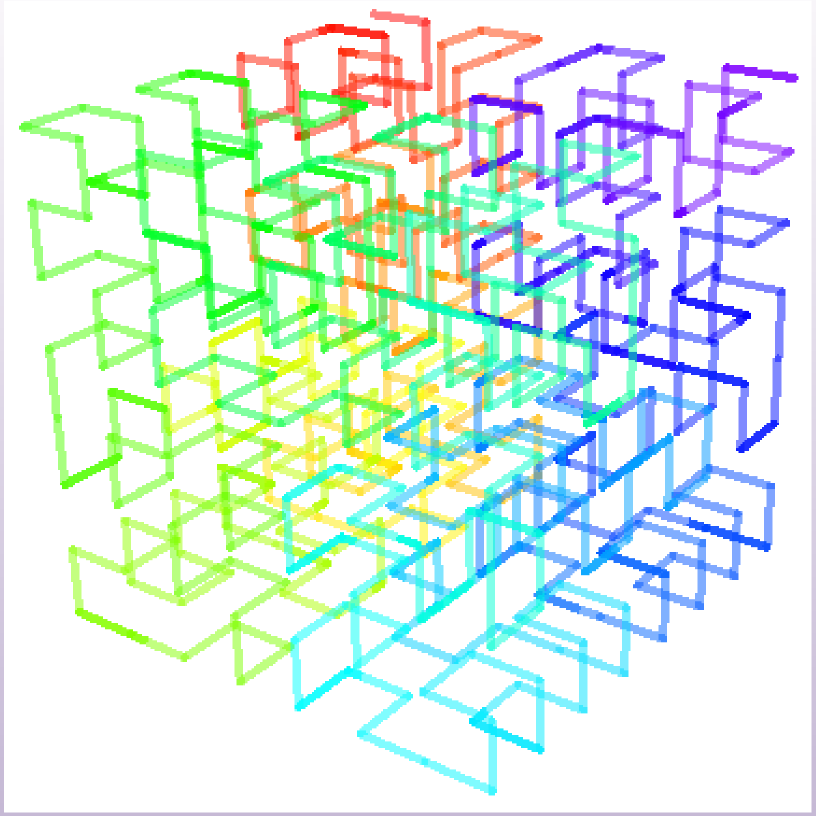


Давид Гильберт

Трехмерная версия кривой Гильберта.

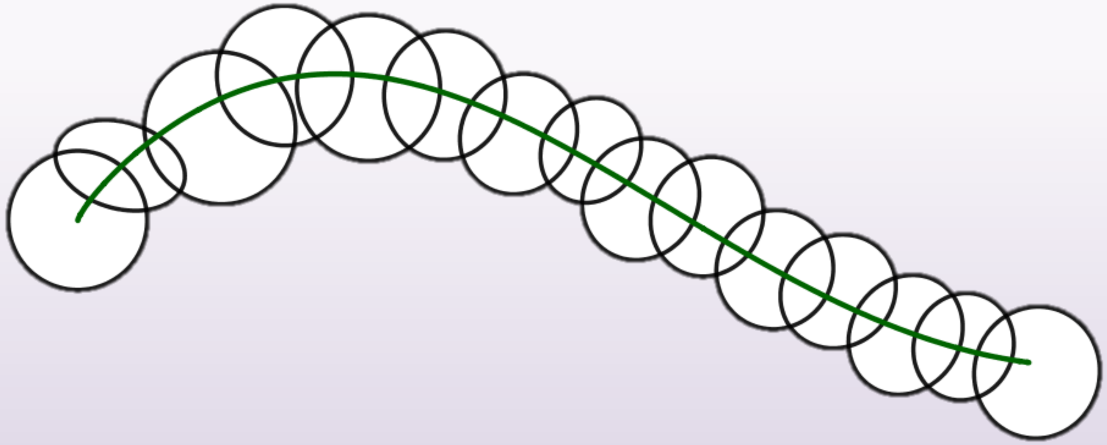
Используется при цифровой обработке изображений, а так же имеет большое значение в устройствах передачи данных





Размерность Минковского-Булигана

Покрытие кругами при $n = 2$, сферами при $n = 3$, n – размерность евклидового пространства.



$N(\delta)$ - минимальное число <u>шаров</u> диаметра δ, покрывающих множество X.

$$D_M = \lim_{\delta \to 0} \frac{\log N(\delta)}{\log 1/\delta}$$ - размерность Минковского.

Для множества Кантора и кривой Коха размерность Минковского и размерность самоподобия совпадают.

Размерность Хаусдорфа-Безиковича

$N(\delta)$ - минимальное число множеств диаметра δ, покрывающих множество X.

$$M_d = \gamma(d)N(\delta)\delta^d$$

Геометрический коэффициент $\gamma(d) = 1$, для кругов $\gamma(d) = \pi/4$, для сфер $\gamma(d) = \pi/6$.

В общем случаи мера M_d равна нулю или бесконечности в зависимости от выбора d-размерности меры.

Размерность Хаусдорфа-Безиковича D_H есть критическая размерность, при которой мера M_d меняет свое значение с нуля на бесконечность.

$$\inf M_d \xrightarrow[\delta\to 0]{} \begin{cases} 0 \text{ при } & d > D_H \\ \infty \text{ при } & d < D_H \end{cases},$$

где инфимум берется по всем возможным покрытиям диаметра меньше δ.

Размерность Хаусдорфа-Безиковича

Размерность Хаусдорфа-Безиковича D_H есть критическая размерность, при которой мера M_d меняет свое значение с нуля на бесконечность.

$$M_d = \gamma(d) N(\delta) \delta^d, \qquad \inf M_d \xrightarrow[\delta \to 0]{} \begin{cases} 0 \text{ при } & d > D_H \\ \infty \text{ при } & d < D_H \end{cases},$$

где инфимум берется по всем возможным покрытиям диаметра меньше δ.

Размерность Хаусдорфа любого множества не превосходит размерности Минковского.

$$D_H \le D_M$$

Например: $S = \left\{0, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \cdots\right\}$ - не самоподобное множество на числовой прямой.

$D_M(S) = \frac{3}{4} = 0{,}75,$ но $D_H(\mathrm{S}) = 0.$

Для простых геометрических объектов размерность Хаусдорфа совпадает с топологической размерностью.

Фракталом называется **множество, размерность Хаусдорфа которого строго больше его топологической размерности.**

Сравнение размерностей

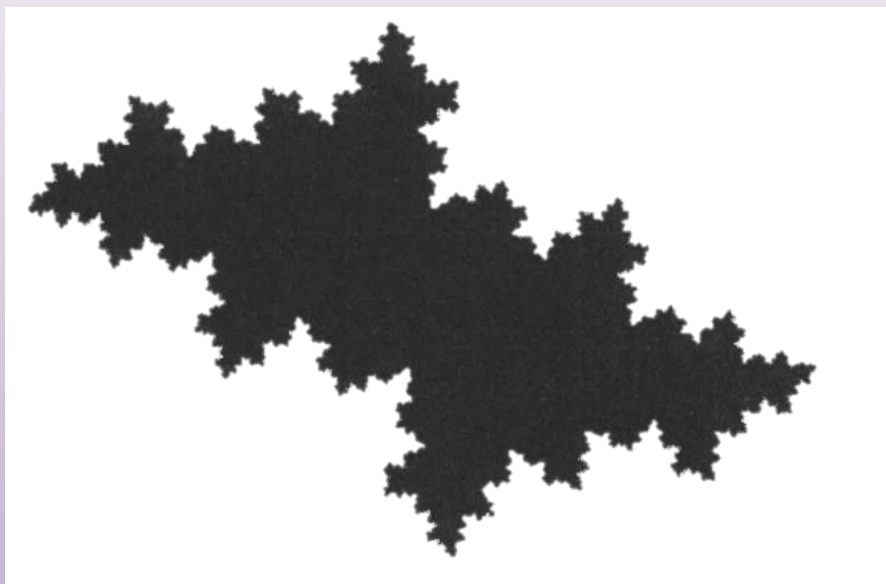
	множество	топологическая	самоподобия	Минковского	Хаусдорфа
1	$[0,1]$	1	1	1	1
2	$[0,1]^2$	2	2	2	2
3	Кантора	0	$\log_3 2 = 0{,}6309$	$\log_3 2 = 0{,}6309$	$\log_3 2 = 0{,}6309$
4	Кривой Коха	1	$\log_3 4 = 1{,}2629$	$\log_3 4 = 1{,}2629$	$\log_3 4 = 1{,}2629$
5	$\mathbb{Q}$	0	1	1	0
6	$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$	0	1	1	1
7	$\left\{0,1,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{4}},\cdots\right\}$	0	–	0,75	0
8	$\left\{0,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{1}{3^n},\ldots\right\}$	0	–	0	0

Множества Фату и Жюлиа

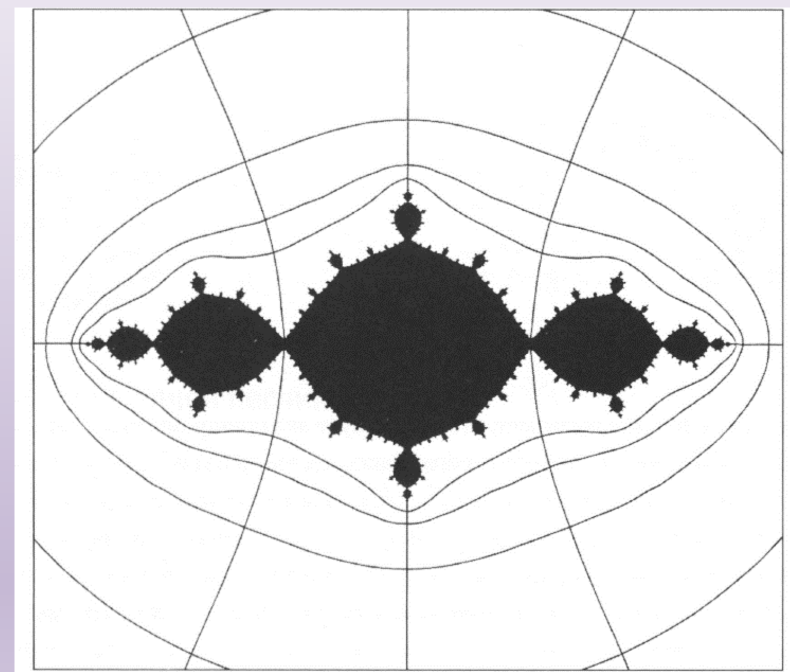
Гастон Жюлиа (1893-1978) и Пьер Фату (1878-1929) первыми исследовали итерируемые комплексные функции.

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad z, c \in \mathbb{C}$$

В 1906 году Фату доказал, что если применить эту операцию ко всем точкам плоскости, то большинство орбит заканчивается на бесконечности, за исключением четко определенного множества точек. Внутренняя часть этого множества называется **множеством Фату**, а граничные точки **– множеством Жюлиа.**



$c = 0{,}5 + 0{,}5i$

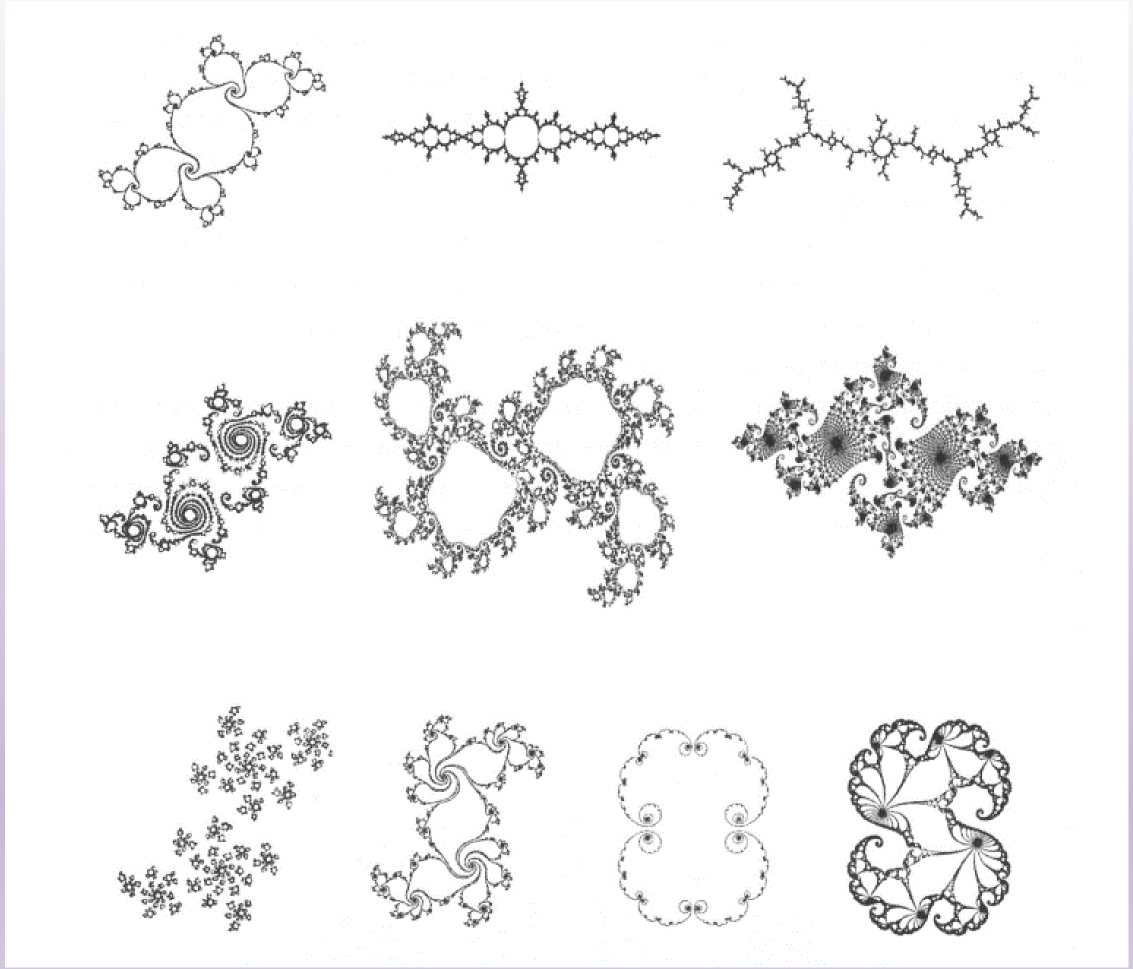


Множество Жюлиа для $\mathrm{c} = -1$с последовательными приближениями

Множества Жюлиа

В общем случае любая орбита, начальная точка которой лежит вне окружности радиуса $R = \max\{2, |c|\}$, будет уходить на бесконечность.

Различным значениям c соответствуют различные множества Жюлиа.



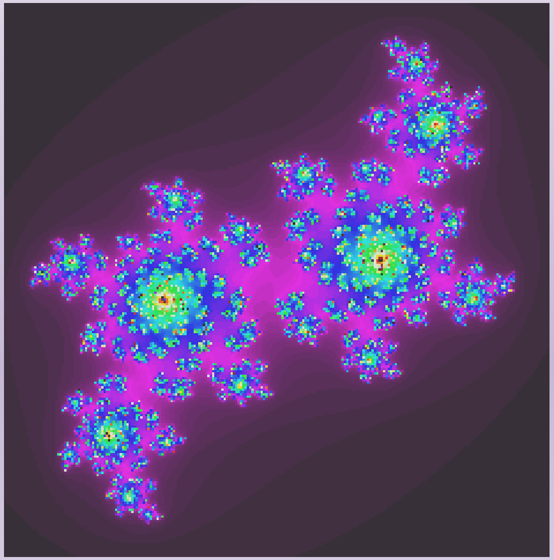
Связность множеств Жюлиа

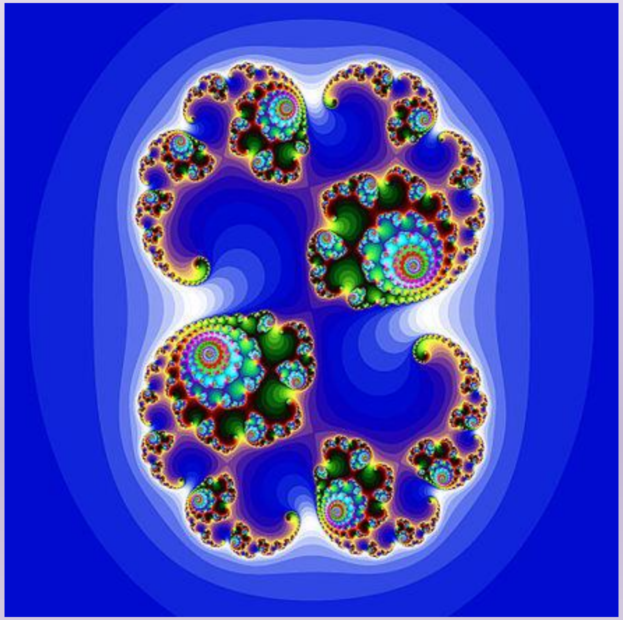
В общем случае любая орбита, начальная точка которой лежит вне окружности радиуса $R = \max\{2, |c|\}$, будет уходить на бесконечность.

Различным значениям c соответствуют различные множества Жюлиа.

Орбита точки 0 определяет, является ли множество Жюлиа связным или нет. В частности, если орбита этой точки уходит в бесконечность, то множество Жюлиа несвязное; в противном случаи – связно.

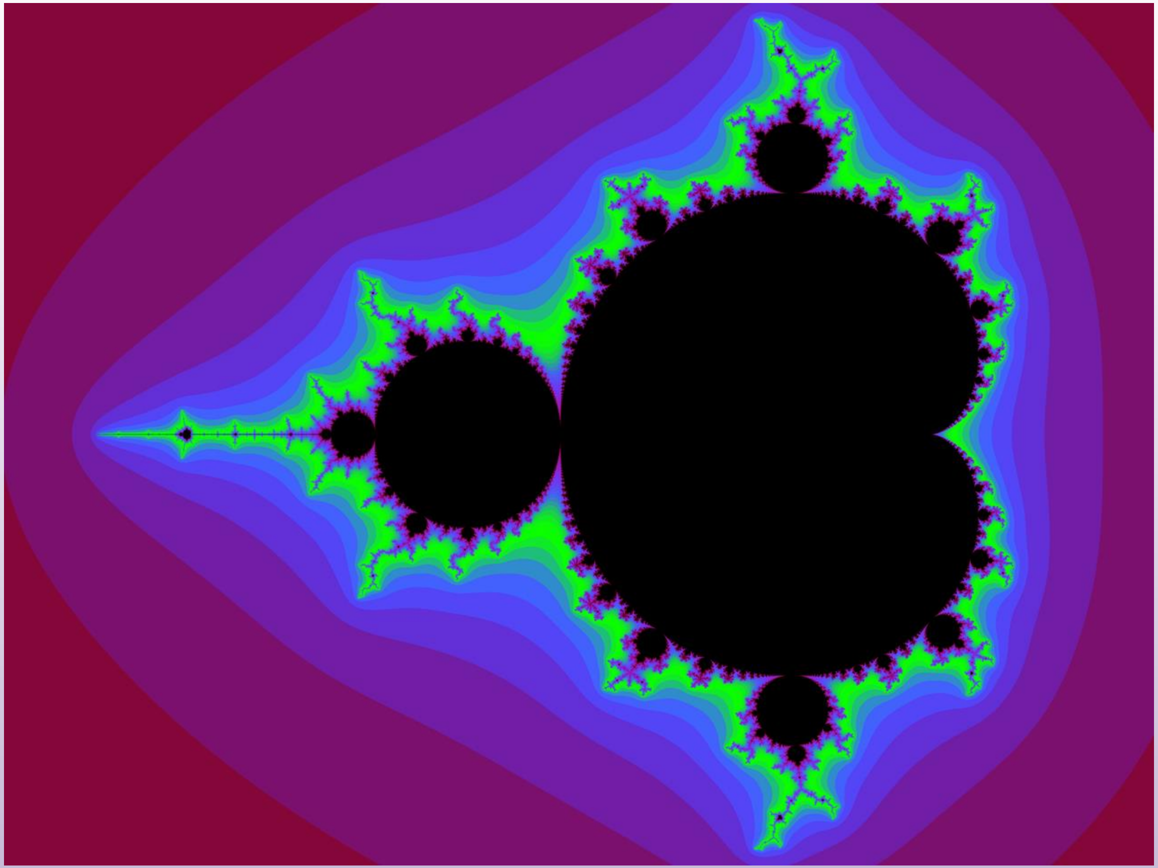
Орбита уходит в бесконечность, если в какой-то момент она выходит за пределы окружности радиуса R.





Множество Мандельброта

Множество констант c, при которых множество Жюлиа связное, образуют **множество Мандельброта.**



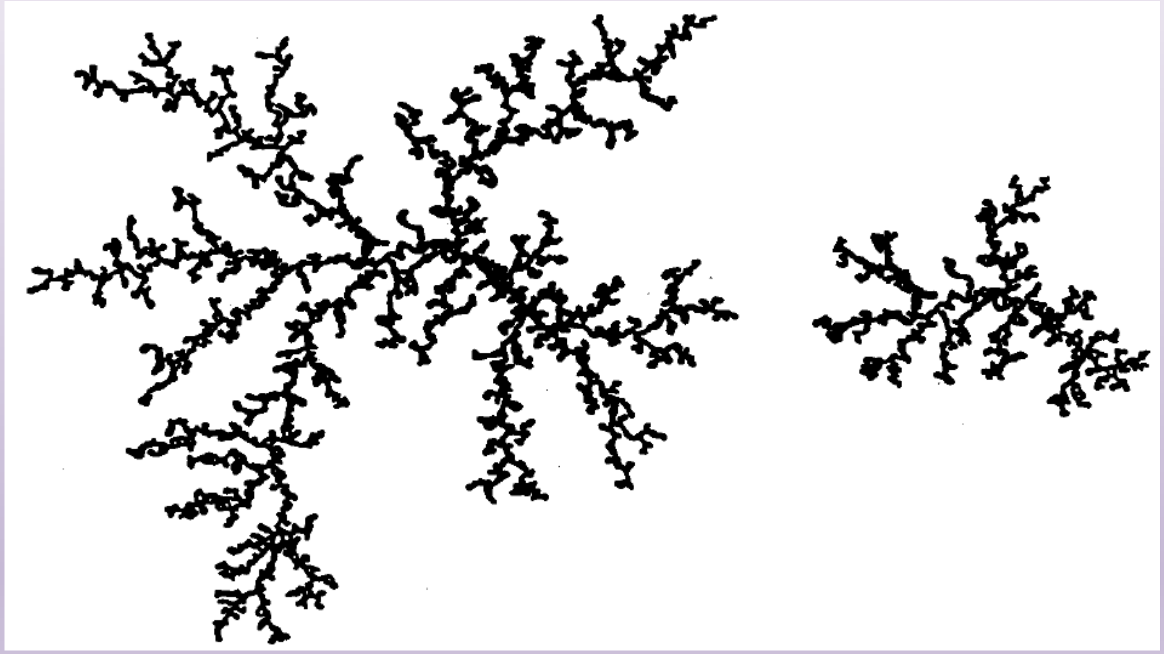
Бенуа Мандельброт

Множество внутренних точек этого множества имеет размерность 2. Топологическая размерность границы множества Мандельброта равна 1, а размерность Хаусдорфа равна 2 (М.Шишикура,1991)

Применения

Ткань тела.
В ней нет ни одного участка, сколь угодно малого, который не был бы пересечен артерией и веной. Ткань представляет собой фрактальную поверхность: ее топологическая размерность 2, а фрактальная размерность 3.

Движение жидкости
Образование «вязких пальцев» в пористых средах имеет первостепенное значение для добычи нефти. Эти «вязкие пальцы» имеют фрактальную природу.



«Вязкие пальцы» воздуха (черный цвет), вытесняющие жидкую эпоксидную смолу в двумерной пористой среде.

Применения

Поверхности многих веществ – фрактальны.

Осознание факта существования молекулярных фрактальных поверхностей существенно повлияло на многие области, связанные со свойствами поверхностей, такие как катализ, смачивание, технологию напыления.

Фрактальная размерность облаков.

$$1{,}37 < D < 1{,}41$$

Основная проблема заключается в том, чтобы объяснить, каким образом облако меняет со временем свою общую форму, сохраняя универсальную.

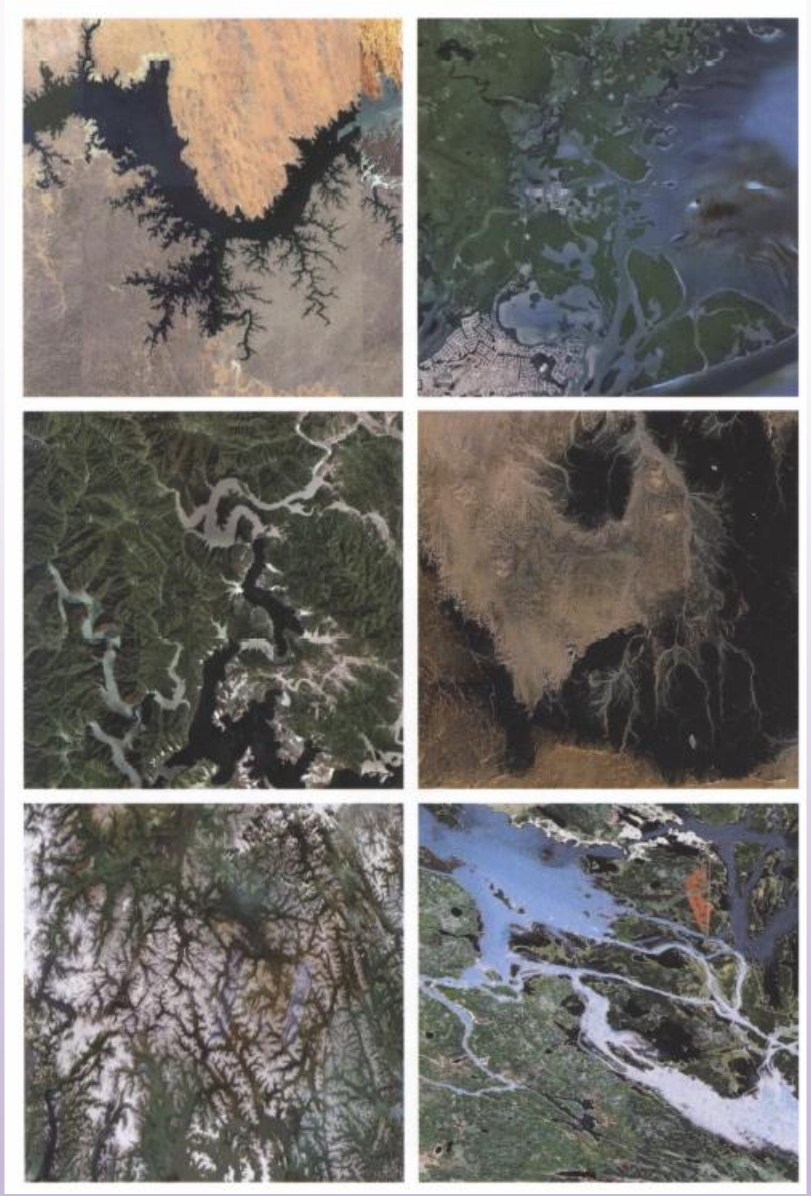
Генерирование фрактальных пейзажей применяется в компьютерной графике.

Применения

К границам относятся границы между любыми двумя средами в биологии, физики, химии и так далее, а так же между двумя разными поверхностями: границы между странами, берега рек, морские побережья, облака и многое другое.

Длина типичной реки прямопропорциональна площади ее бассейна, возведенной в степень $D/2$

$$L = c \cdot s^{D/2}.$$



Фотографии Нила, Амазонки и Великих озер, сделанные с самолета.
Их структура описывается с помощью моделей фрактальной геометрии.

Программы для построение фрактальных изображений:

- **Apophysis**
- Bryce
- Chaoscope
- ChaosPro
- Electric Sheep
- Fractal Explorer
- Fractint
- Fractracer
- IFS Builder 3d
- Mandelbulb3D
- Mandelbulber
- SpangFract
- Sterling
- Ultra Fractal
- XaoS
- XenoDream
- FLAM3

Есть примеры кодов для создания фракталов на разных языках программирования.

```
import turtle as tu

def Koch(length):
    """draw a Koch fractal
curve recursively"""
    if length <= 2 :
        tu.fd(length)
        return
    Koch(length/3)
    tu.lt(60)
    Koch(length/3)
    tu.rt(120)
    Koch(length/3)
    tu.lt(60)
    Koch(length/3)

tu.speed(0)
length = 300.0
tu.penup()
tu.backward(length/2.0)
tu.pendown()
Koch(length)
tu.done()
```

Литература:

1. Б. Мандельброт «*Фрактальная геометрия природы*», М.: 2002, - 656 стр.
2. И.В. Вовк, В.Т. Гринченко, В.Т. Мацыпура, А.А. Снарский «*Дюжина лекций о фракталах. От обьекта восхищения к инструменту познания*», 2е изд., М.: 2018, - 264 с.
3. Мария Изабель Бинимелис Басса «*Мир математики, Новый взгляд на мир, Фрактальная геометрия*», Том 10, 2014.
4. В. С. Секованов «*Что такое фрактальная геометрия*?», М.: 2016, - 272 с.
5. Е. Федер «*Фракталы*», М.: 2014, - 264 с.

Компьютерное оформление презентации: *Сухоребская Дарья*

Спасибо за внимание!