Предисловие

Настоящая книга посвящена задачам усреднения для дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих различные физические процессы в микро-неоднородных средах. Это направление в теории уравнений с частными производными интенсивно развивается в последние 30 лет и находит многочисленные применения в радиофизике, теории фильтрации, реологии, теории упругости и других разделах физики, механики и техники.

Под микронеоднородными средами подразумеваются среды, локальные характеристики которых быстро осциллируют в пространстве. При этом предполагается, что линейные размеры осцилляций (неоднородностей среды) много меньше линейных размеров тела (области, где изучается процесс), но в то же время существенно больше размеров молекул так, что физические процессы в таком теле описываются дифференциальными уравнениями механики сплошной среды. Такие дифференциальные уравнения имеют быстро осциллирующие (относительно пространственных координат) коэффициенты или рассматриваются в областях сложной микроструктуры таких, как области с мелкозернистой границей [42], позднее названные сильно перфорированными областями. Под микроструктурой понимается локальное строение областей или коэффициентов уравнений в масштабах неоднородностей.

Ясно, что непосредственное решение соответствующих краевых (начально-краевых) задач практически невозможно ни аналитическими, ни численными методами. Однако, если масштаб микроструктуры много меньше характерного масштаба изучаемого процесса (например, длины волны), то имеется возможность усредненного (макроскопического) описания такого процесса. В этих случаях среда часто обладает устойчивыми характеристиками (типа коэффициентов теплопроводности, диэлектрической проницаемости и т.д.), которые, вообще говоря, существенно отличаются от локальных характеристик. Они называются средними или эффективными характеристиками, т.к. для их определения обычно используются методы усреднения дифференциальных уравнений или адекватные им методы среднего поля, эффективной среды и т.д.

Термин усреднение в первую очередь ассоциируется с методами нелинейной механики и обыкновенных дифференциальных уравнений, развитыми в трудах А. Пуанкаре, Н.Н. Крылова, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и др. (см. [15], [46]). Для дифференциальных уравнений с частными производными задачи усреднения изучались физиками и механиками еще со времен Максвелла и Рэлея, но они долгое время оставались вне интересов математиков. Однако, начиная с середины 60-х годов 20-го столетия, теория усреднения для уравнений с частными производными стала интенсивно развиваться математиками, что вызвано не только многочисленными приложениями (в первую очередь в теории композитных материалов [58], [73]), но и появлением новых глубоких идей и понятий, важных и для самой математики. В настоящее время вопросам усреднения микро-неоднородных сред посвящена большая математическая литература. Имеется ряд монографий, посвященных математической теории усреднения и связанными с ней вопросами асимптотического анализа, G-сходимости, Г-сходимости функционалов и т.д. Это книги В.А. Марченко, Е.Я. Хруслова [43], А. Бенсусана, Ж.-Л. Лионса, Г. Папаниколау [105], Э. Санчес-Паленсии [62], Н.С. Бахвалова, Г.П. Панасенко [6], О.А. Олейник, Г.А. Иосифьяна, А.С. Шамаева [51], [127], И.В. Скрыпника [68], Дж. Даль-Масо [115], В.В. Жикова, С.М. Козлова, О.А. Олейник [22], Д. Чиоранеску, Ж. Сен Жан Полен [114] и др.

Математическое описание физических процессов в микронеоднородных средах предполагает, что локальные характеристики последних зависят от малого параметра ε, который является характерным масштабом микроструктуры среды. Для построения усредненных математических моделей таких процессов проводится асимптотический анализ задачи при $\varepsilon \to 0$. При этом оказывается, что пределы решений задачи описываются некоторыми новыми дифференциальными уравнениями, имеющими сравнительно плавно меняющиеся коэффициенты и рассматриваемыми в простых областях. Эти уравнения и являются математическими моделями физических процессов в микро-неоднородных средах, а их коэффициенты эффективными характеристиками таких сред. Например, в простейшей ситуации локальные характеристики микронеоднородных сред описываются периодическими функциями вида $a\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \mathbf{R}^n$. В этом случае среды имеют эффективные характеристики (причем не зависящие от x), а соответствующие им усредненные уравнения сохраняют вид исходных уравнений. В таком случае основная проблема состоит в нахождении коэффициентов этих уравнений (т.е. эффективных характеристик сред), что и определяет полностью математическую модель процесса. Такая ситуация типична для многих микронеоднородных сред, встречающихся в природе.

Однако существуют среды с более сложной микроструктурой, для описания которых недостаточно знания одной эффективной характеристики, поскольку при усреднении существенно изменяется и вид исходного уравнения. Это обычно имеет место, когда микроструктура среды характеризуется несколькими параметрами разных порядков малости. Такая ситуация может реализоваться как в природных средах, так и в искусственных композиционных материалах специального строения (композитных средах). Усредненные модели при этом существенно отличаются от исходных - в результате усреднения они могут стать нелокальными, многокомпонентными или моделями с памятью. Данная книга в основном посвящена изучению структур микронеоднородных сред, приводящих к таким "нетрадиционным" моделям. По этой причине, в частности, она почти не имеет пересечений с упомянутыми выше монографиями, кроме [43]. Книга была начата еще в конце 80-х годов и предполагалась как переработанное издание монографии [43]. Но за время написания были получены новые результаты, которые и составили ее основное содержание, а необходимая часть материала монографии [43] излагается в более удобном виде.

Стремление рассмотреть вопрос по возможности с общих позиций и дать полные доказательства основных результатов привело к тому, что изложение материала в книге оказалось весьма громоздким. Чтобы как-то скомпенсировать этот недостаток, основному материалу книги предпослано довольно обширное введение, в котором на примерах рассмотрены типичные структуры микронеоднородных сред, приводящие к характерным усредненным моделям.