ВІДГУК
офіційного опонента на дисертаційну роботу
Ямпольського Олександра Леонідовича
«Геометрія підмноговидів у розшарованих просторах»,
представлену на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія і топологія

Представлена дисертація є першою спробою систематичного вивчення впливу розшарованої структури многовиду на геометричні властивості підмноговидів і є логічним продовженням досліджень автора, започаткованих в кандидатській дисертації «О метрике Сасаки касательного и нормального расслоений», що була виконана під час навчання в аспірантурі Харківського університету під керівництвом проф. Борисенка О.А. Результати кандидатської дисертації були спрямовані на внутрішньо-геометричні властивості розшарованих просторів, у той час як у представленій дисертації акцент зроблений на геометрії підмноговидів у розшарованих просторах, що є природним для Харківської геометричної школи.

Інтерес до геометрії дотичного, а особливо, одиничного дотичного розшарування пояснюється тим, що одиничне дотичне розшарування з метрикою Сасакі було одним з перших нетривіальних прикладів многовиду, що несе так звану структуру Сасакі. У 1958 році С. Сасакі визначив метрику на дотичному розшаруванні, а у 1962 році розглянув сферичне дотичне розшарування як гіперповерхню дотичного розшарування, задану умовою одиничності дотичних векторів. Саме на цій гіперповерхні і живе структура Сасакі. Цей факт дав поштовх не аби якому потоку публікацій щодо геометрії многовидів зі структурою Сасакі відсунувши так би мовити на задній план той факт, що одиничне розшарування є гіперповерхнею, тобто певним підмноговидом розшарованого простору. У подальшому, перш за все завдяки статті О. Ковальського (1971) про кривину метрики Сасакі і невеличкій статті В. Клінгенберга і С. Сасакі (1975) про геометрію одиничного розшарування двовимірної одиничної сфери, більше уваги приділялося внутрішній геометрії (сферичного) дотичного розшарування з метрикою Сасакі. Більш того, конструкція метрики Сасакі дотичного розшарування була поширена професором Борисенко О.А. на нормальне розшарування підмноговиду ріманова простору. Дослідження внутрішньої геометрії одиничного нормального розшарування дозволило проф. Борисенко О.А. отримати нові результати щодо геометрії підмноговидів ріманова простору.

Поштовх до розвитку саме геометрії підмноговидів в одиничному дотичному розшаруванні з метрикою Сасакі дала робота Г. Глюка і В. Цилера (1986), в якій одиничне векторне поле було інтерпретоване як підмноговид одиничного розшарування, що трансверсальний до шарів. Була сформульована проблема пошуку глобально заданого одиничного векторного поля, що має мінімальний об’єм відносно метрики, індукованої метрикою Сасакі одиничного розшарування. На тривимірній сфері таку властивість має поле Хопфа. Аналогічна локальна проблема була сформульована О. Жиль-Медрано і Е. Лінарес-Фустер і призвела до поняття локально-мінімального одиничного векторного поля, тобто такого, що визначає локально мінімальний підмноговид одиничного дотичного розшарування. Слід зазначити, що у подальшій серії робіт таких відомих геометрів, як Л. Ванеке, П. Вальчак, Ф. Бріто, А. Навейра, М. Салваї, К. Цукада та ін., геометрія векторного поля не отримала принципового розвитку, бо автори лише використовували формули О. Жиль-Медрано та Е. Лінарес-Фустер, що давали змогу визначити лише мінімальність одиничного векторного поля. Фактично, це пояснюється тим, що в цих роботах не була обчислена вся друга фундаментальна форма підмноговиду одиничного розшарування.

У великій мірі представлена дисертація заповнює цей пробіл і відкриває шлях до геометрії векторного поля з класичної геометричної точки зору.

У **першому розділі** дисертації автор формулює необхідні відомості із геометрії дотичного і сферичного розшарувань. Дано визначення від отображення зв’язності, ліфтів векторних полів, метрики Сасакі. Виписано формули для тензора кривини метрики Сасакі, вираз для секційної кривини метрики Сасакі одиничного дотичного розшарування. Сформульовані теореми, що використовуються у подальших розглядах.

У **другому розділі,** у продовження спільних з професором Борисенком О.А. робіт, автор розглядає задачу про існування так званого сильно сферичного розподілу на одиничному дотичному розшаруванні, що є певною мірою узагальненням задачі про сильно параболічні розподіли, розглянуту в кандидатській дисертації. Як з’ясувалось, невертикальний розподіл такого роду існує лише для одиничного дотичного розшарування одиничної сфери і пов’язаний зі структурою Сасакі на цьому розшаруванні (Терема 2.2). Структура Сасакі є непарновимірним аналогом комплексної структури і так звана Сасакієва просторова форма є в якійсь мірі узагальненням простору сталої кривини. Одиничне розшарування одиничної сфери є прикладом Сасакієвої просторової форми, але секційна кривина T_1S^n (n>2) не стала і змінюється в межах [0,5/4]. Природно виникло питання про те, чи можна знайти многовид з додатною кривиною одиничного розшарування. В роботі надано негативну відповідь на це питання у всіх вимірностях, за винятком n=4 і n=8. Доведення є неочікувано простим і спирається на відому в топології теорему Адамса (Теорема 2.5).

У **третьому розділі** автор починає дослідження геометрії підмноговидів дотичного розшарування з намагання узагальнити з одного боку результати С. Сасакі щодо геодезичних ліній дотичного розшарування, а з іншого – результатами П. Вальчака щодо векторних полів сталої довжини на многовиді, що розглядаються як вкладення базового многовиду у простір розшарування. Це узагальнення базується на ідеї переходу до векторного поля, заданого уподовж підмноговиду довільної ковимірності. Автору вдалося довести існування цілком геодезичних підмноговидів такого класу без обмежень на будову многовиду, як то було у П. Вальчака (Теорема 3.20). Цілком геодезичні підмноговиди у дотичному розшаруванні можуть не обов'язково породжуються векторними полями (Теорема 3.24).

У **четвертому розділі** автор звертається до систематичного розвитку зовнішньої геометрії найбільш природного типу підмноговидів, а саме, підмноговидів одиничного дотичного розшарування, що породжені (локальними) одиничними векторними полями. Автору вдалося побудувати дотично-нормальне оснащення такого підмноговиду і вперше у відносно лаконічній і прозорій формі виписати розкладання Гауса-Вейнгартена (Лема 4.1). На основі отриманих формул вдалося отримати не лише умову мінімальності векторного поля, а й вираз для середньої кривини поля, а також умову цілком геодезичності такого підмноговиду. Більш того, автор надає конкретні приклади векторних полів сталої середньої кривини (Пропозиція 4.10).

Слід зазначити, що на загал рімановий многовид не допускає цілком геодезичних підмноговидів вимірності >1. Тому існування одиничного векторного поля з цілком геодезичним образом є досить неочікуваним, а тим більше опис всіх многовидів і векторних полів (у вимірності 2) з цілком геодезичним образом (Теорема 4.38). Дивним чином інтегральні траєкторії поля в цьому випадку конформно еквівалентні інтегральним траєкторіям цілком геодезичного векторного поля на площині (Теорема 4.41).

Найбільш цікаві результати розділу пов'язані зі структурою Сасакі на многовидах. Доведено, що характеристичне векторне поле такої структури має цілком геодезичний образ в одиничному розшаруванні (Теорема 4.18). Якщо ж взяти поле Хопфа ξ на одиничній сфері S^{2n+1} (що є структурним полем Сасакієвої структури на ній), то її образ $\xi(S^{2n+1})$ є не тільки цілком геодезичним підмноговидом у T_1S^{2n+1}, але й Сасакієвою просторовою формою відносно індукованої структури (Теорема 4.26).

Цілком геодезичні векторні поля існують також на всіх тривимірних групах Лі з лівоінваріантною метрикою. Повний опис лівоінваріантних одиничних векторних полів цього класу містить Теорема 4.47 для випадку унімодулярної групи і Теорема 4.51 у випадку не унімодулярної групи. На кожній з неплоских унімодулярних груп цілком геодезичне одиничне векторне поле є характеристичним полем певної майже контактної структури (Пропозиція 4.49). На неунімодулярних групах такі поля також мають цікавий геометричний опис (Пропозиція 4.52). Нарешті, в розділі 4.7 проведено ретельний аналіз другої класичної варіації цілком геодезичного підмноговиду, що породжений в одиничному дотичному розшаруванні тривимірної групи Лі одиничним векторним полем, і отримані результати щодо стійкості або нестійкості згаданих підмноговидів.

У **п'ятому розділі** міститься узагальнення метрики Сасакі на випадок метризованого векторного розшарування зі зв'язністю, отримані аналоги результатів, що вже стали майже класичними, розвинена геометрія перерізів розшарувань і доведені аналоги теорем щодо цілком геодезичної властивості перерізів.

Результати, що наведені у дисертації, є новими, повністю обґрунтованими та отриманими О.Л. Ямпольським самостійно. Результати роботи повністю висвітлені у 21 статті у провідних вітчизняних та міжнародних фахових виданнях, доповідались на багатьох міжнародних наукових конференціях, семінарах з геометрії у провідних університетах та наукових установах НАН України. Зміст автореферату цілком відповідає основним положенням дисертації.

Зауваження.

1. На стор. 22 5 рядок зверху побудоване за допомогою exp відображення діє з одного околу в інший окіл точки u.
2. Для повноти викладення матеріалу слід було навести повне доведення лем 3.4 та 3.5, які суттєво використовуються в подальшому, наприклад, при доведенні теореми 3.2.
3. На стор. 100 рядок 13 є описка: замість «оператор форми F^l» слід було писати «оператор другої квадратичної форми».
4. На стор. 161 рядок3 зверху не визначено позначення «g_{cm}».
5. На стор. 237 в першому стовпчику таблиці не вистачає групи SU(2).

Наведені зауваження не відбиваються на загальному позитивному враженні від дисертації і не мають впливу на достовірність отриманих результатів.

Вважаю, що дисертаційна робота Ямпольського Олександра Леонідовича «Геометрія підмноговидів у розшарованих просторах» є завершеною науковою працею, актуальність якої не підлягає сумніву. Дисертація відповідає всім вимогам, що висувають до докторських дисертацій, а її автор, Ямпольський Олександр Леонідович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія і топологія.

Офіційний опонент
доктор фізико-математичних наук
професор кафедри геометрії
КНУ ім. Тараса Шевченка — О. О. Пришляк

Підпис засвідчую
Вчений секретар
Караулына Н. В.
01. 10 . 201

Київський національний університет імені Тараса Шевченка * Україна *
Ідентифікаційний код 02070944