Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна

ЯМПОЛЬСЬКИЙ Олександр Леонідович

УДК 514.7

ГЕОМЕТРІЯ ПІДМНОГОВИДІВ У РОЗШАРОВАНИХ ПРОСТОРАХ

01.01.04 – геометрія та топологія

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Харків – 2015

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Харківському національному університеті ім. В. Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Амінов Юрій Ахметович,
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України (м. Харків),
головний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь та геометрії;

доктор фізико-математичних наук, професор
Зарічний Михайло Михайлович,
Львівський національний університет ім. І. Франка,
професор кафедри геометрії і топології, декан механіко-математичного факультету;

доктор фізико-математичних наук, професор
Пришляк Олександр Олегович,
Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка,
професор кафедри геометрії.

Захист відбудеться «24» листопада 2015 р. о 15-00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: 61103, м. Харків, проспект Леніна, 47.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: 61103, м. Харків, проспект Леніна, 47.

Автореферат розісланий «21» жовтня 2015 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В.О. Горькавий

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

В дисертації розвинена геометрія підмноговидів у розшарованих просторах, зокрема в дотичному і нормальному розшаруваннях. Головні результати пов'язані з геометричними властивостями перерізів (векторних полів) розшарованих просторів.

Актуальність теми. Основи метричної теорії розшарованих просторів були закладені С. Сасакі (1958, 1962) і розвинені П. Домбровським (1962). Початковою точкою для досліджень, представлених в дисертації, була стаття В. Клінгенберга і С. Сасакі[1] (1975) у якій розглядалося розшарування одиничних векторів над двовимірною сферою. На цю роботу звернув увагу проф. Борисенко О.А. і запропонував авторові розвинути результати Клінгенберга і Сасакі. Отримані результати були включені в кандидатську дисертацію автора і спільну з професором Борисенко О.А. оглядову статтю, опубліковану в журналі "Успехи математических наук" у 1991 році[2]. У цих роботах було помічено, що внутрішня геометрія сферичного розшарування істотно залежить від радіусу дотичної сфери. У 2001 році О. Ковальский із співавторами так само помітили залежність геометрії сферичного розшарування від радіусу дотичної сфери і так само сформулювали задачу з'ясування умов додатності секційної кривини сферичного розшарування з метрикою Сасакі. Для вимірності бази $n=2$ вичерпна відповідь на це запитання була отримана автором у згаданій дисертації. Неможливість досягнення додатності кривини на сферичному дотичному розшаруванні в вимірності бази $n=3$ отримали О.Ковальський з співавторами[3]. Для інших вімірностей бази питання було відкритим. Так само у зв'язку з роботою Клінгенберга і Сасакі виникло питання про секційну кривину розшарування одиничних векторів над сферами вищих вимірностей. Досить легко з'ясувати, що секційна кривина такого розшарування не може бути сталою. З огляду на компактність сферичного розшарування над сферою, професором Борисенко О.А. була сформульована задача про межі зміни секційної кривини розшарування одиничних векторів на сферах вищої вимірності, а також для більш загального випадку просторів сталої кривини.

О. Ковальский[4] довів, що шари дотичного розшарування з метрикою Сасакі є цілком геодезичними і внутрішньо плоскими підмноговидами в дотичному розшаруванні. Подібну властивість мають шари нуль-шарування на ріманових многовидах зі сталим внутрішнім нуль-індексом. Про метрики, що допускають таке нуль-шарування сталої вимірності, прийнято говорити як про сильно-параболічні метрики. Геометрію таких многовидів активно досліджував проф. Борисенко О.А. і йому належить постановка задачі про з'ясування умов, за яких метрика Сасакі дотичного розшарування допускає сильно-параболічне шарування. Як з'ясувалося, таке можливе лише за умови, що базовий многовид розщеплюється в прямий метричний добу-

---

[1] W. Klingenberg, S. Sasaki. Tangent sphere bundle of a 2 - sphere// Tohôku Math. J. - 1975. - V. 27. - P. 45 - 57.

[2] Борисенко А., Ямпольский А. Риманова геометрия расслоений// Успехи Мат. Наук. - 1991. -Т. 46, № 6. -С. 51 - 95.

[3] Kowalski O., Sekizawa M., Vlasek Z. Mathematical Legacy of Alfred Gray (eds. M. Fernandez and J.A. Wolf), Contemp. Math, Amer. Math. Soc. - 2001. - V. 288. - P. 110-118.

[4] Kowalski O. Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold// J. Reine Angew. Math. - 1971. - V. 250. - P. 124 - 129.

ток. Задача про індекс сильної сферичності метрики Сасакі *сферичного* розшарування многовиду є логічним розвитком задачі про існування сильно-параболічного розподілу на дотичному розшаруванні. Мотивом для розгляду такої задачі є той факт, що многовиди з метриками сильно сферичного/гіперболічного типу несуть шарування фіксованої вимірності з цілком геодезичними шарами сталої додатної/від'ємної кривини. Легко перевірити, що шари сферичного дотичного розшарування T_rM з метрикою Сасакі є *цілком геодезичними* підмноговидами в T_rM зі сталою додатною кривиною, проте увесь вертикальний розподіл у загальному випадку не визначає сильно сферичного розподілу на $T(T_rM)$. У зв'язку з цим, проф. Борисенко О.А сформулював задачу про виділення підрозподілу, що має властивість сильної сферичності.

Частковим випадком цілком геодезичного підмноговиду ріманова многовиду є геодезична лінія, тобто цілком геодезичний підмноговид вимірності 1. В роботі П. Надя[5] (1978) було доведено, що проекції на базу невертикальних геодезичних (одиничного) дотичного розшарування будь-якого локально-симетричного простору мають сталі геодезичні кривини. Задача опису усіх геодезичних *одиничного* дотичного розшарування над *простором сталої кривини* була розв'язана С. Сасакі (1976). Аналогічна задача для *дотичного* розшарування була розв'язана К. Сато (1978). Як виявилося, в обох випадках проекціями на базу знайдених невертикальних геодезичних є кола і гвинтові лінії, тобто криві зі сталими першою і другою геодезичними кривинами, решта геодезичних кривин дорівнюють нулю. Найпростішими локально-симетричними просторами після просторів сталої кривини є комплексний CP^n і кватерніонний HP^n проективні простори (просторові форми). У зв'язку з цим природно повстало питання про точнішу характеризацію проекцій невертикальних геодезичних (сферичного) дотичного розшарування цих просторів.

Оскільки шарами одиничного дотичного розшарування є одиничні сфери, то у присутності в дотичному просторі многовиду парної вимірності оператора (майже) комплексної структури J, на шарах на шарах одиничного розшарування визначається векторне поле Хопфа $J\xi$, де ξ означає довільну точку дотичної одиничної сфери. Деформація метрики непарновимірної сфери уздовж шарів шарування Хопфа відома як деформація Берже. Метрика Сасакі одиничного дотичного розшарування комплексного проективного простору $\mathbb{C}P^n$ допускає таку деформацію. У рамках дослідження властивостей геодезичних ліній метрик на розшарованих просторах, виникло питання про геодезичні сферичного дотичного розшарування з метрикою, що відповідає Берже-деформації кожної дотичної сфери. Слід зазначити, що така деформація істотно відрізняється від інших способів деформації метрики Сасакі, розвинених останнім часом.

З визначення локальних координат на розшаруванні випливає, що кожна невертикальна геодезична (сферичного) дотичного розшарування задається векторним полем уздовж деякої кривої на базі. Природно ставити питання про те, чи можна отримати цілком геодезичні підмноговиди в (сферичному) дотичному розшаруванні

[5]Nagy P.T. Geodesics on the tangent sphere bundle of a Riemannian manifold// Geom. Dedic. - 1978. - V. 7, № 2. - P. 233 - 244.

як образ підмноговиду $F^l \subset M^n$ у базі під дією векторного поля ξ, визначеного в точках підмноговиду. Якщо $l = 1$, то така конструкція приводить до геодезичних ліній розшарування і була розглянута С. Сасакі. При $l = n$ ця задача була розглянута П. Вальчаком[6]. Він довів, що векторне поле сталої довжини може породжувати цілком геодезичний підмноговид $\xi(M^n) \subset TM^n$ у дотичному розшаруванні з метрикою Сасакі тільки у випадку коли відповідне векторне поле є паралельним у зв'язності Леві-Чівіта. У свою чергу це означає, що многовид розщеплюється у прямий метричний добуток. Розгляд випадку $1 < l < n$ природним чином узагальнює результати С. Сасакі і П. Вальчака. Підмноговиди такого класу *трансверсальні* до шарів. Щодо існування інших типів цілком геодезичних підмноговидів розшарування, задача була сформульована О.А. Борисенком і в повному обсязі на цей час не розв'язана. Певним просуванням була б спроба надати опис усіх цілком геодезичних підмноговидів у дотичному розшаруванні принаймні двовимірного многовиду.

Із попередніх розглядів випливає, що векторні поля породжують природний клас підмноговидів (одиничного) дотичного розшарування. Якщо на даному *компактному* многовиді існує глобально задане одиничне векторне поле ξ, то підмноговид $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ є вкладеним компактним підмноговидом із скінченним об'ємом відносно індукованої метрики. У 1986 році Г. Глюк і В. Цилер опублікували роботу[7], у якій поставили питання про існування одиничного векторного поля ξ на 3-сфері з мінімальним об'ємом підмноговиду $\xi(S^n)$. Такі векторні поля були названі оптимальними. Зокрема, було доведено оптимальність векторного поля Хопфа на тривимірній сфері S^3. Незабаром Ш. Педерсен[8] довела, що поле Хопфа на сферах вищої вимірності не породжує підмноговиду глобально мінімального об'єму. Як з'ясувалося пізніше[9], оптимальність векторного поля ξ означає, що поле ξ є критичною точкою варіації функціонала об'єму підмноговиду $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ відносно варіацій одиничного векторного поля в класі одиничних векторних полів. Ми називаємо такі варіації функціонала об'єму підмноговиду $\xi(M^n)$ *поле-варіаціями*. У цій же роботі було доведено, що критичні векторні поля відносно поле-варіацій є критичними відносно класичних нормальних варіацій підмноговиду $\xi(M^n) \subset T_1M^n$, тобто породжують мінімальні підмноговиди в просторі розшарування одиничних векторів. Це спостереження дозволило перейти від питань, пов'язаних з глобальними варіаціями підмноговиду $\xi(M^n)$ до відповідних локальних варіацій, які не вимагають існування глобально заданого одиничного векторного поля. У серії робіт О. Жиль-Медрано і Л. Ванеке із співавторами були розглянуті многовиди, що допускають локальні або глобальні *мінімальні* одиничні векторні поля. Так, була доведена мінімальність поля Сасакієвої структури, знайдено умову мінімальності одиничного ве-

---

[6] Walczak, P. On Totally Geodesic Submanifolds of Tangent Bundle with Sasaki Metric// Bull. Acad. Pol. Sci, ser. Sci. Math. - 1989. - V. 28, №.3-4. - P. 161 - 165

[7] Gluck H.,Ziller W. On the volume of a unit vector field on the tree sphere// Comment. Math. Helv. - 1986. - V.61. - P. 177 - 192.

[8] Pedersen S. L. Volumes of vector fields on spheres, Trans. Amer. Math. Soc. 336 (1993), 69-78.

[9] Gil - Medrano O., Llinares - Fuster E. Minimal unit vector fields//Tôhoku Math. J.- 2002. - V 54. - P. 71 - 84.

кторного поля на двовимірному многовиді, надано опис мінімальних ліво-інваріантних одиничних векторних полів на тривимірних групах Лі з лівоінваріантною метрикою. При цьому використовувалися формули, що давали умову лише мінімальності одиничного векторного поля дуже складні в конкретних застосуваннях. О.А. Борисенко поставив питання про будову усієї другої фундаментальної форми підмноговиду $\xi(M^n)$, отриманні альтернативної формули для середньої кривини підмноговиду $\xi(M^n)$, з'ясування умов цілком геодезичності такого підмноговиду. Така постановка задачі є більш загальною, потребує знання дотично-нормального оснащення підмноговиду $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ і дозволяє ставити задачу про підмноговиди $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ *сталої* середньої кривини, цілком геодезичні підмноговиди класу $\xi(M^n) \subset T_1M^n$, тощо. Природною є задача про зовнішньо-геометричні властивості спеціальних класів векторних полів: радіальних, геодезичних, Кілінгових, структурних, нормальних векторних полів гіпершарування та інших. Більше того, знаючи другу фундаментальну форму і тензор кривини метрики Сасакі T_1M^n можна досліджувати внутрішню геометрію підмноговиду $\xi(M^n)$ і асоціювати з векторним полем внутрішньо-геометричні характеристики, відомі з геометрії підмноговидів, а саме, секційну кривину, кривину Річі, скалярну кривину, тощо. Задача з'ясування внутрішньої геометрії підмноговиду $\xi(M^n)$ є цілком новою і не має аналогів.

У 2001 році О.Жиль-Медрано і Е. Лінарес-Фустер[10] виписали формулу другої варіації функціонала об'єму підмноговиду $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ відносно поле-варіацій і довели стійкість поля Хопфа на тривимірній сфері відносно цього класу варіацій. На сферах вищої вимірності поля Хопфа не стійкі, що не дивно відповідно до результату Ш. Педерсен. Як з'ясувалося, поле-варіації є частковим випадком класичної нормальної варіації підмноговиду $\xi(M^n)$. Тому нестійкий підмноговид $\xi(M^n)$ відносно поле-варіацій буде нестійким відносно класичних нормальних варіацій. Відповідно, стійкий відносно поле-варіацій мінімальний або цілком геодезичний підмноговид $\xi(M^n) \subset T_1M^n$ може бути не стійким відносно класичних нормальних варіацій. У зв'язку з цим, О. А. Борисенко запропонував авторові дослідити на *класичну стійкість* знайдені приклади цілком геодезичних одиничних векторних полів.

Поширення конструкції метрики Сасакі на випадок нормального розшарування підмноговиду ріманова простору належить О.А. Борисенку[11] і було детально розглянуте автором в кандидатській дисертації. Цілком природно з'ясувати можливість поширення метрики Сасакі на інші, більш загальні типи розшарувань і дослідити властивості такого поширення.

---

[10] Gil - Medrano O.,Llinares - Fuster E. Second variation of volume and energy of vector fields. Stability of Hopf vector field// Math. Ann. - 2001. - V. 320. - P. 531 - 545.

[11] Борисенко А. Ямпольский А. О метрике Сасаки нормального расслоения подмногообразия в римановом пространстве// Мат. Сб. - 1987. -Т.134, № 2. -С. 158 - 176.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертація виконана в Харківському національному університеті імені В. Н. Каразіна в рамках науково-дослідних робіт: «*Глобальна геометрія підмноговидів в ріманових і фінслерових просторах*» (№ держ. реєстр. 0109U001454), *"Зовнішня геометрія багатовимірних підмноговидів"*, (№ держ. реєстр. 0103U004232) і «*Глобальна геометрія і топологія многовидів і підмноговидів в ріманових і фінслерових просторах*» (№ держ. реєстр. 0111U010008).

Мета і задачі дослідження. *Метою* роботи є розвиток геометрії підмноговидів в розшарованих просторах, зокрема в сферичному дотичному і сферичному нормальному розшаруваннях ріманових многовидів і, відповідно, підмноговидів.

Об'єктом дослідження є розшаровані простори з метричною структурою типу Сасакі.

Предметом дослідження є підмноговиди у розшарованих просторах, зокрема, мінімальні і цілком геодезичні перерізи розшарувань.

Основні задачі дослідження полягають в наступному:

1. Дослідити сферичне дотичне розшарування з метрикою Сасакі з метою з'ясування умов існування на ньому нуль-розподілів тензора кривизни, що породжує шарування на цілком геодезичні підмноговиди сталої секційної кривини.
2. Знайти межі зміни секційної кривини сферичного дотичного розшарування з метрикою Сасакі над простором сталої кривини і, тим самим, істотно узагальнити результат Клінгенберга і Сасакі, а так само більш ранній результат автора про кривину метрики Сасакі одиничного розшарування над одиничними сферами.
3. Уточнити опис проекцій геодезичних ліній дотичного розшарування з метрикою Сасакі класичних локально-симетричних просторів (просторових форм), відомий раніше тільки для геодезичних (одиничного) дотичного розшарування просторів сталої кривини.
4. Дослідити вплив Берже-деформації метрики Сасакі дотичного розшарування келерова многовиду на геометрію проекцій геодезичних деформованої метрики.
5. Узагальнити результати Сасакі і Вальчака про цілком геодезичні властивості підняттів кривих на базі і всієї бази, відповідно, в простір дотичного розшарування під дією векторного поля на випадок підняття підмноговидів довільної ковимірності.
6. Довести гіпотезу Борисенка про єдиність нульового перерізу в класі цілком геодезичних підмноговидів, трансверсальних до шарів в розшаруванні над простором сталої кривини.
7. Дати вирішення проблеми Борисенко про опис всіх цілком геодезичних підмноговидів в дотичному розшаруванні простору сталої кривини в найпростішому випадку двовимірної бази.
8. Знайти другу фундаментальну форму векторного поля Сасакієвої структури непарновимірного многовиду, зокрема поля Хопфа на сферах, і дослідити його на цілком геодезичність.
9. Дослідити поле Хопфа на сферах на стійкість в класичному, тобто, більш широкому класі варіацій, ніж поле-варіації Жиль-Медрано.

10. Знайти всі двовимірні ріманови і псевдоріманови многовиди, що допускають цілком геодезичні (локальні) одиничні векторні поля, знайти такі поля.
11. Виділити з класу мінімальних одиничних ліво-інваріантних векторних полів на тривимірних групах Лі з ліво-інваріантною метрикою всі цілком геодезичні векторні поля, дослідити їх на стійкість щодо класичних нормальних варіацій в порівнянні зі стійкістю щодо поле-варіацій.
12. Узагальнити результати з геометрії дотичного і сферичного дотичного розшарування ріманова многовиду на загальний випадок метризованого розшарування зі зв'язністю, погодженою з пошаровою метрикою, над рімановим многовидом.

Методи дослідження. У роботі використані методи лінійної алгебри, диференціальних рівнянь, теорії груп і алгебри Лі, векторних розшарувань і загальної теорії підмноговидів в ріманових просторах.

Наукова новизна одержаних результатів. Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є наступні:

1. Вперше знайдені умови існування сильно-сферичного розподілу на сферичному розшаруванні над простором сталої кривини; зокрема, виявлена нова властивість характеристичного векторного поля Сасакієвою структури на одиничному розшаруванні одиничної сфери.
2. Вперше знайдені межі зміни секційної кривини метрики Сасакі сферичного розшарування над простором сталої кривини.
3. Вперше знайдено опис проекцій геодезичних ліній дотичного розшарування з метрикою Сасакі класичних просторових форм – дійсного простору сталої кривини, комплексного і кватерніонного проектованих просторів єдиним методом, що використовує рекурентні властивості тензора кривини цих просторів.
4. Вперше доведена інваріантність проекцій геодезичних щодо Берже-деформації метрики Сасакі одиничного дотичного розшарування келерова многовиду.
5. Вперше знайдені умови цілком геодезичних підняттів в простір дотичного розшарування під дією векторного поля підмноговидів бази довільної ковимірності.
6. Вперше надано опис всіх цілком геодезичних підмноговидів в дотичному розшаруванні двовимірного ріманова многовиду сталої кривини; доведена гіпотеза О. Борисенка про єдиність нульового перерізу розшарування як цілком геодезичного в розглянутому класі многовидів.
7. Вперше знайдені розкладання Гауса і Вейнгартена для одиничного перерізу одиничного розшарування ріманова многовиду; знайдені умови мінімальності і цілком геодезичності перерізу.
8. Доведена цілком геодезичність перерізу, породженого характеристичним векторним полем Сасакієвої структури на многовиді, зокрема, полем Хопфа на сферах.
9. Вперше знайдені умови мінімальності і цілком геодезичності одиничного векторного поля Кілінга, поля одиничних нормалей ріманова трансверсально орі-

єнтованого ріманова гіпершарування; даний опис таких полів на многовидах малої вимірності.

10. Доведена стійкість поля Хопфа, як такого, що породжує цілком геодезичний підмноговид в одиничному розшаруванні тривимірної сфери, щодо класичних нормальних варіацій.
11. Вперше знайдені усі цілком геодезичні одиничні ліво інваріантні векторні поля Лі на тривимірних групах з ліво інваріантною метрикою; даний аналіз їх стійкості в класі загальних і деяких спеціальних варіацій.
12. Виконане узагальнення метрики Сасакі дотичного розшарування на випадок метризованого векторного розшарування зі зв'язністю і доведені аналоги відповідних теорем одиничного дотичного розшарування; зокрема, знайдені умови існування цілком геодезичних одиничних перерізів, повністю досліджені маловимірні випадки і наведені приклади цілком геодезичних перерізів одиничного нормального розшарування.

Практичне значення одержаних результатів. Робота має теоретичний характер. Результати можуть бути використані для подальшого вивчення геометрії підмноговидів в розшарованих просторах, геометричних властивостей векторних полів, просторів з додатковими структурами, геодезичних ліній та цілком геодезичних підмноговидів, в лекційних курсах з геометрії підмноговидів і ріманової геометрії в Харківському, Київському, Львівському, Одеському університетах, а також в Інституті математики НАН України, ФТІНТ ім. Б.І. Вєркіна НАН України та інших вищих учбових закладах та наукових інститутах, де ведуться дослідження в галузі геометрії і фундаментальної математики.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно. Із статей, виконаних у співавторстві, в дисертації містяться лише результати автора.

Апробація результатів дисертації. Основні результати досліджень доповідалися на 18 наукових конференціях різного рівня і наукових семінарах : IX Всесоюзна конференція з геометрії, Кишинів, 1988; Всесоюзна конференція з геометрії і аналізу. Новосибірськ, 1989; Всесоюзна зустріч молодих вчених, Ростов-на-Дону, 1990; Республіканська науково-методична конференція, присвячена 200-річчю з дня народження М.І. Лобачевського, 3-8 вересня 1992 року. Одеса, 1992; 1 (1995), 3 (1999), 4 (2001), 5 (2003), 6 (2005) та 8 (2013) Міжнародні конференції з геометрії та топології (Черкаси); 1 - st Karazin Readings, Kharkiv (2004); Міжнародна конференція "Тараповські читання - 2011", Харків (2011); 1-st Int. Conf. on Geometrical Objects Reconstruction and Symbolic Computations, University of Haifa, Haifa (Israel), 2008; Геометрія в цілому, топологія і їх застосування/ Міжнародна конференція, присвячена 90-річчю з дня народження Олексія Васильовича Погорєлова, 2009; Кримська міжнародна математична конференція, Судак, 2013 р.; Сучасні проблеми математики, механіки і інформатики/ Міжнародна школа-конференція "Тараповські читання - 2013", Харків, 2013 р.; 2-nd Int. Conf. on Geometrical Objects Reconstruction and Symbolic Computations, University of Haifa, Haifa (Israel), 2013; Міжнародна конференція "Геометрія в Одесі-2015", Одеса, 2015; Харківський міський геометричний семінар (кер. проф. Борисенко О.А., проф. Амінов Ю.А.), Геометричний семінар

ФТИНТ НАНУ (кер. проф. Амінов Ю.А.), геометричний семінар інституту математики НАН України (кер. д.ф.-м.н. Максименко С.І.), науковий семінар кафедри геометрії и топології Львівського національного університету ім. І. Франка (кер. проф. Банах Т.О.), семінар кафедри геометрії Київського національного університету ім. Т. Шевченка (кер. проф. Пришляк О.О.), семінар кафедри геометрії і топології інституту математики, економіки і механіки Одеського національного університету (кер. доц. Покась С.М.)

Публікації

Результати, представлені в дисертації, опубліковані в 39 роботах, з них - 21 стаття [1-21] у фахових наукових виданнях і 18 тез доповідей наукових конференцій [22-39].

Структура дисертації та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних джерел, що включає 138 найменувань. Робота виконана на 309 сторінках машинописного тексту, список використаних джерел та список публікацій автора (39 найменувань) займають 15 сторінок.

Автор висловлює щиру подяку член - кореспонденту НАН України, професору О.А. Борисенку за постановки задач, багаторазові обговорення і рекомендації, залученню до занять геометрією; колегам з кафедри геометрії Харківського національного університету ім. В. Каразіна і учасникам Харківського міського геометричного семінару за стимулюючу підтримку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

Робота складається зі вступу, 5 розділів і висновків. **Перший** розділ містить необхідні визначення і результати, що не є загальновідомими. У **другому** розділі розглянуті питання внутрішньої геометрії сферичного дотичного розшарування, пов'язані з поняттям індексу дефектності ріманова многовиду. Будова ріманових многовидів, що допускають нетривіальний сильно-параболічний розподіл вивчав проф. О. А. Борисенко і отримав ряд фундаментальних результатів. Наслідуючи ідеологію робіт О.А. Борисенка, у в другій главі ставиться задача характеризації сферичного дотичного розшарування, що допускає сильно сферичний розподіл, тобто розподіл L^s на T_1M^n такий, що тензор кривини $\bar{R}$ метрики Сасакі $\bar{g}$ многовиду T_1M^n задовольняє умові $\bar{R}(X,Y)Z = c(\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y)$ для деякої константи $c > 0$, будь-яких векторних полів X,Y на T_1M^n та будь-якого $Z \in \mathcal{L}$. Вимірність s розподілу L^s називається *індексом сильної сферичності*, а константа c – *покажчиком сферичності*. Для загальних ріманових многовидів вичерпний результат отриманий у вимірності 2.

Теорема 2.1. *Одиничне дотичне розшарування T_1M^2 має сильно-сферичний розподіл L^s с покажчиком сферичності $c > 0$ тоді і тільки тоді, коли M^2 є простір сталої кривини $K > 0$. При цьому*

• *якщо* $K=1$, *то* $s=3$, $c=\frac{1}{4}$ *і сильно-сферичний розподіл співпадає з усім дотичним простором до* T_1M^2 *(тобто* T_1M^2 *має сталу кривину* $c=\frac{1}{4}$ *);*

• *якщо* $K\neq 1$, то $s=1$, $c=\frac{K^2}{4}$ *і сильно-сферичний розподіл є вертикальним (огинає одновимірні шари розшарування* T_1M^2 *).*

Для просторів більшої вимірності у другій главі доведена

Теорема 2.2. *Одиничне дотичне розшарування* $T_1(M^n,K)\,(n\geq 3)$ *простору сталої кривини* $K>0$ *має невертикальний сильно-сферичний розподіл* L^s *с покажчиком сферичності* $c>0$ *тоді і тільки тоді, коли*

• M^n *локально ізометричний одиничній сфері* S^n *;*

• *розподіл* L^s *одновимірний і співпадає з характеристичним векторним полем стандартної Сасакієвої структури на* T_1S^n *;*

• *покажчик сферичності* $c=1/4$.

У загальному випадку T_1M^n наділене майже контактною (але не Сасакієвою) структурою з характеристичним векторним полем ξ^h. Розподіли, що містять характеристичне векторне поле називаються контактними. Теорема 2.2 стверджує, що одинична сфера допускає контактний сильно-сферичний (одновимірний) розподіл. Виявляється, що ця властивість характеризує сферу.

Теорема 2.3. *На одиничному дотичному розшаруванні ріманова многовиду не сталої секційної кривини не існує контактного сильно сферичного розподілу.*

Розподіли, що описуються Теоремою 2.3, невертикальні. Одиничне дотичне розшарування T_1M^n ріманова многовиду M^n вимірності $n\geq 3$ невід'ємної секційної кривини не допускає вертикального сильно сферичного розподілу (**Теорема 2.4**).

У продовження спільних робіт з проф. Борисенком О.А., у другій главі ми розглядаємо питання про розподіл секційної кривини метрики Сасакі T_1M^n. Передусім ми доводимо, що за винятком вимірності $n=2,4,8$ кривина метрики Сасакі не може бути додатною (**Теорема 2.5**). Для випадку просторів сталої кривини (M^n,c) виявилося можливим знайти точні оцінки для секційної кривини $T_1(M^n,c)$ (**Теорема 2.6**).

У третьому розділі ми починаємо дослідження геометрії підмноговидів в дотичному і сферичному дотичному розшаруванні, зокрема, цілком геодезичних підмноговидів. Борисенко О.А. сформулював задачі опису усіх цілком геодезичних підмноговидів в дотичному і сферичному дотичному розшаруваннях над просторами сталої кривини. Ми розпочинаємо розгляд цього задачі з опису одновимірних цілком геодезичних підмноговидів, тобто геодезичних ліній в дещо загальнішій ситуації. Геодезичні лінії на розшаруваннях над просторами сталої кривини були відомі. Тому ми розглянули задачі опису геодезичних над просторовими формами.

Теорема 3.2. *Нехай* $\mathrm{M}(c)$ *– просторова форма сталої кривини* $c \neq 0$. *Нехай* Γ *– невертикальна геодезична лінія на дотичному або дотичному сферичному розшаруванні над* $\mathrm{M}(c)$. *Нехай* $\gamma = \pi \circ \Gamma$ *– проекція* Γ *на* $\mathrm{M}(c)$. *Тоді геодезичні кривини* $k_1, k_2 \dots$ *кривої* γ *сталі і*

(a) $k_3 = \dots = k_{n-1} = 0$ *для дійсної просторової форми;*

(b) $k_6 = \dots = k_{2n-1} = 0$ *для комплексної просторової форми;*

(c) $k_{10} = \dots = k_{4n-1} = 0$ *для кватерніонної просторової форми.*

Комплексний проектний простір CP^n є комплексним многовидом, яке належить класу ермітових локально - симетричних просторів. Якщо базовий многовид (M, g) має вимірність $2n$ і забезпечений майже комплексною структурою J, то на кожній дотичній сфері S_x^{2n-1} в дотичному просторі $T_x M$ визначене векторне поле Хопфа $J\xi$, де ξ - одиничне нормальне векторне поле на цій сфері. Застосовуючи відому метричну деформацію Берже на кожній дотичній сфері, ми отримаємо сферичне розшарування над M з метричними сферами Берже в якості шарів. Ми доводимо теорему, що характеризує проекції на базу геодезичних Берже- розшарування.

Теорема 3.9. *Нехай* $\gamma = \pi \circ \Gamma$ *– проекція кривої* Γ *на дотичному сферичному Берже розшаруванні над ермітовим локально симетричним многовидом* M. *Тоді усі геодезичні кривини* γ *сталі.*

Ми так само доводимо дослівний аналог Теореми 3.2 (b) для випадку Берже-деформованої метрики. На дотичному розшаруванні $TM \setminus 0$ з Берже- деформованою метрикою проекції геодезичних не мають аналогічних властивостей.

Невертикальні геодезичні трансверсальні до шарів і породжуються деяким векторним полем уздовж кривої на базовому многовиді. Якщо розглянути деякий підмноговид $F^l \subset M^n$ і векторне поле ξ, задане в точках підмноговиду, то образ $\xi(F^l) \subset TM^n$ визначить підмноговид, трансверсальний до шарів. Якщо поле ξ одиничне, то відповідний образ лежить в $T_1 M^n$. Ми доводимо, що вірним є і зворотне.

Теорема 3.13. *Нехай* N^l *вкладений підмноговид у дотичному розшаруванні ріманова многовиду* M^n, *що є трансверсальним до шарів в околі точки* $Q \in N^l$. *Тоді існує підмноговид* $F^l \subset M^n$, *що містить* $q = \pi(Q)$, *такий що* N^l *є локальним образом* F^l *відносно деякого гладкого векторного поля* ξ, *що задане в точках* F^l.

Наступний результат є природним по постановці задачі і узагальнює відповідний результат П. Вальчака (1980).

Теорема 3.20. *Нехай ξ – векторне поле сталої довжини вздовж підмноговиду $F^l \subset M^n$. Підмноговид $\xi(F^l)$ буде цілком геодезичним підмноговидом в TM^n, тоді і тільки тоді коли F^l є цілком геодезичним підмноговидом в M^n і ξ є паралельним векторним полем на M^n вздовж F^l.*

Теорема 3.20 може бути застосована до випадку нормального векторного поля на підмноговиді (**Теорема 3.21**) і до випадку шарованих ріманових многовидів (**Наслідок 3.22**).

Якщо не обмежуватися підмноговидами, що трансверсальні до шарів, то можна дати локальний опис усіх цілком геодезичних підмноговидів в дотичному розшаруванні двовимірного базового многовиду сталої Гаусової кривини.

Теорема 3.24. *Нехай M^2 - ріманів многовид знако-сталої кривини $K \neq 0$. Припустимо, що $\tilde{F}^2 \subset TM^2$ - цілком геодезичний підмноговид. Тоді локально $\tilde{F}^2$ є одним з наступних підмноговидів :*

(a) окремий шар T_qM^2;

(b) якщо $K = const$, те це базовий многовид, вкладений в TM^2 нульовим перерізом;

(c) лінійчата поверхня побудована на геодезичній γ в M^2 з твірними, що породжені паралельним вздовж γ одиничним векторним полем;

Дотичне розшарування TM^2 зі знако-сталою кривиною не допускає цілком геодезичного 3- вимірного підмноговиду (**Теорема 3.27**).

У четвертому розділі ми пропонуємо систематичне вивчення підмноговидів одиничного дотичного розшарування, породжених одиничним векторним полем на базі. Основу такого вивчення складає лема, що описує розкладання Гауса і Вейнгартена для підмноговидів даного типу. Нехай (M,g) ріманів многовид. Позначимо через $\mathfrak{X}(M)$ алгебру Лі гладких векторних полів на M, а через $\mathfrak{X}_{\xi^\perp}(M)$ ортогональне доповнення одиничного векторного поля ξ в $\mathfrak{X}(M)$. Оператор Номідзу (або неголономний оператор Вейнгартена) одиничного векторного поля ξ визначається формулою $A_\xi X := -\nabla_X \xi \in \mathfrak{X}_{\xi^\perp}(M)$. Дотичне і нормальне розшарування підмноговиду $\xi(M) \subset T_1M$ породжуються векторними полями виду

$$\xi_*(X) = X^h - (A_\xi X)^{tg}, \qquad \tilde{n}(Y) = (A_\xi^t Y)^h + Y^{tg},$$

де A_ξ^t спряжений оператор, що визначається співвідношенням $g\left(A_\xi^t X, Y\right) = g\left(X, A_\xi Y\right)$, і $X^{tg} = X^v - g\left(X,\xi\right)\xi^v$ - тангенціальний ліфт векторного поля X. Ми вводимо поняття *грубого гесіана* поля і *тензора гармонійності* поля ξ, що мають вигляд

$$Hess_{\xi}(X,Y)=\frac{1}{2}((\nabla_X A_{\xi})Y+(\nabla_Y A_{\xi})X)$$

$$\Gamma_{\xi}(X,Y)=\frac{1}{2}(R(A_{\xi}X,\xi)Y+R(A_{\xi}Y,\xi)X).$$

У цих термінах можна лаконічно виписати розкладання Гауса і Вейнгартена.

Лема 4.1. *Позначимо через* $\bar{\bar{\nabla}}$, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{A}$ *і* $\tilde{\nabla}^{\perp}$ *індуковану зв'язність, другу фундаментальну форму, оператор Вейнгартена і коваріантну похідну в нормальній зв'язності підмноговиду* $\xi(M)$, *відповідно. Тоді*

$$\bar{\bar{\nabla}}_{\xi_* X}\xi_* Y=\xi_*(\nabla_X Y+\Gamma_{\xi}(X,Y))+(A_{\xi}(\Gamma_{\xi}(X,Y))-Hess_{\xi}(X,Y))^{tg}\downarrow_{T\xi(M)},$$

$$\tilde{\Omega}(\xi_* X\,\xi_* Y)=(A_{\xi}(\Gamma_{\xi}(X,Y))-Hess_{\xi}(X,Y))^{tg}\downarrow_{T^{\perp}\xi(M)},$$

$$\tilde{A}_{\tilde{n}(Z)}(\xi_* X)=-((\nabla_X A_{\xi}^t)Z+\frac{1}{2}R(\xi,Z)X-\frac{1}{2}R(\xi,A_{\xi}X)A_{\xi}^t Z+\frac{1}{2}A_{\xi}^t(R(X,A_{\xi}^t Z)\xi))^h\downarrow_{T\xi(M)},$$

$$\tilde{\nabla}^{\perp}_{\xi_* X}\tilde{n}(Z)=\tilde{n}(\nabla_X Z+\frac{1}{2}R(A_{\xi}^t Z,X)\xi)+$$

$$((\nabla_X A_{\xi}^t)Z+\frac{1}{2}R(\xi,Z)X-\frac{1}{2}R(\xi,A_{\xi}X)A_{\xi}^t Z+\frac{1}{2}A_{\xi}^t(R(X,A_{\xi}^t Z)\xi))^h\downarrow_{T^{\perp}\xi(M)},$$

де $(\nabla_X A_{\xi}^t)Y:=\nabla_X(A_{\xi}^t Y)-A_{\xi}^t(\nabla_X Y)$ *і* $\downarrow$ *означає відповідну проекцію.*

Наступні твердження є прямим наслідком Леми 4.1.

Лема 4.2. *Друга фундаментальна форма підмноговиду* $\xi(M)\subset T_1M$ *відносно довільної нормалі* $\tilde{n}(Z)$ *має вигляд*

$$\tilde{\Omega}_{\tilde{n}(Z)}(\xi_* X,\xi_* Y)=g\left(Hess_{\xi}(X,Y)-A_{\xi}(\Gamma_{\xi}(X,Y)),Z'\right),$$

де $Z'=Z-g\left(Z,\xi\right)\xi$.

Лема 4.3. *Одиничне векторне поле* ξ *на рімановому многовиді* M^n *породжує цілком геодезичний підмноговид* $\xi(M^n)\subset T_1M^n$ *тоді і тільки тоді, коли воно задовольняє системі рівнянь*

$$Hess_{\xi}(X,Y)-A_{\xi}\Gamma_{\xi}(X,Y)-g\left(A_{\xi}X,A_{\xi}Y\right)\xi=0$$

для будь-яких векторних полів $X,Y\in\mathfrak{X}(M^n)$.

Щоб побудувати природні дотичні і нормальні ортонормовані репери для $\xi(M)$, можна використати сингулярне розкладання оператора A_ξ. Оскільки $A_\xi^t \xi = 0$, то для будь-якого одиничного векторного поля ξ існують ортонормовані локальні репери $e_0, e_1 \dots, e_n$ і $f_0 = \xi, f_1 \dots, f_n$ на M такі, що

$$A_\xi e_0 = 0,\ A_\xi e_\alpha = \lambda_\alpha f_\alpha, \quad A_\xi^t f_0 = 0,\ A_\xi^t f_\alpha = \lambda_\alpha e_\alpha \ \ (\alpha = 1, \dots, n),$$

де $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \lambda_n \ge 0$ - дійсні функції. Природно назвати функції λ_i $(i = 1 \dots, n)$ *сингулярними головними кривинами* поля ξ відносно вибраного сингулярного репера. Вектори сингулярного репера дозволяють побудувати ортонормоване оснащення підмноговиду $\xi(M)$, а саме

$$\tilde{e}_i = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_i^2}}(e_i^h - \lambda_i f_i^v) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \qquad \tilde{n}_{\sigma|} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}}(\lambda_\sigma e_\sigma^h + f_\sigma^v) \quad (\sigma = 1, \dots, n)$$

утворюють ортонормовані репери в дотичному і в нормальному просторах підмноговиду $\xi(M)$, відповідно. Структура другої фундаментальної форми відносно такого оснащення описана **Лемою 4.5**.

У випадку двовимірного ріманова многовиду можна виразити середню кривину векторного поля в ясних геометричних термінах.

Лема 4.8. *Нехай ξ і η - одиничні взаємно ортогональні векторні поля на 2-мірному рімановому многовиді. Позначимо k і щ геодезичні кривини інтегральних кривих поля ξ і η, відповідно. Середня кривина H векторного поля ξ дається формулою*

$$H = \frac{1}{2}\left[\xi\left(\frac{k}{\sqrt{1+k^2+\text{щ}^2}}\right) - \eta\left(\frac{\text{щ}}{\sqrt{1+k^2+\text{щ}^2}}\right)\right].$$

Мінімальні векторні поля на двовимірних многовидах існують, проте їх наявність накладає обмеження на геометрію базового многовиду.

Теорема 4.9. *Одиничне геодезичне векторне поле ξ на двовимірному рімановому многовиді M^2 є мінімальним тоді і тільки тоді, коли M^2 несе метрику обертання і ξ є полем дотичних меридіанів цієї метрики.*

Формула Леми 4.5 дозволяє так само будувати приклади векторних полів сталої середньої кривини (**Пропозиція 4.10**). Найбільш зрозумілий вираз для середньої кривини підмноговиду $\xi(M)$ ми отримаємо, якщо поле ξ є поле нормалей ріманова гіпершарування. В цьому випадку $e_0 = \xi$, оператор Номідзу є оператором Вейнгартена для кожної з гіперповерхонь, сингулярні репери співпадають з векторами головних напрямів, а сингулярні головні кривини є головними кривинами шарів шарування. Ми маємо

$$H_{\sigma|} = \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+k_\sigma^2}}\sum_{\alpha=1}^{n}\left\{\frac{-e_\sigma(k_\alpha)+(1-k_\alpha k_\sigma)g\left(R(\xi,e_\alpha)e_\alpha,e_\sigma\right)}{1+k_\alpha^2}\right\}$$

де e_α головні напрями і k_α - головні кривини шарів. В якості наслідку, ми отримуємо відомий раніше результат: *кожне радіальне одиничне векторне поле на просторі сталої кривини мінімальне*[12].

Структура усієї другої фундаментальної форми нормального векторного поля гіпершарування описується Лемою 4.34. В якості наслідку, ми доводимо наступне твердження.

Теорема 4.34. *Нехай ξ – одиничне нормальне векторне поле ріманова трансверсально орієнтованого цілком омбілічного (локального) гіпершарування на рімановому многовиді M. Підмноговид $\xi(M)$ цілком геодезичний в T_1M тоді і тільки тоді, коли $K_\sigma = \dfrac{2k^2}{k^2-1}$, де $k = k(s)$ величина омбілічності шару і K_σ власні числа нормального оператора Якобі $R(\cdot,\xi)\xi$.*

Цілком геодезичні векторні поля в класі полів Теореми 4.34 існують. Приклад доставляють двовимірні многовиду зі спеціальною метрикою обертання (**Теорема 4.35**). Як виявилося, цей результат є наслідком загальнішої теореми.

Теорема 4.38. *Нехай M^2 – ріманів аналітичний многовид зі знако-сталою Гаусовою кривиною K. Тоді на деякій відкритій підмножині $U \subset M^2$ існує одиничне цілком геодезичне векторне поле ξ тоді і тільки тоді, коли*

- *метрика g на U має вигляд $ds^2 = du^2 + \sin^2\alpha(u)dv^2$ де $\alpha(u)$ - розв'язок диференціального рівняння* $\dfrac{d\alpha}{du} = 1 - \dfrac{a+1}{\cos\alpha}$;
- *цілком геодезичне одиничне векторне поле ξ має вигляд*

$$\xi = \cos(av+\omega_0)\partial_u + \frac{\sin(av+\omega_0)}{\sin\alpha(u)}\partial_v$$

де $a, \omega_0 = const$.

Функція $\alpha(u)$ має два геометричні описи: (a) $\alpha(u)$ є інтегральна Гаусова кривина многовиду вздовж меридіана метрики обертання; (b) $\alpha(u)/2$ є кут між но-

[12] Boeckx E., Vanhecke L. Harmonic and minimal radial vector fields// Acta Math. Hungar. - 2001. - V. 90. - P. 317 - 331.

рмаллю до цілком геодезичного підмноговиду $\xi(M^2)$ і (одновимірним) вертикальним розподілом.

Для просторів сталої кривини цілком геодезичне векторне поле має більш докладний геометричний опис.

Теорема 4.40. *Нехай M^2 – ріманів многовид сталої Гаусової кривини K. Одиничне векторне поле ξ, що породжує цілком геодезичний підмноговид в T_1M^2 існує тоді і тільки тоді, коли $K=0$ або $K=1$. Крім того*

- *якщо $K=0$, то ξ є або паралельним векторним полем, або закручується вздовж сімейства паралельних геодезичних зі сталою кутовою швидкістю. Геометрично $\xi(M^2)$ є ізометричним зануренням M^2 в $M^2\times S^1$ в якості фактору, або гвинтовим плоским підмноговидом в $M^2\times S^1$;*
- *якщо $K=1$, то ξ є векторним полем на сфері S^2, яке є паралельним вздовж меридіанів і закручується вздовж паралелей з одиничною кутовою швидкістю. Геометрично $\xi(M^2)$ є частиною цілком геодезичного RP^2 локально ізометричного сфері S^2 радіусу 2 в $T_1S^2 \overset{isom}{\approx} RP^3$.*

У випадку $K=0$ неважко знайти інтегральні траєкторії цілком геодезичного векторного поля. Для цього слід прийняти одну з сімейства паралельних геодезичних в якості осі Oy, а одну з сімейства ортогональних траєкторій (що так само складається з геодезичних) в якості осі Ox. У такому разі поле $\xi=\{\cos(ax),\sin(ax)\},$ а тому для інтегральних траєкторій отримаємо диференціальне рівняння $\dfrac{dy}{dx}=\tan(ax)$ розв'язком якого буде сімейство ліній

$$y(x)=-\frac{1}{a}\ln|\cos(ax)|C.$$

Виявляється, що в загальному випадку інтегральні траєкторії цілком геодезичного одиничного векторного поля конформно еквівалентні знайденим інтегральним траєкторіям цілком геодезичного поля на площині, якщо розглядати її як універсальне накриття прямого кругового циліндра (**Теорема 4.41**). На одиничній сфері ці траєкторії є прообразами сімейства паралельних прямих на площині при стереографічній проекції

Для просторів вимірності $n\geq 3$ система диференціальних рівнянь, що визначає цілком геодезичну властивість одиничного векторного поля, стає малоосяжною. Тому природно обмежуватися або класами векторних полів, або класами базових многовидів. Вище ми розглянули клас голономних векторних полів. Для цього класу оператор Номідзу симетричний, тобто $A^t_\xi = A_\xi$. Векторні поля Кілінга визначаються тим, що для них оператор Номідзу кососиметричний, тобто $A^t_\xi=-A_\xi$ відносно деякого ортонормованого базису. У вимірності $n = 3$ ми даємо повний опис многовидів, що можуть нести цілком геодезичне Кілінгове одиничне векторне поле.

Теорема 4.19. *Нехай ξ – одиничне Кілінгове векторне поле на 3-вимірному рімановому многовиді M^3. Якщо $\xi(M^3)$ цілком геодезичний в T_1M^3, то або M^3 є Сасакієвим і ξ то його характеристичне векторне поле, або $M^3 = M^2 \times E^1$ метрично і ξ є одиничним векторним полем, дотичним до евклідового фактору.*

Нетривіальний випадок в Теоремі 4.19 виявляє особливу роль характеристичного векторного поля Сасакієвої структури при $n = 3$. Як з'ясувалося, властивість цілком геодезичності має характеристичне векторне поле Сасакієвої структури в усіх вимірностях.

Теорема 4.18. *Нехай M^{2n+1} – многовид Сасакі і ξ – характеристичне векторне поле. Тоді $\xi(M^{2n+1})$ є цілком геодезичним підмноговидом в T_1M^{2n+1}.*

Зокрема, векторне поле Хопфа ξ на сфері S^{2n+1} є характеристичним векторним полем Сасакієвої структури на ній, а тому $\xi(S^{2n+1}) \subset T_1S^{2n+1}$ є цілком геодезичним підмноговидом. Зворотне вдалося довести при додатковій вимозі на векторне поле бути коваріантно нормальним, тобто за умови, що оператор Номідзу поля задовольняє вимозі $A_\xi^t A_\xi = A_\xi A_\xi^t$ (**Теорема 4.22**). Якщо поле задовольняє слабшій умові *геодезичності*, те результат є не настільки визначеним (**Теорема 4.24**).

Добре відомо, що T_1S^n с метрикою Сасакі наділяється стандартною Сасакієвою структурою з характеристичним векторним полем ξ^h. Властивість поля Хопфа породжувати цілком геодезичний контактний підмноговид в T_1S^{2n+1} означає, що $\xi(S^{2n+1})$ так само є Сасакієвим многовидом. Ми доводимо наступне.

Теорема 4.26. *Нехай ξ поле Хопфа на одиничній сфері S^{2n+1}. Відносно індукованої структури, підмноговид $\xi(S^{2n+1})$ є Сасакієвою просторовою формою φ-кривини 5/4.*

Іншими словами, поле Хопфа дає приклад вкладення *Сасакієвої просторової форми φ*- кривини 1 до *Сасакєвого многовиду* таким чином, що образ є контактною, цілком геодезичною *Сасакієвою просторовою формою φ*- кривини 5/4 відносно індукованої структури. Ми так само знаходимо, що секційна кривина підмноговиду $\xi(S^{2n+1})$ для поля Хопфа лежить в межах $[1/4, 5/4]$ (**Теорема 4.27**).

Добре відомо, що одинична сфера S^3 допускає структуру групи Лі, алгебра Лі якої породжується трьома лінійно незалежними одиничними векторними полями.

Ця група з певним нормуванням метрики ізометрична групі $SU(2)$ з біінваріантною метрикою. На такій групі будь-яке інваріантне векторне поле породжує цілком геодезичний підмноговид в $T_1SU(2)$. Якщо ж метрика ліво-інваріантна, то природно виникає питання про можливість виділення цілком геодезичних одиничних векторних полів в класі ліво-інваріантних. Для унімодулярної групи Лі з лівоінваріантною метрикою існує ортонормований базис e_1, e_2, e_3 її алгебри Лі такий, що її дужки визначаються формулами

$$[e_2,e_3]=\lambda_1 e_1,\quad [e_3,e_1]=\lambda_2 e_2,\quad [e_1,e_2]=\lambda_3 e_3. \qquad (2)$$

Константи $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ повністю визначають зв'язність Леві-Чівіта через коефіцієнти зв'язності $\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\lambda_i$ і топологічну структуру відповідної групи Лі. Базис (2) складається з головних напрямів оператора Річчі. Основною теоремою є наступне твердження.

Теорема 4.47. *Нехай G – тривимірна унімодулярна група Лі з ліво-інваріантною метрикою і $\{e_i\}_{i=1,2,3}$ – ортонормований базис алгебри Лі, що задовольняє (2). Нехай μ_1, μ_2, μ_3 – коефіцієнти ріманової зв'язності. Ліво-інваріантне одиничне векторне поле ξ є цілком геодезичним в наступних випадках:*

- ξ *– довільне при* $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$*;*
- $\xi = e_i$ *або* $\xi = \cos(t)e_j + \sin(t)e_k$ *при* $\mu_i \neq 0$, $\mu_j = \mu_k = 0$
  $(i \neq j \neq k \neq i$, $t = const$*);*
- ξ *- головний напрям Річі, що відповідає головній кривині Річі, яка дорівнює 2.*

Конкретизація Теореми 4.47 для кожної з унімодулярних груп наведена в **Теоремі 4.48**. Цілком геодезичне інваріантне поле породжує у більшості випадків канонічну *майже контактну структуру* на кожній з груп. В деяких випадках ця структура може бути Сасакієвою. Відповідний аналіз міститься в **Пропозиції 4.49**.

Якщо група не унімодулярна, то цілком геодезичне одиничне векторне поле так само існує в деяких спеціальних випадках. Нехай e_1 - одиничний вектор, ортогональний до унімодулярного ядра U і оберемо ортонормований базис $\{e_2, e_3\}$ в U що діагоналізує симетричну частину $ad_{e_1}|_U$. Тоді дужки можуть бути виражені як

$$[e_1,e_2]=\alpha e_2+\beta e_3,\quad [e_1,e_3]=-\beta e_2+\delta e_3,\quad [e_2,e_3]=0. \qquad (3)$$

Якщо необхідно, змінюючи e_1 на $-e_1$, ми можемо вважати $\alpha\delta > 0$ і, можливо міняючи місцями e_2 і e_3, ми можемо також вважати[13], що $\alpha \geq \delta$. Повний опис неунімо-

[13] Tsukada K., Vanhecke L. Invariant minimal unit vector fields on Lie groups// Period. Math. Hungar. - 2000. - V. 40. - P. 123 - 133.

дулярних груп, що допускають одиничне ліво-інваріантне цілком геодезичне векторне поле міститься в наступному твердженні.

Теорема 4.51. *Нехай G – неунімодулярна група Лі з базисом, що задовольняє (3). Ліво-інваріантне одиничне векторне поле ξ є цілком геодезичним тільки в наступних випадках:*

- $\beta = \delta = 0$ *і* $\xi = \pm e_3$;
- $\beta = \pm 1, \quad \alpha\delta = -1$ *і* $\pm\xi = \dfrac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} e_2 + \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} e_3.$

Геометричний опис відповідних неунімодулярних груп міститься в **Пропозиції 4.52**.

Добре відомо, що група G унімодулярна тоді і тільки тоді, коли існує дискретна підгрупа Γ що діє на G лівими зсувами вільно і цілком розривно таким чином, що лівий фактор $\Gamma \backslash G$ є компактним[14]. При цьому $\Gamma \backslash G$ є компактний ріманів многовид з тими ж властивостями кривини, що і G. Опущене на фактор одиничне векторне поле має ті ж властивості стосовно мінімальності, гармонійності і тому подібне, що і поле на усій групі G. Тому має сенс постановка задачі про глобальну стійкість цілком геодезичного одиничного векторного поля на компактних факторах унімодулярних груп. Для неунімодулярних груп можлива аналогічна постановка задачі в локальному розумінні.

Теорема 4.57. *Нехай ξ цілком геодезичне лівоінваріантне одиничне векторне поле на компактному факторі 3-вимірної унімодулярної неплоскої групи Лі G з лівоінваріантною метрикою. Тоді $\xi(\Gamma \backslash G)$ класично стійкий цілком геодезичний підмноговид в $T_1(\Gamma \backslash G)$ тоді і тільки тоді, коли G є групою $SO(3)$ або $SU(2)$ сталої кривини $+1$. При цьому ξ є довільним лівоінваріантним полем.*

Що ж до плоских унімодулярних груп, то на них набір класично стійких інваріантних цілком геодезичних векторних полів дещо багатший.

Теорема 4.58. *Нехай ξ цілком геодезичне лівоінваріантне одиничне векторне поле на компактному факторі 3-вимірної плоскої унімодулярної групи G з лівоінваріантною метрикою. Тоді*

- *у випадку $G = E(2)$ для поля ξ, що є паралельним одиничним векторним полем на $E(2)$, підмноговид $\xi(\Gamma \backslash G)$ є стійким цілком геодезичним підмноговидом;*
- *у випадку $G = E(2)$ для поля ξ, що лежить в інтегрованому розподілі, ортогональному паралельному векторному полю на $E(2)$, підмноговид $\xi(\Gamma \backslash G)$ є нестійким цілком геодезичним підмноговидом;*

[14] Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups// Adv. in Math. - 1976. - T. 21. - C. 293 - 329.

• *у випадку* $G = R \oplus R \oplus R$ *фактор* $\Gamma \setminus G$ *є тором* T^3 *і для поля* ξ*, що є довільним одиничним ліво-інваріантним векторним полем, підмноговид* $\xi(T^3)$ *є стійким цілком геодезичним підмноговидом.*

У загальному випадку класичні варіації виводять $\xi(G)$ з класу підмноговидів в T_1G, що породжені лівоінваріантним одиничним векторним полем. Якщо обмежитися лівоінваріантними варіаціями, то ми отримаємо ширший клас класично стійких цілком геодезичних лівоінваріантних одиничних векторних полів (**Теорема 4.60**).

Відповідний результат для неунімодулярних груп наступний.

Теорема 4.61. *Нехай* G *– 3- вимірна неунімодулярна група Лі з лівоінваріантною метрикою. Нехай* ξ *– лівоінваріантне одиничне векторне поле на* G *і* (e_1, e_2, e_3) *– канонічний ортонормований репер(3) її алгебри Лі. Припустимо, що* $\xi(G) \subset T_1G$ *цілком геодезичний підмноговид. Тоді*

• *у випадку* $\beta = \delta = 0$ *поле* $\xi = \pm e_3$ *є паралельним векторним полем і* $\xi(G)$ *є стійким цілком геодезичним підмноговидом в* T_1G *;*

• *у випадку* $\alpha\delta = -1,\ \beta = \pm 1$ *поле* ξ *має вигляд* $\pm\xi = \dfrac{\beta}{\sqrt{1+\alpha^2}} e_2 + \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} e_3$ *і* $\xi(G)$ *є- нестійким цілком геодезичним підмноговидом в* T_1G *;.*

У **п'ятому розділі** ми розглядаємо узагальнення метрики Сасакі на випадок метризованого векторного розшарування зі зв'язністю, погодженою з пошаровою метрикою, над рімановим многовидом. Ми отримуємо аналоги формул Домбровского і Ковальского, вираження для тензора кривини метрики типу Сасакі векторного розшарування і одиничного підрозшарування. Далі ми розглядаємо питання цілком геодезичности перерізів одиничного розшарування підмноговидів у зв'язку з узагальненням метрики Сасакі на цей тип розшарувань. Ми знаходимо другу фундаментальну форму одиничного перерізу (**Лема 5.22**), умови мінімальності і цілком геодезичності перерізу (одиничного) розшарування (**Лема 5.23**). У простому випадку розшарування рангу 2 над поверхнею, ми доводимо аналог Теореми 4.38.

Теорема 5.27. *Нехай* $\pi : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{B}$ *розшарування на кола над поверхнею. Припустимо, що зв'язність в розшаруванні* $\pi : \mathrm{E} \to \mathrm{B}$ *не плоска. Тоді* E_1 *допускає цілком геодезичний одиничний переріз тоді і тільки тоді, коли база* B *локально ізометрична* $(M^2, ds^2 = du^2 + \sin^2 \alpha(u) dv^2)$ *і бі-секційна кривина* щ *зв'язності розшарування* E *задовольняє умові* щ $= \dot{\alpha}(u)$.

В якості природного застосування отриманих результатів, ми розглядаємо нормальне розшарування двовимірного підмноговиду в чотирьох-вимірному рімановому просторі. Бі-секційна кривина зв'язності розшарування в цьому випадку є скрутом Гауса щ_{Γ} підмноговиду.

Теорема 5.29. *Паралельне в нормальній зв'язності одиничне векторне поле є єдиним з точністю до повороту на постійний кут цілком геодезичним полем на підмноговиді $F^2 \subset M^4$ з плоскою нормальною зв'язністю.*

У загальному випадку підмноговиду з неплоскою нормальною зв'язністю має місце аналог Теореми 5.27.

Теорема 5.31. *Нехай F^2 підмноговиду в рімановому просторі M^4 з кривиною K і Гаусовим скрутом $\text{щ}_{\Gamma} \neq 0$. Нехай ξ одиничне нормальне векторне поле на F^2. Тоді підмноговид $\xi(F^2) \subset N_1 F^2$ є цілком геодезичним, якщо F^2 несе локальну метрику обертання у вигляді: $ds^2 = du^2 + \sin^2 \alpha(u) dv^2$, при цьому $\dot{\alpha}(u) = \text{щ}_{\Gamma}(u)$.*

Підмноговиди, що задовольняють умовам Теореми 5.31 існують. У роботі Ю.А. Амінова[15] доведено, що *будь-яка аналітична метрика допускає ізометричне занурення в E^4 у вигляді аналітичної поверхні із заданим аналітичним Гаусовим скрутом.* У сфері $S^4(R)$ поверхня Веронезе $V^2(r)$ при $r = \sqrt[4]{12}$ і $R = \sqrt{12}/3$ так само допускає одиничне нормальне цілком геодезичне векторне поле.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі *розвинені питання геометрії підмноговидів* і внутрішньої геометрії розшарованих просторів з метричної структурою, визначеною спочатку на дотичному і сферичному дотичному розшаруваннях С. Сасакі. Наслідуючи традиції Харківської геометричній школи, основні результати дисертації пов'язані з геометрією підмноговидів в розшарованих просторах і з'ясуванню впливу структури розшарування на геометричні властивості підмноговидів.

В роботі *доведена нова характеризація одиничної сфери*: простір сталої кривини допускає сильно-сферичний розподіл тоді і тільки тоді, коли базовий многовид є одиничною сферою, а сильно - сферичний розподіл одновимірний і збігається з характеристичним векторним полем Сасакієвої структури на $T_1 S^n$.

Розв'язана задача розподілу секційної кривини сферичного розшарування над простором сталої (M^n, c) кривини в залежності від c і показано, що знайдені межі є точними.

Знайдене *уточнення* характеризації проекцій геодезичних дотичного розшарування комплексного і кватерніонного проективних просторів. Побудовано *Берже-деформацію* метрики Сасакі одиничного дотичного розшарування ермітова локаль-

[15] Амнов Ю.А. О поверхностях в E^4 со знакопостоянным Гауссовым кручением// Укр. геом. сб. - 1988. -вып. 31. -С. 3 - 14.

но симетричного простору, знайдені її зв'язність Леві-Чівіта і виведені рівняння геодезичних Берже-деформованої метрики Сасакі. Зокрема, *доведено, що у проекції геодезичної лінії дотичного сферичного Берже-розшарування над ермітовим локально-симетричним многовидом всі геодезичні кривини сталі*. Геодезичні лінії Берже-деформованої метрики Сасакі *дотичного* розшарування подібної властивості не мають.

В якості природного узагальнення лінії на (сферичному) дотичному розшаруванні в роботі *введено поняття підняття підмноговиду бази в (сферичне) дотичне розшарування* за допомогою векторного поля, заданого в точках підмноговиду. У роботі доведено, що *будь-який вкладений підмноговид дотичного розшарування, що трансверсальний до шарів, є образом деякого векторного поля на базі вздовж підмноговиду в ньому*, отримано умови цілком геодезичності підмноговидів такого типу. Зокрема, знайдене *узагальнення* результату П. Вальчака про цілком геодезичні векторні поля сталої довжини, що дозволило прояснити структуру дотичного розшарування многовиду, який допускає цілком геодезичне трансверсально орієнтоване гіпершарування: *поле нормалей сталої довжини шарування породжує* $(n-1)$ *лінійчатий підмноговид в дотичному розшаруванні.*

Підняття цілком геодезичних підмноговидів складають природний клас цілком геодезичних підмноговидів загального типу в дотичному розшаруванні. У роботі *вирішена задача локального опису всіх цілком геодезичних підмноговидів* дотичного розшарування двовимірного многовиду сталої кривини. Зокрема, *підтверджено гіпотезу О. А. Борисенка* про нульовий переріз дотичного розшарування незвідного ріманова многовиду як про єдиний цілком геодезичний підмноговид максимальної вимірності, що трансверсальний до шарів.

Підхід до геометрії одиничного векторного поля, розвинений в дисертації, *істотно відрізняється від класичного* і дозволяє приписати одиничному векторному полю характеристики, запозичені з геометрії підмноговидів, такі як: *секційна кривина, кривина Річі, скалярна кривина векторного поля; середня кривина векторного поля і пов'язане з нею поняття мінімальності, друга фундаментальна форма векторного поля і пов'язане з нею поняття цілком геодезичності і т.п.*

У дисертаційній роботі *закладені основи* геометрії одиничного векторного поля з точки зору геометрії підмноговидів і розвинені питання, пов'язані з його другою фундаментальною формою. *Введені поняття* грубого гесіану і тензора гармонійності одиничного векторного поля. Показано, що тензор гармонійності визначає деформацію індукованої зв'язності на підмноговиді $\xi(M^n)\subset T_1M^n$. Доведено, що друга фундаментальна форма підмноговиду $\xi(M^n)\subset T_1M^n$ повністю визначається цими тензорами і неголономним оператором Вейнгартена (оператором Номідзу). Доведено, що умова мінімальності векторного поля, отримана О. Жиль-Медрано і Е. Лінарес-Фустер, так само виражається через тензори гармонійності і грубий гесіан. У випадку двовимірного многовиду, отримано *вираз для середньої кривини векторного поля в ясних геометричних термінах* і наведено приклади не тільки мінімальних, але і векторних полів сталої середньої кривини. Знайдені приклади не є істотно двовимірними, а узагальнюються щодо вимірності. У роботі знайдені цілі *сімейства векторних полів сталої середньої кривини*. Доведено, що наявність на многовиді цілком геодезичного векторного поля накладає істотне обмеження на його внутрішню геометрію. *Всі двовимірні многовиди, що несуть цілком геодезичне одиничне векторне поле ізометричні деякому класу многовидів з метрикою обертання*. За певних умов можливе їх ізометричне занурення в E^3.

Відомі приклади мінімальних векторних полів доповнені обчисленням їх другої фундаментальної форми. Зокрема, *отримано вираз для середньої кривини поля нормалей ріманова гіпершарування* і показано, що радіальне векторне поле на рімановому многовиді завжди мінімальним, але не цілком геодезичним. Результат про мінімальність поля Хопфа на сферах доповнений доказом їх цілком геодезичності. Відомий результат про мінімальність характеристичного векторного поля Сасакієвої структури істотно посилений доказом його цілком геодезичності. Характеристичне векторне поле Сасакієвої структури належить класу Кілінгових векторних полів одиничної довжини. Доведено, що *на тривимірному многовиді одиничне Кілінгове поле породжує цілком геодезичний підмноговид у* T_1M^3 *в тоді і тільки тоді, коли* M^3 *є або метричним добутком, або Сасакієвим многовидом.* Особливий інтерес представляє Сасакієва структура на непарновимірній сфері, оскільки вона породжується векторним полем Хопфа. У роботі *введене поняття* коваріантно нормального векторного поля і доведено, що векторне поле Хопфа є єдиним в цьому класі векторним полем з цілком геодезичною властивістю. Більше того, доведено, що *векторне поле Хопфа здійснює підняття Сасакієвої просторової форми* S^{2n+1} *кривини 1 до Сасакієва многовиду* T_1S^{2n+1} *у вигляді Сасакієвої просторової форми кривини 5/4*. При цьому доведено, що для поля Хопфа *секційна кривина* підмноговиду $\xi(S^{2n+1}) \subset T_1S^{2n+1}$ змінюється в межах $[1/4, 5/4]$. Доведено, що в більш широкому класі геодезичних векторних полів на сферах, векторні поля з цілком геодезичною властивістю виділяються тим, що є сильно нормальними інваріантними одиничними векторними полями.

Цілком геодезичність одиничного векторного поля в багатьох випадках пов'язана з характеристичним векторним полем природної майже контактної структури на рімановому многовиді. У роботі знайдені всі цілком геодезичні лівоінваріантні одиничні векторні поля та тривимірних групах Лі з лівоінваріантної метрикою і доведено, що *на кожній неплоскій унімодулярній групі цілком геодезичне векторне поле є характеристичним векторним полем природної майже контактної структури*. З метричної точки зору, ці поля є *власними векторами оператора Річі, що відповідають власному значенню 2* (якщо таке існує на групі).

З варіаційної точки зору, мінімальні векторні поля доставляють екстремалі функціоналу об’єму підмноговиду $\xi(M^n)$. У дисертаційній роботі *запропоновано дослідження на стійкість* цілком геодезичних векторних полів щодо класичних нормальних варіацій. Доведено, що *векторне поле Хопфа на тривимірній сфері стійке*, а на сферах вищих вимірностей нестійке відносно класичних варіацій. Отримана в роботі формула класичної другий варіації функціоналу об'єму цілком геодезичного інваріантного векторного поля на тривимірній групі Лі з лівоінваріантною метрикою *не має аналога* в класі поле-варіацій і дозволила дати вичерпну відповідь щодо стійкості інваріантних цілком геодезичних векторних полів на компактних факторах унімодулярних тривимірних груп Лі. Доведено, що *серед неплоских груп тільки* $SU(2)$ *або* $SO(3)$ *кривини 1 несуть стійке цілком геодезичне векторне поле (аналог поля Хопфа).* У роботі знайдені як нестійкі, так і стійкі в класі *ліво-інваріантних варіацій* цілком геодезичні інваріантні векторні поля на тривимірних групах Лі з лівоінваріантною метрикою.

Нарешті, в роботі запропоновано природне узагальнення розглянутих постановок задач на довільне векторне метризоване розшарування з метричною зв'язністю над рімановим многовидом і отримані базові результати щодо такого узагальнення. Доведено аналоги теорем про цілком геодезичність одиничних перерізів в розшаруваннях рангу 2 над двовимірним многовидом і наведені приклади існування таких перерізів.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ

1. Ямпольский А. Экстремальные значения секционной кривизны метрики Сасаки сферического касательного расслоения пространства постоянной кривизны// Укр. геом. сб. -1988. -вып. 32. -С. 127-137.
2. Ямпольский А. Характеризация проекций геодезических метрики Сасаки TCP^n и T_1CP^n // Укр. Геом. Сборник. -1991. -Т. 34. -С. 121 - 126.
3. Ямпольский А. О сильной сферичности метрики Сасаки сферического касательного расслоения.// Укр. геом. сб. -1992. -вып. 35. -С. 150-159.
4. Ямпольский А. О вполне геодезических векторных полях на подмногообразии// Мат. физ., анализ, геометрия. -1994. -Т. 1, № 1-2. -С. 540 - 545.
5. Ямпольский А. О вертикальной сильной сферичности метрики Сасаки сферических касательных расслоений// Мат. физ., анализ, геометрия. -1996. -Т. 3, № 3-4. -С. 446 - 456.
6. Yampolsky A. On intrinsinc geometry of a unit vector field// Comment. Math. Univ. Carol. -2002. -V. 43, №2. -P. 131 - 155.
7. Yampolsky A. On the mean curvature of a unit vector field//Publ. Math. Debrecen. -2002. -V. 60, №1-2. -P. 131 - 155.
8. Yampolsky A. A totally geodesic property of Hopf vector field// Acta Math. Hungar. -2003. -V. 101, № 1-2. -P. 93 - 112.
9. Yampolsky A., On extrinsic geometry of unit normal vector field of Riemannian hyperfoliation// Publ. Math. Debrecen. – 2003. –V. 63, № 4. –P. 555 - 567.
10. Yampolsky A. Powers of the space form curvature operator and geodesics of the tangent bundle/ Saharova E, Yampolsky A. // Укр. Мат. Ж. -2004, -Т.56, №9. -С. 1231 - 1243.
11. Yampolsky A. Transverse totally geodesic submanifolds of the tangent bundle/ Abbassi M.T.K.,Yampolsky A. // Publ. Math. Debrecen. -2004, -V. 64, № 1-2. -P. 129 - 154.
12. Yampolsky A. Full description of totally geodesic unit vector field on Riemannian 2-manifold// Journal of Mathematical Physics, Analysys, Geometry. -2004. -V.1, №3. -P. 355 - 365.

13. Ямпольский А. О вполне геодезических единичных векторных полях на римановом многообразии// Доповіді НАН Укр. -2005. -Т. 3. -С. 32 - 35.
14. Yampolsky A. Totally geodesic submanifolds in the tangent bundle of a Riemannian 2-manifold// Journal of Mathematical Physics, Analysys, Geometry. -2005. -V.1, №1. -P. 116 - 139.
15. Yampolsky A. On special types of minimal and totally geodesic unit vector fields: Proceedings of the Seventh International Conference in Geometry, Integrability and Quantization June 2 - 10, 2005, Varna, Bulgaria/I. Mladenov edt., -P. 292 - 306.
16. Ямпольський А. Геометрія підмноговидів у ріманових просторах/ О.Борисенко, А. Ямпольський, Л. Масальцев, О. Лейбіна // Фундаментальні орієнтири науки і техніки, сер. Математика, інформатика, механіка та астрономія, зб. статей. -2005. -С. 43 - 57.
17. Yampolsky A. Invariant totally geodesic unit vector fields on thredimensional Lie groups// Journal of Mathematical Physics, Analysys, Geometry. -2007. -V.3, №2. -P. 253 - 276.
18. Yampolsky A. Totally geodesic vector fields on pseudo-Riemannian manifolds// Вестник ХНУ им. В.Н. Каразина, сер. Мат., прикл. Мат., мех. -2011. Т. 990. С. 4 - 14.
19. Yampolsky A. On geodesics of tangent bundle with fiberwise deformed Sasaki metric over Kahlerian manifold // Journal of Math. Phys., Analysis, Geom. -2012. -V. 8, №2. -P. 177 - 189.
20. Yampolsky A. Minimal and totally geodesic sections of the unit sphere bundles // Вісник ХНУ, сер. Мат. Прикл. Мат і мех. -2012. -Т. 1030. -С. 54 - 70.
21. Yampolsky A. Stability of left-invariant totally geodesic unit vector fields on three-dimensional Lie groups /Yampolsky A.// Geometry and its Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. -2014. -Vol. 72. -P. 167 - 195
22. Ямпольский А. Об экстремумах секционной кривизны метрики Сасаки сферического касательного расслоения пространства постоянной кривизны/ А. Ямпольский // IX Всесоюзная конференция по геометрии, Кишинев, 1988.
23. Ямпольский А. Характеризация проекций геодезических TCP^n / А. Ямпольский // Всесоюзная конференция по геометрии и анализу. Новосибирск, 1989. Тезисы докладов. -С. 103.
24. Ямпольский А. Об индексе сильной сферичности сферического касательного расслоения/ А. Ямпольский // Всесоюзная встреча молодых ученых, Ростов-на-Дону, 1990.
25. Ямпольский А. Об одной вполне геодезической поверхности в TS^2 / А. Ямпольский // Республиканская научно-методическая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского, 3-8 сентября 1992 го-да. Одесса, 1992. Тезисы докладов. Ч.2, с. 50.
26. Yampolsky A.L. The classification of totally geodesic submanifolds in the tangent bundle of 2-dimensional Riemannian manifold /A. Yampolsky // 1-st Int. conf. on Geometry and topology, Cherkassy, 1995, p. 96-97
27. Yampolsky A. On some surfaces in the tangent bundle./ A. Yampolsky // 4-th Intern. Congress of Geometry, Thessaloniki, May 26- June 1, 1996, p. 139.

28. Yampolsky A. On the curvature of Sasaki metric of tangent sphere bundle of the complex projective space/ A. Yampolsky // 3-rd international conference on Geometry. Cherkassy, 1999, pp 57-58
29. Ямпольский А.Л Гауссова кривизна векторного поля на двумерном многообразии /А. Ямпольский // 4-а Міжнародна конференція з геометрії і топології: Тези доповідей. Черкаси, 2001. -С. 109 - 111.
30. Ямпольский А.Л О вполне геодезических подмногообразиях в касательном расслоении с метрикой Сасаки /А. Ямпольский // 5-а Міжнародна конференція з геометрії і топології пам'яті О.В. Погорелова: Тези доповідей. Черкаси, 2003. -С. 159 - 160.
31. Yampolsky A. Totally geodesic unit vector fields/ A. Yampolsky // 1-st Karazin Scientific Readings: book of abstracts (Kharkiv, June 14 - 16, 2004). -Kharkiv, 2004. -P. 30
32. Ямпольский А. Вполне геодезические инвариантные единичные векторные поля на трехмерных группах Ли/ А. Ямпольский// 6-а міжнародна конференція з геометрії та топології: тези доповідей. -Черкаси, 2005. -С. 97 - 98.
33. Yampolsky A. Minimal and totally geodesic unit vector fields/ A. Yampolsky // Геометрия в целом, топология и их приложения/ международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова. Сборник тезисов, Харьков. 2009. -С. 73 - 74.
34. Ямпольский А.Л. Минимальные единичные нормальные векторные поля на подмногообразии /А.Л. Ямпольский// Международная конференция "Тараповские чтения": Сборник тезисов (Харьков, 17 - 22 апреля 2011). - Харьков, 2011. - С. 155.
35. Yampolsky A. Minimal and totally geodesic unit sections of unit sphere bundles/ A.Yampolsky // Second Int. Workshop on Geometry and Symbolic Computations: Program and Book of Abstracts (University of Haifa, May 15 - 18). -University of Haifa (Israel). -2013. -P. 15.
36. Yampolsky A. Riemannian geometry of sections of sphere bundles/ A. Yampolsky // Крымская международная математическая конференция, Судак, 22 сентября - 4 октября 2013 г.. Сб. тезисов, т. 2, с. 81 - 82.
37. Ямпольский А. Об устойчивости вполне геодезических единичных векторных полей на двумерных многообразиях/ А. Ямпольский // Тези доповідей 8-ї міжнародної конференції з геометрії, топології та викладання геометрії. Черкаси, 9 - 15 вересня 2013 р., с. 34 - 35.
38. Ямпольский А. О единичных векторных полях постоянной секционной кривизны/ А. Ямпольский // Современные проблемы математики, механики и информатики. Международная школа-конференция "Тараповские чтения - 2013", Харьков, 29 сентября - 4 октября 2013 г., сб. тезисов. -С. 123 - 124.
39. Ямпольский А. Конформная модель единичного вполне геодезического векторного поля/ А. Ямпольский //Международная конференция «Геометрия в Одессе — 2015» : тезисы докладов (Одесса, 25 - 28 мая 2015 г.). -Одесса, 2015. -С. 48.

Анотація

Ямпольський О. Л. ***Геометрія підмноговидів у розшарованих просторах***. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія і топологія. Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б.І. Вєркіна НАН України, Харків, 2015.

Дисертація присвячена дослідженню підмноговидів у розшарованих просторах з метрикою Сасакі, здебільшого мінімальних і цілком геодезичних. Знайдені межі зміни секційної кривини метрики Сасакі сферичного розшарування над простором сталої кривини. Знайдено опис проекцій геодезичних ліній дотичного розшарування з метрикою Сасакі класичних просторових форм. Знайдені умови цілком геодезичності підняття підмноговидів бази довільної ковимірності в простір дотичного розшарування під дією векторного поля. Доведена цілком геодезичність перерізу, породженого характеристичним векторним полем Сасакієвої структури на многовиді, зокрема, полем Хопфа на сферах. Доведена стійкість поля Хопфа. Знайдені усі цілком геодезичні одиничні лівоінваріантні векторні поля Лі на тривимірних групах з лівоінваріантною метрикою; даний аналіз їх стійкості в класі загальних і деяких спеціальних варіацій. Виконане узагальнення метрики Сасакі дотичного розшарування на випадок метризованого векторного розшарування зі зв'язністю.

Ключові слова: дотичне розшарування, нормальне розшарування, метрика Сасакі, цілком геодезичний підмноговид, векторне поле, переріз розшарування.

Аннотация

Ямпольский А.Л. ***Геометрия подмногообразий в расслоенных пространствах.*** – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология. Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2015.

Диссертация посвящена изучению подмногообразий в расслоенных пространствах с метрикой Сасаки, в основном минимальных и вполне геодезических, а так же некоторым вопросам внутренней геометрии расслоенных пространств.

Доказано, что во всех размерностях базы, кроме 2, 4 или 8, нельзя получить положительность кривизны сферического расслоения. Найдены границы изменения секционной кривизны расслоения единичных векторов на пространствах постоянной кривизны. Решена задача существования распределения, обладающего свойством сильной сферичности. Найденное одномерное сильно-сферическое распределение является полем Сасакиевой структуры на T_1S^n. Его интегральные траектории

составляют семейство горизонтальных геодезических на T_1S^n. В работе найдена уточненная характеризация проекций невертикальных геодезических (сферического) касательного расслоения над CP^n и HP^n. Выполнена послойная Берже-деформация метрики Сасаки сферического расслоения и найдено ее влияние на характер проекций геодезических этой метрики. Найдена конструкция поднятия подмногообразия базы в (единичное) касательное расслоение и выяснены условия минимальности и вполне геодезичности такого поднятия. Такие поднятия трансверсальны слоям и задаются некоторым векторным полем вдоль подмногообразия. Для случая малой размерности базы $n=2$ дано описание всех вполне геодезических подмногообразий в касательном расслоении над пространством постоянной кривизны.

Основные результаты связаны с геометрией подмногообразий единичного расслоения, порожденных единичным (локальным) векторным полем на римановом многообразии. Найдены разложения Гаусса и Вейнгартена для единичного сечения единичного касательного расслоения риманова многообразия; найдены условия минимальности и вполне геодезичности сечения. Доказана вполне геодезичность сечения, порожденного характеристическим векторным полем Сасакиевой структуры на многообразии, в частности, полем Хопфа на сферах. Найдены условия минимальности и вполне геодезичности единичного векторного поля Киллинга, поля единичных нормалей риманова трансверсально ориентируемого риманова гиперслоения; дано описание таких полей на многообразиях малой размерности. Доказана устойчивость поля Хопфа, как порождающего вполне геодезическое подмногообразие в единичном расслоении 3-х мерной сферы, относительно классических нормальных вариаций. Найдены все вполне геодезические единичные левоинвариантные векторные поля на 3-х мерных группах Ли с левоинвариантной метрикой; проведен их анализ на устойчивость в классе общих классических вариаций и левоинвариантных вариаций.

Выполнено обобщение метрики Сасаки касательного расслоения на случай метризованого векторного расслоения со связностью и доказаны аналоги соответствующих теорем единичного касательного расслоения; в частности, найдены условия существования вполне геодезических единичных сечений, полностью исследованы маломерные случаи и приведены примеры вполне геодезических сечений единичного нормального расслоения.

Ключевые слова: касательное расслоение, нормальное расслоение, метрика Сасаки, вполне геодезическое подмногообразие, векторное поле, сечение расслоения.

Abstract

Yampolskiy O. L. ***Geometry of submanifolds in fiber bundles*****.** – Manuscript.

Doctor’s Thesis on Physics and Mathematics, specialty 01.01.04 - geometry and topology. B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2015.

This research focuses on submanifolds in fiber bundles with Sasaki metric mostly on minimal and totally geodesic. We have found the boundaries of the sectional curvature of the Sasaki metric of the sphere bundle over the space constant curvature. We have found the projections of the geodesic lines of the tangent (sphere) bundle with the Sasaki metric of classical space. We have found the conditions on totally geodesic property of lifts into the tangent bundle by a vector field along the submanifold of arbitrary codimension in the base. We have proved that the submanifold generated by characteristic vector field of the Sasakian structure is totally geodesic, particularly by the Hopf unit vector field on spheres. We have proved stability the Hopf unit vector field with respect to classical normal variations. We have found all totally geodesic left-invariant unit vector fields on three-dimensional Lie groups with left-invariant metric; the analysis of stability with respect to classical and some special variations is given. We have found the generalization of the Sasaki metric to the case of metriziable vector bundles with metric connection and proved the analogs of corresponding results for the unit tangent bundle.

Key words: tangent bundle, normal bundle, Sasaki metric, totally geodesic submanifold, vector field, section of the bundle.