Національна академія наук України
Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна

ДРАЧ Костянтин Дмитрович

УДК 514.764.27

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ОЦІНКИ ДЛЯ ПОВНИХ ГІПЕРПОВЕРХОНЬ У РІМАНОВИХ ПРОСТОРАХ

01.01.04 – геометрія та топологія

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Сумському державному університеті Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:	член-кореспондент Національної академії наук України, доктор фізико-математичних наук, професор **Борисенко Олександр Андрійович,** Сумський державний університет, професор кафедри математичного аналізу і методів оптимізації.
Офіційні опоненти:	доктор фізико-математичних наук, професор **Зарічний Михайло Михайлович,** Львівський національний університет імені Івана Франка, професор кафедри геометрії і топології, декан механіко-математичного факультету;
	доктор фізико-математичних наук, старший науковий співробітник **Максименко Сергій Іванович,** Інститут математики Національної академії наук України (м. Київ), провідний науковий співробітник відділу топології, завідувач відділу топології.

Захист відбудеться « 3 » березня 2016 р. о 14-00 на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 64.175.01 у Фізико-технічному інституті низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: 61103, м. Харків, проспект Науки, 47.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Фізико-технічного інституту низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України за адресою: 61103, м. Харків, проспект Науки, 47.

Автореферат розісланий « 30 » січня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради — Горькавий В. О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

У дисертації вивчаються екстремальні властивості повних опуклих гіперповерхонь обмеженої нормальної кривини у ріманових та лоренцевих многовидах обмеженої секційної кривини.

Актуальність теми. Результати зовнішньої геометрії підмноговидів можна природним чином розділити на два класи: локальні, коли мова йде про локальні властивості об'єкта в деякому околі простору, і глобальні результати «в цілому», коли щось стверджується про об'єкт загалом. Другий клас включає в себе перший, тому отримання результатів «в цілому» є, в деякому розумінні, більш цікавим але складним завданням. Класичні результати диференціальної і ріманової геометрії «в цілому» були отримані в першій половині XX століття в роботах Д. Гільберта, В. Бляшке, О. Д. Александрова, О. В. Погорєлова. Пізніше, ці результати були розвинені і доповнені в роботах Л. Сантало, Г. Каршера, А. Д. Мілки та ін. Сучасний розвиток ідей геометрії «в цілому» можна проілюструвати, серед іншого, доведенням гіпотези Г. Лоусона в 2013 році С. Брендлом[1] і гіпотези Т. Вілмора в 2014 році Ф. К. Маркусом спільно з А. Невесом[2].

У 1972 році Л. Сантало та І. Янеш[3], у зв'язку з питаннями геометричної теорії ймовірностей, дослідили асимптотичну поведінку сім'ї h-*опуклих* областей, тобто опуклих областей з геодезичною кривиною межі не менше 1, що поширюються на весь простір. Вони показали, що на площині Лобачевського для таких областей відношення площі до довжини межі прямує до 1. Узагальнення результату Сантало та Янеша для багатовимірного простору Лобачевського за додаткових обмежень було отримано А. Навейро і А. Тарріо[4]. Використовуючи принципово інший підхід, О. А. Борисенко із співавторами (В. Мікуель, Е. Галлего, Д. І. Власенко та ін.) у цілому циклі робіт[5] вдалося прибрати ці обмеження і перенести результат Сантало і Янеша на випадок сім'ї λ-опуклих областей, тобто опуклих областей, нормальні кривини межі яких не менше λ для фіксованої додатної константи $\lambda \leqslant 1$, що лежать у повних однозв'язних ріманових многовидах від'ємної кривини не менше -1 (*многовиди Адамара*). Ключовим етапом цих досліджень було з'ясування властивостей кутів, що утворюються між межею області та радіальними напрямками із фіксованої точки всередині області (*функція радіального кута*) і доведення запропонованої О. А. Борисенком теореми порівняння, та відповідних точних оцінок, для таких кутів. Аналогічні оцінки у випадку евклідового простору були отримані

[1]Brendle S. Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture / S. Brendle // Acta Mathematica. – 2013. – Vol. 211, No. 2. – P. 177-190.

[2]Marques F. C. Min-Max theory and the Willmore conjecture / F. C. Marques, A. Neves // Annals of Mathematics. – 2014. – Vol. 179, No. 2. – P. 683-782.

[3]Santaló L. A. Averages for Polygons Formed by Random Lines in Euclidean and Hyperbolic Planes / L. A. Santaló, I. Yañez // Journal of Applied Probability. – 1972. – Vol. 9, No. 1. – P. 140-157.

[4]Naveira A. M. Two problems on h-convex sets in the hyperbolic space // A. M. Naveira, A. Tarrío // Archiv der Mathematik. – 1997. – Vol. 68, No. 6. – P. 514-519.

[5]Борисенко А. А. Выпуклые гиперповерхности в многообразиях Адамара / А. А. Борисенко // Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий: Научное издание / А. А. Борисенко – М.: Издательство "Экзамен", 2003 г. – Разд. 7.2. – С. 594-620.

та успішно застосовані в роботах О. А. Борисенка з К. Тененблат[6] та з Є. О. Оліним[7]. Тому цікавим є поширення згаданих результатів для функції радіального кута на випадок невід'ємно викривлених многовидів, а також на вже згадані многовиди Адамара для $\lambda > 1$.

Для просторовоподібних гіперповерхонь у просторі-часі канонічним чином виникає поняття функції гіперболічного кута, що утворюється між орієнтуючим часоподібним векторним полем і спрямованим в майбутнє (часоподібним) нормальним векторним полем до гіперповерхні. У циклі робіт М. Кабалеро, А. Ромеро та Р. Рубіо[8] ця функція була використана для дослідження поверхонь постійної середньої кривини та отримання результатів у дусі С. Н. Бернштейна. Для цього вони суттєво використовували умову її обмеженості. З цього випливає природне бажання перенести результати оцінок радіальних кутів з ріманова випадку на випадок поверхонь обмеженої нормальної кривини у лоренцевих многовидах.

Обмеження нормальної кривини повної гіперповерхні, у свою чергу, накладає обмеження на структуру цієї поверхні «в цілому». Так, В. Бляшке довів[9], що гладкий овалоїд (межа компактної області із внутрішніми точками) в $\mathbb{E}^m$, нормальна кривина якого задовольняє нерівність $k_{\mathrm{n}} \geqslant \lambda > 0$ (λ-опуклий овалоїд), може вільно перекочуватися всередині кулі радіуса $1/\lambda$. У випадку $\lambda \geqslant k_{\mathrm{n}} > 0$, відповідна куля може вільно перекочуватися всередині овалоїда. Цю теорему узагальнювали у багатьох напрямках: для модельних ріманових просторів[10], для загальних ріманових многовидів[11]. Виникає питання про можливий зв'язок теореми Бляшке із теоремою порівняння радіальних кутів для повних поверхонь у просторах постійної кривини і загальних ріманових просторах.

О. А. Борисенком (частково з В. Мікуелем) у серії робіт[12] була отримана точна оцінка для ширини сферичного шару, тобто простору між двома концентричними геодезичними сферами, в який можна помістити замкнену λ-опуклу гіперповерхню, $\lambda \in (0, 1]$, в многовидах Адамара кривини не менше -1. Подібні оцінки показують ступінь близькості відповідної поверхні до сфери. Тому інтерес представляє дослідження сферичності λ-опуклих поверхонь при інших обмеженнях на λ в

[6]Borisenko A. On the total curvature of curves in a Minkowski space / A. A. Borisenko , K. Tenenblat // Israel Journal of Mathematics. – 2012. – Vol.191, No. 2. – P. 755-769

[7]Borisenko A. Curvatures of spheres in Hilbert geometry / A. Borisenko, E. Olin // Pacific Journal of Mathemtics. – 2011. – Vol. 254, No. 2. – P. 257–273.

[8]Caballero M. Complete CMC spacelike surfaces with bounded hyperbolic angle in Generalized Robertson-Walker spacetimes / M. Caballero, A. Romero, R. M. Rubio // Int. J. in Geometric Methods in Modern Phys. – 2010. – Vol. 7. – P. 1-18.; Caballero M. New Calabi-Bernstein results for some elliptic non-linear equations / M. Caballero, A. Romero, R. M. Rubio // Anal. Appl. – 2013. – Vol. 11. – P. 1-13.

[9]Бляшке В. Круг и шар // В. Бляшке. – М.: Наука, 1967. – 232 с.

[10]Karcher H. Umkreise und Inkreise konvexer Kurven in der spharischen und der hyperbolischen Geometrie / H. Karcher // Math. Ann. – 1968. – Vol. 177. – P. 122-132.; Милка А. Д. Об одной теореме Шура – Шмидта / А. Д. Милка // Укр. геом. сб. – 1970. – Т. 8. – С. 95-102.

[11]Howard R. Blaschke's rolling theorem for manifolds with boundary / R. Howard // Manuscripta Math. – 1999. – Vol. 99, No. 4. – P. 471-483.

[12]Борисенко А. А. Выпуклые гиперповерхности в многообразиях Адамара / А. А. Борисенко // Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий: Научное издание / А. А. Борисенко – М.: Издательство "Экзамен", 2003 г. – Разд. 7.2. – С. 594-620.; Borisenko A. A. Convex Hypersurfaces in Hadamard Manifolds / A. A. Borisenko // Complex, Contact and Symmetric Manifolds (Editors O. Kowalski, E. Musso, D. Perrone). – Springer, 2005. – Vol. 234. – P. 27-39

многовидах Адамара і в ріманових просторах невід'ємної кривини. Також виникає питання про ступінь сферичності та отримання відповідних точних оцінок для повних гіперповерхонь *затисненої нормальної кривини*, тобто нормальна кривина яких для деяких додатних констант λ_1, λ_2 задовольняє нерівність $\lambda_2 \geqslant k_{\mathrm{n}} \geqslant \lambda_1$. Із цими питаннями тісно пов'язані дослідження зі стабільності для гіперповерхонь, у яких матриця другої фундаментальної форми в кожній точці майже пропорційна до одиничної матриці (*практично омбілічні поверхні*). Результати у цьому напрямку були отримані О. В. Погорєловим, В. І. Дискантом, Р. Шнайдером, К. Ліхтвейсом, Ж. Шойером та ін.

Одним із важливих розділів глобальної геометрії гіперповерхонь є результати, що пов'язані з мінімізацією деяких геометричних величин за умови обмеження (фіксації) інших. Мабуть історично першим питанням такого роду є відома *ізопериметрична задача*. Вона полягає в наступному: максимізувати об'єм компактної області для заданої площі межі. У $\mathbb{E}^m$ розв'язком класичної ізопериметричної задачі є куля. Ця задача уточнювалась і нетривіально узагальнювалась багатьма математиками, такими, як Я. Штейнер, К. Брунн, Г. Мінковський, Т. Боннезен, О. Д. Александров та іншими. Із сучасного розвитку досліджень у цій області відмітимо нещодавнє розв'язання гіпотези подвійної бульбашки[13] щодо знаходження зв'язної поверхні в $\mathbb{E}^3$ мінімальної площі, що обмежує два заданих об'єми. Поряд із класичною постановкою має місце і *обернена ізопериметрична задача* з *мінімізації* об'єму і знаходження екстремальної поверхні. Для довільних областей ця задача має тривіальний розв'язок. Одними із природних обмежень, з яких витікає нетривіальна відповідь, є обмеження на кривину поверхні. Єдиний результат такого типу був отриманий Р. Ховардом і А. Трайбергсом[14]. У своїй роботі автори повністю розв'язали обернену ізопериметричну задачу у $\mathbb{E}^2$ для замкнених вкладених кривих кривини $|k| \leqslant 1$ (взагалі кажучи, не опуклих) за деяких обмежень на довжину. У цьому світлі інтерес представляє дослідження оберненої ізопериметричної задачі у класі повних λ-опуклих гіперповерхонь. Відзначимо, що в $\mathbb{E}^m$ таке питання перегукується із так званою *проблемою Бляшке – Лебега* з мінімізації об'єму області, межа якої є гіперповерхня постійної ширини d. У вимірностях більших двох ця проблема є досі відкритою. Зауважимо, що при $m = 2$ і $m = 3$, з необхідністю, розв'язанням задачі є повна $1/d$-опукла гіперповерхня[15].

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана на кафедрі математичного аналізу і методів оптимізації Сумського державного університету. Вона є частиною науково-дослідницьких робіт: "*Глобальна геометрія підмноговидів у ріманових і фінслерових просторах*" (номер державної реєстрації 0109U001454), "*Глобальна геометрія і топологія многовидів і*

---

[13] Hutchings M. Proof of the double bubble conjecture / M. Hutchings, F. Morgan, M. Ritoré, A. Ros // Annals of Mathematics. – 2002. – Vol. 155, No. 2 – P. 459-489.

[14] Howard R. A reverse isoperimetric inequality, stability and extremal theorems for plane curves with bounded curvature / R. Howard, A. Treibergs // Rocky Mountain J. Math. – 1995. – Vol. 25, No. 2. – P. 635-684.

[15] Anciaux H. On the Three-Dimensional Blaschke-Lebesgue Problem / H. Anciaux, B. Guilfoyle // Proc. Amer. Math. Soc. – 2011. – Vol. 139. – P. 1831-1839.; Harrell E. A direct proof of a theorem of Blaschke and Lebesgue / E. Harrell // J. Geom. Anal. – 2002. – Vol. 12, No. 1. – P. 81-88.

підмноговидів у ріманових і фінслерових просторах” (номер державної реєстрації 0111U010008).

Мета і задачі дослідження. *Метою* дисертаційної роботи є розвиток теорії повних опуклих гіперповерхонь обмеженої нормальної кривини та їх нерегулярних аналогів у ріманових і лоренцевих просторах.

Об'єктом дослідження є повні λ- та λ_1, λ_2-опуклі гіперповерхні в ріманових і лоренцевих многовидах та пов'язані з ними геометричні величини (функції радіальних (гіперболічних) кутів, площі, об'єми і т.і.).

Предметом дослідження є будова та властивості повних λ- та λ_1, λ_2-опуклих гіперповерхонь в ріманових і лоренцевих многовидах.

Основні задачі дослідження полягають у наступному:

1. Дослідити поняття функції радіального кута, що визначається для повних гладких λ-опуклих гіперповерхонь по відношенню до деякої фіксованої точки всередині області, що обмежена цією поверхнею, у ріманових многовидах секційної кривини; порівняти поведінку цієї функції із відповідною функцією для цілком омбілічних гіперповерхонь кривини λ в модельних ріманових просторах. Виконати аналогічне дослідження для λ-увігнутих гіперповерхонь.
2. Користуючись результатами попереднього пункту, дослідити границі, в межах яких можуть змінюватись значення радіальних кутів λ-опуклих гіперповерхонь, та отримати відповідні точні оцінки.
3. Перенести результати пунктів 1 і 2 на випадок просторовоподібних гіперповерхонь, нормальна кривина яких задовольняє нерівність $k_{\mathrm{n}} \leqslant \lambda$, та які лежать в лоренцевих многовидах додатньої часоподібної секційної кривини.
4. У модельних ріманових многовидах постійної секційної кривини дослідити зв'язок результатів порівняння радіальних кутів з пункту 1 та теореми вміщення Бляшке. З'ясувати можливість поширення цього зв'язку на випадок ріманових многовидів обмеженої знакосталої кривини.
5. Знайти точні границі, в межах яких може змінюватись ширина $R - r$ і відношення радіусів R/r сферичного шару, в який можна помістити повну λ- або λ_1, λ_2-опуклу гіперповерхню в модельних ріманових просторах; дослідити питання стабільності для λ_1, λ_2-опуклих гіперповерхонь в цих просторах. Перенести оцінки, що були отримані для λ-опуклих поверхонь, на випадок ріманових многовидів обмеженої знакосталої кривини.
6. У двовимірних просторах постійної кривини дослідити питання щодо мінімізації площі області, яка може бути обмежена замкненою вкладеною λ-опуклою кривою даної довжини; отримати відповідні обернені ізопериметричні нерівності; знайти і дослідити властивості екстремальної кривої; отримати можливі наслідки із доведених нерівностей.

Методи дослідження. У роботі використані методи загальної ріманової та лоренцевої геометрій, теорії звичайних диференціальних рівнянь, апарат порівняння в рімановій та лоренцевій геометріях. У заключному розділі роботи задля отримання обернених ізопериметричних нерівностей було широко використано геометричну теорію оптимального управління та принцип максимуму Л. С. Понтрягіна.

Наукова новизна отриманих результатів. Всі отримані в дисертаційній роботі результати є новими. Основні результати полягають в наступному:

1. Доведено теорему порівняння радіальних кутів для гладких вкладених λ-опуклих гіперповерхонь у повних ріманових многовидах обмеженої секційної кривини. Доведено аналогічні результати для λ-увігнутих гіперповерхонь.
2. Отримано точні оцінки величин радіальних кутів, що побудовані для повної гладкої вкладеної λ-опуклої гіперповерхні відносно точки p; показано, що всі ці кути обмежені константою, що залежить від λ, обмежень для секційних кривин многовиду та відстані від p до гіперповерхні.
3. У випадку лоренцевого простору-часу отримано формулу, що зв'язує нормальну кривину просторовоподібної гіперповерхні, функцію гіперболічного кута для неї і нормальну кривину часових зрізів (аналог леми О. А. Борисенка у рімановому випадку). За допомогою цієї формули для простору-часу додатної часоподібної секційної кривини і повної просторовоподібної гіперповерхні кривини $k_{\mathrm{n}} \leqslant \lambda$ отримано результати, аналогічні викладеним у пунктах 1 і 2. Зокрема, показано, що функція гіперболічного кута завжди обмежена зверху константою, що залежить тільки від λ і обмежень для секційних кривин простору-часу.
4. У ріманових модельних просторах постійної кривини доведено еквівалентність теореми порівняння радіальних кутів і теореми прокатування (вміщення) Бляшке для повних гладких вкладених λ-опуклих гіперповерхонь. Отримано узагальнення теореми Бляшке для загальних ріманових многовидів. Досліджено аналогічні питання для λ-увігнутих гіперповерхонь.
5. Отримано точні оцінки для товщини сферичного шару, в який можна помістити повну λ_1, λ_2-опуклу гіперповерхню в ріманових модельних просторах; в евклідовому випадку отримано точну оцінку для відношення радіусів R/r цього шару. Оцінки для товщини шару, що були отримані у λ-опуклому випадку, перенесені на ріманові многовиди обмеженої знакосталої кривини.
6. Вперше отримано обернені ізопериметричні нерівності для замкнених вкладених λ-опуклих кривих, що лежать на двовимірних площинах постійної кривини. Зокрема, продемонстровано, що єдиним розв'язком оберненої ізопериметричної задачі у відповідному класі об'єктів є λ-опукла луночка. Як наслідок, доведено дуальні нерівності на сфері $\mathbb{S}^2$, отримано нове доведення теореми Бляшке – Лебега у $\mathbb{E}^2$ і теореми Сантало – Янеша в $\mathbb{H}^2$.

Практичне значення одержаних результатів. Робота носить теоретичний характер. Результати можуть бути використані для подальших досліджень в області опуклої геометрії. Матеріали, що містяться в дисертації, можуть бути включені до спецкурсів із диференціальної та ріманової геометрії, теорії оптимізації та варіаційного числення для студентів старших курсів університетів.

Особистий внесок здобувача. Постановки задач належать науковому керівникові – член-кореспонденту Національної академії наук України, д. ф.-м. н., професору О. А. Борисенку. Узагальнення деяких постановок належать здобувачеві. Реалізація доведень усіх тверджень, що виносяться на захист, проведена здобувачем особисто.

Апробація результатів дисертації. Матеріали дисертації доповідались та обговорювались на IV науковій конференції для студентів та аспірантів «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харків, 2010), міжнародній конференції «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» (Харків, 2011), міжнародній конференції Differential Geometry (Bedlewo, Poland, 2012), науково-технічній конференції IMA::2013 (Суми, 2013), міжнародній конференції Differential Geometry and its Applications (Brno, Czech Republic, 2013), 8-ій міжнародній конференції з геометрії, топології та викладання геометрії (Черкаси, 2013), International Congress of Mathematicians 2014 (Seoul, Republic of Korea, 2014), 3rd Heidelberg Laureate Forum (Heidelberg, Germany, 2015), на семінарі у рамках Research Term in Analysis and Geometry in Metric Spaces (Madrid, Spain, 2015), семінарі факультету математичних наук університету Цинциннаті, США (керівник семінару – проф. Н. Шанмугалінгам, 2015), семінарі кафедри математичного аналізу і методів оптимізації Сумського державного університету (керівники – член-кореспондент НАН України, д. ф.-м. н., професор О. А. Борисенко і д. ф.-м. н., професор К. Г. Малютін, 2013), семінарі кафедри оптимального керування ХНУ ім. В. Н. Каразіна (керівник – д. ф.-м. н., професор В. І. Коробов, 2015), а також на засіданнях Харківського міського геометричного семінару (керівники – д. ф.-м. н., проф. О. А. Борисенко та д. ф.-м. н., проф. Ю. А. Амінов).

Публікації. Результати, що представлені в дисертації, опубліковані у 7 статтях [1] – [7] у фахових наукових виданнях, з них 2 статті без співавторів, і в 6 тезах конференцій [8] – [13], з них 2 – без співавторів. У всіх статтях у співавторстві постановка задачі належить співавтору – науковому керівникові, проф. О. А. Борисенко, доведення тверджень – здобувачеві.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків і списку використаних джерел, що включає 84 найменування. Робота викладена на 168 сторінках, список використаних першоджерел займає 9 сторінок. Робота містить 14 ілюстрацій, з яких жодна не займає окремої сторінки. Основні результати, що виносяться на захист, викладені в розділах 2 – 4.

Автор висловлює щиру подяку своєму вчителеві та науковому керівникові – член-кореспонденту НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору Олександру Андрійовичу Борисенку – за постановки задач, підтримку та за геометрію, на красі якої навчив розумітися. Автор глибоко вдячний колективу кафедри геометрії ХНУ ім. В. Н. Каразіна та геометрам ФТІНТ НАН України за всебічну підтримку та теплу, дружню атмосферу, а також дякує своїй любій родині за те, що вона завжди поруч.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

Робота складається зі вступу, чотирьох розділів і висновків. У **вступі** обґрунтована актуальність теми, зроблено огляд існуючого стану проблеми, формулюються мета, задачі, об'єкт, предмет і методи дослідження, розкривається зв'язок з науковими планами та темами, характеризується наукова новизна результатів, їхнє практичне значення, описується особистий вклад здобувача, наведено інформацію про апробацію результатів дисертації та публікації за темою роботи.

Перший розділ дисертаційної роботи містить всі необхідні у подальшому викладі означення та результати з теорії ріманових та лоренцевих многовидів – означення нормальної кривини гіперповерхні у рімановому (просторовоподібної гіперповерхні – у лоренцевому) многовиді, опис цілком омбілічних гіперповерхонь у модельних ріманових просторах сталої кривини (у просторі де Сіттера), теореми порівняння метрик у полярній системі координат, теореми порівняння для нормальних кривин сфер (часових перерізів). Окрема увага приділяється обговоренню ключового об'єкта роботи – сильно опуклих гіперповерхонь та областей.

Нехай M^{m+1} – повний однозв'язний ріманів многовид. Скрізь далі позначатимемо через D_Σ замкнену опуклу область в M^{m+1}, що обмежена гіперповерхнею Σ (якщо така область існує). Тобто, за означенням D_Σ, маємо $\partial D_\Sigma = \Sigma$.

Означення 1.9. Для даних невід'ємних констант λ, λ_1 та λ_2, C^r-гладка ($r \geqslant 2$) гіперповерхня $\Sigma \subset M^{m+1}$ називається *λ-опуклою* (відповідно, *λ_1, λ_2-опуклою*), якщо існує поле нормалей ν до Σ, відносно якого всі нормальні кривини $k_{\mathrm{n}}^{\nu}(p, X)$ для будь-якої точки $p \in \Sigma$ та дотичного напрямку $X \in T_p\Sigma$ задовольняють

$$k_{\mathrm{n}}^{\nu}(p, X) \geqslant \lambda \quad (\text{відповідно, } \lambda_2 \geqslant k_{\mathrm{n}}^{\nu}(p, X) \geqslant \lambda_1).$$

Якщо Σ не є гладкою, то у модельних просторах сталої кривини λ-опуклість (відповідно, λ_1, λ_2-опуклість) можна визначити синтетичним чином. Втім, синтетичне означення збігається з поданим вище у випадку гладких поверхонь. Позначимо через $\mathcal{F}_\lambda$ – повну цілком омбілічну гіперповерхню кривини λ у модельному рімановому многовиді $M^{m+1}(c)$ постійної секційної кривини c.

Означення 1.10. Гіперповерхня $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ називається *λ-опуклою*, якщо вона локально опукла у кожній своїй точці, та через будь-яку точку $p \in \Sigma$ проходить цілком омбілічна гіперповерхня $\mathcal{F}_\lambda \subset M^{m+1}(c)$ кривини $\lambda \geqslant 0$ така, що у деякому околі точки p гіперповерхня Σ лежить в області $D_{\mathcal{F}_\lambda}$.

Аналогічним чином, локально опукла у всіх своїх точках гіперповерхня $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ називається *λ_1, λ_2-опуклою*, якщо через будь-яку точку $p \in \Sigma$ проходять дві цілком омбілічні гіперповерхні $\mathcal{F}_{\lambda_1}$, $\mathcal{F}_{\lambda_2}$ такі, що у деякому відкритому околі $U_p \subset M^{m+1}(c)$ точки p виконується включення

$$D_{\mathcal{F}_{\lambda_2}} \subset \Sigma \cap U_p \subset D_{\mathcal{F}_{\lambda_1}}.$$

Область D_Σ називається *λ-опуклою* (λ_1, λ_2-опуклою), якщо її межа Σ є λ-опуклою (λ_1, λ_2-опуклою) гіперповерхнею.

Синтетичне означення λ-опуклості можна дати і у загальних ріманових многовидах[16].

Означення 1.13. $0, \lambda$-опукла гіперповерхня (область) називається *λ-увігнутою* гіперповерхнею (областю).

Таким чином, λ-опуклість, відповідно, λ-увігнутість означає, що гіперповерхня локально опукла, та у кожній її точці існує зовнішнє, відповідно, внутрішнє локально опорна (у гладкому випадку, дотична) цілком омбілічна гіперповерхня $\mathcal{F}_\lambda$. λ_1, λ_2-опуклість при $\lambda_1 \neq 0$ означає, що гіперповерхня локально опукла та у кожній своїй точці затиснута між двома дотичними у цій точці цілком омбілічними поверхнями $\mathcal{F}_{\lambda_1}$ та $\mathcal{F}_{\lambda_2}$.

У кінці першого розділу наведено деякі відомі властивості сильно опуклих гіперповерхонь. У останньому підрозділі викладено необхідні означення та факти з теорії оптимального керування (принцип максимуму Понтрягіна, необхідна умова Лежандра – Клебша), які застосовуються для одержання результатів розділу 4.

У **другому розділі** наводиться означення функції радіального кута гіперповерхні у рімановому многовиді та її аналога – функції гіперболічного кута просторовоподібної гіперповерхні у просторі-часі, і доводяться теореми порівняння та оцінки таких кутів.

Нехай $\Sigma \subset M^{m+1}$ – гладка гіперповерхня, що лежить в області регулярності полярної системи координат у рімановому многовиді M^{m+1} с центром у точці p. В цій області функція відстані $d_p(\cdot) = \mathrm{dist}(p, \cdot)$ є гладкою, і однозначно визначено гладке одиничне поле ∇d_p градієнту цієї функції.

Позначимо через ν – одиничне нормальне векторне поле до Σ.

Означення 2.1. Функція $\varphi\colon \Sigma \to [0, \pi]$, що задається співвідношенням

$$\cos\varphi = \langle \nabla d_p,\, \nu \rangle\,,$$

називається *функцією радіального кута* для гіперповерхні Σ з вибраним на ній нормальним векторним полем ν по відношенню до центру p полярної системи координат.

Таким чином, функція φ визначається парою p та Σ з вибраною на ній орієнтацією (що задається ν).

Позначимо через τ_p обмеження функції d_p на гіперповерхню Σ:

$$\tau_p\colon \Sigma \to (0, +\infty), \quad \tau_p(q) = d_p(q) \ \text{ для всіх } \ q \in \Sigma.$$

Також, нехай $\mathrm{inj}_M(p)$ позначає радіус ін'єктивності многовиду M у точці p.

Одним із центральних результатів дисертаційної роботи є наступна теорема порівняння радіальних кутів.

[16]Borisenko A. A. Convex sets in Hadamard manifolds / A. A. Borisenko // Differential geometry and its applications. – 2002. – Vol. 17. – P. 111-121.

Теорема 2.6. *Нехай M^{m+1} – повний однозв'язний гладкий $(m+1)$-вимірний ($m \geqslant 1$) ріманів многовид, всі секційні кривини K_σ якого у кожній точці та уздовж кожної двовимірної площини $\sigma \subset TM$ задовольняють нерівність*

$$K_\sigma \geqslant c$$

для деякої константи c. Та нехай області $D_\Sigma \subset M^{m+1}$, $D_{\mathcal{F}_\lambda} \subset M^{m+1}(c)$ та точки $p \in D_\Sigma$, $p_\lambda \in D_{\mathcal{F}_\lambda}$ вибрані таким чином, що Σ – гладка λ-опукла гіперповерхня з $\lambda > 0$ відносно напрямленого у D_Σ поля нормалей ν, та яка лежить у кулі радіуса $\operatorname{inj}_M(p)$ з центром в точці p, $\mathcal{F}_\lambda$ – цілком омбілічна гіперповерхня кривини λ відносно внутрішнього поля нормалей ν_λ і $\operatorname{dist}(p, \Sigma) = \operatorname{dist}(p_\lambda, \mathcal{F}_\lambda) \neq 0$. Тоді для φ і φ_λ — функцій радіальних кутів, відповідно, гіперповерхонь Σ та $\mathcal{F}_\lambda$ по відношенню до точок p та p_λ і нормальних полів $-\nu$ та $-\nu_\lambda$ — у тих точках $q \in \Sigma$ та $q_\lambda \in \mathcal{F}_\lambda$, для яких

$$\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda),$$

виконується нерівність

$$\cos\varphi(q) \geqslant \cos\varphi_\lambda(q_\lambda).$$

Також доведено дуальну до теореми 2.6 теорему порівняння радіальних кутів для λ-увігнутих областей у ріманових многовидах кривини $K_\sigma \leqslant c$ (**теорема 2.9**).

Із теорем 2.6 та 2.9 легко витікають теореми порівняння для опорних функцій λ-опуклих та, відповідно, λ-увігнутих гіперповерхонь (**наслідок 2.8** та друга частина теореми 2.9 у тексті роботи).

Видається можливим безпосередньо дослідити поведінку та оцінити максимум функції радіального кута у випадку сфер (**лема 2.10**), що разом із теоремою порівняння 2.6 уможливлює отримання точної оцінки зверху для цієї функції у загальному випадку. А саме, була доведена

Теорема 2.11. *Нехай $M^{m+1}(c)$ – модельний ріманів простір кривини c, Σ – регулярна класу C^2 повна вкладена λ-опукла ($\lambda > 0$) гіперповерхня у $M^{m+1}(c)$, $p \in D_\Sigma$ – точка всередині області, що обмежена Σ, $d = \operatorname{dist}(p, \Sigma)$ та φ – функція радіального кута гіперповерхні Σ по відношенню до точки p та зовнішнього поля нормалей. Тоді:*

1. Якщо $c = 0$, тобто охопний простір є евклідовим простором $\mathbb{E}^{m+1}$, то функція радіального кута задовольняє нерівність

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{\frac{2d}{R_\lambda} - \frac{d^2}{R_\lambda^2}} \geqslant \frac{d}{R_\lambda}.$$

2. Якщо $c = -k^2 < 0$, тобто охопний простір є простором Лобачевського $\mathbb{H}^{m+1}(-k^2)$ і $\lambda > k$, то функція φ задовольняє

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\operatorname{sh}^2 k(R_\lambda - d)}{\operatorname{sh}^2 kR_\lambda}} \geqslant \frac{\operatorname{sh} k\, d}{\operatorname{sh} kR_\lambda}. \tag{1}$$

3. Якщо $c = k^2 > 0$, тобто охопний простір є сферичним простором $\mathbb{S}^{m+1}(k^2)$, то для функції φ виконується оцінка

$$\cos\varphi \geqslant \sqrt{1 - \frac{\sin^2 k(R_\lambda - d)}{\sin^2 kR_\lambda}} \geqslant \frac{\sin k\,d}{\sin kR_\lambda}. \qquad (2)$$

У всіх оцінках вище R_λ – радіус цілком омбілічної сфери кривини, що дорівнює λ, у просторах сталої кривини $M^{m+1}(c)$.

Аналогічне твердження має місце і для ріманових многовидів знакосталої секційної кривини.

Теорема 2.12. *Нехай $\Sigma \subset M^{m+1}$ – повна вкладена C^2-гладка λ-опукла ($\lambda > 0$) гіперповерхня у повному однозв'язному $(m+1)$-вимірному рімановому многовиді M^{m+1}, $p \in D_\Sigma$ – точка всередині Σ на відстані $d = \mathrm{dist}(p, \Sigma)$ від Σ, φ – функція радіального кута для Σ, p та зовнішнього поля нормалей. Тоді:*

1. Якщо секційні кривини K_σ многовиду M^{m+1} уздовж будь-якої двовимірної площини σ задовольняють нерівність $0 \geqslant K_\sigma \geqslant -k^2$, та $\lambda > k > 0$, то виконується нерівність (1).

2. Якщо секційні кривини многовиду M^{m+1} задовольняють нерівність $K_\sigma \geqslant k^2$ для додатного k, а область D_Σ лежить у кулі радіуса $\mathrm{inj}_M(p)$ з центром в точці p, то для φ вірною є оцінка (2).

У ході досліджень був знайдений тісний зв'язок між теоремами порівняння для радіальних кутів та теоремою вміщення (прокачування) Бляшке[17]. У роботі доводиться, що із виконання теореми 2.6 для деякої фіксованої точки p випливає "одноточковий" варіант теореми Бляшке (**лема 2.16**). Втім, у просторах сталої кривини було продемонстровано, що для λ-опуклих областей теорема Бляшке еквівалентна теоремі порівняння радіальних кутів. А саме, була доведена

Теорема 2.17. *Нехай $D_\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ – замкнена опукла область із непорожньою внутрішністю та гладкою межею. Тоді наступні умови еквівалентні:*

1. D_Σ – λ-опукла область ($\lambda > 0$, при цьому для $c < 0$ вважаємо, що $\lambda > \sqrt{-c}$).

2. Для будь-яких точок $p \in D_\Sigma \backslash \Sigma$ та $p_\lambda \in D_{\mathcal{S}_\lambda}$ таких, що $\mathrm{dist}(p, \Sigma) = \mathrm{dist}(p_\lambda, \mathcal{S}_\lambda)$ для відповідних p, Σ та $p_\lambda, \mathcal{S}_\lambda$ функцій радіальних кутів φ та φ_λ виконується нерівність

$$\varphi(q) \leqslant \varphi_\lambda(q_\lambda)$$

у тих точках $q \in \Sigma$ та $q_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda$, для яких $\tau_p(q) = \tau_{p_\lambda}(q_\lambda)$.

3. Для будь-якої точки $s \in \Sigma$ існує сфера $\mathcal{S}_\lambda(s)$ кривини, що дорівнює λ, така, що $s \in \mathcal{S}_\lambda(s)$ та

$$D_\Sigma \subset D_{\mathcal{S}_\lambda(s)}.$$

[17] Бляшке В. Круг и шар / В. Бляшке. – М.: Наука, 1967. – 232 с.

Було показано, що має місце і дуальна теорема (**теорема 2.19**) для λ-увігнутих областей.

За допомогою теорем порівняння 2.6 та 2.9 було доведено наступне узагальнення теореми Бляшке на випадок ріманових многовидів.

Теорема 2.20. *Нехай M^{m+1} – повний однозв'язний гладкий $(m+1)$-вимірний ріманів многовид, секційні кривини якого уздовж кожної двовимірної площини $\sigma \subset TM$ і в кожній точці задовольняють нерівність*

$$K_\sigma \geqslant c \quad (\textit{або } K_\sigma \leqslant c);$$

$\Sigma \subset M^{m+1}$ – повна гладка вкладена λ-опукла (увігнута) гіперповерхня (при $c < 0$ вважаємо, що $\lambda > \sqrt{-c}$), яка лежить в кулі радіуса $\operatorname{inj}_M/2$, де inj_M – радіус ін'єктивності многовиду M; тоді для будь-якої точки $s \in \Sigma$ виконується

$$D_\Sigma \subset D_{\mathcal{S}(s,R_\lambda)} \quad (\textit{відповідно, } D_\Sigma \supset D_{\mathcal{S}(s,R_\lambda)})$$

де $\mathcal{S}(s, R_\lambda) \subset M^{m+1}$ – геодезична сфера, що проходить через точку s, радіуса R_λ, та яка має з Σ у точці s однакові зовнішні нормалі (тут R_λ – радіус кола кривини λ у $M^2(c)$).

У заключному підрозділі 2.5 другого розділу деякі раніше отримані результати для функції радіального кута переносяться на її аналог у лоренцевих многовидах – функцію гіперболічного кута.

Нехай M^{m+1} – простір-час та $N \subset M^{m+1}$ – деяка фіксована гладка ахронічна просторовоподібна гіперповерхня. Позначимо через $\mathcal{I}^+(N)$ максимальну область у хронологічному майбутньому N, в якій лоренцева функція відстані $d_N(\cdot) = \operatorname{dist}(N, \cdot)$ є гладкою. Тоді у цій області визначено одиничне напрямлене в минуле часоподібне векторне поле ∇d_N градієнту цієї функції.

Означення 2.2. Для довільної просторовоподібної гіперповерхні $\Sigma \subset \mathcal{I}^+(N)$, для якої ν – напрямлене в минуле одиничне поле нормалей, функція $\varphi\colon \Sigma \to [0, +\infty)$, яка визначається співвідношенням

$$\operatorname{ch}\varphi = -\left\langle \nabla d_N, \nu \right\rangle,$$

називається *функцією гіперболічного кута* для Σ по відношенню до N.

Для функції гіперболічного кута доводиться формула, що зв'язує нормальну кривину гіперповерхні, функцію гіперболічного кута та нормальну кривину ліній рівня функції відстані (часові перерізи) (**лема 2.5**). Ця формула є лоренцевим аналогом формули О. А. Борисенка у рімановій геометрії[18]. За допомогою цієї формули доведено теорему порівняння для гіперболічних кутів. Вона є лоренцевим аналогом теореми 2.6. Нагадаємо, що функція τ_N є обмеженням функції d_N на гіперповерхню Σ, та позначимо через $\mathbb{S}_1^{m+1}(k^2)$ простір де Сіттера постійної додатної кривини k^2, $k > 0$, а через $\mathcal{S}_0$ – нульовий часовий переріз в ньому.

[18]Borisenko A. A. Convex sets in Hadamard manifolds / A. A. Borisenko // Differential geometry and its applications. – 2002. – Vol. 17. – P. 111-121.

Теорема 2.24. *Нехай M^{m+1} – $(m+1)$-вимірний простір–час, N – гладка опукла ахронічна просторовоподібна гіперповерхня в M з $\mathcal{I}^+(N) \neq \emptyset$. Припустимо, що вздовж будь-якої часоподібної напрямленої у майбутнє геодезичної $\gamma\colon [0, s_0) \to \mathcal{I}^+(N)$, яка випущена ортогонально N, секційні кривини K_{σ_s} многовиду M^{m+1} задовольняють*

$$K_{\sigma_s} \geqslant k^2,$$

для деякої додатної константи k та всіляких двовимірних часоподібних площин σ_s, що містять $\dot\gamma(s)$, $s \geqslant 0$. Нехай $\Sigma \subset \mathcal{I}^+(N)$ – гладка повна просторовоподібна гіперповерхня, нормальні кривини k_{n}^{ν} якої відносно напрямленого в минуле нормального векторного поля ν задовольняють

$$k_{\mathrm{n}}^{\nu} \leqslant \lambda, \quad \lambda > 0,$$

$\Sigma_\lambda \subset \mathbb{S}_1^{m+1}(k^2)$ – цілком омбілічна гіперповерхня кривини λ така, що $\operatorname{dist}(N, \Sigma) = \operatorname{dist}(\mathcal{S}_0, \Sigma_\lambda)$. Тоді для φ та φ_λ – функцій гіперболічного кута для Σ та Σ_λ по відношенню до, відповідно, N та $\mathcal{S}_0$ – у тих точках $q \in \Sigma$ та $q_\lambda \in \Sigma_\lambda$, для яких

$$\tau_N(q) = \tau_{\mathcal{S}_0}(q_\lambda),$$

виконується нерівність

$$\operatorname{ch}\varphi(q) \leqslant \operatorname{ch}\varphi_\lambda(q_\lambda).$$

Аналогічно рімановому випадку, функцію $\operatorname{ch}\varphi_\lambda$ можна оцінити зверху явно (**лема 2.23**). За допомогою теореми порівняння 2.24 та леми 2.23 отримано точні оцінки величин гіперболічних кутів просторовоподібних гіперповерхонь кривини $k_{\mathrm{n}}^{\nu} \leqslant \lambda$ (**теорема 2.25**). Виявляється, що у лоренцевому випадку гіперболічний кут можна оцінити зверху константою, що не залежить від відстані до N (на відміну від ріманова випадку, де в правій частині оцінок теореми 2.11 фігурує відстань d). А саме, доведено наступну теорему:

Теорема 2.26. *В умовах теореми 2.24, функція гіперболічного кута φ для Σ по відношенню до N завжди обмежена, та для неї виконується нерівність*

$$\operatorname{sh}\varphi \leqslant \frac{\lambda}{k}.$$

Більше того, наведена оцінка є точною.

Третій розділ дисертаційної роботи присвячений оцінці ступеня близькості заданої сильно опуклої гіперповерхні до сфери у ріманових просторах. Таку оцінку, зокрема, можна провести шляхом оцінки параметрів – *товщини* $R - r$ та *відношення радіусів* R/r – сферичного шару, тобто замкненої області між двома концентричними сферами радіусів R та r, $R \geqslant r$, в який можна помістити задану гіперповерхню. Чим ближче перший параметр до 0, а другий – до 1, тим ближче гіперповерхня до сфери відповідного многовиду.

У підрозділі 3.1 побудовано найбільш "несферичні" λ- та λ_1, λ_2-опуклі гіперповерхні у модельних ріманових просторах $M^{m+1}(c)$ сталої кривини c, так звані *λ-опуклі веретеноподібні гіперповерхні* та *λ_1, λ_2-опуклі закруглені веретеноподібні гіперповерхні*. Скрізь далі вважаємо $\lambda > 0$ та $\lambda_1 > 0$. Перший тип поверхонь будується шляхом обертання у $M^{m+1}(c)$ меншої дуги кола кривини λ з фіксованими кінцями (конічні вершини побудованої поверхні). Другий тип поверхонь може бути отриманий як межа об'єднання усіх куль з кривиною межі λ_2, та що містяться всередині заданої λ_1-опуклої веретеноподібної гіперповерхні. Таким чином, закруглені λ_1, λ_2-опуклі гіперповерхні є λ_1-опуклими веретеноподібними поверхнями, у яких дві конічні вершини згладжені за допомогою двох сферичних "шапочок" кривини λ_2. Підрозділ 3.1 містить точні оцінки параметрів сферичного шару, що може бути побудований явно, для таких спеціальних типів поверхонь (**леми 3.2** та **3.4**).

У **лемі 3.6** доведено, що веретеноподібні та закруглені веретеноподібні гіперповерхні серед усіх повних вкладених λ- та, відповідно, λ_1, λ_2-опуклих гіперповерхонь із заданим та фіксованим радіусом вписаної кулі у $M^{m+1}(c)$ мають найбільший радіус описаної кулі. Це твердження надає точного змісту їх найбільший "несферичності". Із леми 3.6 витікає точна оцінка радіуса R описаної кулі виду $R \leqslant f(\lambda_1, \lambda_2, r)$ для довільної повної вкладеної λ_1, λ_2-опуклої гіперповерхні $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ (тут r – радіус вписаної кулі, f – деяка функція) (**теорема 3.7**). Дослідження оцінок теореми 3.7 із застосуванням лем 3.2 та 3.4 приводить до наступних центральних результатів розділу.

Теорема 3.8. *Довільна повна вкладена λ_1, λ_2-опукла гіперповерхня $\Sigma \subset M^{m+1}(c)$ (при $c < 0$ вважаємо $\lambda_1 > \sqrt{-c}$) може бути вміщена у сферичний шар між двома концентричними сферами радіусів R та r ($R \geqslant r$) такий, що*

1. *для $c = 0$,*
$$R - r \leqslant \left(\sqrt{2} - 1\right)(R_1 - R_2)\,;$$
2. *для $c = k^2$ ($k > 0$),*
$$R - r \leqslant \frac{2}{k} \arccos \sqrt{\cos\left(k(R_1 - R_2)\right)} - (R_1 - R_2);$$
3. *для $c = -k^2$ ($k > 0$),*
$$R - r \leqslant \frac{2}{k} \operatorname{arcch} \sqrt{\operatorname{ch}\left(k(R_1 - R_2)\right)} - (R_1 - R_2),$$

де R_1 и R_2 – радіуси цілком омбілічних сфер кривини, відповідно, λ_1 та λ_2 у $M^{m+1}(c)$. Більше того, ці оцінки є точними.

Теорема 3.9. *Якщо $\Sigma \subset \mathbb{E}^{m+1}$ – повна вкладена λ_1, λ_2-опукла гіперповерхня у евклідовому просторі, то її можна помістити у сферичний шар між двома концентричними сферами радіусів R та r ($R \geqslant r$) такий, що*
$$\frac{R}{r} \leqslant \frac{\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + \sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \sqrt{2}}.$$

Більше того, ця оцінка є точною.

Точність оцінок означає, що у кожному випадку існує спеціально підібрана λ_1, λ_2-опукла гіперповерхня, для якої мінімальна товщина та, відповідно, відношення радіусів шару дорівнює виразам у правій частині всіх оцінок. Таким чином, отримані оцінки не можуть бути покращені без накладання додаткових умов.

Як наслідок теорем 3.8 та 3.9 був отриманий результат зі стабільності для $\lambda, (1+\varepsilon)\lambda$-опуклих гіперповерхонь у $M^{m+1}(c)$ для малих $\varepsilon \geqslant 0$ (**наслідок 3.15**).

Із теореми 3.8, якщо покласти $R_2 = 0$, були отримані точні оцінки товщини шару для λ-опуклих гіперповерхонь (**теорема 3.10**).

Користуючись результатами другого розділу (зокрема, теоремою 2.6 порівняння радіальних кутів, а також лемою 2.16), результат теореми 3.10 був перенесений на випадок ріманових многовидів знакосталої кривини.

Теорема 3.16. *Нехай Σ – повна вкладена C^2-гладка λ-опукла ($\lambda > 0$) гіперповерхня у повному однозв'язному $(m+1)$-вимірному рімановому многовиді M^{m+1}.*

1. Якщо секційні кривини K_σ многовиду M^{m+1} уздовж усіх двовимірних площин σ задовольняють нерівність $K_\sigma \geqslant k^2$, $k > 0$, а область D_Σ лежить у кулі радіуса $\mathrm{inj}_M(o)$ з центром в точці o, де o – центр вписаної до Σ кулі, то гіперповерхню Σ можна помістити у сферичний шар, товщина $R - r$ якого задовольняє нерівність

$$R - r \leqslant \frac{2}{k} \arccos \sqrt{\cos kR_\lambda} - R_\lambda.$$

2. Якщо для будь-якої двовимірної площини $0 \geqslant K_\sigma \geqslant -k^2$, та $\lambda > k > 0$, то Σ можна помістити у сферичний шар, товщина $R - r$ якого задовольняє нерівність

$$R - r \leqslant \frac{2}{k} \operatorname{arcch} \sqrt{\operatorname{ch} kR_\lambda} - R_\lambda.$$

(тут R_λ – радіус цілком омбілічної сфери кривини λ у $M^{m+1}(c)$.)

Четвертий розділ присвячено дослідженню оберненої ізопериметричної задачі для повних λ-опуклих гіперповерхонь у модельних ріманових просторах. У роботі повністю досліджено двовимірній випадок. На площинах сталої кривини *обернена ізопериметрична задача* полягає у мінімізації площі області, що може бути обмежена замкненою вкладеною λ-опуклою кривою даної довжини, та знаходженні екстремального об'єкту. У підрозділі 4.3 доведено, що така задача має розв'язок.

Означення 4.1. Для довільного $\lambda > 0$, замкнена опукла крива в $M^2(c)$, яка складається із двох рівних дуг кривих постійної геодезичної кривини, що дорівнює λ, називається *λ-опуклою луночкою*.

Таким чином, λ-опуклі луночки є двовимірними λ-опуклих веретеноподібними гіперповерхнями.

Позначимо через $L(\gamma)$ та $A(\gamma)$ – довжину замкненої вкладеної кривої γ та площу області, яку вона обмежує.

За допомогою принципу максимуму Понтрягіна, застосування якого детально описується у підрозділах 4.5 (евклідів випадок) та 4.6 (сферичний та гіперболічний випадки), доведена ізопериметрична властивість λ-опуклих луночок.

Теорема 4.2. *Нехай $\gamma \subset M^2(c)$ – замкнена вкладена λ-опукла крива, $\lambda > 0$. Якщо $\gamma_0 \subset M^2(c)$ – λ-опукла луночка така, що*

$$L(\gamma) = L(\gamma_0),$$

то

$$A(\gamma) \geqslant A(\gamma_0),$$

причому рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $\gamma = \gamma_0$.

Видається можливим знайти явну залежність $A(\gamma_0)$ від $L(\gamma_0)$ (**лема 4.4**). Це уможливлює еквівалентне формулювання ізопериметричної властивості λ-опуклих луночок у вигляді оберненої ізопериметричної нерівності для λ-опуклих кривих.

Теорема 4.3. *Нехай $\gamma \subset M^2(c)$ – замкнена вкладена λ-опукла крива, $\lambda > 0$. Якщо L і A – відповідно, довжина γ та площа області, що обмежена γ, то*

1. *для евклідової площини ($c = 0$),*

$$A \geqslant \frac{L}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \sin \frac{L\lambda}{2};$$

2. *для сферичного простору ($c = k^2$ ($k > 0$)),*

$$A \geqslant \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{4} L \right) \right) - \frac{L\lambda}{k^2};$$

3. *для площини Лобачевського ($c = -k^2$ ($k > 0$))*

а) при $\lambda > k$,

$$A \geqslant \frac{L\lambda}{k^2} - \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \operatorname{tg} \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}{4} L \right) \right);$$

б) при $\lambda = k$,

$$A \geqslant \frac{L}{k} - \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \frac{kL}{4};$$

в) при $k > \lambda > 0$,

$$A \geqslant \frac{L\lambda}{k^2} - \frac{4}{k^2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}{4} L \right) \right).$$

Більше того, у всіх випадках рівність досягається тільки для λ-опуклої луночки.

В якості побічних продуктів на шляху отримання обернених ізопериметричних нерівностей були доведені теорема Бляшке – Лебега на евклідовій площині (пункт 4.5.1), дуальні нерівності для λ-увігнутих кривих на двовимірній сфері (**теореми 4.18** та **4.19**) та теорема Сантало – Янеша на площині Лобачевського (пункт 4.6.2).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вивчено деякі екстремальні властивості повних сильно опуклих (λ-опуклих, λ-увігнутих, λ_1, λ_2-опуклих) гіперповерхонь у ріманових та лоренцевих многовидах обмеженої секційної кривини. Виходячи із проведених досліджень, можна зробити висновок, що використання техніки порівняння для вивчення геометрії гіперповерхонь обмеженої нормальної кривини (у тому числі, їх негладких аналогів) є плідною ідеєю у сенсі отримання нових результатів. Зокрема, було досліджено та розʼязано наступні проблеми:

1. Доведено теорему порівняння радіальних кутів для гладких λ-опуклих (теорема 2.6) та λ-увігнутих (теорема 2.9) гіперповерхонь у повних ріманових многовидах обмеженої секційної кривини. Ці теореми виявилися один із ключових інструментів дослідження геометрії сильно опуклих гіперповерхонь.
2. За допомогою теореми порівняння радіальних кутів отримано точні оцінки зверху на величини цих кутів для λ-опуклих гіперповерхонь у модельних просторах постійної кривини (теорема 2.11) та в довільних ріманових многовидах обмеженої знакосталої кривини (теорема 2.12). Отримані результати свідчать про те, що радіальні кути сильно опуклих гіперповерхонь не можуть бути довільно великими, а оцінки для них є, у певному сенсі, кількісним показником ступеня близькості таких поверхонь до сфер.
3. Для простору-часу додатної часоподібної секційної кривини та повної просторовоподібної гіперповерхні кривини $k_{\mathrm{n}} \leqslant \lambda$ в ньому було доведено теорему порівняння гіперболічних кутів (теорема 2.24) і відповідну до неї оцінку цих кутів (теорема 2.25). Більше того, у лоренцевому випадку було продемонстровано, що функція гіперболічного кута завжди обмежена константою, яка залежить лише від λ та обмежень на часоподібні секційні кривини многовиду (теорема 2.26).
4. У модельних ріманових многовидах було доведено еквівалентність теорем порівняння радіальних кутів та теореми прокачування (вміщення) Бляшке для сфер у випадку λ-опуклих (теорема 2.17) та λ-увігнутих (теорема 2.19) областей з гладкою границею. Було отримано узагальнення теореми вміщення Бляшке для сфер у випадку ріманових многовидів обмеженої кривини (теорема 2.20).
5. Було отримано точні оцінки для товщини сферичного шару, який вміщує в собі повну λ_1, λ_2-опуклу гіперповерхню у ріманових модельних просторах (теорема 3.8); в евклідовому випадку було отримано точну оцінку для відношення радіусів такого шару (теорема 3.9).
6. Отримані у попередньому пункті оцінки товщини шару було перенесено у λ-опуклому випадку на ріманові модельні простори (теорема 3.10) та ріманові многовиди обмеженої знакосталої кривини (теорема 3.16).

Таким чином, оцінки товщини сферичного шару, поряд з оцінками радіальних кутів, є ще одним кількісним показником сферичності сильно опуклих гіперповерхонь.

7. У роботі показано, що сильно опуклі гіперповерхні є природнім класом обʼєктів, для яких має сенс обернена ізопериметрична задача. Так, на двовимірних

площинах постійної кривини доведено обернені ізопериметричні нерівності для замкнених вкладених λ-опуклих кривих (теорема 4.3) та еквівалентну їм ізопериметричну властивість λ-опуклих луночок (теорема 4.2).

Більше того, у ході досліджень оберненої ізопериметричної проблеми у класі λ-опуклих кривих продемонстровано один із шляхів застосування теорії оптимального керування та принципу максимуму Понтрягіна для розв'язання геометричних задач опуклої оптимізації.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Борисенко А. А. Теорема сравнения для опорных функций гиперповерхностей / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Доповіді НАН України. – 2015. – №3. – С. 11-16.
2. Borisenko A. Extreme properties of curves with bounded curvature on a sphere / A. Borisenko, K. Drach // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2015. – Vol. 21, No. 3. – P. 311-327.
3. Drach K. Some sharp estimates for convex hypersurfaces of pinched normal curvature / K. Drach // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2015. – Vol. 11, No. 2. – P. 111-122.
4. Борисенко А. А. Изопериметрическое неравенство для кривых с ограниченной снизу кривизной / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Математические заметки. – 2014. – Т. 95, № 5. – С. 656-665. – [English translation: Math. Notes, 95:5 (2014), 590-598].
5. Драч К. Д. Об изопериметрическом свойстве λ-выпуклых луночек на плоскости Лобачевского / К. Д. Драч // Доповіді НАН України. – 2014. – № 11. – С. 11-15.
6. Борисенко А. А. О сферичности гиперповерхностей с ограниченной снизу нормальной кривизной / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Математический сборник. – 2013. – Т. 204, № 11. – С. 21-40. – [English translation: Sb. Math., 204:11 (2013), 1565-1583].
7. Борисенко А. А. О теореме сравнения углов для замкнутых кривых / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Доповіді НАН України. – 2011. – № 6 – С. 7-11.
8. Borisenko A. Geometry of hypersurfaces with bounded normal curvatures / A. Borisenko, K. Drach // Abstracts of the International Congress of Mathematicians 2014: Short Communications, Poster Sessions. – Seoul, 2014. – P. 116-117.
9. Борисенко А. А. Изопериметрическое неравенство для кривых ограниченной кривизны на сфере / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Матеріали науково-технічної конференції IMA::2013 (Суми, 22 – 27 квітня 2013 р.). – Суми, 2013. – С. 136-137.
10. Borisenko A. Extreme problems for convex hypersurfaces / A. Borisenko, K. Drach // Abstracts DGA2013 (Czech Republic, Brno, August 19 – 23, 2013). – Brno, 2013. – P. 31.

11. Драч К. Д. О глобальном поведении полных гиперповерхностей защемленной нормальной кривизны / К. Д. Драч // Тези доповідей 8-ї Міжнародної конференції з топології, геометрії та викладання геометрії: 9 – 15 вересня 2013 року. – Черкаси, 2013. – С. 11 – 12.
12. Борисенко А. А. Об уточнении изопериметрического неравенства / А. А. Борисенко, К. Д. Драч // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях» посвященной 50-летию механико-математического факультета, Харьков, 17 – 22 апреля 2011 г. – Х., 2011. – С. 139-140.
13. Драч К. Д. О теореме сравнения углов для замкнутых кривых / К. Д. Драч // Тезисы докладов IV научной конференции для студентов и аспирантов «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях», Харьков, 14 – 15 мая 2010 г. – Х., 2010. – С. 9-10.

Анотація

Драч К. Д. *Екстремальні оцінки для повних гіперповерхонь у ріманових просторах.* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія та топологія. – Фізико-технічний інститут низьких температур ім. Б. І. Вєркіна НАН України, Харків, 2016.

Дисертація присвячена дослідженню екстремальних властивостей повних сильно опуклих гіперповерхонь, нормальні кривини яких обмежені знизу деякою додатною константою λ (λ-опуклі гіперповерхні) або ж затиснуті між двома невід'ємними константами, а також їх нерегулярних аналогів. У ріманових многовидах обмеженої кривини доведені теореми порівняння для радіальних кутів, що утворюються між повною вкладеною сильно опуклою гіперповерхнею та радіальними напрямками із фіксованої точки всередині поверхні. Отримані точні оцінки для цих кутів. Аналогічні результати доведені для простровоподібних гіперповерхонь у лоренцевих многовидах. У ріманових просторах досліджено зв'язок між теоремами порівняння радіальних кутів та теоремою вміщення Бляшке. Знайдено точні оцінки товщини та відношення радіусів сферичного шару, у який можна помістити повну вкладену сильно опуклу гіперповерхню у ріманових просторах сталої кривини. Для λ-опуклих гіперповерхонь оцінки товщини шару перенесені на випадок ріманових многовидів обмеженої знакосталої секційної кривини. На двовимірних площинах сталої кривини для замкнених вкладених λ-опуклих кривих повністю розв'язана обернена ізопериметрична задача зі знаходження кривої, що обмежує найменшу площу поміж кривих даної довжини. Доведені відповідні обернені ізопериметричні нерівності.

Ключові слова: нормальна кривина; λ-опуклість; радіальний кут; гіперболічний кут; ступінь омбілічності; обернена ізопериметрична нерівність.

Аннотация

Драч К. Д. ***Экстремальные оценки для полных гиперповерхностей в римановых пространствах.*** – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология. – Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков, 2016.

Диссертация посвящена исследованию экстремальных свойств полных сильно выпуклых гиперповерхностей, нормальные кривизны которых ограничены снизу некоторой положительной константой λ (λ-выпуклые гиперповерхности) или зажаты между двумя неотрицательными константами, и их нерегулярных аналогов. В римановых многообразиях ограниченной кривизны доказаны теоремы сравнения для радиальных углов, образующихся между полной вложенной сильно выпуклой гиперповерхностью и радиальными направлениями из фиксированной точки внутри неё. Получены точные оценки таких углов. Аналогичные результаты доказаны в лоренцевых многообразиях. В римановых пространствах исследована связь между теоремами сравнения радиальных углов и теоремой прокатывания Бляшке. Найдены точные оценки ширины и отношения радиусов сферического слоя, в который можно поместить полную вложенную сильно выпуклую гиперповерхность в римановых модельных пространствах. Для λ-выпуклых гиперповерхностей оценки ширины слоя перенесены на случай римановых многообразий ограниченной знакопостоянной секционной кривизны. На двумерных плоскостях постоянной кривизны для замкнутых вложенных λ-выпуклых кривых решена обратная изопериметрическая задача по нахождению кривой, которая ограничивает наименьшую площадь среди кривых данной длины. Доказаны соответствующие обратные изопериметрические неравенства.

Ключевые слова: нормальная кривизна; λ-выпуклость; радиальный угол; гиперболический угол; степень омбиличности; обратное изопериметрическое неравенство.

Abstract

Drach K. D. ***Extreme bounds for complete hypersurfaces in Riemannian spaces.*** – Manuscript.

Thesis for acquiring the degree of candidate of sciences in physics and mathematics, speciality 01.01.04 – geometry and topology. – B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, 2016.

In the thesis we study some extreme global properties of complete strictly convex hypersurfaces, that is smooth hypersurfaces whose normal curvatures are bounded from below by some positive constant λ (λ-convex hypersurfaces) or pinched by two non-negative constants λ_1 and λ_2 (λ_1, λ_2-convex hypersurfaces), and their non-smooth generalizations, in Riemannian manifolds. While normal curvatures are local extrinsic quantities,

uniform restrictions on them lead to some particular structure of a surface globally in an ambient space.

We prove the radial angle comparison theorem for angles between the normal vector field of a complete embedded λ-convex hypersurface in a Riemannian manifold of bounded from below sectional curvature and the radial vector field with respect to a given fixed point inside the domain bounded by the surface. The dual result is proved for λ-concave hypersurfaces, that is $0, \lambda$-convex surfaces, in Riemannian manifolds of bounded from above sectional curvature. Using these theorems, we find sharp upper bounds on the radial angle function for complete embedded λ-convex hypersurfaces in the Riemannian model spaces (complete simply connected Riemannian manifolds of constant sectional curvature) and Riemannian manifolds of bounded constant-signed sectional curvature. These bounds are given in terms of the distance from the origin of the radial vector field, the constant λ, and the bounds on the sectional curvatures of the manifold. Similar results were obtained for complete spacelike hypersurfaces of bounded from above normal curvature in spacetimes of positive timelike sectional curvature. In the thesis we prove that in the Riemannian model spaces the radial angle comparison theorems are equivalent to Blaschke's Rolling Theorem. By using the radial angle comparison theorems, we obtain a generalization of Blaschke's theorem in Riemannian manifolds of bounded sectional curvature.

The thesis contains results expressing the degree of umbilicity of complete embedded λ- or λ_1, λ_2-convex hypersurfaces in Riemannian spaces in terms of the parameters of a spherical shell, that is the space between two concentric geodesic spheres of radii R and r, in which one can put such hypersurfaces. We construct the most "non-spherical" hypersurface from the respectful class (spindle-shaped and rounded spindle-shaped hypersurfaces). By using these extreme objects, in the model Riemannian spaces for complete embedded λ- or λ_1, λ_2-convex hypersurfaces we find sharp upper bounds on the width $R - r$ and the radii quotient R/r of such shells. In the λ-convex case these bounds were extended to Riemannian manifolds of bounded constant-signed sectional curvature.

In the thesis we study the reverse isoperimetric problem for strictly convex hypersurfaces, and solve it completely for closed embedded λ-convex curves on the two-dimensional planes of constant curvature. In particular, we prove that among all such curves, provided their lengths are fixed, there is a unique curve enclosing a domain of the minimal possible area. By utilizing Pontryagin's maximum principle from the optimal control theory, we show that this curve, called λ-convex lune, is composed of two equal arcs of constant geodesic curvature equal to λ. The corresponding reverse isoperimetric inequalities were also obtained. As the by-products, we prove some dual inequalities for λ-concave curves on the sphere, give another prove of the classical two-dimensional Blaschke – Lebesgue problem on the Euclidean plane, and prove the Santalo – Yanez theorem on the hyperbolic plane.

Key words: normal curvature; λ-convexity; radial angle; hyperbolic angle; degree of umbilicity; reverse isoperimetric inequality.

Наукове видання

Драч Костянтин Дмитрович

ЕКСТРЕМАЛЬНІ ОЦІНКИ ДЛЯ ПОВНИХ ГІПЕРПОВЕРХОНЬ У РІМАНОВИХ ПРОСТОРАХ

Підп. до друку з авторського оригінал-макету 29.01.16.
Формат 60×90 1/16. Папір друг. №3. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 1,0. Наклад 100 прим. Зам. 36.

Надруковано у ПП Єсін
Україна, 61072, м. Харків, пр. Науки, 52
тел. (057) 340-60-39