

ВІДГУК

офіційного опонента на дисертацію Синельщикова Сергія Дмитровича “Дії некомутативних груп та квантових алгебр на точкових просторах та їх q -аналогах”, подану на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз.

Коло задач дисертаційного дослідження умовно можна розділити на дві частини: вивчення задач теорії динамічних систем, та проблеми, пов’язані з теорією квантових груп.

Теорія динамічних систем є одним з класичних розділів математики, її результати мають застосування у багатьох інших розділах сучасної математики, а також при дослідженні прикладних проблем. Одним з важливих розділів цієї науки є вивчення дії груп автоморфізмів на просторах з мірою, при цьому важливими проблемами є класифікація відповідних динамічних систем, дослідження аменабельності дії, ентропійні властивості тощо. Розв’язанню саме таких актуальних задач присвячено першу частину (розділи 2-4) дисертації.

Квантові групи вперше були введені В.Г.Палюткіним та Г.І.Кацом у 1967 р. (вони вживали термін “кільцеві групи”), починаючи з середини 80-х років різні підходи до аксіоматики та дослідження квантових груп активно розроблялись В. Дрінфельдом і М. Джимбо (у зв’язку з вивченням повної інтегровності квантових систем), С.Л.Вороновичем (підхід з точки зору C^* -алгебр та їх зображень), Л.Д.Фадеєвим, Л.Тахтаджаном, Н.Решетихиним (у зв’язку з вивченням квантового рівняння Янга–Бакстера) та ін. Значний внесок у розвиток сучасної теорії квантових груп та квантових однорідних просторів зробили також А.Ван Дейл, Ш.Маджид, українські математики Л.Л.Ваксман, А.У.Клімик та ін. Наведені у дисертаційній роботі дослідження (розділи 5-7) продовжують розвиток теорії квантових груп та квантових однорідних просторів, збагачуючи її новими важливими результатами.

Основна частина дисертації складається з семи розділів.

Перший розділ традиційно присвячений огляду попередніх результатів щодо тематики дисертації та висвітлюють місце отриманих результатів у загальній теорії.

У другому розділі вивчаються групові дії на просторах з мірою, пов’язані з автоморфізмами та коциклами: доведено можливість представлення аменабельної дії локально компактної сепарабельної групи у вигляді дії Маккі ергодичного автоморфізму, доведено теорему єдиності для коциклів, отримано застосування теореми єдиності до розв’язання інших проблем ергодичної теорії. Також розв’язано проблему регуляризації дій локально компактних сепарабельних груп автоморфізмами вимірних відношень еквівалентності.

Третій розділ присвячено дослідженню групових дій з нетривіальними стабілізаторами. Для дослідження проблеми ізоморфізму стабілізаторів вивчено властивості дії групи спряження на множині замкнених підгруп. При цьому отримано різні умови істотної транзитивності такої дії, з чого випливає спряженість майже всіх стабілізаторів. Наведено приклади ергодичних дій груп L_1 з неізоморфними стабілізаторами.

У четвертому розділі вивчаються ентропійні властивості дій злічених аменабельних груп. Досліджено дії скінченно-породжених нільпотентних груп без скруту, для яких доведено формулу Пінскера, отримано опис алгебри Пінскера, вивчено класи дій з цілком

позитивною ентропією. Для дій зліченних аменабельних груп наведено природну конструкцію коіндукування з дії підгрупи, за допомогою якої показано, що зліченна аменабельна група з елементом нескінченного порядку має небернулліївську дію з цілком позитивною ентропією.

П'ятий розділ присвячено вивченню зображень квантових алгебр.

Доведено ізоморфізм категорії $C(I, I)_q$ повної підкатегорії вагових локально скінченно-вимірних $U_q I$ -модулів та повної підкатегорії $R(I)_q$ -модулів з апроксимативною одиницею. Аналогічну конструкцію проведено для пар $U_q \mathfrak{g} \supset U_q I$ підалгебр Хопфа в U_q . Знайдено q -аналог алгебри узагальнених функцій на дійсній редуктивній групі \mathbb{R} з носіями у максимальній компактній підгрупі, що дозволило побудувати q -аналог функтора Бернштейна.

Побудовано диференціальне числення на квантових передоднорідних просторах комутативного параболічного типу. Для відповідної алгебри наведено твірні та визначальні співвідношення, досліджено вимірність однорідних компонент, показано, що комплекс де Рама над такими алгебрами є дуальним до узагальненого БГГ-комплекса для тривіального $U_q \mathfrak{g}$ -модуля.

Розвинено основи теорії функцій на квантових аналогах комплексних гіперболічних просторів. Побудовано алгебру $\text{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ регулярних функцій на квантовому гіперболічному просторі, та реалізовано її як підалгебру алгебри регулярних функцій на квантовій групі SL_N , що дозволяє визначити на ній структуру $U_q \mathfrak{su}_{n,m}$ -модульної алгебри. Побудовано $*$ -зображення $\text{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ та доведено його точність. Також доведено точність продовження побудованого зображення на алгебру $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$ фінітних функцій на квантовому гіперболічному просторі, і задано на цій алгебрі структуру $U_q \mathfrak{su}_{n,m}$ -модульної алгебри. Отримані результати дозволили побудувати інваріантний інтеграл — позитивний $U_q \mathfrak{su}_{n,m}$ -інваріантний функціонал на $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{n,m})_q$. Аналогічні результати отримано для квантового однорідного простору $\text{Pol}(\Xi_{n,m})_q$, що є квантовим аналогом алгебри поліномів на ізотропному конусі. За простором $\Xi_{n,m}$ побудовано $U_q \mathfrak{su}_{n,m}$ -модулі основної неунітарної серії, а також унітарну серію модулів, для якої наведено необхідні умови еквівалентності.

Вивчено квантовий аналог інтегрального оператора Пуассона, пов'язаного з межею Шилова квантової матричної кулі, а також отримано відповідний квантовий аналог рівнянь Хуа, які дають необхідну умову належності функції до образу квантового оператора Пуассона.

У шостому розділі побудовано і досліджено узагальнення квантової алгебри $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, що містять нетривіальні ідемпотенти. При цьому пара картанівських твірних k, k^{-1} замінюється двома парами твірних K, \bar{K}, L, \bar{L} , що породжують пару ідемпотентів $P = K\bar{K} = \bar{K}K$, $Q = L\bar{L} = \bar{L}L$, для яких $P + Q = I$, та відповідними модифікаціями решти визначальних співвідношень. При цьому стандартна алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ вкладається у відповідним чином модифіковану, більш того, одна з двох розглядуваних алгебр є прямою сумою двох примірників $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. В кожному з випадків знайдено компоненти розкладу Пірса відносно заданої пари ідемпотентів.

Також для побудованих алгебр описано структуру біалгебри, та вивчено питання про наявність в них антипода. Показано, що одна з алгебр є алгеброю Хопфа, а інша — алгеброю фон Неймана-Хопфа, тобто має спеціальний антиморфізм, що називається антипо-

дом, регулярним за фон Нейманом. Для обох алгебр побудовані універсальні R -матриці.

У цьому розділі наведено класифікацію структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -модульної алгебри на квантовій площині. На відміну від раніше відомої єдиної структури, в дисертації показано, що існує континуум таких неізоморфних структур, та наведено їх класифікацію.

Структура $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -модульної алгебри задає, зокрема, зображення квантової алгебри $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ у квантовій площині як лінійному просторі. У дисертації вивчено структуру таких зображень для всіх отриманих структур.

Також тут наведено опис симетрій загального положення на алгебрі поліномів Лорана на квантовій площині.

Проведені дослідження розв'язують низку важливих наукових проблем ергодичної теорії та теорії квантових груп і однорідних просторів. Зокрема, в роботі отримані такі нові важливі результати:

- Доведено можливість представлення аменабельної дії локально компактної сепарабельної групи у вигляді дії Маккі ергодичного автоморфізму.
- Доведено теорему єдиності для коциклів про взаємно однозначну відповідність між класами слабкої еквівалентності коциклів і класами спряженості їх дій Маккі.
- Отримано умови ізоморфізму стабілізаторів дій локально компактних сепарабельних груп, та наведено приклади ергодичних дій груп Лі, коли такі стабілізатори не є ізоморфними.
- Доведено, що зліченна аменабельна група з елементом нескінченного порядку має небернулліївську дію з цілком позитивною ентропією.
- Побудовано q -аналог функтора Бернштейна.
- Побудовано диференціальне числення на квантових передоднорідних просторах комутативного параболічного типу, та досліджено його властивості.
- Побудовано алгебру регулярних функцій на квантовому гіперболічному просторі та квантовий аналог алгебри поліномів на ізотропному конусі, та досліджено їх властивості та зображення.
- Введено квантовий аналог інтегрального оператора Пуассона, пов'язаного з межею Шилова квантової матричної кулі, а також отримано відповідний квантовий аналог рівнянь Хуа.
- Побудовано нові біалгебри, які містять ідемпотенти, та досліджено їх структуру.
- Наведено класифікацію структур $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ -модульної алгебри на квантовій площині та симетрій загального положення на алгебрі поліномів Лорана на квантовій площині.

Результати роботи викладено чітко і повно, їх достовірність підтверджено детальними доведеннями.

Зауваження до роботи.

Стор. 25. У доведенні Теорема 2.1.1 використовується простір Y , означення якого не наведено, хоча з контексту можна зробити висновок, що $Y = X^{\mathbb{Z}}$.

Стор. 198. У третьому абзаці та нижче, очевидно мається на увазі алгебра $\text{Pol}(\tilde{\mathcal{H}}_{n,m})_q$, а не $\text{Pol}(\tilde{\mathcal{H}}_{n,m})$

Стор. 246. У означенні 6.5.5 фігурує елемент \tilde{R}^\dagger , на який накладається умова, що він є оберненим за Муром–Пенроузом до \tilde{R} , проте який не вживається деінде в означенні.

Найявна певна неузгодженість позначень: у розділах 6 та 7 одна і та ж квантова алгебра позначається $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ та $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Також можна відзначити певну кількість мовних неточностей, наприклад, замість “зчисленний” краще вживати термін “злічений”, замість “неприводима дія” — “незвідна дія” та ін.

Крім цього, на думку опонента, було б цікавим описати у розділі 5 усі зображення алгебри $\text{Pol}(\mathcal{H}_{n,m})_q$, а не обмежитись побудовою єдиного точного зображення.

Наведені зауваження мають технічний характер і не впливають на наукову цінність одержаних результатів та загальну високу оцінку дисертації.

Дисертаційна робота Синельщикова С.Д. є закінченим науковим дослідженням. Усі результати є новими та достовірними. Дисертація має теоретичний характер. Основні результати повністю опубліковані згідно до вимог ДАК МОН України та доповідалися на наукових конференціях та провідних наукових семінарах за профілем дисертації. Автореферат правильно відображує зміст дисертації.

Вважаю, що дисертаційна робота “Дії некомутовативних груп та квантових алгебр на точкових просторах та їх q -аналогах” відповідає всім вимогам пп. 9, 10, 12 Порядку присудження наукових ступенів, затвердженого постановою Кабінету міністрів України від 24 липня 2013 р № 567, а її автор Синельщиков Сергій Дмитрович заслуговує присудження йому вченого ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 — математичний аналіз.

Офіційний опонент
доктор фіз.-мат. наук, професор

