

Рецензія

провідного наукового співробітника відділу математичної фізики
ФТІНТ ім. Б.І.Веркіна НАН України, доктора фізико-математичних наук
Єгорової Ірини Євгенівни
на дисертаційну роботу Карпенко Ірини Миколаївни
«Метод задачі Рімана-Гільберта для модифікованого рівняння Камасси-
Хольма з ненульовими крайовими умовами»
на здобуття наукового ступеня доктора філософії
за спеціальністю 111 «Математика»
в галузі знань 11 «Математика і статистика»

У 1993 році Роберто Камасса та Дарріл Холм, виходячи з фізичних міркувань, вивели рівняння, яке в безрозмірних просторово-часових координатах (x, t) описує поширення хвиль на поверхні мілкої води над пласким дном. Це рівняння, відоме як рівняння Камасси-Холма, викликає значний інтерес як інтегровна система, що має розв'язки, якісно відмінні від розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза (найбільш відоме рівняння у теорії хвиль на мілкій воді). Рівняння Камасси-Холма є некласичним інтегровним рівнянням і з точки зору поведінки його солітонних розв'язків: у випадку нульового фону його солітони не є гладкими функціями, а мають форму піків, з негладкою поведінкою біля піку; відповідно, рівняння з такими солітонами отримали назву піконних рівнянь.

Цікаві математичні та фізичні властивості рівняння Камасси-Холма спонукали до дослідження різних модифікацій та узагальнень цього рівняння. Однією з таких модифікацій є модифіковане рівняння Камасси-Холма (мКХ), що вперше з'явилося у роботах Фокаса та Олвера і Розенау у 1996 році. Це рівняння виявилось також цілком інтегровним, тобто в нього існує зображення Лакса, і тому до нього може бути адаптований метод оберненої задачі розсіювання (МОЗР), який є одним з найпотужніших методів сучасного нелінійного аналізу. У свою чергу, застосування нелінійного методу найскорішого спуску, який оснований на МОЗР у формі задачі Рімана-Гільберта, дозволяє ефективно знаходити асимптотику (за великим часом) розв'язків початкових задач для різноманітних нелінійних еволюційних рівнянь.

У дисертаційній роботі розглядаються задачі Коші для рівняння мКХ із неспадаючими початковими умовами (їх також називають «задачі на ненульовому фоні»). Такі задачі є особливо цікавими, тому що їх можна використовувати як моделі для вивчення дисперсійних ударних хвиль.

Перша оригінальна частина роботи (Розділ 2) присвячена початковій задачі у випадку, коли розв'язок прямує до ненульової сталої на обох нескінченностях просторової змінної («задачі на постійному ненульовому фоні»). В дисертації вперше розроблено формалізм задачі Рімана–Гільберта для такої задачі та отримано параметричне зображення розв'язку задачі Коші в термінах розв'язку асоційованої задачі РГ. На основі розробленого формалізму описано односолітонні розв'язки – як регулярні, так і нерегулярні. Крім того, у роботі відмічені особливості, які відрізняють рівняння мКХ від інших рівнянь типу КХ, зокрема, оригінального рівняння КХ.

У Розділі 3, використовуючи гнучкість представлення розв'язку у формі розв'язку асоційованої задачі Рімана–Гільберта, вихідну задачу РГ з специфічними сингулярностями при $\mu = \pm 1$ (модифікований спектральний параметр) зведено до звичайної задачі РГ. Потім за допомогою нелінійного методу найшвидшого спуску, застосованого до цієї задачі, отримано основні асимптотичні члени для розв'язку $u(x, t)$ задачі Коші у двох секторах напівплощини (x, t) , де відхилення від фону має нетривіальний характер. А саме, виявлено, що це відхилення задається модульованими тригонометричними коливаннями.

Розділ 4 присвячено початковій задачі у випадку, коли розв'язок прямує до двох різних ненульових сталих на плюс та мінус нескінченностях просторової змінної («задачі на ступінчатому фоні»). В дисертації вперше розроблено формалізм задачі Рімана–Гільберта для такої задачі для двох випадків: коли правий фон для просторової змінної більший за лівий, і навпаки. Зокрема, досліджені аналітичні та асимптотичні властивості розв'язків Йоста та відповідних спектральних функцій, включаючи їх поведінку в точках розгалуження, та симетрії спектральних функцій. Розроблений формалізм дозволив отримати параметричне зображення розв'язку задачі Коші в термінах розв'язку пов'язаної з нею задачі Рімана–Гільберта.

У якості зауваження, зазначу, що у формулюванні твердження 2.4.7 визначення параметричної форми розв'язку є не досить чітким; до того ж, застосування у цьому ж контексті терміну «параметри» у зовсім іншому сенсі – до величин, що характеризують солітони – може збентежити читача і призвести до ускладнення розуміння твердження.

Інші зауваження пов'язані більше з презентацією результатів. Так, на стор. 82 здобувач фактично повторює матеріал з Розділу 2. Також пунктуація у роботі не завжди є коректною.

Всі ці зауваження не є суттєвими і не впливають на цілком позитивну оцінку роботи. В мене склалося досить чітке враження про високий рівень отриманих

результатів і про те, що дана дисертація є прекрасною кваліфікаційною роботою на здобуття ступеня доктора філософії. Слід підкреслити, що для отриманих результатів не було попередніх чисельних або отриманих на фізичному рівні строгості припущень. Модифіковане рівняння Камасси-Холма - рівняння відносно нове і малодосліджене, тож для кожного типу початкових даних потрібна нова адаптація методу оберненої задачі розсіювання. І розробка формалізму задачі Рімана-Гільберта, і опис головних асимптотичних членів для розв'язку – все це для модифікованого рівняння Камасси-Холма було здійснено вперше, що свідчить про високий рівень аналітичних можливостей здобувача. Результати дисертації знаходяться на передньому краї сучасної науки про цілком інтегровні рівняння. Вони опубліковані у престижних міжнародних спеціалізованих журналах, проіндексованих у наукометричних базах Scopus та Web of Science. Про високий рівень публікацій свідчить, зокрема, те, що відповідно до класифікації SCImago Journal and Country Rank, всі видання належать до кuartилів Q2 та Q3.

Таким чином, дисертаційна робота Карпенко Ірини Миколаївни «Метод задачі Рімана-Гільберта для модифікованого рівняння Камасси-Хольма з ненульовими крайовими умовами» задовольняє всім вимогам до дисертацій на здобуття ступеня доктора філософії, які передбачені «Порядком присудження ступеня доктора філософії та скасування рішення разової спеціалізованої вченої ради закладу вищої освіти, наукової установи про присудження ступеня доктора філософії», затвердженим постановою Кабінету Міністрів України № 44 від 12.01.2022, а її автор заслуговує на присудження наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 «Математика» в галузі знань 11 «Математика і статистика».

Рецензент

провідний науковий співробітник відділу
математичної фізики ФТІНТ ім. Б.І. Веркіна
НАН України, д.ф.-м.н., с.н.с.



І.Є. Єгорова



підпис пр. Єгорово І.Є.
ЗАСВІДЧУЮ
Учений секретар ФТІНТ
Веркіна НАН України
фізико-математичних наук
Карпенко І.М.