

## Відгук

офіційного опонента на дисертаційну роботу

**Болотова Дмитра Валерійовича**

*“Топологія та макроскопічна геометрія ріманових многовидів”*,

подану на здобуття наукового ступеня

доктора фізико-математичних наук

за спеціальністю 01.01.04 – геометрія і топологія.

*Актуальність теми.* Дисертація Болотова Д.В. присвячена вивченню одного з найважливіших питань геометричної топології про знаходження зв'язків між топологічними і геометричними характеристиками ріманових многовидів та їх відображень. Це тема має безпосереднє відношення до сучасної фізики, зокрема фізики елементарних частинок. Одним з таких питань є опису топології замкнутих многовидів, які допускають метрику додатної скалярної кривини. Відмітимо дослідженняу цій галузі багатьох відомих математиків: А.Ліхнерович, Н.Хітчін, Дж. Розенберг, С.Штольц, М.Громов, Г.Лоусон, К.Шоен, С.Яо. Незважаючи на їх внесок, залишилося багато нерозв'язаних проблем, наприклад, відома гіпотеза Громова-Лоусена о можливості існування метрики додатної скалярної кривини на асферичному замкнутому многовиді. Зазначимо, що ця гіпотеза впливає з відкритої гіпотези Громова про макроскопічну вимірність універсального накриття замкнутого многовида додатної скалярної кривини.

Якщо многовид має додаткову структуру ( симплектичну, контактну або структуру шарування), то природним є питання про топологію многовида, якщо додаткова структура має обмеження на внутрішню або зовнішню геометрію. В цьому напрямку нагадаємо відомі роботи У.Лікоріша, Дж.Вуда, Д.Джонсона, Л.Вітта, Д.Суллівана, С.Новікова, О.Борисенка, Г.Штака, У.Терстона. Роботи Дж.Чігера, Д.Громолла, В.Топоногов, Б.Вілкінг, А. Д. Мілки з топології та геометрії повних многовидів невід'ємної кривини відкривають проблему щодо узагальнення цих результатів на випадок шарувань невід'ємної кривини.

Дисертація Болотова Д. В. присвячена вивченню наступних питань геометричної топології: макроскопічна вимірність ріманових многовидів, топологічні властивості ріманових многовидів з додадковою структурою шарування ковимірності один. Також у дисертації вивчаються топологічні і макроскопічні перешкоди щодо існування спеціальних класів відображень

многовидів в евклідовий простір, зокрема досліджується проблема Коена-Ласка, узагальнена проблема Гільберта та проблема Ю. Б. Зелінського.

*Наукова новизна й достовірність результатів дисертації.* Дисертаційна робота складається зі вступу, огляду літератури, 5 розділів, висновків і списку використаних джерел, який містить 131 посилання.

У першому розділі зроблено огляд літератури, що містить результати близькі до теми дисертації, наведено постановку задач і формулювання питань, які досліджуються в дисертаційній роботі, що показує новизну отриманих результатів.

У другому розділі описані методи геометричної та алгебраїчної топології, які використовуються в дисертації.

Третій розділ присвячено частковому вирішенню ряду проблем Громова щодо макроскопічній вимірності ріманових многовидів. Тут доведено гіпотезу Громова про падіння макроскопічної вимірності в тривимірному випадку, а саме доведено, що якщо  $M^3$  - замкнутий рімановий многовид вимірності 3, а  $\tilde{M}^3$  його універсальне накриття, то  $\dim_{\text{mac}} \tilde{M}^3 \neq 2$ .

Також побудовано контрприклад до гіпотези Громова про падіння макроскопічної вимірності у вимірності  $>3$ , тобто для кожного  $n \geq 4$  доведено існування замкнутого несуттєвого спінового многовида  $M^n$ , що має макроскопічну вимірність універсального накриття  $\dim_{\text{mac}} \tilde{M}^n = n - 1$ .

В дисертації показано, що для цілком неспінових многовидів вимірності більше 4 гіпотеза Громова про падіння макроскопічної вимірності має місце. Доведено також гомотопічний аналог цього твердження:

Нехай  $M^n$  цілком неспіновий замкнутий орієнтований несуттєвий  $n$ -многовид,  $n \geq 5$ , чия фундаментальна група  $\pi$  має тип  $FP_2$ . Тоді класифікуюче відображення  $f: M^n \rightarrow B\pi$  може бути продеформоване в  $B\pi^{(n-2)}$ , зокрема,  $\dim_{\text{mac}} \tilde{M}^n \leq n - 2$  (Теорема 3.4.13).

У спіновому випадку підтверджено сильну гіпотезу Громова для багатьох класів фундаментальних груп, зокрема коли фундаментальна група многовиду є вільною абелевою групою, добутком вільних груп або має обмеження на типта асимптотичну вимірність. Це є наслідком наступної глибокої теореми про те, що якщо група  $\pi$  містить підгрупу  $\pi'$  скінченного індексу, яка задовольняє сильній гіпотезі Новикова і відображення  $\text{reg}: KO_n(B\pi') \rightarrow KO_n(B\pi)$  є ін'єктивним, то гіпотеза Громова виконується для спінових многовидів з фундаментальною групою  $\pi$  (Теорема 3.3.4).

У четвертому розділі отримано результати, які описують топологію

ріманових многовидів, зі структурою шарування ковимірності один з заданими обмеженнями на внутрішню або зовнішню геометрію шарів. Показано, що універсальне накриття повного ріманового многовиду з універсально рівномірно стягнутим шаруванням ковимірності один є стягнутим.

В дисертації отримана класифікація орієнтованих замкнутих тривимірних многовидів, які допускають шарування ковимірності один невід'ємної кривини, з якої, зокрема, випливає, що не всі тривимірні сферичні форми допускають шарування невід'ємної кривини. Доведено ряд тверджень, які описують топологічну структуру шарувань ковимірності один невід'ємної кривини.

Серед шарувань невід'ємної кривини доведено, що наступні умови еквівалентні: 1) є плоским; 2) ; 3) – многовид.

Отримано повне вирішення проблеми Г. Штака щодо існування шарування ковимірності один невід'ємної секційної кривини на сферах, що є наслідком доведеної автором теореми про те, що 3-зв'язний многовид, зокрема – многовид, гомеоморфний  $S^n$  ( $n > 3$ ) не допускає  $C^2$  - шарування ковимірності один невід'ємної кривини (Теорема 4.5.1).

Було досліджено питання, поставлене О.Борисенком, щодо існування сідлових шарувань на тривимірних замкнутих многовидах. Доведено існування таких шарувань на тривимірній сфері.

Доведено зв'язок між гомотопічним типом розподілу на рімановому торі, дотичного до деякого шарування, з абсолютною кривиною цього шарування. Як наслідок, доведено, що для двовимірного тора та заданої константи  $C > 0$  існує не більше ніж скінченне число  $M$  гомотопічних класів одновимірних  $C^2$ -розподілів на  $T^2$  таких, що шари дотичного до розподілу шарування  $\mathcal{F}$  мають кривину обмежену зверху нерівністю  $|k| < C$ .

П'ятий розділ присвячений частковому вирішенню окремих питань, пов'язаних із відображеннями топологічних просторів, зокрема многовидів, в евклідовий простір. Дано частковий розв'язок гіпотези Коена-Ласка про часткову склейку орбіти вільного  $Z_p$ -простору при відображенні у евклідовий простір. Доведено неможливість ізометричного занурення простору Лобачевського в евклідовий простір з плоскою нормальною зв'язністю у разі обмеженості довжини вектора середньої кривини. При додатковій умові гладкості розв'язана проблема Ю. Б. Зелінського про існування 2-опуклого вкладення двовимірної сфери в чотиривимірний евклідовий простір.

Результати, що наведені у дисертації, є новими, повністю обґрунтованими та отриманими Д.В. Болотовим самостійно. Результати роботи повністю висвітлені у 21 статті у провідних вітчизняних та міжнародних фахових

виданнях, доповідались на багатьох міжнародних наукових конференціях, семінарах з геометрії у провідних університетах та наукових установах НАН України. Зміст автореферату цілком відповідає основним положенням дисертації.

**Зауваження.**

1. В дисертації сформульовано декілька інформаційних тверджень без доведення та посилання на літературу, наприклад, стор. 26, 8 рядок зверху; стор. 71, 6 рядок знизу; стор. 86, 6 рядок зверху.
2. Слід було зробити список позначень. Скалярна кривина в дисертації позначається по різному:  $s$  і  $Sc$
3. В авторефераті на стор. 17 рядок 3 замість  $\dim_{mc} \pi_1(M)$  слід було писати  $\dim_{mc} \tilde{M}$ .
4. Також в теоремі 32 автореферату не вказано обмеження на  $p$ , а в формулюванні відповідної теореми 4.5.1 дисертації обмеження на  $p$  можливо понизити на одиницю, оскільки чотиривимірна сфера не допускає ніякого шарування ковимірності один.

Наведені зауваження не відбиваються на загальному позитивному враженні від дисертації і не мають впливу на достовірність отриманих результатів.

Вважаю, що дисертаційна робота Болотова Дмитра Валерійовича "Топологія та макроскопічна геометрія ріманових многовидів" є завершеною науковою працею, актуальність якої не підлягає сумніву. Дисертація відповідає всім вимогам, що висувають до докторських дисертацій, а її автор, Болотов Дмитро Валерійович, заслуговує на присудження наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.04 – геометрія і топологія.

Доктор фізико-математичних наук  
професор кафедри геометрії  
Київського національного університету  
імені Тараса Шевченка

О. О. Пришляк



Візрук нарізаний 15.02.2016,  
Відомий секретар  
Секр. фонсу: р/д 2 64175.01 ВВУ (60 грн/кв)