Физика низких температур, 2007, т. 33, № 12, с. 1406–1410

Краткие сообщения

Особенности динамики связанных состояний топологических солитонов в низкоразмерных системах с сильной дисперсией

М.М. Богдан, О.В. Чаркина

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины
пр. Ленина, 47, г. Харьков, 61103, Украина
E-mail: bogdan@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 19 июля 2007 г., после переработки 6 августа 2007 г.

Исследована нестационарная динамика и взаимодействие топологических солитонов (дислокаций, доменных границ, флаксонов) в одномерных системах с сильной дисперсией. Аналитически и численно изучены процессы формирования солитонных комплексов в зависимости от величины дисперсии, скорости солитонов и расстояния между ними. В среде с диссипацией продемонстрирована возможность распространения устойчивых связанных солитонных состояний со сложной внутренней структурой за счет их стабилизации внешними силами.

Досліджено нестаціонарну динаміку та взаємодію топологічних солітонів (дислокацій, доменних границь, флаксонів) у одновимірних системах із сильною дисперсією. Аналітично та чисельно вивчено процеси формування солітонних комплексів в залежності від величини дисперсії, швидкості солітонів та відстані між ними. У середовищі із дисипацією продемонстровано можливість розповсюдження стійких зв’язаних солітонних станів із складною внутрішньою структурою за рахунок їх стабілізації зовнішніми силами.

PACS: **05.45.–a** Нелинейная динамика и хаос;
05.45.Yv Солитоны;
75.40.Gb Динамические свойства.

Ключевые слова: нелинейная динамика, солитонный комплекс, кинк, сильная дисперсия.

Динамические свойства топологических дефектов и структурных неоднородностей в низкоразмерных кристаллах могут быть адекватно описаны в терминах теории солитонов [1–3]. Для этого привлекаются квазиодномерные решеточные модели, в частности, для описания динамики дислокаций (краудионов) используется модель Френкеля–Конторовой [4,5], а свойства магнитных доменных границ исследуются в рамках анизотропных моделей гейзенберговских цепочек [6]. Следствием дискретности таких систем является сильная пространственная дисперсия волн. Континуальные модели также могут обладать сильной дисперсией, например, в случае учета нелокальных взаимодействий. Это справедливо, в частности, для макроскопических квантовых систем, а именно для процессов распространения квантов магнитного потока (флаксонов) в длинных джозефсоновских контактах [7].

Дислокации, доменные границы и флаксоны являются простейшими примерами одномерных топологических солитонов — кинков. В длинноволновом пределе их свойства описываются в рамках уравнений синус-Гордон (СГ) и двойной синус-Гордон (ДСГ) [2]. Учет сильной дисперсии, вызванной нелокальными взаимодействиями или дискретностью, приводит к необходимости введения в уравнения СГ и ДСГ интегральных слагаемых или пространственных производных более высокого порядка [7–12]. При этом распространение солитонов в диспергирующей среде, казалось бы, с необходимостью должно сопровождаться сильным излучением. Однако сначала для дискретных систем [13], а затем и для ряда континуальных моделей с сильной дисперсией [7–12] было обнаружено универсальное явление — возможность практически безызлучательного быстрого движения связанных солитонных комплексов. Это уникальное свойство делает такие многосолитонные возбуждения крайне привлекательными с прикладной точки зрения. В настоящей работе исследуются особенности динамики солитонных комплексов, образованных сильно взаимодействующими одномерными кинками в среде с сильной дисперсией [11]. Физически такие двухсолитонные состояния соответствуют, например, движущемуся дефекту, состоящему из двух соседних дислокационных полуплоскостей, или узкой 360° магнитной доменной границе, возникающей даже в отсутствие магнитного поля, или связанной паре флаксонов. Теоретически внутренняя структура этих солитонов может быть детально изучена в рамках моделей, приводящих к кусочно-линейным уравнениям с сильной дисперсией [10–12]. В то же время нестационарная динамика комплексов, условия их образования и устойчивость, учет влияния на них диссипации и внешних сил остаются во многом открытыми вопросами. Этот круг проблем рассмотрен в настоящей работе в рамках *регуляризованных* уравнений СГ и ДСГ с дополнительной четвертой пространственно-временной производной.

Обычно в длинноволновом приближении для дискретных систем, например, для модели Френкеля–Конторовой, описываемой дискретным уравнением синус-Гордон [13]

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} + 2u_n - u_{n-1} - u_{n+1} + \frac{1}{d^2}\sin u_n = 0, \qquad (1)$$

высшая дисперсия учитывается оставлением четвертой пространственной производной в разложении второй разности $u_{n-1} + u_{n+1} - 2u_n \approx u_{xx} + \gamma u_{xxxx}$. Здесь переменная u_n — смещение атома с номером *n*, *d* — параметр дискретности, $x = n/d$ и параметр $\gamma = 1/12d^2$. Полученное в результате уравнение с четвертой пространственной производной обладает существенным недостатком — искусственно возникшей неустойчивостью состояний с $u = 0, 2\pi, 4\pi\ldots$ относительно возбуждения коротких волн. Чтобы избежать подобной неустойчивости в уравнениях гидродинамики, Буссинеск первым предложил использовать вместо четвертой пространственной смешанную пространственно-временную производную. Розенау обосновал такую замену в теории решетки [14]. Эта же идея была применена к уравнениям СГ и ДСГ с высшей дисперсией в работах [9–11]. В настоящее время такой подход активно используется для аналитического описания эффектов дискретности [15–17].

Уравнение двойной синус-Гордон с четвертой смешанной производной имеет вид [9–11]

$$u_{tt} - u_{xx} - \beta u_{xxtt} + \sin u + 2H\sin(u/2) = 0\,. \qquad (2)$$

Константа β в этом уравнении является параметром дисперсии. При $H = 0$ и $\beta = 0$ уравнение (2) становится обычным уравнение СГ, имеющим, помимо модели краудиона, множество других приложений. В частности, переменная $u(x,t)$ в уравнении СГ описывает разность фаз волновых функций в сверхпроводниках в модели длинного джозефсоновского контакта [2]. Для магнитных приложений константа *H* в уравнении (2) имеет физический смысл магнитного поля, а переменная $\varphi = u/2$ соответствует, например, азимутальному углу вектора намагниченности в легкоплоскостном ферромагнетике [6].

Закон дисперсии линейных волн для уравнения (2) имеет вид

$$\omega(k) = \sqrt{(1 + H + k^2)/(1 + \beta k^2)}\,. \qquad (3)$$

Особенностью спектра (3) является его ограниченность по частотам не только снизу, но и сверху. Это свойство делает его похожим на спектр исходной дискретной модели (1). Более того, при $H = 0$ он просто совпадает со спектром СГ модели с нелокальным взаимодействием [7]. Из закона дисперсии (3) следует, что регуляризованное уравнение (2) не имеет неустойчивости состояний с $u = 0, 2\pi, 4\pi\ldots$ относительно коротковолновых возбуждений. Таким образом, в рамках регуляризованного уравнения (2) становится возможным детальное аналитическое и численное исследование особенностей динамики солитонных комплексов.

Уравнение (2) обладает важными точными решениями, что позволяет сформулировать некоторые строгие результаты. Решение $u_{2\pi}(x) = 4\,\mathrm{arctg}\,(\exp(x))$ для неподвижного солитона (кинка) обычного уравнения СГ остается точным решением уравнения (2) при $H = 0$ и произвольном β. Аналогично статическое решение уравнения ДСГ, так называемый *вобблер* [2]: $u_w(x) = 4\,\mathrm{arctg}\,(\exp(qx + R)) + 4\,\mathrm{arctg}\,(\exp(qx - R))$, где $q = \sqrt{1+H}$ и $\mathrm{sh}\,R = 1/\sqrt{H}$, является точным решением уравнения (2) при любых β. Оно описывает, например, 360° доменную границу в ферромагнетике, образованную двумя одинаковыми 180° доменными стенками.

Полный спектр линейных возбуждений неподвижного кинка уравнения (2) при $H = 0$ может быть найден в явном виде [18,19]. Оказывается, что благодаря дисперсии, кинк теперь обладает внутренними модами, и число их растет с увеличением параметра β, в то время как область непрерывного спектра становится все более узкой. Естественно предположить, что в условиях сильной дисперсии наличие внутренних мод становится доминирующим фактором как в динамике одиночных кинков, так и в процессах их связывания.

Действительно, для уравнения (2) было найдено решение, описывающее движущийся комплекс, который состоит из двух сильно связанных 2π-кинков [9–11]:

$$u_{4\pi}(x,t) = 8 \operatorname{arctg}\left\{\exp\left(\frac{x - V_0 t}{l_0}\right)\right\}. \tag{4}$$

Скорость такого комплекса V_0, его эффективная ширина l_0 и энергия E_0 являются заданными функциями параметров β и H:

$$V_0(\beta, H) = \sqrt{1 + \frac{\beta}{3}\left(1 + \frac{3}{2}H\right)^2} - \sqrt{\frac{\beta}{3}}\left(1 + \frac{3}{2}H\right),$$
$$l_0 = (3\beta V_0^2)^{1/4}, \quad E_0 = 32(l_0^{-1} - \frac{l_0}{9}). \tag{5}$$

При $H = 0$ выражение (4) переходит в точное решение для регуляризованного уравнения СГ. Уравнение (2) при любых $H \geq 0$ обладает другими двухсолитонными решениями, которые отвечают «возбужденным» состояниям солитонного комплекса и имеют характерную внутреннюю структуру [7,10,11]. Эти решения находятся численно, причем им соответствует дискретный набор значений скоростей.

Спектр колебаний движущегося кинка при $H = 0$ определяется сложным линеаризованным уравнением, которое может быть проанализировано в случае малых скоростей V и значений параметра β. В диспергирующей среде движение кинка приводит к связанным осцилляциям его скорости и эффективной ширины [18]. Для малых β и V динамические свойства уравнения (2) должны быть близкими к таковым для Лоренц-инвариантной СГ-системы.

В работе проведено численное моделирование динамики одиночных кинков и солитонных комплесков. Для решения уравнений с четвертой пространственно-временной производной применялась разностная схема, аналогичная предложенной в [7], которая обладает высокой устойчивостью, поскольку включает в себя метод прогонки. При вычислениях шаг по времени выбирался равным $\Delta t = 0{,}0001$ и шаг по координате, как правило, равным $\Delta x = 0{,}02$, при этом размер системы обычно брался равным $L = N \cdot \Delta x$, где $N = 3000$. В случаях, когда надо было исключить или минимизировать граничные эффекты, выбирались значения $N = 6000$ и 10000. Начальные условия выбирались в соответствии с выражениями для кинка, вобблера и солитонного комплекса (4), а граничные условия — в виде фиксированных границ со значениями $u(0,t) = 0$ и соответственно $u(L,t) = 2\pi$ для кинка и $u(L,t) = 4\pi$ для комплекса. Начальные скорости V_{in} кинков и комплексов находились в интервале между 0,1 и 0,9, а типичными значениями параметра дисперсии были $\beta = 1/12, 1/4$ и 1.

В результате для случая $H = 0$ было найдено, что одиночный кинк при малых значениях параметров β и V_{in} движется практически стационарно, генерируя слабое излучение с волновым вектором, определяемым из уравнения $\omega(k_0) = Vk_0$. С ростом параметра дисперсии излучение вперед исчезает, т.е. при фиксированном β существуют критические скорости V_{in}, выше которых возможно только излучение назад. Если параметр β и скорость V_{in} не малы, тогда динамика кинка уже на начальной стадии становится сильно нестационарной и диссипативной, как в дискретных системах [13]. Реально из-за наличия внутренней моды в спектре возбуждений кинка важным каналом потери солитоном энергии является процесс формирования осциллирующего кинка (wobbling kink). Он начинается с возбуждения внутренней моды, которая быстро трансформируется в самолокализованное колебание, так называемый *бризер* [3], который представляет собой динамическое связанное состояние двух кинков с противоположными топологическими зарядами. Для обычного уравнения синус-Гордон такой осциллирующий кинк может быть найден явно [20]. При этом бризер, локализованный на кинке, имеет симметрию внутренней моды. Из-за дисперсии его скорость быстро становится меньше скорости кинка, и бризер оказывается на заднем фронте топологического солитона.

Далее были аналитически и численно изучены процессы взаимодействия кинков и условия образования ими связанных солитонных комплексов в зависимости от начальной скорости кинков, расстояния между ними и величины параметра дисперсии. Оказалось, что для описания процесса связывания кинков и их взаимодействия с малоамплитудной бризерной модой $f_b(\xi,t) = a\sin(\Omega t - k(\xi - \xi_0)) / \operatorname{ch}(\varepsilon(\xi - \xi_0))$ достаточно использовать следующий анзац:

$$u_{wb}(x,t) = 4\operatorname{arctg}(\exp(\xi + R)) + 4\operatorname{arctg}(\exp(\xi - R)) + f_b(\xi,t)(1 - \operatorname{th}\xi), \tag{6}$$

в котором $\xi = (x - Vt)/l$ и параметры V, l, R, a, ε, Ω, k и ξ_0 предполагаются функциями, зависящими от времени. При $R = a = 0$ и $l = l_0$ и $V = V_0$ выражение (6) сводится к точному решению (4). Прежде всего, мы убедились численно, что солитонный комплекс (4), движущийся стационарно со скоростью V_0, является устойчивым относительно малых возмущений. Если положить $H = 0$ и взять начальный профиль в виде решения (4), но для скорости выбрать малое значение, то в этом случае солитонный комплекс распадается взрывным образом. Однако сила отталкивания достаточно быстро уменьшается с ростом начальной скорости комплекса. При приближении V_{in} снизу к скорости стационарного движения V_0 два взаимодействующих кинка проходят стадию формирования «возбужденных» состояний солитонного комплекса [7,10,11]. Однако такие состояния оказываются метастабильными, хотя и имеющими достаточно большое время жизни. Далее был изучен характер взаимодействия быстро движущихся кинков в зависимости от расстояния между их центрами. Было обнаружено, что при малых $R \le 1$ имеет место притяжение, в результате чего образуется устойчивый солитонный комплекс. Такой случай приведен на рис. 1 для $\beta = 1/12$ и $V_{\rm in} = 0{,}9$. Видно, что солитонный комплекс не разрушается даже после отражения от границы. С увеличением расстояния между кинками притяжение сменяется на отталкивание, в результате чего комплекс распадается на два кинка. При немалых начальных скоростях $V_{\rm in} - V_0 \le V_0/3$ и $\beta \le 1$ солитонный комплекс выживает, сбрасывая избыточную энергию в виде бризерных мод. Однако в этом случае существует еще одна критическая скорость, выше которой комплекс диссоциируется на два кинка. Такой распад «высокоэнергетического» комплекса с образованием нескольких бризерных мод происходит, например, при $\beta = 1$ и $V_{\rm in} = 0{,}9$ (рис. 2).

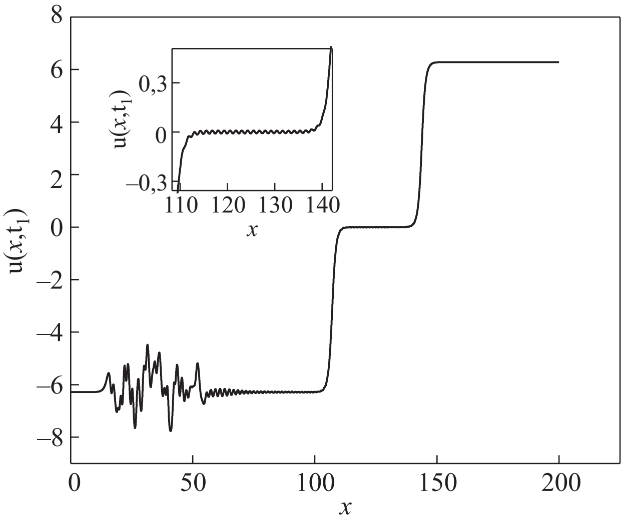

Рис. 2. Распад солитонного комплекса при $\beta = 1$, $V_{\rm in} = 0{,}9$ и $t_1 = 500$. Первый кинк движется с постоянной скоростью $V_1 = 0{,}152$. Позади второго кинка — бризерные моды. На вставке в увеличенном масштабе показана пространственная модуляция поля между кинками.

Наконец, нами было исследовано влияние внешней силы и диссипации на динамику солитонных комплексов. Для этого в правую часть уравнения (2) при $H = 0$ были добавлены члены $j_0 - \lambda u_t$, где первое слагаемое, например в джозефсоновском контакте, соответствует току смещения, а λ — коэффициенту диссипации. Результат численного моделирования представлен на рис. 3 для $\lambda = 0{,}1$ и шести последовательных значений j_0 от –0,1 до –0,35. Оказывается, что внешнее воздействие позволяет стабилизировать в условиях диссипации не только солитонный комплекс, но и его «возбужденные» состояния. Для волн стационарного профиля производные u_t и u_x пропорциональны друг другу, и обе они имеют форму двойных близко расположенных пиков. С этими производными непосредственно связаны экспериментально измеряемые величины, в частности, напряжение $U \sim u_t$ и магнитное поле $h \sim u_x$ в случае длинного джозефсоновского контакта, а в кристалле с дислокациями производная u_x определяет упругую деформацию среды. Заметим, что принципиальная возможность наблюдения многосолитонных возбуждений в длинных джозефсоновских контактах была продемонстрирована достаточно давно [21].

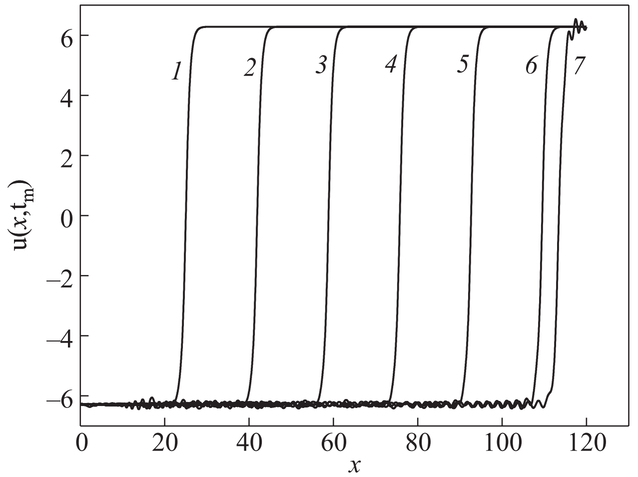

Рис. 1. Распространение устойчивого солитонного комплекса. Каждая кривая с номером m соответствует моменту времени $t_m = 20 \cdot m$. Профиль решения с номером $m = 7$ отвечает комплексу, отразившемуся от границы.

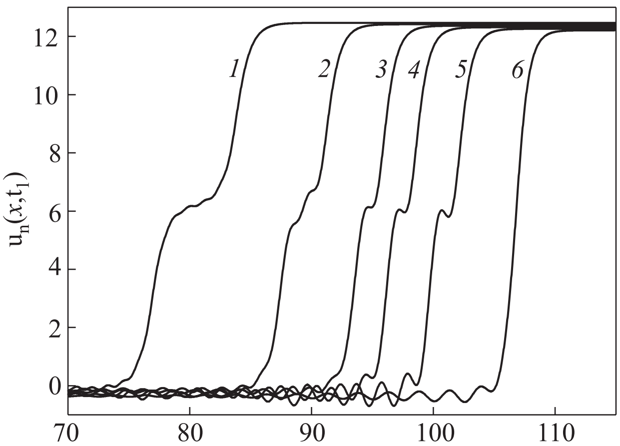

Рис. 3. Распространение устойчивых солитонных комплексов с внутренней структурой в условиях действия внешней силы и диссипации. Коэффициент $\lambda = 0{,}1$ и кривые с номером $n = 1, .., 6$ отвечают $j_0 = -0{,}05\,(1+n)$ и одинаковому моменту времени $t_1 = 100$.

Таким образом, полученные результаты могут быть использованы для объяснения и описания новых эффектов в динамике топологических солитонов в средах с сильной дисперсией, в частности, дислокаций в неидеальных решетках, флаксонов в системах джозефсоновских контактов и магнитных доменных стенок в анизотропных магнетиках.

1. В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Москва, Наука (1980).
2. Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис, *Солитоны и нелинейные волновые уравнения*, Москва, Мир (1988).
3 А.М. Косевич, А.С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Киев, Наукова думка (1989).
4. А.М. Косевич, *Теория кристаллической решетки*, Харьков, Вища школа (1988).
5. В.Д. Нацик, С.Н. Смирнов, Е.И. Назаренко, *ФНТ* **27**, 316 (2001).
6. А.М. Косевич, Б.А.Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Киев, Наукова думка (1983).
7. G.L. Alfimov, V.M. Eleonskii, N.E. Kulagin, and N.N. Mitskevich, *Chaos* **3**, 405 (1993).
8. M.M. Bogdan and A.M. Kosevich, In: *Nonlinear Coherent Structures in Physics and Biology*, *NATO ASI Series B: Physics*, vol. 329, Plenum Press, New York (1994), p. 373.
9. M.M. Bogdan and A.M. Kosevich, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math*. **46**, 14 (1997).
10. M.M. Bogdan, A.M. Kosevich, and G.A. Maugin, *Condens. Matter Phys.* **2**, 255 (1999).
11. M.M. Bogdan, A.M. Kosevich, and G.A. Maugin, *Wave Motion* **34**, 1 (2001).
12. А.С. Малышевский, В.П. Силин, С.А. Урюпин, *ЖЭТФ* **117**, 771 (2000).
13. M. Peyrard and M.D. Kruskal, *Physica* **D14**, 88 (1984).
14. P. Rosenau, *Phys. Rev.* **B36**, 5868 (1987).
15. P.G. Kevrekidis, I.G. Kevrekidis, A.R. Bishop, and E.S. Titi, *Phys. Rev.* **E65**, 046613-1 (2002).
16. B.F. Feng, Y. Doi, and T. Kawahara, *J. Phys. Soc. Jpn.* **73**, 2100 (2004).
17. P. Rosenau and S. Schochet, *Chaos* **15**, 015111 (2005).
18. O.V. Charkina and M.M. Bogdan, *Uzhgorod Univ. Sci. Herald. Series Physics* **17**, 30 (2005).
19. O.V. Charkina and M.M. Bogdan, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications* **2**, 047-12 (2006).
20. H. Segur, *J. Math. Phys.* **24**, 1439 (1983).
21. D. Dueholm, O.A. Levring, J. Mygind, N.F. Pedersen, O.H. Soerensen, and M. Cirillo, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1299 (1981).

Peculiarities of dynamics of bound states of topological solitons in low-dimensional highly-dispersive systems

M.M. Bogdan and O.V. Charkina

Nonstationary dynamics and interaction of topological solitons (dislocations, domain walls, fluxons) are investigated in one-dimensional highly-dispersive systems. The conditions and processes of soliton complex formation are studied analytically and numerically in relation to dispersion strength, soliton velocity and solitons separation. It is shown that in a dissipative medium the stable bound soliton states with a complex internal structure can propagate due to their stabilization by external forces.

PACS: **05.45.–a** Nonlinear dynamics and chaos;
05.45.Yv Solitons;
75.40.Gb Dynamic properties.

Keywords: nonlinear dynamics, soliton complex, kink, strong dispersion.