

Малые колебания вязкой несжимаемой жидкости с  
большим числом мелких взаимодействующих частиц  
при их поверхностном распределении.

Small oscillations of viscous incompressible fluid with a  
large number of small interacting particles under their  
surface distribution.

М.А. Бережной

М.А. Berezhnyi

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины

просп. Ленина, 47, Харьков, 61103, Украина

E-mail: berezhny@ilt.kharkov.ua

24 апреля 2008 г.

The asymptotic behavior of solutions of the problem describing small motions of viscous incompressible fluid, filling the domain  $\Omega$ , with a large number of small solid interacting particles concentrated in a small neighborhood of some smooth surface  $\Gamma \subset \Omega$  is studied. We prove that under certain conditions, the limit of those solutions satisfies the original equations in domain  $\Omega \setminus \Gamma$  together with some homogenized boundary conditions (conjugation conditions) on  $\Gamma$ .

Вивчається асимптотична поведінка розв'язків задачі, що описує малі рухи в'язкої нестисливої рідини, яка заповнює об'єм  $\Omega$ , з великою кількістю змунених у ній дрібних твердих взаємодіючих часток, що концентруються у малому околі деякої гладкої поверхні  $\Gamma \subset \Omega$ . Доведено, що при певних умовах границя цих розв'язків задовольняє вихідні рівняння в області  $\Omega \setminus \Gamma$  та деякі усереднені крайові умови типу умов спряження на  $\Gamma$ .

Изучается асимптотическое поведение решений задачи, описывающей малые движения вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей объём  $\Omega$ , с большим числом взвешенных в ней мелких твёрдых взаимодействующих частиц, концентрирующихся в малой окрестности некоторой гладкой поверхности  $\Gamma \subset \Omega$ . Доказывается, что при определённых условиях предел рассматриваемых решений удовлетворяет исходным уравнениям в области  $\Omega \setminus \Gamma$  и некоторым усреднённым граничным условиям типа условий сопряжения на  $\Gamma$ .

# 1. Введение

В данной работе изучается асимптотическое поведение решений линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса, описывающей нестационарные малые колебания вязкой несжимаемой жидкости в объёме с мелкими твёрдыми частицами, расположенными вблизи некоторой плоскости. Предполагается, что частицы взаимодействуют между собой посредством упругих сил.

Подобные задачи возникают при изучении транспортировки жидкостей в различных контейнерах. Для демпфирования колебаний жидкости используются различные перегородки с дырками, сетки и т.д. (см. [1]-[4]). Так, в работе [4] показано, что перегородки с густо расположенными мелкими дырками вызывают уменьшение частот колебаний идеальной жидкости. Метод расчёта колебаний жидкости в объёмах с перегородками основывается на использовании эффективных граничных условий, эквивалентных действию перегородки.

Задача, рассматриваемая в данной работе, описывает колебания вязкой жидкости в области с упругой системой, действие которой подобно перегородкам. Предполагается, что эта система образована маленькими твёрдыми шарообразными частицами, взаимодействующими между собой посредством упругих сил (например, пружин). Основной результат состоит в выводе эффективных граничных условий на поверхности, вблизи которой располагаются частицы. Используя такие условия, можно изучить возмущение частот колебаний жидкости, что предполагается сделать в следующей работе.

Оказывается, что вид этих условий существенно зависит от соотношения между размерами частиц и средними расстояниями между ними (в случае критически малого размера частиц вид этих условий качественно меняется). Для вывода эффективных граничных условий изучается асимптотическое поведение малых колебаний жидкости с частицами, когда средние расстояния между частицами и их размеры стремятся к нулю. Показывается, что главный член асимптотики описывается исходными уравнениями Навье-Стокса с эффективными граничными условиями на плоскости, вблизи которой расположены частицы.

В данной работе применяется вариационный метод, развитый в работах [5]-[7] при изучении задач о малых колебаниях ньютоновской жидкости с взаимодействующими частицами, распределёнными внутри всего объёма, занятого жидкостью. Такие задачи, как правило, возникают при моделировании поведения неньютоновских жидкостей (см. также [8]-[11]).

Работа построена следующим образом. В §2 даётся постановка задачи и формулируется основной результат. В §3 вводится локальная энергетическая характеристика упругой системы, образованной взаимодействующими частицами. В §§4-5 доказывается основная теорема, а в §6 коэффициенты в эффективном граничном условии вычисляются в явном виде для случая периодического расположения частиц.

## 2. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть  $\Omega$ -ограниченная область в  $\mathbb{R}^3$  с гладкой границей. Предположим, что эта область заполнена вязкой несжимаемой жидкостью. Пусть, кроме того, в сколь угодно малой окрестности некоторой поверхности  $\Gamma$  внутри этой области содержится большое число  $N^\varepsilon = \varepsilon^{-2}$  малых шарообразных твёрдых тел  $Q_\varepsilon^i$ , ограниченных сферами  $S_\varepsilon^i = \partial Q_\varepsilon^i$  ( $i = 1, 2, \dots, N^\varepsilon$ ). Параметр  $\varepsilon$  характеризует микроструктуру смеси таким образом, что расстояния между ближайшими частицами имеют порядок  $\varepsilon$ , а радиусы частиц-порядок  $\varepsilon^\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Поскольку тела имеют малый размер, будем называть их частицами. Положения частиц  $Q_\varepsilon^i \in \Omega$  определяются векторами  $\underline{x}^i$  их центров. Предположим, что частицы взаимодействуют между собой благодаря центральным силам, и векторы  $\underline{x}_\varepsilon^i$  соответствуют положению равновесия, определяемому минимумом потенциальной энергии взаимодействия, т.е.  $H_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) = \min H_\varepsilon(\underline{x}^i)$ .

Энергия взаимодействия состоит из сумм взаимодействий центров частиц  $\underline{x}_\varepsilon^i \in Q_\varepsilon^i$  и  $\underline{x}_\varepsilon^j \in Q_\varepsilon^j$ . Таким образом, энергия взаимодействия частиц в окрестности положения равновесия определяется равенством

$$H_\varepsilon(\underline{u}^i) = H_\varepsilon(\underline{0}) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} \langle C_\varepsilon^{ij} [\underline{u}^i - \underline{u}^j], [\underline{u}^i - \underline{u}^j] \rangle, \quad (2.1)$$

где  $\underline{u}^i = \underline{x}^i - \underline{x}_\varepsilon^i$ - смещения частиц,  $C_\varepsilon^{ij}$ - симметричная положительная матрица взаимодействия (см. далее), скобки  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначают скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$ .

Предположим также, что некоторые частицы  $Q_\varepsilon^j$  совпадают с частями  $\partial\Omega_\varepsilon^j$  неподвижной границы  $\partial\Omega$ , а соответствующие смещения  $\underline{u}_\varepsilon^j$  равны нулю (в силу краевого условия на  $\partial\Omega$ ). Тогда система частиц имеет единственное положение равновесия  $\{\underline{x}_\varepsilon^i\}_{i=1}^{N^\varepsilon}$ .

Введём такие обозначения:

$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N^\varepsilon} Q_\varepsilon^i$ - область, заполненная жидкостью;

$\rho$ - удельная плотность жидкости;

$\mu$ - динамическая вязкость жидкости;

$\rho_s$ - удельная плотность вещества частиц;

$m_\varepsilon^i = \rho_s |Q_\varepsilon^i|$ - масса частицы  $Q_\varepsilon^i$ ;

$\underline{\theta}_\varepsilon^i$ - вектор угла поворота частицы  $Q_\varepsilon^i$ ;

$r_\varepsilon^i$ - радиус частицы  $Q_\varepsilon^i$ ;

$\underline{I}_\varepsilon^i = \frac{2}{5} m_\varepsilon^i (r_\varepsilon^i)^2$ - момент инерции частицы  $Q_\varepsilon^i$ .

Тогда линеаризованная система уравнений, описывающих малые нестационарные движения жидкости с твёрдыми частицами, имеет вид:

$$\rho \frac{\partial \underline{v}_\varepsilon}{\partial t} - \mu \Delta \underline{v}_\varepsilon = \nabla p_\varepsilon, \quad \operatorname{div} \underline{v}_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon; \quad (2.2)$$

$$\underline{v}_\varepsilon = \dot{\underline{u}}_\varepsilon^i + \dot{\underline{\theta}}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i) \quad \text{на частицах}; \quad (2.3)$$

$$m_\varepsilon^i \ddot{\underline{u}}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} \sigma[\underline{v}_\varepsilon] \underline{\nu} ds = -\nabla_{\underline{u}^i} H_\varepsilon; \quad (2.4)$$

$$I_\varepsilon^i \ddot{\underline{\theta}}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i) \times \sigma[\underline{v}_\varepsilon] \underline{\nu} ds = -\nabla_{\theta^i} H_\varepsilon (\equiv 0), \quad (2.5)$$

где  $\underline{v}_\varepsilon = \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t)$ - скорость жидкости,  $p_\varepsilon = p_\varepsilon(\underline{x}, t)$ - давление,  $\underline{u}_\varepsilon^i$ - смещение центра  $i$ -й частицы,  $\dot{\underline{u}}_\varepsilon^i = \frac{d\underline{u}_\varepsilon^i}{dt}$ - скорость центра  $i$ -й частицы,  $\ddot{\underline{u}}_\varepsilon^i = \frac{d^2\underline{u}_\varepsilon^i}{dt^2}$ - ускорение центра  $i$ -й частицы и  $\dot{\underline{\theta}}_\varepsilon^i$ - мгновенная угловая скорость  $i$ -й частицы. Через  $\underline{\nu}$  обозначен единичный вектор внутренней нормали к сфере  $S_\varepsilon^i$ , а через  $\sigma[\underline{v}_\varepsilon]$ - тензор напряжений в жидкости. Компоненты этого тензора определяются как  $\sigma[\underline{v}_\varepsilon]_{ij} = \mu \left[ \frac{\partial v_{\varepsilon i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{\varepsilon j}}{\partial x_i} \right] - p_\varepsilon \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3)$ . Энергия взаимодействия  $H_\varepsilon$  определяется в соответствии с формулой (2.1).

Система (2.2)-(2.5) дополняется начальными условиями

$$\begin{aligned} \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, 0) &= \underline{v}_{\varepsilon 0}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega_\varepsilon; \\ \underline{u}_\varepsilon^i(0) &= \underline{0}, \quad \dot{\underline{u}}_\varepsilon^i(0) = \underline{u}_{\varepsilon 1}^i, \quad \underline{\theta}_\varepsilon^i(0) = \underline{0}, \quad \dot{\underline{\theta}}_\varepsilon^i(0) = \underline{\theta}_{\varepsilon 1}^i \end{aligned} \quad (2.6)$$

и краевым условием на  $\partial\Omega$

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \quad (2.7)$$

Существует единственное решение  $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}), \underline{u}_\varepsilon^i, \underline{\theta}_\varepsilon^i, i = 1, 2, \dots, N^\varepsilon\}$  задачи (2.2)-(2.7). Главной целью этой работы является изучение асимптотического поведения этого решения при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Как уже отмечалось, предполагается, что радиусы частиц имеют порядок  $\varepsilon^\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Оказывается, что в случае частиц некритического размера ( $1 \leq \alpha < 2$ ) частицы движутся как бы "влипая" в несущую жидкость (средние скорости частиц и жидкости оказываются равными), а в случае частиц критического размера  $\varepsilon^2$  (частицы меньшего размера не оказывают влияния на жидкость) жидкость с частицами движется в режиме фильтрации (средние скорости частиц и жидкости оказываются различными). Приведём теперь качественную формулировку основного результата.

В случае частиц некритического размера предельное поведение жидкости с частицами описывается системой

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - \mu \Delta \underline{v} = \nabla p, \quad \underline{x} \in \Omega \setminus \Gamma, \quad t > 0; \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t > 0; \quad (2.9)$$

$$\left[ \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right]_+^- = \sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ \int_0^t a_{1pqr}(\underline{x}, t - \tau) e_{qr}[\underline{v}(\underline{x}, \tau)] d\tau \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0; \quad (2.10)$$

$$\left[ \mu \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right]_+^- = \sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ \int_0^t a_{2pqr}(\underline{x}, t - \tau) e_{qr}[\underline{v}(\underline{x}, \tau)] d\tau \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0; \quad (2.11)$$

$$2\mu \left[ \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right]_+^- = [p]_+^-, \quad [\underline{v}]_+^- = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0; \quad (2.12)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0; \quad (2.13)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega. \quad (2.14)$$

В случае частиц критического размера предельное поведение жидкости с частицами описывается системой

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - \mu \Delta \underline{v} = \nabla p, \quad \underline{x} \in \Omega \setminus \Gamma, \quad t > 0; \quad (2.15)$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t > 0; \quad (2.16)$$

$$\left[ \sigma_{n3}[\underline{v}] \right]_+^- = C(\underline{x})(w_n - v_n), \quad n = \overline{1, 2}, \quad 2\mu \left[ \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right]_+^- = [p]_+^-, \quad [\underline{v}]_+^- = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0; \quad (2.17)$$

$$\sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ b_{npqr}(\underline{x}) e_{qr} \left[ \int_0^t \underline{w}(\underline{x}, \tau) d\tau \right] \right\} = C(\underline{x})(w_n - v_n), \quad n = \overline{1, 2}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad t > 0; \quad (2.18)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, t) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega, \quad t > 0; \quad (2.19)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, 0) = \underline{v}_0(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (2.20)$$

где  $[\bullet]_+^-$  обозначает скачок функции на поверхности  $\Gamma$  при переходе из области  $\Omega^-$  в область  $\Omega^+$ ,  $\{a_{npqr}(\underline{x}, t)\}_{n,p,q,r=1}^2$ - непрерывный по  $\underline{x} \in \Gamma$  и  $t > 0$  положительно определённый тензор в  $\mathbb{R}^2$ ,  $\{b_{npqr}(\underline{x})\}_{n,p,q,r=1}^2$ - непрерывный по  $\underline{x} \in \Gamma$  положительно определённый тензор в  $\mathbb{R}^2$ , а  $C(\underline{x}) > 0$ - непрерывная функция. Заметим, что в случае периодического расположения частиц компоненты тензоров  $\{a_{npqr}(\underline{x}, t)\}$  и  $\{b_{npqr}(\underline{x})\}$  являются константами и выражаются через коэффициенты жёсткости связей между частицами. Ниже будет дано точное определение этих величин и приведена строгая формулировка основного результата.

Доказательство мы приведём только для не критического случая. Но перед этим введём некоторые обозначения и сделаем некоторые предположения.

### 3. Локальная энергетическая характеристика

Обозначим через  $d_\varepsilon^i$  расстояние от частицы  $Q_\varepsilon^i$  до остальных частиц и границы  $\partial\Omega$ , т.е.  $d_\varepsilon^i = \text{dist}\{Q_\varepsilon^i, \bigcup_{j \neq i} Q_\varepsilon^j \cup \partial\Omega\}$ .

Предполагается, что выполняются следующие условия.

#### I. Геометрические условия.

1) Существуют константы  $0 < C_1, C_2, C_3 < \infty$ , не зависящие от  $\varepsilon$  и такие, что

$$C_1\varepsilon \leq d_\varepsilon^i \leq C_2\varepsilon; \quad (3.1)$$

$$r_\varepsilon^i \leq C_3\varepsilon^\alpha, \quad 1 \leq \alpha < 2. \quad (3.2)$$

2) Имеет место только близкое взаимодействие, так что центр каждой частицы  $\underline{x}_\varepsilon^i$  (для простоты будем считать, что эти центры располагаются на поверхности  $\Gamma$ , а сама эта поверхность является плоскостью) связан ребрами некоторого плоского графа  $\tilde{\Gamma}$  с центрами некоторых других частиц, находящихся на расстояниях, меньших  $C\varepsilon$ , где  $C > 0$ -фиксированная постоянная, не зависящая от  $\varepsilon$ . Более того, рассматриваются графы, удовлетворяющие условию триангуляции. Именно, предполагается, что поверхность  $\Gamma$  может быть разбита на треугольники, чьи вершины соответствуют частицам  $\underline{x}_\varepsilon^i$ , а стороны некоторым рёбрам графа  $\tilde{\Gamma}$ , причём углы между сторонами этих треугольников равномерно по  $\varepsilon$  отделены от нуля.

#### II. Условия на взаимодействия.

1) Частицы  $Q_\varepsilon^i$  и  $Q_\varepsilon^j$  взаимодействуют, если они находятся на расстоянии порядка  $O(\varepsilon)$  друг от друга. Таким образом, матрица взаимодействия  $C_\varepsilon^{ij} = 0$ , если  $\text{dist}(Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j) \geq C_1\varepsilon$  ( $C_1 > 0$ ). В частности, частицы, связанные общим ребром симплекса, обязательно взаимодействуют между собой.

2) Матрица взаимодействия  $C_\varepsilon^{ij}$  частиц  $Q_\varepsilon^i$  и  $Q_\varepsilon^j$  является матрицей оператора проектирования на вектор  $\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j$  с точностью до положительного скалярного множителя  $\frac{k_\varepsilon^{ij}}{|\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|}$ , т.е.

$$C_\varepsilon^{ij} \underline{u} = k_\varepsilon^{ij} \left\langle \frac{\underline{u}}{|\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|}, \underline{e}^{ij} \right\rangle \underline{e}^{ij}, \quad \forall \underline{u} \in \mathbb{R}^3. \quad (3.3)$$

Здесь  $\underline{e}^{ij} = \frac{\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j}{|\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}_\varepsilon^j|}$ , а коэффициенты  $k_\varepsilon^{ij}$  определяются равенством

$$k_\varepsilon^{ij} = k^{ij}\varepsilon, \quad k_1 \leq k^{ij} \leq k_2, \quad (3.4)$$

где постоянные  $k_2 \geq k_1 > 0$  не зависят от  $\varepsilon$ .

Введём теперь количественную характеристику упругой "сетки", образованной взаимодействующими частицами. Как и ранее, полагаем для простоты, что поверхность  $\Gamma$  представляет собой кусок плоскости (например,  $x_3 = 0$ ) и разбивает область  $\Omega$  на

подобласти  $\Omega^+$  и  $\Omega^-$  ( $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup \Gamma$ ). Обозначим через  $K(\underline{y}, h) = K_h^{\underline{y}}$  квадрат в плоскости  $\Gamma$  со стороной длины  $h > 0$  ( $\varepsilon \ll h \ll 1$ ) и центром в точке  $\underline{y} \in \Gamma$ . Для определённости полагаем, что стороны квадрата параллельны координатным осям  $x_1$  и  $x_2$ . Через все точки  $K(\underline{y}, h)$  проведём перпендикуляры к  $\Gamma$  длиной  $\delta > 0$  ( $\varepsilon \ll \delta \ll h$ ) в разные стороны от  $\Gamma$  (их концы образуют квадраты  $K_\delta^+(y, h)$  и  $K_\delta^-(y, h)$ ). Слой в  $\Omega$ , заполненный указанными отрезками перпендикуляров, обозначим  $T(K(\underline{y}, h), \delta)$ .

Введём теперь множество вектор-функций

$$J_\varepsilon^{\varphi, T}[T(K(\underline{y}, h), \delta)] = \{ \underline{w}_\varepsilon \in H^1(T(K(\underline{y}, h), \delta)) : \operatorname{div} \underline{w}_\varepsilon = 0, \underline{x} \in T(K(\underline{y}, h), \delta); \\ \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}) = \underline{w}_\varepsilon^i + \underline{v}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i), \underline{x} \in Q_\varepsilon^i; \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}) = \sum_{n,p=1}^3 \varphi^{np}(\underline{x} - \underline{y}) T_{np}, \underline{x} \in K_\delta^\pm(\underline{y}, h) \},$$

где  $\underline{w}_\varepsilon^i$  и  $\underline{v}_\varepsilon^i$ - произвольные постоянные векторы,

$$\underline{\varphi}^{np}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_p \underline{e}^n + x_n \underline{e}^p) - \frac{\delta_{np}}{3} \sum_{k=1}^3 x_k \underline{e}^k, \quad (3.5)$$

а  $\underline{T} = \{T_{np}\}$ - произвольный симметрический тензор второго ранга.

Рассмотрим задачу минимизации в этом классе следующего функционала:

$$A_{\varepsilon\delta h}^\tau(\underline{w}_\varepsilon, \underline{y}, \lambda, \underline{T}) = E_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}[\underline{w}_\varepsilon, \underline{w}_\varepsilon] + \frac{1}{\lambda} I_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^\varepsilon[\underline{w}_\varepsilon, \underline{w}_\varepsilon] + \\ + P_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^{\varepsilon\tau T}[\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}) - \sum_{n,p=1}^3 T_{np} \underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{y}), \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}) - \sum_{q,r=1}^3 T_{qr} \underline{\varphi}^{qr}(\underline{x} - \underline{y})], \quad (3.6)$$

где

$$E_G[\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] = 2\mu \int_G \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[\underline{u}_\varepsilon] e_{kl}[\underline{v}_\varepsilon] d\underline{x}, \quad (3.7)$$

$$I_G^\varepsilon[\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij}[\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j)], \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j) \rangle, \quad (3.8)$$

$$P_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^{\varepsilon\tau T}[\underline{u}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] = h^{-2-\tau} \varepsilon^2 \sum_i \langle \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i), \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) \rangle + h^{-2-\tau} \int_{T(K(\underline{y}, h), \delta)} \langle \underline{u}_\varepsilon(\underline{x}), \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}) \rangle d\underline{x}, \quad (3.9)$$

$e_{kl}[\underline{u}] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$ , сумма  $\sum_i$  соответствует суммированию по всем частицам  $Q_\varepsilon^i \subset G$ , расположенным внутри области  $G$ ,  $0 < \tau < 2$ ,  $\lambda > 0$ . Можно показать, что существует единственная вектор-функция, минимизирующая функционал (3.6); минимум этого функционала является квадратичной функцией компонент тензора  $\underline{T}$ :

$$\min_{\underline{w}_\varepsilon \in J_\varepsilon^{\varphi, \underline{T}}[T(K(\underline{y}, h), \delta)]} A_{\varepsilon\delta h}^\tau(\underline{w}_\varepsilon, \underline{y}, \lambda, \underline{T}) = \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^\tau(\underline{y}, \lambda, \varepsilon, \delta, h) T_{np} T_{qr}, \quad (3.10)$$

где  $a_{npqr}^\tau(\underline{y}, \lambda, \varepsilon, \delta, h)$ - компоненты тензора четвёртого ранга, определяемые равенством

$$\begin{aligned} a_{npqr}^\tau(\underline{y}, \lambda, \varepsilon, \delta, h) &= E_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}[\underline{w}^{np}, \underline{w}^{qr}] + \frac{1}{\lambda} I_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^\varepsilon[\underline{w}^{np}, \underline{w}^{qr}] + \\ &+ P_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^{\varepsilon\tau \underline{T}}[\underline{w}^{np}(\underline{x}) - \underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{y}), \underline{w}^{qr}(\underline{x}) - \underline{\varphi}^{qr}(\underline{x} - \underline{y})]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Здесь  $\underline{w}^{np}(\underline{x})$ - вектор-функция из  $J_\varepsilon^{\varphi, \underline{T}}[T(K(\underline{y}, h), \delta)]$ , минимизирующая функционал (3.6) при  $\underline{T} = \underline{T}^{np} = \frac{1}{2}(\underline{e}^n \otimes \underline{e}^p + \underline{e}^p \otimes \underline{e}^n)$ ;  $\underline{e}^n$  ( $n = 1, 2, 3$ )- ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^3$ .

Теперь по решению  $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t), \underline{u}_\varepsilon^i, \underline{\theta}_\varepsilon^i, i = \overline{1, N_\varepsilon}\}$  задачи (2.2) – (2.7) построим вектор-функцию

$$\tilde{\underline{v}}_\varepsilon(\underline{x}, t) = \chi_\varepsilon(\underline{x}) \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \chi_\varepsilon^i(\underline{x}) [\underline{u}_\varepsilon^i + \underline{\theta}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i)], \quad (3.12)$$

где  $\chi_\varepsilon(\underline{x})$ - характеристическая функция области  $\Omega_\varepsilon$ , заполненной жидкостью, а  $\chi_\varepsilon^i(\underline{x})$ - характеристическая функция частицы  $Q_\varepsilon^i$ .

Предположим, что выполнены следующие условия:

- 2.1) последовательность начальных вектор-функций  $\tilde{\underline{v}}_{\varepsilon 0}(\underline{x}) = \tilde{\underline{v}}_\varepsilon(\underline{x}, 0)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  сходится в  $\mathbf{L}_2(\Omega)$  к вектор-функции  $\underline{v}_0(\underline{x})$ .
- 2.2) для каждого  $\lambda > 0$  и некоторого вещественного  $\tau > 0$  равномерно по  $\underline{x} \in \Gamma$  существуют следующие пределы:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{npqr}^\tau(\underline{x}, \lambda, \varepsilon, \delta, h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{npqr}^\tau(\underline{x}, \lambda, \varepsilon, \delta, h)}{h^2} = a_{npqr}(\underline{x}, \lambda),$$

где  $\{a_{npqr}(\underline{x}, \lambda)\}$ - непрерывный по  $\underline{x} \in \Gamma$  и  $\lambda > 0$  положительно определённый тензор.

**Замечание.** Учитывая (3.3) и (3.11), легко показать, что  $a_{3pqr} = a_{n3qr} = a_{np3r} = a_{npq3} = 0$  ( $n, p, q, r = \overline{1, 3}$ ).

Приведём теперь главный результат этой работы.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия 2.1)-2.2). Тогда последовательность вектор-функций  $\tilde{\underline{v}}_\varepsilon(\underline{x}, t)$ , определённая в (3.12), сходится слабо в  $L_2(\Omega \times [0, T])$  (для любого  $T > 0$ ) к вектор-функции  $\underline{v}(\underline{x}, t)$ , являющейся решением задачи (2.8)-(2.14).

Задача (2.8) – (2.14) имеет единственное решение.

Эта теорема доказывается в §§3-5 с использованием преобразования Лапласа (§3), дающего стационарный аналог задачи (2.2) – (2.7) со спектральным параметром  $\lambda$ . В §4 устанавливается сходимость решений этой стационарной задачи к решению предельной стационарной задачи. Затем изучаются аналитические свойства этих решений по параметру  $\lambda$  и их поведение при  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . После чего, применяя обратное преобразование Лапласа, доказывается утверждение теоремы 1 (§5).

## 4. Вариационная формулировка стационарной задачи

Используя преобразование Лапласа искомых вектор-функций (в дальнейшем мы будем сохранять за преобразованиями те же обозначения:  $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t) \rightarrow \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$ ,  $p_\varepsilon(\underline{x}, t) \rightarrow p_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$ ,  $\underline{u}_\varepsilon^i(t) \rightarrow \underline{u}_\varepsilon^i(\lambda)$ ,  $\underline{\theta}_\varepsilon^i(t) \rightarrow \underline{\theta}_\varepsilon^i(\lambda)$ ) и учитывая (2.1), перепишем задачу (2.2)-(2.5) в виде

$$-\mu \Delta \underline{v}_\varepsilon + \lambda \rho \underline{v}_\varepsilon - \nabla p_\varepsilon = \rho \underline{v}_{\varepsilon 0}(\underline{x}), \quad \operatorname{div} \underline{v}_\varepsilon = 0, \quad \underline{x} \in \Omega_\varepsilon, \quad (4.1)$$

$$\underline{v}_\varepsilon = \lambda [\underline{u}_\varepsilon^i + \underline{\theta}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i)], \quad \underline{x} \in S_\varepsilon^i, \quad (4.2)$$

$$\lambda^2 m_\varepsilon^i \underline{u}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} \sigma[\underline{v}_\varepsilon] \nu ds = -\frac{1}{\lambda} \sum_j^i C_\varepsilon^{ij} [\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j)] + m_\varepsilon^i \underline{v}_\varepsilon^i, \quad (4.3)$$

$$\lambda^2 \Gamma_\varepsilon^i \underline{\theta}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i) \times \sigma[\underline{v}_\varepsilon] \nu ds = \Gamma_\varepsilon^i \underline{\theta}_{\varepsilon 1}^i, \quad (4.4)$$

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \quad (4.5)$$

Здесь  $Re\lambda > 0$ ,  $\sum_j^i$  соответствует суммированию по всем частицам  $Q_\varepsilon^j$ , взаимодействующим с частицей  $Q_\varepsilon^i$ . Будем продолжать вектор-функцию скорости  $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$  на частицы  $Q_\varepsilon^i$  в соответствии с (4.2), сохраняя то же обозначение за продолженной вектор-функцией. Обозначим через

$$\rho_\varepsilon(\underline{x}) = \rho \chi_\varepsilon(\underline{x}) + \rho_s \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \chi_\varepsilon^i(\underline{x})$$

удельную плотность суспензии "жидкость-частицы".

Зафиксируем теперь  $\lambda > 0$ . Тогда задача (4.1)- (4.5) эквивалентна вариационной задаче

$$\Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) = \min_{\underline{v}'_\varepsilon \in J_\varepsilon(\Omega)} \Phi_\varepsilon(\underline{v}'_\varepsilon), \quad (4.6)$$

где  $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$  обозначает класс соленоидальных вектор-функций из  $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ , равных  $\underline{a}_\varepsilon^i + \underline{b}_\varepsilon^i \times (\underline{x} - \underline{x}_\varepsilon^i)$  на частицах  $Q_\varepsilon^i$  ( $a_\varepsilon^i$  и  $b_\varepsilon^i$ - произвольные векторы), а

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) = & \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{v}_\varepsilon] + \lambda \langle \rho_\varepsilon \underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon \rangle - 2 \langle \rho_\varepsilon \underline{v}_{\varepsilon 0}, \underline{v}_\varepsilon \rangle \right\} dx + \\ & + \frac{1}{2\lambda} \sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon} \langle C_\varepsilon^{ij}[\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j)], \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^j) \rangle, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $\lambda > 0$ .

Рассмотрим задачу минимизации

$$\Phi_0(\underline{v}) = \min_{\underline{v}' \in \overset{\circ}{J}(\Omega)} \Phi_0(\underline{v}'), \quad (4.8)$$

где  $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ - класс соленоидальных вектор-функций из  $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ , первые две компоненты которых принадлежат также классу  $\overset{\circ}{H}^1(\Gamma)$ , а

$$\Phi_0(\underline{v}) = \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{v}] + \lambda \langle \rho \underline{v}, \underline{v} \rangle - 2 \langle \rho \underline{v}_0, \underline{v} \rangle \right\} dx + \int_{\Gamma} \sum_{n,p,q,r=1}^2 a_{npqr}(\underline{x}, \lambda) e_{np}[\underline{v}] e_{qr}[\underline{v}]. \quad (4.9)$$

Минимизант этой задачи является решением следующей краевой задачи:

$$\lambda \rho \underline{v} - \mu \Delta \underline{v} = \rho \underline{v}_0 + \nabla p, \quad \underline{x} \in \Omega \setminus \Gamma, \quad (4.10)$$

$$\operatorname{div} \underline{v} = 0, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad (4.11)$$

$$\left[ \mu \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \right]_{-}^{+} = \sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ a_{1pqr}(\underline{x}, \lambda) e_{qr}[\underline{v}(\underline{x}, \lambda)] \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma; \quad (4.12)$$

$$\left[ \mu \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \right]_{-}^{+} = \sum_{p,q,r=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ a_{2pqr}(\underline{x}, \lambda) e_{qr}[\underline{v}(\underline{x}, \lambda)] \right\}, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad (4.13)$$

$$2\mu \left[ \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right]_{+}^{-} = \left[ p \right]_{+}^{-}, \quad \left[ \underline{v} \right]_{+}^{-} = 0, \quad \underline{x} \in \Gamma, \quad (4.14)$$

$$\underline{v}(\underline{x}, \lambda) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \quad (4.15)$$

Асимптотическое поведение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решений задачи (4.6) описывается следующей теоремой.

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия 2.1)-2.2). Тогда решение  $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$  задачи (4.6) для любого  $\lambda > 0$  сходится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  к решению  $\underline{v}(\underline{x}, \lambda)$  задачи (4.8) в следующем смысле:

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{v}(\underline{x}, \lambda) \quad \text{сильно в } L_2(\Omega).$$

Доказательство этой теоремы приводится в §5.

## 5. Теорема сходимости для вариационной задачи (4.6)

Пусть  $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$  будет решением задачи (4.6). Используя это решение, построим кусочно-линейный сплайн

$$\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) \underline{L}_\varepsilon^i(\underline{x}) \equiv \lambda \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \underline{u}_\varepsilon^i \underline{L}_\varepsilon^i, \quad (5.1)$$

где  $\underline{u}_\varepsilon^i = \underline{u}_\varepsilon^i(\lambda)$  определяется равенством  $\lambda^{-1} \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) = \underline{u}_\varepsilon^i(\lambda) + \theta_\varepsilon^i(\lambda) \times (\underline{x} - \underline{x}^i)$  для  $\underline{x} \in Q_\varepsilon^i$ , а  $\underline{L}_\varepsilon^i$  - это конечный элемент треугольников, определённых в условии I.2) (§ 2). Функция  $\underline{L}_\varepsilon^i$  непрерывна в  $\mathbb{R}^2$ , линейна в каждом треугольнике графа  $\tilde{\Gamma}$ , и  $\underline{L}_\varepsilon^i(\underline{x}_\varepsilon^j) = \delta_{ij}$ .

Поскольку  $0 \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ ,  $\Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) \leq \Phi_\varepsilon(0) = 0$ . Отсюда

$$\int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{v}_\varepsilon] dx + \lambda \langle \rho_\varepsilon \underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon \rangle \right\} dx + \frac{1}{\lambda} I_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon) \leq 2 \|\rho_\varepsilon \underline{V}_{\varepsilon 0}\|_{L_2(\Omega)} \|\underline{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}, \quad (5.2)$$

где

$$I_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon, \underline{w}_\varepsilon) = \sum_{j \neq i} \langle C_\varepsilon^{ij} [\underline{v}_\varepsilon^i - \underline{v}_\varepsilon^j], [\underline{w}_\varepsilon^i - \underline{w}_\varepsilon^j] \rangle, \quad \underline{v}_\varepsilon^i = \underline{v}_\varepsilon^i(\underline{x}_\varepsilon^i), \quad \underline{w}_\varepsilon^i = \underline{w}_\varepsilon^i(\underline{x}_\varepsilon^i). \quad (5.3)$$

Применим теперь второе неравенство Корна (см. [12])

$$\|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \left( \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{v}_\varepsilon] dx + \|\underline{v}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \right).$$

и дискретное неравенство Корна (см. [13])

$$\|P \underline{w}_\varepsilon\|_{H^1(\Gamma)}^2 \leq C \sum_{i,j} ' \langle \underline{C}_\varepsilon^{ij} [\underline{w}_\varepsilon^i - \underline{w}_\varepsilon^j], [\underline{w}_\varepsilon^i - \underline{w}_\varepsilon^j] \rangle, \quad (5.4)$$

где  $P \underline{w} \equiv P \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , константа  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ , а сумма  $\sum_{i,j} '$  берётся по всем

парам  $(i, j)$ , соответствующим сторонам  $(\underline{x}_\varepsilon^i, \underline{x}_\varepsilon^j)$  треугольников, триангулирующих область  $\Omega$ .

Учитывая, что  $\mu > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $\rho_\varepsilon(x) \geq \min(\rho, \rho_s) > 0$ , из (5.2)-(5.4) следует оценка

$$\|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|P\underline{w}_\varepsilon\|_{H^1(\Gamma)}^2 < C,$$

где  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ .

Поэтому множества вектор-функций  $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda), \varepsilon > 0\}$  и  $\{P\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda), \varepsilon > 0\}$  (см. (5.1)) слабо компактны в  $H^1(\Omega)$  и  $H^1(\Gamma)$  соответственно. Выделим подпоследовательности  $\underline{v}_{\varepsilon_k}(\underline{x}, \lambda)$  и  $P\underline{w}_{\varepsilon_k}(\underline{x}, \lambda)$ , слабо сходящиеся к некоторым вектор-функциям  $\underline{v} \in H_0^1(\Omega)$  и  $\underline{w}_0 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_0^1(\Gamma)$  соответственно (при  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ). В силу Теоремы вложения,  $\underline{v}_{\varepsilon_k}(\underline{x}, \lambda)$  сходится к  $\underline{v}(\underline{x})$  сильно в  $L_2(\Omega)$ . Как будет показано далее, след  $\gamma_\Gamma P\underline{v}$  вектор-функции  $P\underline{v}(\underline{x}, \lambda)$  на поверхности  $\Gamma$  совпадает с  $\underline{w}_0(\underline{x}, \lambda)$  (т.е.  $P\underline{v} \in H_0^1(\Gamma)$ ), а сама предельная вектор-функция  $\underline{v}(\underline{x}, \lambda)$  является решением задачи (4.8). Но поскольку эта задача имеет единственное решение, то и вся последовательность  $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda), \varepsilon > 0\}$  также является сходящейся:

$$\underline{v}_\varepsilon \rightharpoonup \underline{v} \text{ слабо в } H^1(\Omega), \underline{v}_\varepsilon \rightarrow \underline{v} \text{ сильно в } L_2(\Omega). \quad (5.5)$$

Ясно, что  $\underline{v}(\underline{x}) \in \mathring{J}(\Omega)$ .

Докажем теперь, что

$$\int_{\Gamma} |\gamma_\Gamma P\underline{v}(\underline{x}, \lambda) - \underline{w}_0(\underline{x}, \lambda)|^2 d\Gamma = 0. \quad (5.6)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |\gamma_\Gamma P\underline{v}(\underline{x}, \lambda) - \underline{w}_0(\underline{x}, \lambda)|^2 d\Gamma &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_{T(\Gamma, 2\varepsilon)} |P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - P\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\underline{x} + \\ &+ \frac{1}{2\varepsilon} \int_{T(\Gamma, 2\varepsilon)} |\gamma_\Gamma P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\underline{x} + \int_{\Gamma} |\gamma_\Gamma P\underline{v}(\underline{x}, \lambda) - \gamma_\Gamma P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\Gamma + \\ &+ \int_{\Gamma} |P\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - \underline{w}_0(\underline{x}, \lambda)|^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Второе слагаемое в правой части последнего неравенства оценивается величиной  $\varepsilon \|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(T(\Gamma, 2\varepsilon))}$ , что стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Очевидно, что третье и четвертое слагаемые также стремятся к нулю. Оценим теперь первое слагаемое. Учитывая равномерную по  $\varepsilon$  ограниченность вектор-функций  $\underline{v}_\varepsilon$  и  $P\underline{w}_\varepsilon$  в пространствах  $H_0^1(\Omega)$  и  $H_0^1(\Gamma)$  соответственно, легко показать, что

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{T(\Gamma, 2\varepsilon)} |P\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - P\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\underline{x} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \sum_i \int_{B_\varepsilon^i} |\langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{B_\varepsilon^i} - \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i)|^2 d\underline{x} + o(1) (\varepsilon \rightarrow 0),$$

где  $B_\varepsilon^i = U_\varepsilon^i \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ ,  $U_\varepsilon^i = \{\underline{x} \in \Gamma : |\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}| \leq |\underline{x}_\varepsilon^j - \underline{x}|, j \neq i\}$  – ячейка Вороного на поверхности  $\Gamma$ , а  $\langle \bullet \rangle_G$  – среднее значение вектор-функции на множестве  $G$ . Отсюда, с учётом (4.2) и (5.1), получаем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{T(\Gamma, 2\varepsilon)} |\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda) - \underline{w}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)|^2 d\underline{x} \leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \sum_i \left| \langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{B_\varepsilon^i} - \langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{Q_\varepsilon^i} \right|^2.$$

Учитывая теперь, что  $Q_\varepsilon^i \subset B_\varepsilon^i$  и применяя неравенство (см. [6])

$$|\langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{B_\varepsilon^i} - \langle \underline{v}_\varepsilon \rangle_{Q_\varepsilon^i}| \leq C \frac{\|\underline{v}_\varepsilon\|_{H^1(B_\varepsilon^i)}}{\sqrt{r_\varepsilon^i}},$$

получаем, что и первое слагаемое в правой части неравенства (5.7) стремится к нулю ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ). Таким образом, соотношение (5.6) доказано, откуда следует, что  $P\underline{v}(\underline{x}, \lambda) \in H_0^1(\Gamma)$ .

Покажем, что для любой вектор-функции  $\underline{w} \in \mathring{J}(\Omega)$  справедливо следующее неравенство:

$$\Phi_0(\underline{v}) \leq \Phi_0(\underline{w}). \quad (5.8)$$

Доказательство этого неравенства проведём в два этапа.

1. Для любой вектор-функции  $\underline{w} \in \mathring{J}(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$  построим тестовую вектор-функцию  $\underline{w}_{\varepsilon\delta h} \in \mathring{J}_\varepsilon(\Omega)$ , такую что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(\underline{w}_{\varepsilon\delta h}) \leq \Phi_0(\underline{w}). \quad (5.9)$$

Опишем эту конструкцию. Покроем плоскость  $\Gamma$  квадратами  $K_h^{x_\alpha}$  с центрами в точках  $x_\alpha \in \Gamma$  и сторонами длины  $h$ , параллельными координатным осям:  $\bar{\Gamma} \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} K_h^{x_\alpha}$ . Пусть центры  $x_\alpha \in \Gamma$  этих квадратов образуют квадратную решётку периода  $h - h^{1+\frac{\tau}{2}}$ ,  $0 < \tau < 2$ . Обозначим через  $K_{h'}^{x_\alpha}$  квадраты со сторонами длины  $h' = h - 2h^{1+\frac{\tau}{2}}$ , концентрические к  $K_h^{x_\alpha}$ . Известно (см. [5]), что существует множество функций  $\{\phi_\alpha(\underline{x}) \in C_0^\infty(\Gamma)\}_{\alpha \in \Lambda}$  (называемое *специальным разбиением единицы*), такое что

$$\begin{aligned} 1) \phi_\alpha(\underline{x}) &= \begin{cases} 1, \underline{x} \in K_{h'}^{x_\alpha} \\ 0, \underline{x} \notin K_h^{x_\alpha} \end{cases}, & 2) 0 \leq \phi_\alpha(\underline{x}) \leq 1, & 3) |\nabla \phi_\alpha(\underline{x})| \leq \frac{c}{h^{1+\frac{\tau}{2}}}, \\ 4) \sum_{\alpha \in \Lambda} \phi_\alpha(\underline{x}) &\equiv 1, \underline{x} \in \bar{\Gamma}, & 5) \phi_\alpha(\underline{x}) = C_\varepsilon^i, \underline{x} \in B_\Gamma(Q_\varepsilon^i), \end{aligned} \quad (5.10)$$

где  $C_\varepsilon^i$  – некоторые константы ( $0 \leq C_\varepsilon^i \leq 1$ ), а  $B_\Gamma(Q_\varepsilon^i)$  – шары на плоскости  $\Gamma$  с центрами в точках  $\underline{x}_\varepsilon^i$ , содержащие проекции частиц  $Q_\varepsilon^i$  на эту плоскость и имеющие радиусы  $\frac{d_\varepsilon^i}{3}$  (см. (3.1)).

Для любой соленоидальной вектор-функции  $\underline{w}(\underline{x}) \in C_0^2(\Omega)$  построим вектор-функцию  $\underline{w}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) \in \mathring{J}_\varepsilon(\Omega)$ , обладающую следующими свойствами. Во-первых, она аппроксимирует

(в  $L_2(\Omega)$ ) заданную вектор-функцию  $\underline{w}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$  при малых  $\varepsilon$ ,  $\delta$  и  $h$ . Во-вторых, она "почти" минимизирует функционал (3.6).

Заметим, что любая вектор-функция  $\underline{w}(\underline{x}) \in C^2(T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta))$  может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \underline{w}(\underline{x}) &= \underline{w}(\underline{x}^\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 (e_{np}[\underline{w}(\underline{x}^\alpha)] \underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}^\alpha) + \\ &+ w_{np}[\underline{w}(\underline{x}^\alpha)] \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}^\alpha)) + \underline{g}_\alpha(\underline{x}), \quad \underline{x} \in T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta), \end{aligned} \quad (5.11)$$

где

$$\varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_n}{\partial x_p}(\underline{x}_\alpha) + \frac{\partial w_p}{\partial x_n}(\underline{x}_\alpha) \right), \quad w_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_n}{\partial x_p}(\underline{x}_\alpha) - \frac{\partial w_p}{\partial x_n}(\underline{x}_\alpha) \right),$$

вектор-функция  $\underline{\varphi}^{np}(\underline{x})$  определяется равенством (3.5),

$$\underline{\psi}^{np}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (x_n \underline{e}^p - x_p \underline{e}^n), \quad (5.12)$$

а  $D^k \underline{g}_\alpha(\underline{x}) = \underline{O}(h^{2-k})$ ,  $k = \overline{0, 2}$ . Определим квази-минимизант  $\underline{w}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{w}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) &= \begin{cases} \sum_{\alpha \in \Lambda} \left\{ \underline{w}(\underline{x}_\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 \varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] \underline{v}_{\alpha, \varepsilon\delta h}^{np}(\underline{x}) + \right. \\ \left. + \sum_{n,p=1}^3 w_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}_\alpha) + \underline{g}_\alpha(\underline{x}) \right\} \cdot \phi_\alpha(\underline{x}_\Gamma), \quad \underline{x} \in T(\Gamma, \delta) & + \underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) = \\ \underline{w}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega \setminus T(\Gamma, \delta) \end{cases} \\ &= \underline{z}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) + \underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}); \end{aligned} \quad (5.13)$$

здесь  $\underline{x}_\Gamma$ -проекция точки  $\underline{x}$  на плоскость  $\Gamma$ , а вектор-функция  $\underline{v}_{\alpha, \varepsilon\delta h}^{np}(\underline{x})$ - минимизант функционала (3.6) при  $T = T^{np} = \frac{1}{2}(\underline{e}^n \otimes \underline{e}^p + \underline{e}^p \otimes \underline{e}^n)$ . Вектор-функция  $\underline{g}_\alpha(\underline{x})$  соленоидальна и равна постоянным векторам  $\underline{g}_{\alpha\varepsilon}^i$  на шарах  $G_\varepsilon^i$ , содержащих частицы и имеющих радиусы  $(1+\beta)r_\varepsilon^i = O(\varepsilon^{1+\alpha})$ ,  $\beta > 0$ . Более того, векторы  $\underline{g}_{\alpha\varepsilon}^i$  являются средними значениями вектор-функции  $\underline{g}_\alpha(\underline{x})$  на шарах  $G_\varepsilon^i$ , вектор-функции  $\underline{g}_\alpha(\underline{x})$  совпадают вне шаров радиуса  $(1+2\beta)r_\varepsilon^i$ , концентрических к  $G_\varepsilon^i$ , и имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|\underline{g}_\alpha - \underline{g}_\alpha\|_{L_2(\Omega)} &\leq c \max_i \{r_\varepsilon^i\}, \quad |\underline{g}_\alpha(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{g}_\alpha(\underline{x}_\varepsilon^j)| \leq c r_\varepsilon^i, \\ \|\underline{g}_\alpha\|_{H^1(G)} &\leq c \|\underline{g}_\alpha\|_{H^1(G)}, \quad |\underline{g}_{\alpha\varepsilon}^i - \underline{g}_{\alpha\varepsilon}^j| \leq c \text{dist}(Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где константы  $c$  не зависят от  $\varepsilon$ , а  $G$ - любая подобласть области  $\Omega$ . Существование такой вектор-функции  $\underline{g}_\alpha$  устанавливается в [5].

Вектор-функция  $\underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$  строится в соответствии со следующей леммой (см. [5]).

**Лемма 1.** Для любой функции  $F_\varepsilon(\underline{x}) \in L_2(\Omega)$ , удовлетворяющей условиям

$$1. F_\varepsilon(\underline{x}) = 0, \quad x \in \bigcup_i B(Q_\varepsilon^i),$$

$$2. \int_{\Omega} F_\varepsilon(\underline{x}) dx = 0,$$

существует вектор-функция  $\underline{\zeta}_\varepsilon(\underline{x}) \in H_0^1(\Omega)$ , такая что

$$\operatorname{div} \underline{\zeta}_\varepsilon(\underline{x}) = F_\varepsilon(\underline{x}), \quad x \in \Omega;$$

$$\underline{\zeta}_\varepsilon(\underline{x}) = \underline{\zeta}_\varepsilon^i, \quad x \in B(Q_\varepsilon^i); \quad \|\underline{\zeta}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|F_\varepsilon(\underline{x})\|_{L_2(\Omega)},$$

где  $B(Q_\varepsilon^i)$ - шары с центрами в точках  $\underline{x}_\varepsilon^i$ , содержащие частицы  $Q_\varepsilon^i$  и имеющие радиусы  $\frac{d_\varepsilon^i}{3}$ ,  $\underline{\zeta}_\varepsilon^i$ - постоянные векторы, а  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ .

В силу (5.13), вектор-функция  $\underline{z}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) \in H^1(\Omega)$  равна нулю на границе  $\partial\Omega$ , а следовательно

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \underline{z}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) dx = 0.$$

Более того, можно показать, что

$$\operatorname{div} \underline{z}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) = 0, \quad x \in B(Q_\varepsilon^i).$$

Применяя теперь лемму 1 к функции  $F_\varepsilon(\underline{x}) = -\operatorname{div} \underline{z}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$ , можно построить соленоидальную вектор-функцию  $\underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$ , равную постоянным векторам  $\underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}^i$  на шарах  $B(Q_\varepsilon^i)$  и нулю на  $\partial\Omega$ . Теперь очевидно, что  $\underline{w}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x}) \in J_\varepsilon(\Omega)$ .

Вычислим значение функционала (4.7) на вектор-функции  $\underline{w}_{\varepsilon\delta h}(\underline{x})$ . Аналогично [6] можно показать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

Поскольку выражение  $I_\varepsilon[\underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}, \underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}^i]$  задаёт эквивалентную норму в  $H_0^1(\Gamma)$  для сплайна, построенного по векторам  $\underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}^i$ , из (5.6) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon[\underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}, \underline{\zeta}_{\varepsilon\delta h}^i] = 0.$$

Далее, аналогично [6] можно показать, что

$$E_{T(\Gamma, \delta)}[\underline{w}_{\varepsilon\delta h}, \underline{w}_{\varepsilon\delta h}] = \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] e_{qr}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] E_{T(K(\underline{x}_\alpha, h'), \delta)}[\underline{v}_{\alpha, \varepsilon\delta h}^{np}, \underline{v}_{\alpha, \varepsilon\delta h}^{qr}] + L_1(\varepsilon, \delta, h);$$

$$(5.15)$$

$$I_\varepsilon[\underline{w}_{\varepsilon\delta h}, \underline{w}_{\varepsilon\delta h}] \leq \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] e_{qr}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] I_{T(K(\underline{x}_\alpha, h'), \delta)}^\varepsilon[\underline{v}_{\alpha, \varepsilon h}^{np}, \underline{v}_{\alpha, \varepsilon h}^{qr}] + L_2(\varepsilon, \delta, h), \quad (5.16)$$

где  $\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} L_i(\varepsilon, \delta, h) = 0$ ,  $i = \overline{1, 2}$ .

Из (5.15) и (5.16), с учётом (3.11), получаем:

$$\begin{aligned} E_\Omega[\underline{w}_{\varepsilon\delta h}, \underline{w}_{\varepsilon\delta h}] + \frac{1}{\lambda} I_\Omega^\varepsilon[\underline{w}_{\varepsilon\delta h}, \underline{w}_{\varepsilon\delta h}] &\leq E_\Omega[\underline{w}, \underline{w}] + \\ + \sum_{\alpha \in \Lambda} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^\tau(\underline{x}_\alpha, \lambda, \varepsilon, \delta, h) \varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] \varepsilon_{qr}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] + \bar{o}(1) &\quad (\varepsilon \ll \delta \ll h \ll 1). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Используем теперь неравенство (5.17) для оценки функционала (4.7):

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\underline{w}_{\varepsilon\delta h}) &\leq \int_\Omega 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{w}] dx + \sum_{\alpha \in \Lambda} h^2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{a_{npqr}^\tau(\underline{x}_\alpha, \lambda, \varepsilon, \delta, h)}{h^2} \varepsilon_{np}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] \varepsilon_{qr}[\underline{w}(\underline{x}_\alpha)] + \\ &+ \lambda \int_\Omega \langle \rho_\varepsilon \underline{w}_{\varepsilon\delta h}, \underline{w}_{\varepsilon\delta h} \rangle - 2 \int_\Omega \langle \rho_\varepsilon \underline{v}_{\varepsilon 0}, \underline{w}_{\varepsilon\delta h} \rangle dx + \Delta(\varepsilon, \delta, h), \end{aligned} \quad (5.18)$$

где

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(\varepsilon, \delta, h) = 0.$$

Учитывая (5.13), можно показать, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\underline{w}_{\varepsilon\delta h} - \underline{w}\|_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Переходя теперь в неравенстве (5.18) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  и  $h \rightarrow 0$ , с учётом 2.1)-2.2) и гладкости вектор-функции  $\underline{w} \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \cap C_0^2(\overline{\Omega})$ , получаем:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(\underline{w}_{\varepsilon\delta h}) \leq \Phi_0(\underline{w}).$$

Таким образом, неравенство (5.9) доказано. Далее, из (5.9) и очевидного неравенства  $\Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) \leq \Phi_\varepsilon(\underline{w}_{\varepsilon\delta h})$  следует оценка сверху:

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) \leq \Phi_0(\underline{w}), \quad \forall \underline{w} \in \overset{\circ}{J}(\Omega). \quad (5.19)$$

**2.** Докажем теперь оценку снизу

$$\Phi_0(\underline{v}) \leq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon), \quad (5.20)$$

где вектор-функция  $\underline{v}(\underline{x})$  определена в (5.5). Доказательство неравенства (5.20) проведём в предположении достаточной гладкости предельной вектор-функции:  $\underline{v}(\underline{x}) \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$ .

Рассмотрим разбиение плоскости  $\Gamma$  непересекающимися квадратами  $K_h^{\underline{x}_\alpha}$ , ориентированными вдоль координатных осей. В каждом слое  $T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)$  вектор-функция  $\underline{v}(\underline{x})$  может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \underline{v}(\underline{x}) = & \underline{v}(\underline{x}^\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 (e_{np}[\underline{v}(\underline{x}^\alpha)]\underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}^\alpha) + \\ & + w_{np}[\underline{v}(\underline{x}^\alpha)]\underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}^\alpha)) + \underline{g}_\alpha(\underline{x}), \quad \underline{x} \in T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta), \end{aligned} \quad (5.21)$$

где  $D^k \underline{g}_\alpha(\underline{x}) = \underline{Q}(h^{2-k})$ ,  $k = \overline{0, 2}$ . Рассмотрим теперь в этом слое вектор-функцию

$$\underline{v}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}) = \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}) - \text{rot}\{\underline{\tilde{u}}_\varepsilon(\underline{x})\chi_\delta(x_3)\} - \underline{v}(\underline{x}^\alpha) - \sum_{n,p=1}^3 w_{np}[\underline{v}(\underline{x}^\alpha)]\underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}^\alpha) - \underline{\tilde{g}}_\alpha(\underline{x}), \quad (5.22)$$

где вектор-функция  $\underline{\tilde{g}}_\alpha(\underline{x})$  определена в (5.14),  $\chi_\delta(x_3)$ - гладкая функция, равная нулю при  $|x_3| < \frac{\delta}{2}$  и единице при  $|x_3| \geq \delta$ , а вектор-функция  $\underline{\tilde{u}}_\varepsilon(\underline{x})$  строится по вектор-функции  $\underline{u}_\varepsilon(\underline{x}) = \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}) - \underline{v}(\underline{x})$  в соответствии со следующей теоремой (см. [14]).

**Теорема 3.** Пусть  $G$ - область в  $\mathbb{R}^3$ , являющаяся гомеоморфным образом шара, а  $J(G)$ - подпространство в  $L_2(G)$ , являющееся замыканием множества гладких соленоидальных вектор-функций. Тогда для любой вектор-функции  $\underline{u}(\underline{x}) \in J(G)$  имеет место следующее представление:

$$\underline{u}(\underline{x}) = \text{rot} \underline{\tilde{u}}(\underline{x}),$$

где  $\underline{\tilde{u}}(\underline{x}) \in H^1(G)$ ,  $\text{div} \underline{\tilde{u}} = 0$  в  $G$ ,  $\langle \underline{\tilde{u}}, \underline{n} \rangle = 0$  на  $\partial G$ . Этими тремя условиями вектор-функция  $\underline{\tilde{u}}(\underline{x})$  определяется однозначно.

Если  $\underline{u}(\underline{x}) \in J(G) \cap H^m(G)$ , то  $\underline{\tilde{u}}(\underline{x}) \in H^{m+1}(G)$ , причём, имеет место оценка

$$\|\underline{\tilde{u}}\|_{H^{m+1}(G)} \leq C \|\underline{u}\|_{H^m(G)},$$

где константа  $C$  зависит только от области  $G$ .

Очевидно, что  $\underline{u}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}) \in J_\varepsilon^{\varphi, \underline{g}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)]}[T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)]$ . Тогда из (3.6) и (3.10), с учётом (5.22), при  $T_{np} = e_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)]$  получаем:

$$\begin{aligned} & E_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}[\underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] + E_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}[\text{rot}\{\underline{\tilde{u}}_\varepsilon\chi_\delta\}, \text{rot}\{\underline{\tilde{u}}_\varepsilon\chi_\delta\}] + I_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}^\varepsilon[\underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon] + \\ & + P_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}^{\varepsilon h \gamma T}[\underline{u}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}) - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)]\underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}_\alpha), \underline{u}_\varepsilon^\alpha(\underline{x}) - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)]\underline{\varphi}^{np}(\underline{x} - \underline{x}_\alpha)] + \underline{Q}(h^4) \geq \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^\tau(\underline{x}_\alpha, \lambda, \varepsilon, \delta, h) \varepsilon_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)] \cdot \varepsilon_{qr}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)]. \quad (5.23)$$

Аналогично [6] можно показать, что четвёртое слагаемое в левой части неравенства (5.23) имеет порядок  $O(h^{4-\tau})$ . Очевидно, что первое слагаемое в левой части этого неравенства стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ . Для оценки второго слагаемого воспользуемся равенством  $\text{rot}\{\tilde{\underline{u}}_\varepsilon \chi_\delta\} = (\underline{v}_\varepsilon - \underline{v})\chi_\delta + \tilde{\underline{u}}_\varepsilon \times \nabla \chi_\delta$ , из которого получаем:

$$E_{T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta)}[\text{rot}\{\tilde{\underline{u}}_\varepsilon \chi_\delta\}, \text{rot}\{\tilde{\underline{u}}_\varepsilon \chi_\delta\}] \leq C(\|\underline{v}_\varepsilon - \underline{v}\|_{H^1(T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta))}^2 + \frac{1}{\delta^2} \|\underline{v}_\varepsilon - \underline{v}\|_{L_2(T(K(\underline{x}_\alpha, h), \delta))}^2),$$

что стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $\delta \rightarrow 0$ .

Просуммировав теперь неравенство (5.23) по всем квадратам разбиения, легко видеть, что

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) &\geq \int_\Omega 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\underline{v}_\varepsilon] d\underline{x} + \sum_{\alpha \in \Lambda} h^2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{a_{npqr}^\tau(\underline{x}_\alpha, \lambda, \varepsilon, \delta, h)}{h^2} \varepsilon_{np}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)] \varepsilon_{qr}[\underline{v}(\underline{x}_\alpha)] + \\ &+ \lambda \int_\Omega \langle \rho_\varepsilon \underline{v}_\varepsilon, \underline{v}_\varepsilon \rangle - 2 \int_\Omega \langle \rho_\varepsilon \underline{v}_{\varepsilon 0}, \underline{v}_\varepsilon \rangle d\underline{x} + \bar{o}(1) \quad (\varepsilon \ll \delta \ll h \ll 1). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Теперь, переходя к пределу в (5.24) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  и  $h \rightarrow 0$ , с учётом условий 2.1)-2.2) и гладкости вектор-функции  $\underline{v}(\underline{x}) \in C^2(\Omega)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon(\underline{v}_\varepsilon) &\geq \int_\Omega \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^2 a_{npqr}(\underline{x}) \varepsilon_{np}[\underline{v}(\underline{x})] \cdot \varepsilon_{qr}[\underline{v}(\underline{x})] d\underline{x} + \right. \\ &\left. + \lambda \langle \rho \underline{v}, \underline{v} \rangle - 2 \langle \rho \underline{v}_0, \underline{v} \rangle \right\} d\underline{x} = \Phi_0(\underline{v}). \end{aligned}$$

Таким образом, требуемое неравенство (5.20) получено в предположении гладкости предельной вектор-функции  $\underline{v}(\underline{x})$ . Доказательство этого неравенства без предположения гладкости для  $(\underline{v}(\underline{x}) \in \mathring{J}(\Omega))$  является чуть более сложным, хотя его схема остаётся той же: необходимо ввести гладкие аппроксимации  $\underline{v}_\sigma(\underline{x})$  предельной вектор-функции, затем получить неравенство для этих аппроксимаций, аналогичное неравенству (5.20), и перейти к пределу при  $\sigma \rightarrow 0$  (см. [5]).

Неравенство (5.8) следует из (5.19) и (5.20). Теорема 2 доказана.

Заметим, что сходимости в Теореме 2 доказана только для  $\lambda > 0$ . Кроме того, коэффициенты  $a_{npqr}(\underline{x}, \lambda)$  были определены только для  $\lambda > 0$ . Следующая лемма (см. [6]) позволяет аналитически продолжить эти функции в комплексную плоскость и установить поведение продолженных функций при  $\lambda \rightarrow \infty$ .

**Лемма 2.** *Функции  $a_{npqr}(\underline{x}, \lambda)$ , определённые при  $\lambda > 0$ , могут быть аналитически продолжены в комплексную плоскость с разрезом вдоль полуоси  $\lambda \leq 0$ . Более того, для*

любого  $\delta > 0$  в области  $\Phi_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda - \pi| \geq \delta > 0\}$  имеет место следующая оценка:

$$|a_{nprq}(\underline{x}, \lambda)| < \frac{C}{|\lambda|}, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad (5.25)$$

где константа  $C > 0$  не зависит от  $\lambda$ .

Аналогично [7] можно доказать, что семейство решений  $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$  задачи (4.1)-(4.5) является аналитическим в области  $G_\varepsilon = \{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \cup \{\Phi_\delta \cap \{|\lambda| > \lambda_1(\varepsilon)\}\}$ , и в этой области имеют место следующие оценки:

$$\|\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{\operatorname{Re} \lambda}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0, \quad (5.26)$$

$$\|\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C_{1\varepsilon}}{|\lambda|}, \quad (5.27)$$

где константа  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ .

Подобное утверждение справедливо также и для решения задачи (4.10)-(4.15). А именно, это решение является аналитическим в области  $G = \{\operatorname{Re} \lambda > 0\} \cup \{\Phi_{\frac{\pi}{3}} \cap \{|\lambda| > \lambda_2\}\}$ , и в этой области

$$\|\underline{v}(\underline{x}, \lambda)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{|\lambda|}. \quad (5.28)$$

Теперь, учитывая раномерную по  $\varepsilon$  оценку (5.26), можно применить теорему Витали (см. [15]) и доказать, что последовательность вектор-функций  $\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, \lambda)$  сходится в  $L_2(\Omega)$  к вектор-функции  $\underline{v}(\underline{x}, \lambda)$  равномерно внутри области  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Используя этот факт и оценки (5.25), (5.27) и (5.28), можно применить обратное преобразование Лапласа и доказать Теорему 1 (см. подробнее [5], [7]).

## 6. Периодическое расположение частиц

Покажем существование пределов 2.2) для частного примера плоской квадратной решётки. А именно, рассмотрим периодическое расположение частиц  $Q_\varepsilon^i$  одинакового радиуса  $r_\varepsilon^i = r\varepsilon^\alpha$  ( $r < \frac{1}{4}$ ), при котором центры частиц  $\underline{x}_\varepsilon^i$  образуют квадратную решётку периода  $\varepsilon$ , где каждая вершина ячейки периодичности соединена пружиной со всеми остальными вершинами этой ячейки. Таким образом, каждая вершина соединена с  $3^2 - 1 = 8$  вершинами в решётке. Упругие константы  $k^{ij}$  (см. (3.4)) этих пружин в направлениях рёбер и диагоналей ячейки периодичности равны  $k_1$  и  $k_2$  соответственно (см. Рис. 1).

На этом рисунке фиксированная частица  $Q_\varepsilon^i$  с центром в точке  $\underline{x}_\varepsilon^i$  показана как тёмный шар, а все её соседи  $Q_\varepsilon^j$  показаны как более светлые шары.

Имеет место следующая теорема.

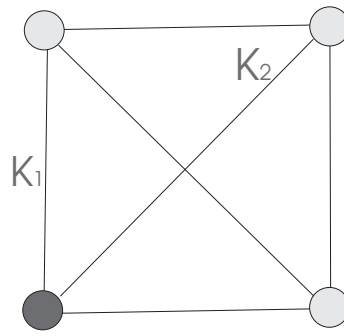


Рис. 1: Периодическая ячейка

**Теорема 4.** Для квадратной решётки, описанной выше (см. также Рис. 1) коэффициенты  $a_{npqr}(\underline{x}, \lambda)$  в условии 2.2) являются константами относительно  $\underline{x}$ :

$$a_{nnnn}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{5}{9} k_1 + \frac{\sqrt{2}}{18} k_2 \right), \quad a_{nnpp}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{-4}{9} k_1 + \frac{\sqrt{2}}{18} k_2 \right), \quad a_{nppn}(\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{2\lambda} k_2, \quad n, p = \overline{1, 2},$$

$a_{npqr}(\lambda) = 0$  во всех остальных случаях.

**Доказательство.** Рассмотрим частицу  $Q_\varepsilon^i$ , проекция которой на плоскость  $\Gamma$  расположена внутри квадрата  $K_\varepsilon^i$  со стороной длины  $\varepsilon$ , а центром как частицы, так и квадрата, является точка  $\underline{x}_\varepsilon^i \in \Gamma$ . Тогда  $D_\varepsilon^i = T(K_\varepsilon^i, \frac{\varepsilon}{2}) \setminus Q_\varepsilon^i$  - ячейка периодичности в слое  $T(\Gamma, \frac{\varepsilon}{2})$ , заполненная жидкостью. Для получения стандартной единичной ячейки, необходимо растянуть  $D_\varepsilon^i$  в  $\varepsilon^{-1}$  раз и перенести её центр в начало координат. Тогда область  $D_\varepsilon = T(K, \frac{1}{2}) \setminus Q_\varepsilon$  является единичной ячейкой периодичности в слое  $T(\Gamma, \frac{1}{2})$ , где  $T(K, \frac{1}{2})$ - куб со стороной длины 1 и центром в начале координат, а  $Q_\varepsilon$ - шар в  $T(K, \frac{1}{2})$  радиуса  $r\varepsilon^\alpha$  ( $r < \frac{1}{4}$ ).

Рассмотрим в  $T(K, \frac{1}{2})$  вектор-функцию

$$\underline{u}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = \text{rot}(\phi_\varepsilon(\underline{x}) \underline{u}^{np}(\underline{x})), \quad (6.1)$$

где

$$\phi_\varepsilon(\underline{x}) = \phi\left(\frac{\underline{x}}{r\varepsilon^\alpha}\right), \quad \phi(\underline{x}) = \begin{cases} 1, & |\underline{x}| \leq 1 \\ 0, & |\underline{x}| > 2 \end{cases},$$

а  $\underline{u}^{np}(\underline{x})$ - гладкая вектор-функция, такая что

$$\text{rot} \underline{u}^{np}(\underline{x}) = -\psi^{np}(\underline{x}), \quad |\underline{u}^{np}(\underline{x})| \leq C|\underline{x}|^2.$$

Поскольку вектор-функция  $\underline{u}_\varepsilon^{np}(\underline{x})$  равна нулю на границе  $\partial K$ , её можно продолжить периодическим образом в слое  $T(\Gamma, \frac{1}{2})$  и нулём вне этого слоя.

Пусть  $K_h^y$ - квадрат со стороной длины  $h$  ( $h \gg \delta \gg \varepsilon$ ) и центром в точке  $\underline{y} \in \Gamma$  (для простоты полагаем, что точка  $\underline{y}$  совпадает с центром одной из частиц  $\underline{x}_\varepsilon^i$ ). Будем искать вектор-функцию  $\underline{w}^{np}(\underline{x}, \lambda)$ , минимизирующую функционал (3.6) при  $T = T^{np} = \frac{1}{2}(\underline{e}^n \otimes \underline{e}^p + \underline{e}^p \otimes \underline{e}^n)$ , в виде

$$\underline{w}^{np}(\underline{x}, \lambda) = \underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) + \underline{v}_\varepsilon^{np}(\underline{x}, \lambda), \quad (6.2)$$

где

$$\underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{y}) + \varepsilon \tilde{\underline{u}}_\varepsilon^{np}\left(\frac{\underline{x} - \underline{y}}{\varepsilon}\right). \quad (6.3)$$

Здесь  $\tilde{\underline{u}}_\varepsilon^{np}(\underline{x})$ - периодическое в слое  $T(\Gamma, \frac{1}{2})$  и нулевое вне этого слоя продолжение вектор-функции  $\underline{u}_\varepsilon^{np}(\underline{x})$ . Используя свойства функций  $\underline{\psi}^{np}(\underline{x})$  и  $\underline{u}_\varepsilon^{np}(\underline{x})$ , имеем:

$$\underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = \underline{\psi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^j - \underline{y}), \quad \underline{x} \in Q_\varepsilon^j, \quad \underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = \underline{\psi}^{np}(\underline{x} - \underline{y}), \quad \underline{x} \in \partial T(K_h^y, \delta), \quad (6.4)$$

$$\operatorname{div} \underline{U}_\varepsilon^{np}(\underline{x}) = 0, \quad \underline{x} \in T(K_h^y, \delta). \quad (6.5)$$

Для корректора  $\underline{v}_\varepsilon^{np}(\underline{x}, \lambda)$  легко получить соответствующую вариационную задачу. Анализируя эту задачу, а затем подставляя (6.2)-(6.4) в (3.11) и учитывая периодичность структуры, получаем:

$$\frac{1}{h^2} a_{npqr}^\tau(\underline{y}, \lambda, \varepsilon, \delta, h) = \frac{1}{h^2 \lambda} I_{T(K(\underline{y}, h), \delta)}^\varepsilon [\underline{\psi}_\varepsilon^{np}, \underline{\psi}_\varepsilon^{qr}] + \bar{o}(1) \quad (\varepsilon \ll \delta \ll h \ll 1),$$

откуда следует утверждение Теоремы 4.

Как уже отмечалось, в случае частиц критического размера (с радиусом порядка  $\varepsilon^2$ ) усреднённая модель становится качественно иной. А именно, аналогично [7] можно доказать такую теорему.

**Теорема 5.** *При описанном выше (см. Рис. 1) периодическом расположении частиц радиуса  $r\varepsilon^2$  последовательность вектор-функций  $\tilde{\underline{v}}_\varepsilon(\underline{x}, t)$ , определённая в (3.12), сходится слабо в  $L_2(\Omega \times [0, T])$  (для любого  $T > 0$ ) к вектор-функции  $\underline{v}(\underline{x}, t)$ , такой что пара  $\{\underline{v}(\underline{x}, t), \underline{x} \in \Omega; \underline{w}(\underline{x}, t), \underline{x} \in \Gamma\}$  является решением задачи (2.15)-(2.20), где  $b_{nnnn} = k_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}k_2$ ,  $b_{nnpp} = b_{ppnn} = \frac{\sqrt{2}}{2}k_2$ ,  $b_{npqr} = 0$  во всех остальных случаях, а  $C(\underline{x}) = 6\pi\mu r$ .*

Автор благодарит Е.Я. Хруслова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## Список литературы

- [1] Галицин Д.А., Троценко В.А. К расчёту частот и присоединённых масс жидкости в прямоугольном контейнере с перегородками в поперечной плоскости его симметрии // Прикладна гідромеханіка. - 2000. - № 1. - С. 20-27.

- [2] *Троценко В.А.* О влиянии кольцевых перегородок на эффективность гашения волновых движений жидкости в сосуде // Доповіди НАНУ. - 2005. - № 6. - С. 50-56.
- [3] *Микишев Г.Н.* Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1978. - 247 с.
- [4] *Борисов Д.И.* Малые движения идеальной жидкости в сосуде с перфорированными перегородками // Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". - 2006. - № 749. - С. 86-95.
- [5] *L.V.Berlyand and E.Ya.Khruslov.* Homogenized non-Newtonian viscoelastic rheology of a suspension of interacting particles in a viscous Newtonian fluid // SIAM, Journal of Applied Mathematics. - 2004. - **64**, № 3. - P. 1002-1034.
- [6] *M.A. Bereznyy.* The asymptotic behaviour of viscous incompressible fluid small oscillations with solid interacting particles // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. - 2007. - **3**, № 2. - P. 135-156.
- [7] *M. Bereznyy, L. Berlyand and E. Khruslov.* The homogenized model of complex fluids // NHM, Networks and Heterogeneous Media. - 2008. - **3**, № 4.
- [8] *Ronald G. Larson.* The Structure and the Rheology of Complex Fluids. - New York-Oxford: Oxford University Press. - 1999. - 688 p.
- [9] *J.N. Pernin and E. Jacquet.* Elasticity and viscoelasticity in highly heterogeneous composite medium: threshold phenomenon and homogenization // Intern. J. of Eng. Sci. - 2001. - **39**. - P. 1655-1689.
- [10] *W.B. Russel, D.A. Saville and W.R. Schowalter.* Colloidal Dispersions. - Cambridge: Cambridge University Press. - 1989. - 525 p.
- [11] *J. Sanchez-Hubert.* Asymptotic study of the macroscopic behaviour of solid-liquid mixture // Math. Methods Appl. Sci. - 1980. - **2**. - P. 1-11.
- [12] *O.A. Oleinic, A.S. Shamaev and G.A. Iosif'yan.* Mathematical problems in elasticity and homogenization: Studies in Mathematics and its Applications. - Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1982. - V. 26. - 398 p.
- [13] *M. Bereznyy and L.Berlyand.* Continuum limit for three-dimensional mass-spring networks and discrete Korn's inequality // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. - 2006. - **54**, № 3. - P. 635-669.
- [14] *A. Bendali, J.M. Dominguez and S. Gallic.* A variational approach for the vector potential formulation of the Stokes and Navier-Stokes problems in three dimensional domains // J. Math. Anal. Appl. - 1985. - **107**. - P. 537-560.

[15] *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций: В 2 т. - М.: Наука, 1968. - Т. 2. - 624 с.