М. А. Бережной

Малые колебания вязкой несжимаемой жидкости с мелкими твёрдыми взаимодействующими частицами большой плотности.

(Представлено академиком НАН Украины Е.Я.Хрусловым)

We consider the motion of viscous incompressible fluid with large number of small solid ball-shaped interacting particles which have a large density. We study the asymptotic behaviour of small oscillations of such a system when radii of the particles, distances between the nearest particles and interaction power between them are accordingly decreased but density of the particles is accordingly increased. We derive the equations which describe the homogenized model of our system.

1. Рассмотрим ограниченную область Ω в $\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$, заполненную вязкой несжимаемой жидкостью, содержащей большое число $N_\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$ малых шарообразных тел Q^i_ε (в дальнейшем будем называть их частицами). От малого параметра ε зависят радиусы частиц $r^\varepsilon_i = r_i\varepsilon^3$, расстояния между ближайшими частицами $r_{ij} = c^r_{ij}\varepsilon$, силы взаимодействия между ними $f_{ij} = c^f_{ij}\varepsilon^2$ и плотность вещества частиц $\rho^\varepsilon_s = c_s\varepsilon^{-6}$; постоянные c_s, c^r_{ij}, c^f_{ij}, r_i $\;(0 < c_s, c^r_{ij}, c^f_{ij}, r_i < \infty)$ не зависят от ε. Будем предполагать, что частицы взаимодействуют друг с другом. Кроме того, считаем, что частицы, находящиеся на расстояниях, меньших $C\varepsilon$ (C>0), от неподвижной границы $\partial\Omega$, взаимодействуют с ней. Система при нулевой скорости течения жидкости находится в равновесном состоянии. Энергия взаимодействия частиц друг с другом в окрестности положения равновесия может быть записана в виде

$$H_\varepsilon(\underline{u}_\varepsilon) = H_\varepsilon(\underline{0}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon}\langle C^{ij}_\varepsilon(\underline{u}^i_\varepsilon - \underline{u}^j_\varepsilon), \underline{u}^i_\varepsilon - \underline{u}^j_\varepsilon\rangle + h(\underline{u}_\varepsilon), \tag{1}$$

где скобки $\langle\,,\rangle$ обозначают скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$, $\underline{u}^i_\varepsilon$- смещение центра частицы Q^i_ε, $\underline{u}_\varepsilon = (\underline{u}^1_\varepsilon, ..., \underline{u}^{N_\varepsilon}_\varepsilon)$, а через $h(\underline{u}_\varepsilon)$ обозначена величина более высокого по $|\underline{u}^i_\varepsilon - \underline{u}^j_\varepsilon|$ порядка малости. Матрица C^{ij}_ε определяется равенством

$$C^{ij}_\varepsilon\underline{u} = k^{ij}\varepsilon^2\langle\frac{\underline{u}}{|\underline{x}^i_\varepsilon - \underline{x}^j_\varepsilon|}, \underline{e}^{ij}_\varepsilon\rangle\underline{e}^{ij}_\varepsilon, \tag{2}$$

где постоянная k^{ij} не зависит от ε, а $\underline{e}^{ij}_\varepsilon = \dfrac{\underline{x}^i_\varepsilon - \underline{x}^j_\varepsilon}{|\underline{x}^i_\varepsilon - \underline{x}^j_\varepsilon|}$.

Введём следующие обозначения:

$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{N} Q^i_\varepsilon$- область, занятая жидкостью;

ρ- удельная плотность жидкости;

μ- динамическая вязкость жидкости;

ρ^ε_s- удельная плотность вещества частиц;

$\underline{x}^i_\varepsilon$- радиус-вектор центра частицы Q^i_ε, отвечающий равновесному положению частиц;

$\underline{\theta}^i_\varepsilon$- вектор угла поворота частицы Q^i_ε;

m^i_ε - масса частицы Q^i_ε;

$I^i_\varepsilon = \dfrac{2}{5} m^i_\varepsilon (r^i_\varepsilon)^2$ - момент инерции шаровидной частицы Q^i_ε.

Тогда линеаризованная система уравнений, описывающая малые нестационарные движения жидкости с твёрдыми частицами, может быть записана в виде:

$$\rho \frac{\partial \underline{v}_\varepsilon}{\partial t} - \mu \Delta \underline{v}_\varepsilon = \nabla p_\varepsilon, \quad \mathrm{div} \underline{v}_\varepsilon = 0 \quad \underline{x} \in \Omega_\varepsilon; \tag{3}$$

$$\underline{v}_\varepsilon = \underline{\dot{u}}^i_\varepsilon + \underline{\dot{\theta}}^i_\varepsilon \times (\underline{x} - \underline{x}^i_\varepsilon), \quad \underline{x} \in S^i_\varepsilon; \tag{4}$$

$$m^i_\varepsilon \underline{\ddot{u}}^i_\varepsilon + \int\limits_{S^i_\varepsilon} \sigma[\underline{v}_\varepsilon] \nu \, ds = -\nabla_{\underline{u}^i_\varepsilon} H_\varepsilon; \tag{5}$$

$$I^i_\varepsilon \underline{\ddot{\theta}}^i_\varepsilon + \int\limits_{S^i_\varepsilon} (\underline{x} - \underline{x}^i_\varepsilon) \times \sigma[\underline{v}_\varepsilon] \nu \, ds = -\nabla_{\underline{\theta}^i_\varepsilon} H_\varepsilon (\equiv 0). \tag{6}$$

Здесь $\underline{v}_\varepsilon = \underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t)$- скорость жидкости, $p_\varepsilon = p_\varepsilon(\underline{x}, t)$- давление, ν- единичный вектор внутренней нормали к поверхности S^i_ε частицы Q^i_ε, а $\sigma[\underline{v}_\varepsilon]$- тензор напряжений в жидкости.

Эту систему уравнений дополним следующими начальными условиями

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, 0) = \underline{v}_{\varepsilon 0}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega_\varepsilon; \tag{7}$$

$$\underline{u}^i_\varepsilon(0) = 0, \, \underline{\dot{u}}^i_\varepsilon(0) = \underline{v}^i_\varepsilon, \, \underline{\theta}^i_\varepsilon(0) = 0, \, \underline{\dot{\theta}}^i_\varepsilon(0) = \underline{\theta}^i_{\varepsilon 1} \tag{8}$$

и краевым условием на $\partial\Omega$

$$\underline{v}_\varepsilon(\underline{x}, t) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega. \tag{9}$$

Теорема 1. *Задача* (3) – (9) *имеет единственное решение.*

Основной целью нашей работы является изучение асимптотического поведения при $\varepsilon \to 0$ решения задачи (3) – (9). Мы здесь предполагаем, что плотность вещества частичек неограниченно возрастает, когда их диаметры стремятся к нулю. В работах [1] и [2] были рассмотрены случаи мелких и крупных частиц, плотность которых ρ_s^ε не зависела от ε.

Перед тем, как сформулировать основной результат, введём некоторые предположения и определения.

Рассмотрим куб K_h^x с центром в точке $\underline{x} \in \Omega$ и ребром h ($\varepsilon \ll h \ll 1$). Будем считать, что рёбра куба параллельны координатным осям. Обозначим через $\mathfrak{N}(\underline{x}, \varepsilon, h)$ множество решётчатых вектор-функций $\underline{w}_\varepsilon$, определённых в точках $\underline{x}_\varepsilon^i \in K_h^x$ ($\underline{w}_\varepsilon(\underline{x}_\varepsilon^i) = \underline{w}_\varepsilon^i$). Определим на этом множестве функционал

$$E_{\varepsilon h}^\gamma(\underline{w}_\varepsilon, \underline{x}, T) = \frac{1}{2}\sum_{i,j \quad K_h^x} \langle C_\varepsilon^{ij}(\underline{w}_\varepsilon^i - \underline{w}_\varepsilon^j), \underline{w}_\varepsilon^i - \underline{w}_\varepsilon^j \rangle + h^{-2-\gamma}\varepsilon^3 \sum_{i \quad K_h^x} |\underline{w}_\varepsilon^i - \sum_{q,r=1}^{3} T_{qr}\varphi^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x})|^2, \tag{10}$$

где

$$\varphi^{qr}(\underline{x}) = \frac{1}{2}(x_r \underline{e}^q + x_q \underline{e}^r),$$

$T = \{T_{qr}\}$- некоторый положительный симметрический тензор второго ранга, $0<\gamma<2$, а $\sum\limits_{i \quad K_h^x}$ распространяется на те i, для которых $\underline{x}_\varepsilon^i \in K_h^x$. Существует минимум этого функционала, являющийся квадратичной функцией компонент тензора T:

$$\min_{\underline{w}_\varepsilon \in \mathfrak{N}(\underline{x},\varepsilon,h)} E_{\varepsilon h}^\gamma(\underline{w}_\varepsilon, \underline{x}, T) = \sum_{n,p,q,r=1}^{3} a_{npqr}^\gamma(\underline{x}, \varepsilon, h) T_{np} T_{qr}, \tag{11}$$

где $a_{npqr}^\gamma(\underline{x}, \varepsilon, h)$- компоненты тензора четвёртого ранга, определяемые формулой

$$a_{npqr}^\gamma(\underline{x}, \varepsilon, h) = \frac{1}{2}\sum_{i,j \quad K_h^x} \langle C_\varepsilon^{ij}\big(\underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^j)\big), \underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^j)\rangle +$$

$$+ h^{-2-\gamma}\varepsilon^3 \sum_{i \quad K_h^x} \langle \underline{w}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{\varphi}^{np}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x}), \underline{w}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i) - \underline{\varphi}^{qr}(\underline{x}_\varepsilon^i - \underline{x})\rangle. \tag{12}$$

Здесь через $\underline{w}^{np}$ обозначена решётчатая вектор-функция из $\mathfrak{N}(\underline{x}, \varepsilon, h)$, минимизирующая функционал (10) при $T = T^{np} = \dfrac{1}{2}(\underline{e}^n \otimes \underline{e}^p + \underline{e}^p \otimes \underline{e}^n)$. Будем называть тензор (12) тензором упругости системы взаимодействующих частиц. Кроме того, рассмотрим тензор сопротивления $\{C_{kl}(Q_\varepsilon^i)\}$ частички Q_ε^i потоку жидкости. В нашем случае (когда частички представляют собой шарики) компоненты этого тензора имеют вид

$$C_{kl}(Q_\varepsilon^i) = 6\pi\mu\, r_\varepsilon^i \delta_{kl}.$$

Построим теперь по решению $\{\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},t),\, \underline{u}^i_\varepsilon,\, \underline{\theta}^i_\varepsilon,\, i = \overline{1,N_\varepsilon}\}$ задачи (3) – (9) вектор-функцию

$$\underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x},t) = \chi_\varepsilon(\underline{x})\underline{v}_\varepsilon(\underline{x},t) + \sum_{i=1}^{N} \chi^i_\varepsilon(\underline{x})[\dot{\underline{u}}^i_\varepsilon + \dot{\underline{\theta}}^i_\varepsilon \times (\underline{x} - \underline{x}^i_\varepsilon)] \tag{13}$$

и кусочно-линейный сплайн

$$\underline{w}_\varepsilon(\underline{x},t) = \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{u}}^i_\varepsilon(t) L^i_\varepsilon(\underline{x}), \tag{14}$$

где $\chi_\varepsilon(\underline{x})$- характеристическая функция области Ω_ε, заполненной жидкостью, $\chi^i_\varepsilon(\underline{x})$- характеристическая функция частички Q^i_ε, функция $L^i_\varepsilon(\underline{x}^j_\varepsilon) = \delta_{ij}$, а в остальные точки она продолжается по линейности.

Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) на геометрию:
центры масс x^i_ε частичек находятся в вершинах симплексов, триангулизующих область Ω, причём телесные углы при вершинах симплексов равномерно по ε отделены от 0;

2) на характер взаимодействия:
взаимодействуют между собой частицы Q^i_ε и Q^j_ε, находящиеся на расстоянии $O(\varepsilon)$, так что матрица взаимодействия $C^{ij}_\varepsilon = 0$, если $dist(Q^i_\varepsilon,\, Q^j_\varepsilon) \geq C_1\varepsilon\,(C_1 > 0)$; при этом обязательно взаимодействуют пары частиц, соединённых общим ребром симплекса;

3) на начальные данные:
a) последовательность вектор-функций $\underline{w}_\varepsilon(\underline{x},0)$ ограничена равномерно по ε в $H^1(\Omega)$, а при $\varepsilon \to 0$ сходится в $\mathbf{L_2}(\Omega)$ к непрерывной вектор-функции $\underline{w}^0(\underline{x})$;
b) последовательность вектор-функций $\underline{\tilde{v}}_\varepsilon(\underline{x},0)$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в $\mathbf{L_2}(\Omega)$ к непрерывной вектор-функции $\underline{v}^0(\underline{x})$.

4) функция $\rho_{1\varepsilon}(\underline{x}) = \rho^\varepsilon_s \sum\limits_{i=1}^{N} \chi^i_\varepsilon(\underline{x})$ при $\varepsilon \to 0$ сходится в пространстве обобщённых функций $D'(\Omega)$ к непрерывной функции $\rho_1(\underline{x}) > 0$;

5) равномерно по $\underline{x} \in \Omega$ существуют следующие пределы:

$$a)\ \lim_{h\to 0}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{a^\gamma_{npqr}(\underline{x},\varepsilon,h)}{h^3} = \lim_{h\to 0}\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{a^\gamma_{npqr}(\underline{x},\varepsilon,h)}{h^3} = a_{npqr}(\underline{x}),$$

$$b)\ \lim_{h\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{h^3}\sum_{i} \ _{K^x_h}\ r^\varepsilon_i = r(\underline{x}) > 0,$$

где $\{a_{npqr}(\underline{x})\}$- непрерывный положительно определённый тензор, а $r(\underline{x})$- непрерывная функция.

Основной результат этой работы состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1)-5). Тогда вектор-функция $\underline{\tilde{v}}_{\varepsilon}(\underline{x},t)$, определённая в (13), для любого $T>0$ сходится слабо в $L_2(\Omega \times [0,T])$ к вектор-функции $\underline{v}(\underline{x},t)$, такой что пара $\{\underline{v}(\underline{x},t), \underline{w}(\underline{x},t)\}$ является решением следующей начально-краевой задачи:*

$$\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} - \mu \Delta \underline{v} + C(\underline{x})[\underline{v} - \underline{w}] = \nabla p, \quad div\, \underline{v} = 0 \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t > 0; \tag{15}$$

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \underline{w}}{\partial t^2} + C(\underline{x}) \frac{\partial \underline{w}}{\partial t} - \sum_{n,p,q,r=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_p} \big(a_{npqr}(\underline{x}) e_{qr}[\underline{w}] \big) \underline{e}^n = C(\underline{x}) \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}, \quad \underline{x} \in \Omega, \quad t > 0; \tag{16}$$

$$\underline{v}(\underline{x},t) = \underline{w}(\underline{x},t) = 0, \quad \underline{x} \in \partial\Omega; \tag{17}$$

$$\underline{v}(\underline{x},0) = \underline{v}_0(\underline{x}), \quad \underline{w}(\underline{x},0) = \underline{w}_0(\underline{x}), \quad \frac{\partial \underline{w}(\underline{x},t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\rho_1(\underline{x})} \cdot C(\underline{x}) \big(\underline{v}^0(\underline{x}) - \underline{w}^0(\underline{x}) \big), \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{18}$$

где $C(\underline{x}) = 6\pi\mu\, r(\underline{x})$, $a_{npqr}(\underline{x})$ и $r(\underline{x})$ определены условием 5), а $\{e_{qr}[\underline{w}]\}$- линеаризованный тензор деформаций в жидкости.

Задача $(15)-(18)$ *имеет единственное решение.*

Схема доказательства этой теоремы такова. С помощью преобразования Лапласа мы получаем стационарный вариант задачи $(3)-(9)$ с параметром λ, а затем при $\lambda > 0$ сводим его к вариационной постановке:

$$\Phi_{\varepsilon}(\underline{v}_{\varepsilon}) = \min_{\underline{v}'_{\varepsilon} \in \overset{\circ}{J}_{\varepsilon}(\Omega)} \Phi_{\varepsilon}(\underline{v}'_{\varepsilon}), \tag{19}$$

где $\overset{\circ}{J}_{\varepsilon}(\Omega)$- класс соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, равных $\underline{a}^i_{\varepsilon} + \underline{b}^i_{\varepsilon} \times (\underline{x} - \underline{x}^i_{\varepsilon})$ на частичках Q^i_{ε} (a^i_{ε} и b^i_{ε}- произвольные постоянные векторы), а

$$\Phi_{\varepsilon}(\underline{v}_{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \big\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^{3} e^2_{kl}[\underline{v}_{\varepsilon}] + \lambda \langle \rho \underline{v}_{\varepsilon}, \underline{v}_{\varepsilon} \rangle - 2 \langle \rho \underline{v}_{\varepsilon 0}, \underline{v}_{\varepsilon} \rangle \big\}\, dx + \tag{20}$$

$$+\frac{1}{2\lambda}\sum_{i,j=1}^{N_\varepsilon}\langle C_\varepsilon^{ij}[\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)-\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^j)],\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)-\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^j)\rangle+\lambda\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\langle m_\varepsilon^i\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i),\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)\rangle-2\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\langle m_\varepsilon^i\underline{v}_\varepsilon^i,\underline{v}_\varepsilon(x_\varepsilon^i)\rangle.$$

Далее изучается асимптотическое поведение при $\varepsilon\to 0$ решения вариационной задачи (19) и для предельных вектор-функций находится усреднённая вариационная задача:

$$\Phi_0(\underline{v},\underline{w})=\min_{(\underline{v}',\underline{w}')\in\left(\overset{\circ}{J}(\Omega)\times\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)\right)}\Phi_0(\underline{v}',\underline{w}'),\tag{21}$$

где $\overset{\circ}{J}(\Omega)$- класс соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, а

$$\Phi_0(\underline{v},\underline{w})=\int_\Omega\Big\{2\mu\sum_{k,l=1}^{3}e_{kl}^2[\underline{v}]+\langle C(\underline{x})[\underline{v}-\underline{w}],\underline{v}-\underline{w}\rangle+\lambda\langle\rho\underline{v},\underline{v}\rangle-2\langle\rho\underline{v}_0,\underline{v}\rangle+\tag{22}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\sum_{n,p,q,r=1}^{3}a_{npqr}(\underline{x})e_{np}[\underline{w}]e_{qr}[\underline{w}]+\lambda\langle\rho_1\underline{w},\underline{w}\rangle-2\langle\rho_1\underline{w}_0,\underline{w}\rangle\Big\}\,dx.$$

Наконец, для усреднённого вариационного функционала выписывается система уравнений Эйлера, после чего, изучая аналитические свойства решения этой системы уравнений по параметру λ и делая обратное преобразование Лапласа, мы приходим к усреднённой нестационарной задаче (15) – (18).

2. Проверка условий 1)-4) и 5b) не вызывает каких-либо затруднений. Особого внимания заслуживает проверка условия 5a). Это делается в каждом конкретном случае расположения частиц в жидкости. Например, для периодического случая, когда взаимодействие между частицами осуществляется только по рёбрам (длины ε) куба, его диагоналям и диагоналям его граней, а $k^{ij}=k$ (см. (2)), пределы 5a) существуют. При этом тензор $a_{npqr}(\underline{x})$ оказывается ортотропным, и его компоненты определяются формулами

$$a_{nnnn}=k(1+\sqrt{2}+\frac{4}{9}\sqrt{3}),\quad a_{nnpp}=a_{npnp}=k(\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{4}{9}\sqrt{3}),\ n,p=\overline{1,3},$$

$$a_{npqr}=0\quad \text{во всех остальных случаях.}$$

1. *L.V.Berlyand and E.Ya.Khruslov.* Rheology of viscous Newtonian fluid with small interacting particles // Penn State Preprint.- 2003.

2. *L.V.Berlyand and E.Ya.Khruslov.* Homogenized Non-Newtonian Viscoelastic Rheology of a Suspension of Interacting Particles in a Viscous Newtonian fluid // SIAM, Journal of Applied Mathematics.- 2004.

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков