Вісник ХНУ, № 1076, серія «Фізика», вип. 19, 2013. с. 54-59

УДК 536.94:538.945.6
PACS 05.40.Ca, 74.40.De, 85.25.Am, 85.25.Dq

Стохастическое усиление слабых сигналов в ВЧ СКВИДе с ScS контактом

О.Г. Турутанов, В.Ю. Ляхно, В.И. Шнырков

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины, пр. Ленина 47, 61103, Харьков, Украина

В работе представлены результаты численного моделирования стохастической динамики магнитного потока в кольце ВЧ СКВИДа с джозефсоновским контактом типа ScS при совместном действии гауссова шума, ограниченного по частоте сверху, и гармонического сигнала малой амплитуды, при конечных температурах $0<T<T_c$. Показано, что изменение стохастического усиления слабого сигнала с повышением температуры обусловлено размытием энергетического барьера между соседними метастабильными токовыми состояниями. Проведено сравнение с динамикой ВЧ СКВИДа с туннельным (SIS) контактом.
Ключевые слова: ВЧ СКВИД, стохастический резонанс, ScS контакт, контакт Джозефсона.

У роботі представлені результати чисельного моделювання стохастичної динаміки магнітного потоку в кільці ВЧ НКВІДу з джозефсонівським контактом типу SCS при сумісній дії квазібілого гауссова шуму, обмеженого по частоті зверху, і гармонійного сигналу малої амплітуди, при кінцевих температурах $0<T<T_c$. Показано, що зміна стохастичного посилення слабкого сигналу з підвищенням температури обумовлена розмиттям енергетичного бар'єру між сусідніми метастабільними струмовими станами. Проведено порівняння з динамікою ВЧ НКВІДу з тунельним (SIS) контактом.
Ключові слова: ВЧ НКВІД, стохастичний резонанс, SCS контакт, контакт Джозефсона.

The paper presents the results of a numerical simulation of a stochastic dynamics of magnetic flux in the ScS RF SQUID loop affected by band-limited Gaussian noise and low-frequency sine signal of small amplitude, at finite temperatures $0<T<T_c$. A change in of the stochastic amplification of the weak signal with the temperature rise is shown to be due to smearing of the energy barrier between adjacent metastable current states. A comparison to an RF SQUID with a tunnel (SIS) junction is done.
Keywords: RF SQUID, stochastic resonance, ScS contact, Josephson junction.

Введение

Магнитометры на основе сверхпроводящих квантовых интерферометрических датчиков (СКВИДов) широко используются в физических экспериментах, медицине (магнитокардиографы и магнитоэнцефалографы), геофизике (георадары), электронной промышленности (магнитные микроскопы). Чувствительность СКВИДов и их квантовых аналогов СКУБИДов практически достигла квантового предела [1-3]. Однако с увеличением индуктивности контура квантования до $L \sim 10^{-9}–10^{-10}$ Гн влияние термодинамических флуктуаций при температуре жидкого гелия приводит к ухудшению разрешения по энергии. Как показано в работах [4-7], чувствительность магнитометров может быть существенно улучшена за счет использования эффекта стохастического резонанса (СР). Явление СР, открытое в 1980-х годах [8,9], проявляется в немонотонном увеличении отклика нелинейной, обычно бистабильной, системы на слабый периодический сигнал, который достигает максимума при добавлении в эту систему шума определенной интенсивности. Эффект СР был обнаружен во многих естественных и искусственных системах, классических и квантовых, были разработаны аналитические подходы и критерии оценки повышения степени упорядочения при воздействии шума [10,11]. Например, в работе [4] экспериментально показано, что усиление слабого гармонического информационного сигнала за счет СР может достигать 40 дБ при некоторой оптимальной интенсивности шума в СКВИДе с туннельным (сверхпроводник-изолятор-сверхпроводник, SIS) контактом. Более того, в СКВИДах с SIS-контактом (далее для краткости – SIS-СКВИДы) при уровнях шума, недостаточных для реализации режима СР, усиление может быть максимизировано за счет эффекта стохастико-параметрического резонанса, СПР [12], возникающего при одновременном воздействии на систему шума, высокочастотного электромагнитного поля и слабого информационного сигнала.

В последнее время большой интерес вызывают чистые контакты с непосредственной проводимостью типа «сужение» (ScS, superconductor-constriction-superconductor) малых размеров (ASCs, atomic-size contacts), имеющие небольшое число проводящих квантовых каналов в своем поперечном сечении, поэтому часто называемых квантовыми точечными контактами (QPCs, quantum point contacts). Критический ток I_c таких контактов может принимать дискретные значения. Интерес к QPC обусловлен исследованиями проводимости квантовых каналов и построением кубитов с большим расщеплением уровней энергии $\Delta E/h \sim 30$ ГГц. Ток-фазовое соотношение (зависимость сверхпроводящего тока I_s от разности фаз φ параметра порядка) в чистых SsS контактов с баллистическим режимом пролета электронов при низких температурах ($T \to 0$) [13,14] существенно отличается от классической джозефсоновской ток-фазовой зависимости $I_s^{SIS}(\varphi) = I_c \sin\varphi$ для SIS контакта и имеет характерную «пилообразную» форму с разрывами в точках $\varphi = n\pi$. Соответственно, отличаются и энергии связи, которые получаются интегрированием ток-фазового соотношения. При включении SIS-контакта в сверхпроводящее кольцо и приложении внешнего магнитного потока $\Phi_e = \Phi_0/2$ ($\Phi_0 = h/2e \approx 2{,}07\cdot 10^{-15}$ Вб - квант магнитного потока) такое ток-фазовое соотношение обуславливает формирование симметричного 2-ямного потенциала, необходимого для возникновения СР, только при достаточно больших индуктивностях кольца и/или критических токах контакта, а именно, при $\beta_L = 2\pi L I_c/\Phi_0 > 1$. Потенциальная энергия $U^{ScS}(\Phi)$ сверхпроводящего кольца с QPC имеет «острый» барьер с сингулярностью в его вершине, разделяющий два метастабильных токовых состояния кольца с различными значениями внутреннего магнитного потока Φ, и в таком виде формально может быть получена при сколь угодно малых значениях $\beta_L << 1$.

В классическом пределе в пределе нулевой температуры стохастическая динамика магнитного потока в сверхпроводящем кольце с джозефсоновским контактом ScS (ScS-СКВИДа) существенно отличается [15] от детально исследованной ранее [4,5,7] SIS-СКВИДа. Учет квантовых флуктуаций при температурах $0<T<T_c$ приводит к изменению ток-фазового соотношения для ScS контакта и сглаживанию потенциального барьера в кольце с ScS контактом [16]. В данной работе проведен анализ особенностей стохастического усиления слабых низкочастотных гармонических сигналов в сверхпроводящем кольце, замкнутом джозефсоновским контактом ScS-типа, при конечных температурах и различных значениях параметра β_L. Проведено сравнение со стохастической динамикой SIS-СКВИДа.

Модель

Стохастическая динамика магнитного потока в контуре ВЧ СКВИДа (вставка на рис.1) исследуется путем численного решения уравнения движения (уравнения Ланжевена) в модели резистивно-шунтированного контакта (RSJ model) [17]:

$$LC\frac{d^2\Phi(t)}{dt^2} + \frac{L}{R_N}\frac{d\Phi(t)}{dt} + L\frac{dU(\Phi)}{d\Phi} = \Phi_e(t) \qquad (1)$$

где C — емкость, а R_N и I_c — нормальное шунтирующее сопротивление и критический ток джозефсоновского контакта, соответственно, $\Phi(t)$ — магнитный поток в кольце, $U(\Phi,\Phi_e)$ — потенциальная энергия кольца, представляющая из себя сумму $U(\Phi,\Phi_e) = U_M + U_J$ магнитной энергии кольца и джозефсоновской энергии связи контакта. Зависящий от времени внешний магнитный поток $\Phi_e(t)$, приложенный к кольцу, содержит постоянную и переменную, в том числе шумовую, составляющие. Энергия связи контакта U_J определяется его типом (SIS, ScS, SNS и т.д.). Потенциальная энергия кольца с «традиционным» туннельным (SIS) контактом равна [17]

$$U^{SIS}(\Phi,\Phi_e) = \frac{(\Phi-\Phi_e)^2}{2L} - E_J^{SIS}\cos\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \qquad (2)$$

где $E_J^{ScS} = I_c\Phi_0/2\pi$ - максимальная энергия связи туннельного джозефсоновского контакта.

Мы рассмотрим динамику магнитного потока в кольце ВЧ СКВИДа с чистым ScS-контактом с непосредственной проводимостью в режиме баллистического пролета электронов [13].

Для классических [13] и квантовых [14] ScS контактов с критическим током I_c ток-фазовое соотношение пределе нулевой температуры $T=0$

$$I_s^{ScS}(\varphi) = I_c \sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{sgn}(\cos\frac{\varphi}{2}) \qquad (3)$$

имеет «пилообразную» форму с разрывами в точках $\varphi = n\pi$. Соответственно, потенциальная энергия сверхпроводящего кольца с ScS-контактом $U^{ScS}(\Phi,\Phi_e)$

$$U^{ScS}(\Phi,\Phi_e) = \frac{(\Phi-\Phi_e)^2}{2L} - E_J^{ScS}\left|\cos\frac{\pi\Phi}{\Phi_0}\right| \qquad (4)$$

где $E_J^{ScS} = I_c\Phi_0/\pi$ — максимальная энергия связи джозефсоновского ScS-контакта, имеет особые точки в вершинах барьеров, разделяющих соседние локальные минимумы, соответствующие метастабильным токовым состояниям кольца.

Вводя безразмерный параметр нелинейности

$$\beta_L = 2\pi L I_c/\Phi_0, \qquad (5)$$

и нормируя поток на квант потока Φ_0: $x=\Phi/\Phi_0$, $x_e=\Phi_e/\Phi_0$, а потенциальную энергию – на $\Phi^2_0/2L$, можно переписать (2) и (4), соответственно, как

$$u^{SIS}(x,x_e)=\frac{(x-x_e)^2}{2}-\frac{\beta_L}{4\pi^2}\cos 2\pi x \qquad (6)$$

и

$$u^{ScS}(x,x_e)=\frac{(x-x_e)^2}{2}-\frac{\beta_L}{2\pi^2}\left|\cos \pi x\right| \qquad (7)$$

Потенциальная энергия $u^{ScS}(x,x_e)$ кольца с туннельным контактом имеет два и более локальных минимума только при $\beta_L>1$. При смещении кольца постоянным магнитным потоком $\Phi_e=\Phi_0/2$ ($x_e=1/2$) два нижайших минимума становятся симметричными. На рис.1 приведены зависимости потенциальной энергии колец с SIS и ScS контактами от магнитного потока в кольце, для большей наглядности, при большом значении $\beta_L=12$.

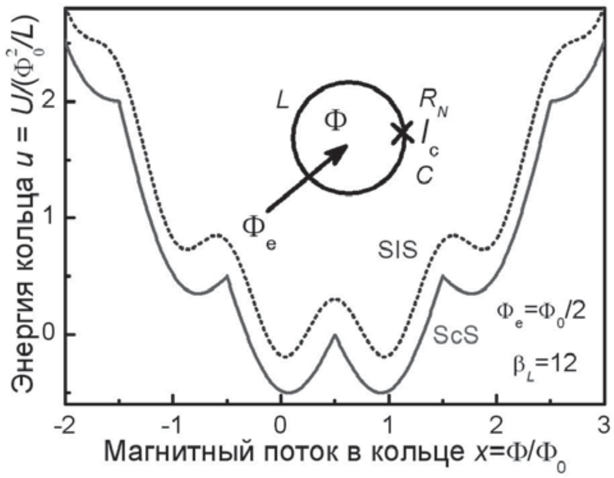

Рис. 1. Потенциальная энергия СКВИДов с ScS контактом (сплошная линия) и SIS контактом (пунктирная линия) в зависимости от нормированного магнитного потока в кольце. Параметр нелинейности $\beta_L=12$, постоянный внешний магнитный поток $\Phi_e=\Phi_0/2$. На вставке схематично показано кольцо ВЧ СКВИДа с джозефсоновским контактом, обозначения объяснены в тексте.

Отличительной чертой потенциальной энергии $u^{ScS}(x,x_e)$ ВЧ СКВИДа с ScS контактом является то, что высота «острого» барьера между двумя соседними состояниями конечна до сколь угодно малых значений β_L , т.е. L и I_c. На Рис.2 показаны потенциальные энергии ВЧ СКВИДов с SIS и ScS-контактами при нескольких небольших значениях β_L . Видно, что барьер, разделяющий метастабильные токовые состояния кольца, исчезает при $\beta_L=1$ в SIS-СКВИДе, но остается конечным в ScS-СКВИДе.

Шум тепловой или иной природы приводит к переключениям между метастабильными состояниями, соответствующими минимумам $U(\Phi)$. Частота переключений для белого гауссова шума с интенсивностью (дисперсией) D дается формулой Крамерса [18] (при $\Delta U/D>>1$):

$$r_K=r_0\exp(-\Delta U/D)\,. \qquad (8)$$

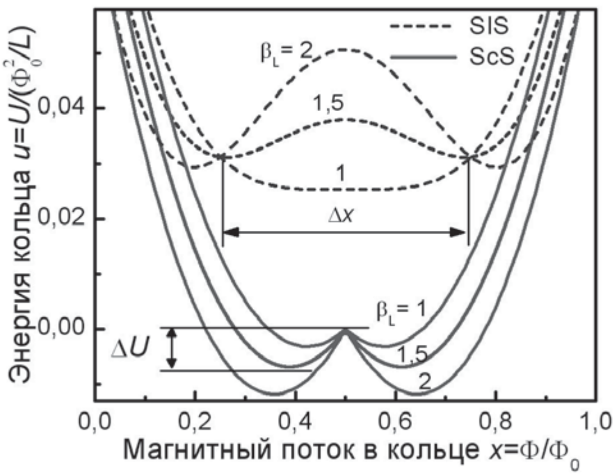

Рис.2. Потенциальная энергия СКВИДов с ScS контактом (сплошная линия) и SIS контактом (штриховая линия) в зависимости от нормированного магнитного потока в кольце при нескольких значениях параметра нелинейности β_L . Постоянный внешний магнитный поток $\Phi_e=\Phi_0/2$. На кривых с β_L=1,5 обозначены высота барьера ΔU и расстояние между соседними минимумами Δx.

В случае теплового шума, для $T>0$, $D=2k_BT$. В данной работе мы не предполагаем конкретной природы возникновения шума. Единственное требование, необходимое для обеспечения адиабатического режима переключения СКВИДа, состоит в ограничении полосы шума сверху частотами, не превышающими обратное время установления потока в кольце $1/\tau_L=R/L$. Предэкспонециальный множитель r_0 различен для «плавного» потенциала SIS-СКВИДа и потенциала с «острым» барьером ScS-СКВИДа, подробности обсуждаются в [15], но в любом случае определяющую роль играет экспоненциальный сомножитель. Добавление к внешнему потоку Φ_e небольшого периодического сигнала с частотой f_s на фоне шума в бистабильном потенциале приводит к стохастической резонансной динамике движения частицы при

$$r_K\approx 2f_s \qquad (9).$$

При типичных экспериментальных значениях $L\approx 3\cdot 10^{-10}$ H, $C\approx 3\cdot 10^{-15}$ F, $R_N\approx 1-10^2$ Ohm, $I_c\approx 10^{-5}-10^{-6}$ A параметр Маккамбера, учитывающий влияние емкости, $\beta_c = 2\pi R^2 I_c C/\Phi_0 < 1$. В этом случае движение имеет неосцилляционный, вязкий, характер, и членом со второй производной в уравнении (1) можно пренебречь. Низкая частота сигнала f_s=10Hz<<1/ τ_L и ограниченная сверху полоса шума с частотой среза f_c~10^4Hz<<1/ τ_L позволяют считать задачу адиабатической и внести в уравнении (1) всю зависимость от времени в потенциальную энергию:

$$\tau_L \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0\,, \tag{10}$$

С учетом (6) уравнение (10) в случае SIS контакта будет выглядеть как

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau_L}[x_e(t) - x + \frac{\beta_L}{2\pi}\sin 2\pi x] \tag{11}$$

а для ScS, с учетом (7), как

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\tau_L}[x_e(t) - x + \frac{\beta_L}{2\pi}\sin \pi x \cdot \operatorname{sgn}\cos \pi x] \tag{12}$$

Внешний магнитный поток $x_e(t)$ представляет собой сумму постоянного потока смещения $x_{dc}=0.5$, полезного сигнала $x_{ac}=a\sin 2\pi f_s t$ и шумового потока x_N. В теории шум предполагается δ - коррелированным белым шумом, распределенным по гауссову закону: $x_N=\xi(t)$, $\langle \xi(t)\xi(t-t')\rangle = 2D\,\delta(t-t')$. При численном моделировании он имитируется генератором случайных чисел с гауссовым распределением, дисперсией $D=\sigma^2$ и периодом повторения около 2^{90}. Частота дискретизации при решении уравнения конечно-разностным методом равна 2^{16}, что соответствует эквивалентной полосе шума ~32 кГц. Это позволяет считать шум квазибелым при усилении гармонического сигнала с частотой $f_s=10$ Гц.

Уравнения (11) и (12) решались методом Heun, модифицированным для случая стохастических уравнений [19]. Полученные подряд 30 временных серий длительностью 8 с с различными реализациями шума подвергались быстрому преобразованию Фурье (БПФ), затем спектральные плотности $S_\Phi(\omega)$ выходного сигнала (потока в кольце) усреднялись по реализациям. Спектральный коэффициент усиления слабого периодического сигнала по амплитуде определялся как отношение спектральных плотностей выходного и входного магнитных потоков:

$$k(\omega) = S^{1/2}_{\Phi out}(\omega) / S^{1/2}_{\Phi in}(\omega) \tag{13}.$$

Результаты и обсуждение

При повышении температуры ток-фазовое соотношение для ScS контакта [13,14]

$$I_s^{ScS}(\varphi) = I_c \sin\frac{\varphi}{2}\tanh\frac{\Delta(T)\cos(\varphi/2)}{2k_B T}\,, \tag{14}$$

где $I_s^{ScS}(\varphi)$ - сверхпроводящий ток через контакт, $I_c(T) = \dfrac{\pi\Delta(T)}{eR_N}$ - критический ток контакта, Δ(T) - сверхпроводящая щель (параметр порядка), φ - разность фаз сверхпроводящего параметра на контакте, k_B - постоянная Больцмана, e - заряд электрона, R_N - нормальное сопротивление контакта, сглаживается, стремясь, по мере приближения к критической температуре T_c сверхпроводника, к синусоидальной зависимости, характерной для SIS контакта. Соответственно, (приведенная) потенциальная энергия кольца с ScS контактом

$$u^T_{ScS} = \frac{(x-x_e)^2}{2} - \frac{\beta_L}{\pi^2} t \ln\left(2\cosh\frac{\cos\pi x}{2t}\right), \tag{15}$$

где $t = \dfrac{T/T_c}{1{,}76\sqrt{1-(T/T_c)^4}}$

также становится похожей по форме на потенциальную энергию SIS-СКВИДа. Сингулярность в вершине барьера исчезает, а его высота падает с повышением температуры. Рис.3 иллюстрирует температурную эволюцию потенциальной энергии ScS-СКВИДа, для сравнения приведена также потенциальная энергия SIS-СКВИДа. В отличие от предела нулевой температуры, даже при $\beta_L>1$, энергетический барьер в ScS-СКВИДе исчезает при

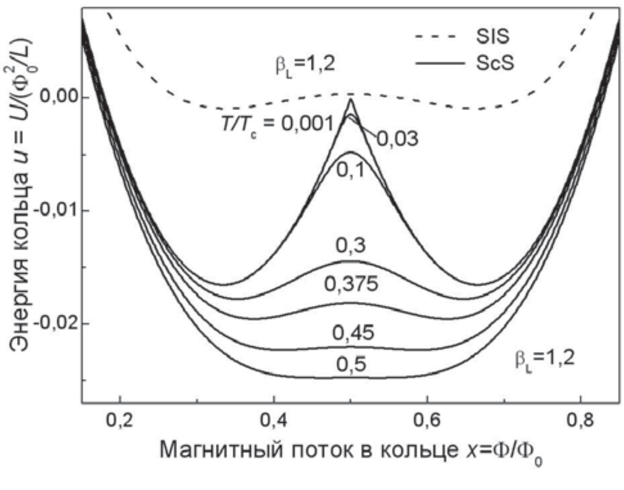

Рис.3. Зависимость потенциальной энергии ScS-СКВИДа от магнитного потока в кольце при различных приведенных температурах. Для сравнения приведена аналогичная зависимость для SIS-СКВИДа при том же значении параметра нелинейности β_L.

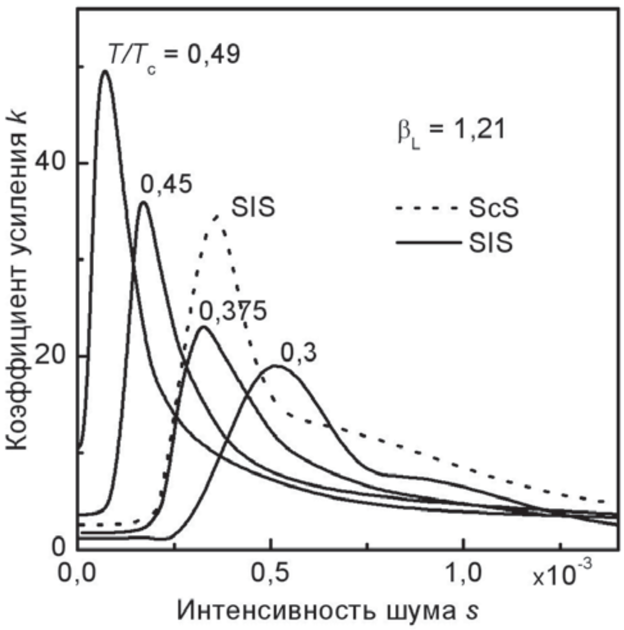

Рис.4. Коэффициент усиления слабого гармонического сигнала в зависимости от интенсивности шума в SIS-СКВИДе и в ScS-СКВИДе при различных приведенных температурах. Амплитуда сигнала 0,001, частота 10 Гц.

некоторой приведенной температуре (для выбранного значении β_L*=1,2* при T/T_c*=0,5*). Расстояние между минимумами также уменьшается. При определенной температуре высоты барьеров потенциалов ScS- и SIS-СКВИДов сравниваются (для приведенного случая – приблизительно при T/T_c*=0,375*).

Подставив (15) в (10), получим уравнение движения безразмерного потока в ScS-СКВИДе при конечных температурах T, $0<T<T_c$, аналогичное уравнению (11) для случая $T=0$. Решение этого уравнения при различных интенсивностях шума с последующим фурье-анализом полученной временной последовательности по процедуре, описанной в предыдущем разделе, дает зависимости спектрального коэффициента усиления слабого гармонического сигнала от интенсивности шума, т.е. кривые стохастического резонанса. На рис.4 показаны кривые СР в кольце ScS-СКВИДа, полученные при нескольких приведенных температурах для параметра β_L*=1,21*. Строго говоря, параметр β_L указывается для $T=0$, т.к. при повышении температуры происходит его перенормировка. Рядом для сравнения приведена кривая стохастического усиления в кольце SIS-СКВИДа при том же значении β_L. Видно, что при повышении температуры максимальный коэффициент усиления в ScS-СКВИДе увеличивается вследствие понижения бврьера, как и в SIS-СКВИДе при уменьшенни параметра β_L до единицы [15], что можно интерпретировать как «перенормировние» β_L. При приблизительном равенстве высот барьеров в ScS- и SIS-СКВИДах (T/T_c*=0,375*, см. рис.3) максимум усиления достигается при одинаковых значениях интенсивности шума, но коэффициенты усиления при этом отличаются вследствие различия в межъямном расстоянии Δx и форме потенциала [15]. Согласно теории двух состояний [20], не учитывающей внутриямной динамики, коэффициент усиления слабого сигнала определяется расстоянием между локальными минимумами потенциала Δx. Сравнение кривых стохастического усиления ScS-СКВИДа при T/T_c*=0,45* и SIS-СКВИДа, демонстрирующих одинаковый максимальный коэффициент усиления, с рис.3 показывает, что величины Δx все же несколько отличаются, что подчеркивает важность учета точной формы потенциальных ям и барьера. Тем не менее, в целом можно утверждать, что специфика стохастического усиления в ScS-СКВИДе вследствие необычной формы потенциала кольца проявляется главным образом при низких температурах. Например, расчет показывает, что в ScS-СКВИДе при β_L*=0,1* барьер, конечный при $T=0$, исчезает уже при T/T_c*=0,045*, что для ниобия с T_c*=9,25* К соответствует милликельвиновой области температур.

Выводы

Расчет усиления слабого информационного сигнала на фоне шума за счет стохастического резонанса в кольце ВЧ СКВИДа с чистым ScS контактом в пределе нулевой температуры показывает, что СР в ScS-СКВИДе возможен при сколь угодно малом значении $\beta_L<1$ благодаря необычной «острой» форме потенциального барьера между метастабильными состояниями, высота которого при $T=0$ всегда конечна.

При повышении температуры ScS-СКВИДа вершина барьера размывается, его высота уменьшается вплоть до нуля, а потенциал ScS-СКВИДа становится близким к потенциалу «обычного» СКВИДа с SIS контактом. Таким образом, существенные различия классической стохастической динамики магнитного потока в ScS- и SIS-СКВИДах, которые следует использовать или учитывать как «паразитный» эффект при создании устройств, содержащих сверхпроводящие кольца с контактами Джозефсона, проявляются при довольно низких, практически милликельвиновых, температурах.

1. M.B. Ketchen, J.M. Jaycox, Appl. Phys. Lett. 40, 736 (1982).
2. V.I. Shnyrkov, A.A. Soroka, and O.G. Turutanov, Phys. Rev. B85, 224512 (2012).
3. В.И. Шнырков, А.А. Сорока, А.М. Королев, О.Г. Турутанов, ФНТ 38, 382 (2012).
4. R.Rouse, Siyuan Han, J.E. Lukens, Appl. Phys. Lett. 66, 108 (1995).
5. A.D. Hibbs, A.L. Singsaas, E.W. Jacobs, A.R. Bulsara, J.J.

Bekkedahl et al., J. Appl. Phys. 77, 2582 (1995).
6. O.G. Turutanov, A.N. Omelyanchouk, V.I. Shnyrkov, Yu.P. Bliokh, Physica C 372–376, 237–239 (2002).
7. А.М. Глухов, О.Г. Турутанов, В.И. Шнырков, А.Н. Омельянчук, ФНТ 32 1477 (2006).
8. R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani, J. Phys. A14, L453 (1981).
9. C. Nicolis, G. Nicolis, Tellus 33, 225 (1981).
10. L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, Rev. Mod. Phys. 70, 223 (1998).
11. В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шимански-Гайер, УФН 169, 7 (1999).
12. О.Г. Турутанов, А.М. Глухов, В.И. Шнырков, ФНТ 34, 45 (2008).
13. И.О. Кулик, А.Н. Омельянчук, ФНТ.4, 296 (1978).
14. C.W. J. Beenakker, H. van Houten, Phys. Rev. Lett. 66, 3056 (1991); in Nanostructures and Mesoscopic Systems, ed. by W.P. Kirk and M.A. Reed, Academic, New York, 1992, p. 481.
15. O.G. Turutanov, V.A. Golovanevskiy, V.Yu. Lyakhno, V.I. Shnyrkov, arXiv:1308.2643; Physica A, http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2013.11.005 (2013).
16. В.А. Хлус, ФНТ 12, 25 (1986).
17. А. Бароне, Дж. Патерно, Мир, Москва (1984).
18. H.A. Kramers, Physica 7, 284 (1940).
19. J. L. Garcia-Palacios, Introduction to the theory of stochastic processes and Brownian motion problems, cond-mat/0701242 (January 2007); Peter E. Kloeden, Eckhard Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, 632 pp., Springer (1992).
20. B. McNamara, K. Wiesenfeld, Phys.Rev. A 39, 4854 (1989).