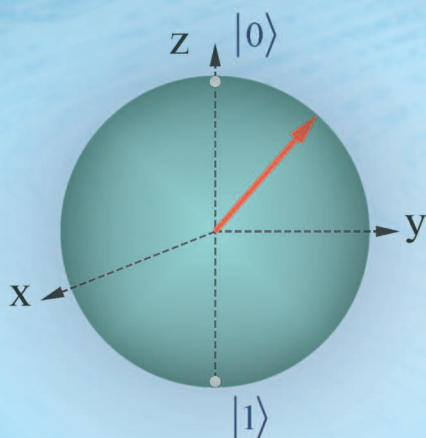




А. Н. ОМЕЛЬЯНЧУК  
Е. В. ИЛЬЧЕВ  
С. Н. ШЕВЧЕНКО

# КВАНТОВЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КУБИТАХ



НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР им. Б.И. ВЕРКИНА

А.Н. ОМЕЛЬЯНЧУК

Е.В. ИЛЬИЧЕВ

С.Н. ШЕВЧЕНКО

**КВАНТОВЫЕ  
КОГЕРЕНТНЫЕ  
ЯВЛЕНИЯ  
В ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ  
КУБИТАХ**

---

*ПРОЕКТ  
«НАУКОВА КНИГА»*

---

КИЕВ • НАУКОВА ДУМКА • 2013

Монография посвящена актуальным проблемам физики сверхпроводниковых джозефсоновских кубитов — макроскопических квантовых структур, перспективных элементов квантовых компьютеров. Приведены элементы квантовой механики кубитов, фундаментальные свойства сверхпроводников, физика классических и квантовых джозефсоновских структур. Рассмотрены основные типы сверхпроводниковых кубитов. Изложены результаты экспериментальных и теоретических исследований квантовых когерентных явлений в джозефсоновских кубитах. Рассмотрены спектроскопия энергетических состояний, осцилляции Раби, эффект Ландау—Зинера, многофотонные переходы в одиночных кубитах и в системах связанных кубитов. Изучено влияние шумов на потоковый кубит и на его классический аналог.

Для специалистов в области теоретической и прикладной физики, сверхпроводниковой микроэлектроники, а также аспирантов и студентов физико-технических специальностей.

Монографія присвячена актуальним проблемам фізики надпровідних джозефсонівських кубітів — макроскопічних квантових структур, перспективних елементів квантових комп'ютерів. Наведено елементи квантової механіки кубітів, фундаментальні властивості надпровідників, фізика класичних і квантових джозефсонівських структур. Розглянуто основні типи надпровідних кубітів. Викладено результати експериментальних і теоретичних досліджень квантових когерентних явищ у джозефсонівських кубітах. Розглянуто спектроскопію енергетичних станів, осциляції Рабі, ефект Ландау—Зінера, багатофотонні переходи в одиночних кубітах і в системах зв'язаних кубітів. Досліджено вплив шумів на потоковий кубіт та його класичний аналог.

Для фахівців у галузі теоретичної і прикладної фізики, надпровідникової мікроелектроніки, а також аспірантів і студентів фізико-технічних спеціальностей.

Рецензенты:

академик НАН Украины *В.В. Еременко*  
член-корреспондент НАН Украины *В.А. Ямпольский*

*Рекомендовано к печати ученым советом ФТИНТ им. Б.И. Веркина  
НАН Украины (протокол № 6 от 24.06.2011)*

***Видання здійснено за державним замовленням  
на випуск видавничої продукції***

Научно-издательский отдел физико-математической  
и технической литературы

Редактор *В.В.Вероцкая*

© А.Н. Омелянчук, Е.В. Ильичев,  
С.Н. Шевченко, 2013

© НПП «Издательство “Наукова думка”  
НАН Украины», дизайн, 2013

ISBN 978-966-00-1260-8

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Эта книга — результат многолетнего сотрудничества Физико-технического института низких температур им. Б.И. Веркина НАН Украины и Института фотонных технологий (Йена, Германия). Фактически, здесь собраны и обобщены данные совместных экспериментальных и теоретических исследований, посвященных актуальным проблемам физики сверхпроводниковых джозефсоновских кубитов (квантовых битов), которые являются макроскопическими квантовыми структурами.

Цель монографии — на современном уровне дать введение в эту относительно молодую, бурно развивающуюся область науки. В первом приближении кубит можно рассматривать как двухуровневую квантовую систему, поэтому его гамильтониан (как и гамильтониан любой двухуровневой системы) может быть записан в формализме матриц Паули. Однако в отличие от хорошо известных микроскопических двухуровневых систем джозефсоновский кубит является настоящим макроскопическим объектом — его размеры, как правило, составляют несколько микрометров. Это и определяет его относительно сильную связь с окружением, а следовательно, и короткие времена жизни когерентного состояния, называемые временем декогеренции. Поэтому на практике джозефсоновский кубит не изолирован и является частью большей системы. Динамика таких объектов описывается с помощью формализма матрицы плотности.

Книга состоит из двух взаимодополняющих частей. В **первой части** приведены элементы квантовой механики кубитов, фундаментальные свойства сверхпроводников, физика классических и квантовых джозефсоновских структур, рассмотрены основные типы сверхпроводниковых кубитов. Поскольку часть I носит вводный характер, в ней изложены основы, необходимые для



описания физических процессов в системах с кубитами, то для более глубокого изучения рассмотренных вопросов в списке рекомендуемой литературы в конце первой части приведены классические статьи и монографии по квантовой механике, сверхпроводимости, эффекту Джозефсона, а также некоторые современные обзоры по темам, рассмотренным в первых двух главах. **Во второй части** изложены результаты экспериментальных и теоретических исследований квантовых когерентных явлений в джозефсоновских кубитах. Описаны наиболее распространенные технологии для изготовления кубитов, рассмотрены методы их измерений. Основное внимание уделено измерениям с помощью так называемого параметрического преобразователя — электромагнитного или механического высокочастотного осциллятора, амплитуда и фаза колебаний которого зависят от состояния исследуемого объекта. Проанализированы механизмы взаимодействия между кубитом (или системой кубитов) и электромагнитным осциллятором.

**Глава 1** посвящена изложению основ математического аппарата квантовой механики, используемого для описания свойств кубитов. Авторы сознательно избегали усложненных алгебраических выражений, ограничиваясь простыми примерами, способными дать ясное понимание физических явлений. При этом уделено внимание современному пониманию проблемы квантовых корреляций, которая является основополагающей для реализации приборов по квантовой обработке и передаче информации. В **главе 2** кратко описаны сверхпроводящее состояние и эффект Джозефсона, приведены примеры джозефсоновских сверхпроводящих цепей. Для описания суперпозиции состояний в таких устройствах рассмотрено каноническое квантование соответствующих гамильтонианов. Авторы подчеркивают, что эти состояния являются макроскопическими, поскольку могут быть измерены современными детекторами, не требующими квантовой чувствительности. В конце главы рассмотрены основные типы сверхпроводниковых джозефсоновских кубитов.

В **главе 3** описаны основные технологические процессы изготовления сверхпроводниковых джозефсоновских кубитов и экспериментальные методы их измерений. Поскольку в кубитах реализуется квантовая когерентная суперпозиция макроскопических состояний, авторы отмечают, что развитая на заре квантовой механики концепция измерений, основанная на противопоставлении макроскопического (классического) прибора и мик-

роскопического (квантового) объекта, должна быть пересмотрена. Главы 4—7 посвящены изучению систем одиночных и связанных кубитов, состояние которых измеряется с помощью классического резонансного контура. В главе 4 сначала представлены конкретные результаты таких базовых экспериментов, как определение основного и возбужденного состояний в одиночных кубитах, а также теоретически обоснованы некоторые динамические процессы в кубитах — такие как осцилляции Раби и переходы Ландау—Зинера.

Далее, в главе 5 изложена полуклассическая теория для описания системы кубитов и классического резонатора на основании метода асимптотического разложения Крылова—Боголюбова. Здесь предполагается слабая связь измерителя-резонатора и измеряемой кубитной системы, что соответствует рассмотренной ситуации так называемых слабых непрерывных измерений. Полученные общие аналитические результаты использованы для описания двух иллюстративных реалистичных систем: потокового кубита и электромагнитного резонансного контура, а также зарядового кубита и наномеханического резонатора.

Изложенная теория использована в главе 6 для представления и описания кубита, состояние которого контролируется внешним электромагнитным полем. Контролирующим параметром может быть, например, переменный магнитный поток для потокового кубита и затворное напряжение для зарядового кубита.

В главе 7 после описания реалистичных многокубитных систем представлены результаты контроля и считывания состояния этих систем. Изложены различные аспекты изучения: от дизайна многокубитных систем с контролируемой связью до обсуждения использования таких систем для лазерной генерации. Приведены результаты исследования двух-, трех- и четырехкубитных чипов. Дано теоретическое описание одно- и многофотонного возбуждения кубитной системы, которое может использоваться как для контроля состояния, так и для характеристики (спектроскопии) системы.

Глава 8 посвящена системе кубит—резонатор для случая, когда большое значение имеет квантовое состояние резонатора. На практике квантовый резонатор реализуется на основе линии передач. Конкретные теоретические и экспериментальные результаты демонстрируют случай потокового кубита, индуктивно связанного с таким квантовым резонатором.

В главе 9 изучено влияние шумов как на потоковый кубит, так и на его классический аналог. В частности показано, что шум может приводить к усилению когерентности и к возникновению незатухающих осцилляций Раби. Также рассмотрена возможность шумовой спектроскопии кубитов.

Авторы выражают глубокую признательность коллегам и друзьям, в соавторстве с которыми выполнены исследования, результаты которых изложены во второй части монографии: М.Н.С. Amin, О.В. Астафьеву, S. Ashhab, D. Born, Th. Wagner, M. Grajcar, Я.С. Гринбергу, А.М. Загоскину, А.А. Измалкову, А.С. Кийко, Ю.А. Колесниченко, W. Krech, A. Maassen van den Brink, P. Macha, H.-G. Meyer, T. May, F. Nori, М.А. Оболенскому, G. Oelsner, S.H.W. van der Ploeg, С.Е. Савельеву, А.Ю. Смирнову, А.В. Устинову, Н.Н. Уханскому, А.А. Федорову, U. Hübner, В.И. Шныркову, А.Г. Шнырману, G. Schön.

Монография подготовлена при частичной финансовой поддержке грантов НАН Украины (проект № 04/10-N), ДКНИИ (проект № М/411-2011), BMBF (UKR 10/001), проект EU (IQIT).

# ЧАСТЬ I

## ОСНОВЫ

### ГЛАВА 1

---

## КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА КУБИТОВ

### 1.1. ПОСТУЛАТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

В основе квантовой механики как математической модели лежат постулаты, которые подобно законам Ньютона классической механики устанавливают математический каркас, в рамках которого квантовая физика описывает природу.

Квантовый объект характеризуется понятием состояния, которое содержит сведения о системе (максимально возможные), позволяющие предсказывать результаты экспериментов.

**Постулат 1.** *Физическое состояние замкнутой квантовой системы представляется вектором состояния  $|\Psi\rangle$  в линейном комплексном векторном пространстве с внутренним произведением (гильбертовом пространстве).*

В линейном пространстве состояний выполняется **принцип суперпозиции**. Согласно этому принципу, если система может находиться в состояниях  $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, \dots, |\Psi_n\rangle$ , то она может находиться и в произвольной линейной суперпозиции этих состояний  $|\Psi\rangle = a_1|\Psi_1\rangle + a_2|\Psi_2\rangle + \dots + a_n|\Psi_n\rangle$ . Наблюдаемые характеристики системы описываются линейными эрмитовыми операторами (матрицами), действующими на векторы состояний. Оператор  $\hat{A}$  преобразует состояние  $|\Psi\rangle$  в другое состояние  $|\Psi'\rangle = \hat{A}|\Psi\rangle$ . Все возможные значения наблюдаемой системы  $A$  записывают с помощью собственных значений соответствующего оператора  $\hat{A}$ .

Эволюцию квантового состояния описывает постулат 2.

**Постулат 2.** *Динамическая (обратимая) эволюция замкнутой квантовой системы описывается уравнением Шредингера:*

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle, \quad (1.1)$$

где  $\hat{H}$  — оператор энергии, называемый гамильтонианом системы.

Альтернативная формулировка постулата 2 следующая.

**Постулат 2'.** Динамическая (обратимая) эволюция замкнутой квантовой системы описывается унитарным преобразованием:

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\Psi(0)\rangle. \quad (1.2)$$

Унитарный оператор  $\hat{U}$ ,  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$ , сохраняет нормировку вектора состояния. Решение уравнения Шредингера для гамильтониана  $\hat{H}$ , не зависящего от времени, равно  $|\Psi(t)\rangle = \exp(-\frac{i}{\hbar}t\hat{H})|\Psi(0)\rangle$ , т.е.

$$\hat{U}(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}).$$

Уравнение Шредингера описывает непрерывную эволюцию во времени. Операторы  $\hat{U}$ , называемые в квантовых компьютерах гейтами, переводят систему (например, кубит) из одного состояния в другое. При этом не любые, а только унитарные гейты разрешены в квантовой механике.

Измерение квантового состояния — необратимый процесс, который не описывается динамическим уравнением и формулируется как постулат измерения.

**Постулат 3.** При измерении наблюдаемой системы  $A$  ее состояние редуцируется («коллапс волновой функции») в один из собственных векторов состояний оператора  $\hat{A}$ . Результат измерения носит не детерминистический, а вероятностный характер.

Допустим, проводится измерение физической наблюдаемой системы  $A$ , соответствующей оператору  $\hat{A}$ . Пусть система в ортонормированном базисе  $\{|e_i\rangle\}$ , являющемся набором собственных векторов оператора  $\hat{A}$  ( $\hat{A}|e_i\rangle = A_i|e_i\rangle$ ), до измерения находится в состоянии  $|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$ . Тогда, согласно постулату 3, результатом измерения с вероятностью  $|c_i|^2$  будет значение наблюдаемой системы  $A_i$ . При этом система перейдет в состояние  $|e_i\rangle$ :

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\text{измерение}} |e_i\rangle.$$

Постулат измерений (или проекционный постулат) был сформулирован Дж. фон Нейманом исходя из анализа экспериментов по комптоновскому рассеянию фотонов на электронах. Этот постулат вносит в квантовую механику элементы индетерминизма. Загадочный дуализм между детерминированной унитарной эволюцией вектора состояния и вероятностным характером его изменения в процессе измерения составляет проблему измерения, которая продолжает привлекать внимание физиков.

## 1.2. КУБИТ

### Квантовые состояния

Применим постулаты квантовой механики к описанию простейшей квантовой системы с двумя базисными состояниями — кубита (*quantum bit, qubit*). Пространство состояний кубита является двухмерным гильбертовым пространством. Вектор произвольного состояния кубита есть когерентная линейная суперпозиция базисных состояний:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — комплексные числа, удовлетворяющие условию нормировки  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ; векторы  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  — ортонормированные базисные состояния (стандартный, или вычислительный, базис). При этом кубит в таком суперпозиционном состоянии не находится ни в состоянии  $|0\rangle$ , ни в состоянии  $|1\rangle$ , а находится *одновременно* в этих двух состояниях. Что в действительности означает  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ ? Р. Фейнман по этому поводу говорил: «Я смело могу сказать, что квантовой механики никто не понимает»<sup>1</sup>. Следуя Фейнману, мы можем сказать, что квантовая суперпозиция — это тайна, которую мы не понимаем, но можем описать, как это работает. Действительно, невозможно себе представить как, например, электрон в квантовом суперпозици-

<sup>1</sup> Фейнман Р. Характер физических законов. — Москва: Наука, 1987.

онном состоянии находится одновременно в двух различных точках пространства. Но квантовая механика в ее ортодоксальной, так называемой копенгагенской формулировке (которую мы и излагаем) отвечает на это постулатом измерения. Квантовую суперпозицию невозможно наблюдать. При измерении вероятностным образом наблюдается та или иная компонента квантовой суперпозиции. Конкретно, в случае кубита измерение его состояния в базисе  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  проектирует состояние кубита в состояние  $|0\rangle$  с вероятностью  $\text{Prob}(0) = |\alpha|^2$ , или в состояние  $|1\rangle$  с вероятностью  $\text{Prob}(1) = |\beta|^2$  (рис. 1.1, а).

На языке операторов проектирования измерение кубита в вычислительном базисе описывается двумя проекторами:  $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0|$  и  $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$ . Пусть мы измеряем кубит в состоянии  $|\psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$ . Тогда

$$|\psi\rangle \Rightarrow \hat{P}_i |\psi\rangle \Rightarrow \frac{\hat{P}_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | \hat{P}_i | \psi \rangle}} = \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|} |i\rangle \text{ с вероятностью}$$

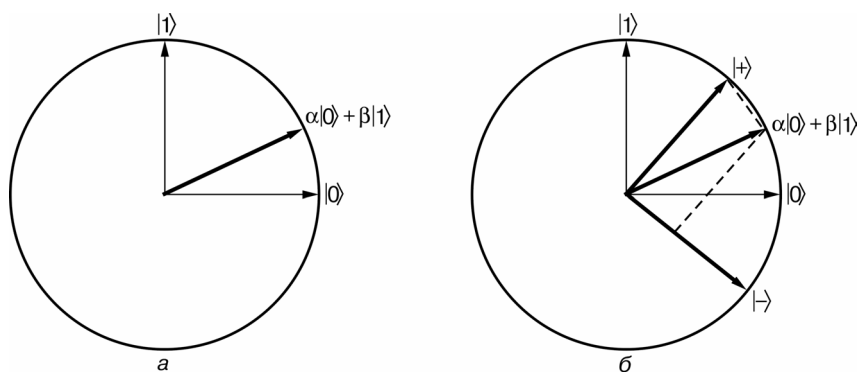
$$\text{Pr}(i) = |\langle \hat{P}_i | \psi \rangle|^2 = |\alpha_i|^2, \quad i = 0, 1.$$

Базисные состояния кубита могут быть выбраны произвольным образом, различаясь поворотом в двухмерном пространстве состояний. Выбор базиса определяется измерительным процессом. Например, в измерительном базисе, повернутом относительно стандартного базиса на  $45^\circ$  (рис. 1.1, б)

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

то же состояние  $|\psi\rangle$  согласно формуле (1.3) равно

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= a|0\rangle + b|1\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) + \frac{\beta}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle) = \\ &= \frac{(\alpha + \beta)}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{(\alpha - \beta)}{\sqrt{2}}|-\rangle. \end{aligned} \quad (1.5)$$



**Рис. 1.1.** Состояние кубита в плоскости комплексных базисных состояний: *a* — в вычислительном базисе; *б* — в базисе, повернутом относительно стандартного базиса на  $45^\circ$

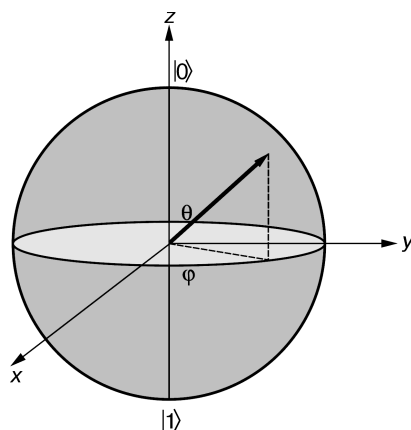
Т.е. измерение  $|\psi\rangle$  в базисе  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  с вероятностью  $|\alpha + \beta|^2 / 2$  дает результат  $|+\rangle$  и с вероятностью  $|\alpha - \beta|^2 / 2$  — результат  $|-\rangle$ .

### Сфера Блоха

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  в векторе состояния кубита (см. выражение (1.3)) с учетом условия нормировки и произвольного выбора глобальной фазы могут быть параметризованы в виде

$$\alpha = e^{-i\varphi/2} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \beta = e^{i\varphi/2} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (1.6)$$

Полярный и азимутальный углы  $\theta$  и  $\varphi$  определяют положение точки на сфере единичного радиуса, называемой сферой Блоха (рис. 1.2). Таким образом, произвольное состояние кубита  $|\psi\rangle = \alpha(t)|0\rangle + \beta(t)|1\rangle$  геометрически представляют стрелкой на сфере Блоха. Поворот стрелки соответствует динамической эволюции кубита.



**Рис. 1.2.** Сфера Блоха



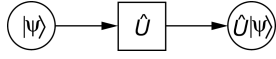


Рис. 1.3. Преобразование состояния кубита под действием гейта  $\hat{U}$

Рассмотрим примеры динамики кубита (поворот стрелки на сфере Блоха) под действием унитарных преобразований, или гейтов, имеющих важное значение в квантовой информатике (рис. 1.3).

Гейт NOT, действуя на базисные векторы, переводит их в противоположные состояния:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle,$$

$$\hat{U}|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle. \quad (1.7)$$

Гейт Адамара осуществляет поворот на угол  $\pi/2$  и создает суперпозицию базисных состояний:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{U}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle),$$

$$\hat{U}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (1.8)$$

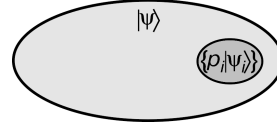
Операторы эволюции  $\hat{U}$  в общем виде описывают переход кубита из начального состояния в конечное. Конкретный их вид определяется физической реализацией кубита и способом воздействия на него.

### 1.3. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ

#### Чистые и смешанные состояния

Вектор состояния  $|\Psi\rangle$  описывает состояние замкнутой квантовой системы, так называемой чистое состояние. В действительности рассматриваемая система является частью квантовой системы, взаимодействуя с окружением (резервуаром), рис. 1.4. Для описания индивидуальных подсистем композитной квантовой системы вводится понятие матрицы плотности или оператора плотности  $\hat{\rho}$  (Л.Д. Ландау, Ф. Блох, Дж. фон Нейман, 1927). Будем описывать квантовую систему, состояние которой не пол-

**Рис. 1.4.** Смешанное состояние  $\{p_i |\psi_i\rangle\}$  системы, являющейся частью замкнутой системы



ностью известно, вводя понятие статистического ансамбля чистых состояний  $|\psi_i\rangle$ , в которых система находится с вероятностями  $p_i$  ( $\sum_i p_i = 1$ ). Такое состояние называется статистической смесью, или смешанным состоянием. Важно отметить отличие статистического смешанного состояния, описываемого классическими вероятностями  $p_i$ , от когерентного суперпозиционного состояния  $|\psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle$ .

### Матрица плотности чистого состояния

Для чистого состояния  $|\Psi\rangle$  оператор плотности определяется как проектор

$$\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (1.9)$$

Матричные элементы оператора  $\hat{\rho}$  в произвольном ортонормированном базисе  $|e_k\rangle$  образуют матрицу, называемую матрицей плотности:

$$\rho_{mn} = \langle e_m | \hat{\rho} | e_n \rangle = \langle e_m | \Psi \rangle \langle \Psi | e_n \rangle. \quad (1.10)$$

Записывая вектор состояния  $|\Psi\rangle$  в виде разложения по некоторому базису  $|\Psi\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle$  (при этом  $\sum_n a_n a_n^* = 1$ ), получаем  $\rho_{mn} = a_m a_n^*$ . Для среднего значения наблюдаемой системы  $A$  в состоянии, описываемом матрицей плотности  $\hat{\rho}$ , имеем

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \sum_{nm} a_n^* a_m A_{nm} = \sum_{nm} \rho_{mn} A_{nm} = \text{Sp}(\hat{\rho} \hat{A}). \quad (1.11)$$

Уравнение динамической эволюции для оператора плотности  $\hat{\rho}$  получаем из уравнения Шредингера для  $|\Psi\rangle$ :

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = \frac{d}{dt} |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\Psi\rangle\langle\Psi| - \frac{1}{i\hbar} |\Psi\rangle\langle\Psi| \hat{H} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (1.12)$$

Из определения оператора  $\hat{\rho}$  следуют его основные свойства:

- $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ ,  $\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$ ;
- $Sp(\hat{\rho}) = 1$ ;
- $\langle A \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{A})$ ;
- $\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}]$ .

Эти соотношения являются общими и выполняются как для чистых, так и для смешанных состояний. Для чистых состояний выполняются также два дополнительных соотношения:

- $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ ;
- $Sp(\hat{\rho}^2) = 1$ .

В случае чистого состояния квантовой системы описание в терминах вектора состояния и матрицы плотности эквивалентны. Однако использование матрицы плотности имеет ряд преимуществ. В матрице плотности исключена глобальная фаза вектора состояний системы, не изменяющая квантового состояния. Уравнение для среднего значения  $\langle A \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{A})$  линейно по  $\hat{\rho}$  в отличие от квадратичного по  $|\Psi\rangle$  уравнения  $\langle A \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle$ . В динамическое уравнение для  $\hat{\rho}$  можно на феноменологическом уровне ввести времена релаксации и декогерентности в системе.

### Матрица плотности смешанного состояния

Смешанное состояние описывается оператором плотности

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (1.13)$$

или в произвольном ортонормированном базисе  $\{|e_k\rangle\}$  матрицей плотности с элементами

$$\rho_{lm} = \sum_i p_i \langle e_l | \psi_i \rangle \langle \psi_i | e_m \rangle. \quad (1.14)$$

В частном случае чистого состояния все значения вероятностей  $p_i$  равны нулю за исключением одного, равного единице.

Свойства оператора плотности ( $\bullet$ ), полученные выше для чистого состояния, доказывают аналогичным образом и в случае смешанного состояния с учетом того, что  $p_i$  — классические вероятности реализации чистых состояний  $|\psi_i\rangle$  и  $\sum_i p_i = 1$ . В то же время для смешанного состояния  $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$  и, соответственно,  $Sp(\hat{\rho}^2) \leq 1$  (знак равенства соответствует чистому состоянию). Последнее неравенство по матрице плотности системы позволяет установить — в чистом или смешанном состоянии она находится.

Какой физический смысл имеют компоненты матрицы плотности? В базисе  $\{|e_n\rangle\}$  имеем

$$|\psi_k\rangle = \sum_n a_n^{(k)} |e_n\rangle,$$

$$\rho_{nm} = \langle e_n | \hat{\rho} | e_m \rangle = \sum_k p_k \langle e_n | \psi_k \rangle \langle \psi_k | e_m \rangle = \sum_k p_k a_n^{(k)} a_m^{(k)*}. \quad (1.15)$$

Диагональный элемент матрицы плотности  $\rho_{nn} = \sum_k p_k |a_n^{(k)}|^2$  равен вероятности состояния  $|e_n\rangle$  в  $k$ -й компоненте статистического ансамбля, усредненной по ансамблю. Таким образом, диагональные компоненты матрицы плотности  $\rho_{nn}$  дают вероятность обнаружения системы в состоянии  $|e_n\rangle$ . Они называются *заселенностями* соответствующих состояний. Недиагональные компоненты содержат перекрестные члены  $a_n^{(k)} a_m^{(k)*}$  и отражают интерференционные эффекты между состояниями  $|e_n\rangle$  и  $|e_m\rangle$  в когерентной суперпозиции этих состояний в  $k$ -й компоненте статистического ансамбля. По этой причине недиагональные компоненты матрицы плотности называются *когерентностями*. В зависимости от набора вероятностей  $\{p_k\}$  они могут либо полностью «зануляться», либо частично «выживать».

Например, для квантовой системы, находящейся в равновесии с термостатом температуры  $T$ , оператор плотности равен  $\hat{\rho} = Z^{-1} \exp(-\hat{H}/kT)$ , где  $\hat{H}$  — гамильтониан системы и  $Z$  — нормировочная константа. В базисе собственных состояний гамильтониана  $\hat{H}$  имеем

$$\begin{aligned}\rho_{nn} &= Z^{-1} \langle e_n | e^{-\hat{H}/kT} | e_n \rangle = Z^{-1} e^{-E_n/kT}, \\ \rho_{nm} &= Z^{-1} \langle e_n | e^{-\hat{H}/kT} | e_m \rangle = 0 \text{ для } n \neq m.\end{aligned}\quad (1.16)$$

В тепловом равновесии заселенности стационарных состояний экспоненциально убывают с увеличением температуры, а когерентности между состояниями равны нулю.

Необходимо отметить, что разделение компонент матрицы плотности на заселенности и когерентности зависит от выбора базисных состояний. В частности, всегда существует ортонормированный базис, в котором эрмитова матрица  $\rho$  является диагональной, т.е. когерентности равны нулю.

### Матрица плотности кубита

Произвольная эрмитова  $2 \times 2$  матрица может быть представлена в виде линейной комбинации матриц Паули с вещественными коэффициентами. Учитывая, что  $Sp(\hat{\rho}) = 1$ , матрица плотности кубита имеет вид

$$\rho = \frac{1}{2}(\sigma_0 + P_x \sigma_x + P_y \sigma_y + P_z \sigma_z) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

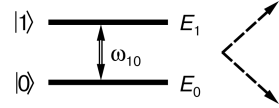
Вектор  $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$  определяет координаты точки внутри сферы Блоха, соответствующей состоянию кубита  $\rho$ . Для чистых состояний ( $Sp(\rho^2) = 1$ )  $|\vec{P}| = 1$  и точка, представляющая состояние, лежит на сфере Блоха, а для смешанных состояний ( $Sp(\rho^2) < 1$ ) — находится внутри сферы Блоха. Например, полностью смешанное состояние  $\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1|$  соответствует точке в центре сферы Блоха.

### Пример кубита. Двухуровневый атом

Рассмотрим в качестве примера кубита двухуровневый атом, взаимодействующий с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля (рис. 1.5).

Гамильтониан свободного атома в базисе собственных состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , соответствующих энергиям уровней  $E_0$  и  $E_1$ , равен

**Рис. 1.5.** Двухуровневый атом, взаимодействующий с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля



$$H_0 = E_0 |0\rangle\langle 0| + E_1 |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

Уравнение движения для матрицы плотности свободного атома имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_0, \rho]. \quad (1.19)$$

Записывая матрицу плотности в виде

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{10}^* \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

из уравнений (1.18)–(1.20) получаем

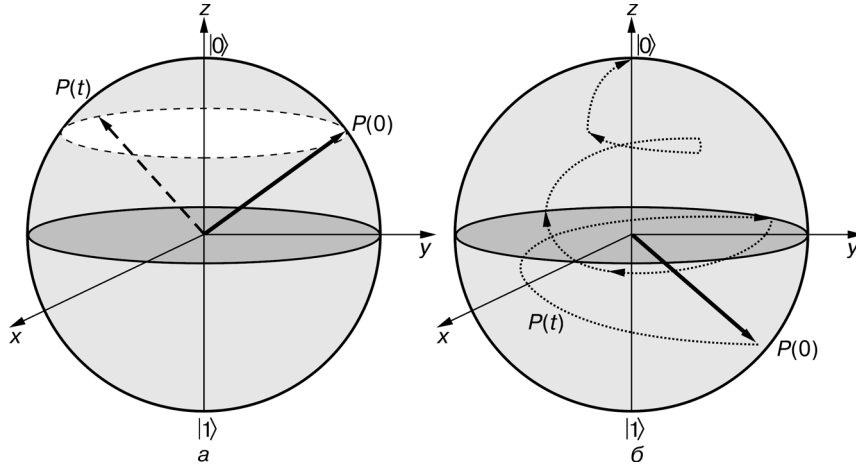
$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \rho_{00} = 0, \\ \frac{d}{dt} \rho_{11} = 0, \\ \frac{d}{dt} \rho_{10} = -\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_0) \rho_{10}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho_{00}(t) = \text{const}, \\ \rho_{11}(t) = \text{const}, \\ \rho_{10}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} (E_1 - E_0)t} \rho_{10}(0). \end{cases} \quad (1.21)$$

Сравнивая решение (1.21) с выражением (1.17), видим, что на сфере Блоха вектор произвольного начального состояния свободного атома совершает прецессию вокруг оси  $z$  с частотой  $\omega_{10} = (E_1 - E_0)/\hbar$  (рис. 1.6,  $a$ ).

Рассмотрим теперь влияние на атом взаимодействия с вакуумными флуктуациями электромагнитного поля, приводящего к спонтанной эмиссии. Возникающая в этом случае диссипативная динамика, как впервые было показано Вайскопфом и Вигнером, описывается уравнением Лиувилля для  $\rho(t)$ :

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_0, \rho] - \frac{\Gamma}{2} (\sigma_+ \sigma_- \rho - 2\sigma_- \rho \sigma_+ + \rho \sigma_+ \sigma_-), \quad (1.22)$$

где  $\Gamma$  — скорость затухания; матрицы  $\sigma_+ = |1\rangle\langle 0|$  и  $\sigma_- = |0\rangle\langle 1|$  — атомные повышающий и понижающий операторы. Скорость за-



**Рис. 1.6.** Эволюция вектора Блоха для свободного атома (а) и диссипативная динамика двухуровневого атома (б)

тухания  $\Gamma$  равна  $\Gamma = \omega_{10}^3 |\vec{d}|^2 / 3\pi\epsilon_0 \hbar c^3$ , где  $\vec{d} = e\langle 1|\vec{r}|0\rangle$  — дипольный момент атома.

Расписывая уравнение (1.22) покомпонентно, взамен (1.21) получаем

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\rho_{00} = -\Gamma\rho_{00}, \\ \frac{d}{dt}\rho_{11} = \Gamma\rho_{00}, \\ \frac{d}{dt}\rho_{10} = -\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)\rho_{10} - \frac{\Gamma}{2}\rho_{10}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \rho_{00}(t) = \rho_{00}(0)e^{-\Gamma t}, \\ \rho_{11}(t) = 1 - \rho_{00}(0)e^{-\Gamma t}, \\ \rho_{10}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 - E_0)t - \frac{\Gamma}{2}t} \rho_{10}(0). \end{cases} \quad (1.23)$$

Таким образом, заселенность верхнего уровня  $\rho_{00}$  и когерентность  $\rho_{10}$  экспоненциально затухают со скоростями  $\Gamma$  и  $\Gamma/2$  соответственно. На рис. 1.6, б показана диссипативная эволюция произвольного начального состояния атома.

Диссипативное слагаемое в уравнении Лиувилля (1.22) в общем случае взаимодействия кубита с окружением называется членом Линдблада. Скорость затухания  $\Gamma$  можно вычислять в рамках определенной модели резервуара, либо вводить феноменологически.

### 1.4. КОМПОЗИТНЫЕ СИСТЕМЫ. ПЕРЕПУТЫВАНИЕ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ

До сих пор мы рассматривали отдельную квантовую систему, в частности кубит. Этого достаточно для описания системы невзаимодействующих кубитов, квантовые состояния которых были изначально приготовлены также в отсутствии взаимодействия. В этом случае каждая из подсистем (кубитов) описывается своим пространством состояний и, соответственно, процессами суперпозиции, эволюции, измерения внутри этих пространств. Как описать в общем случае пространство состояний композитной системы, состоящей из многих (возможно, взаимодействующих) отдельных подсистем? Ответ на этот вопрос дает следующее расширение первого постулата (часто рассматриваемого как дополнительный постулат):

*Пространство состояний композитной системы является тензорным произведением пространств состояний компонент системы. Для системы  $N$  кубитов пространство состояний является тензорным произведением двумерных подпространств отдельных кубитов  $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N$  и имеет размерность  $2^N$ .*

В случае, когда  $i$ -я ( $i=1,2,\dots,N$ ) подсистема находится (приготовлена) в состоянии  $|\psi\rangle_i$ , вектор состояния композитной системы равен тензорному произведению векторов состояний компонент системы:

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\psi\rangle_N. \quad (1.24)$$

Рассмотрим далее систему из двух кубитов. Двухкубитное пространство состояний есть  $H_{12}^4 = H_1^2 \otimes H_2^2$ . Тензорное произведение двумерных подпространств  $H_{1,2}^2$  означает, что вектор состояния в четырехмерном пространстве  $H_{12}^4$  необходимо строить в базисе четырехмерных ортонормированных векторов, включающих все возможные комбинации базисных векторов подпространств  $H_{1,2}^2$ . Другими словами, суперпозиция квантовых состояний распространяется на векторы состояний из различных подпространств.

Обозначим базисные векторы в пространствах  $H_{1,2}^2$  как  $|0\rangle_{1,2}$  и  $|1\rangle_{1,2}$ , тогда базисные векторы в  $H_{12}^4$  равны



$$\begin{aligned}
 |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

Альтернативные обозначения:  $|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \equiv |0\rangle_1 |0\rangle_2 \equiv |0,0\rangle \equiv |00\rangle$ , при этом порядок указывает на принадлежность к первому или второму кубиту.

Действие операторов на вектор состояния композитной системы определяется свойствами тензорного произведения. Оператор  $\hat{A}$ , действующий, например, на первый кубит двухкубитной системы, переводит вектор состояния  $|\psi\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle$  в состояние

$$\hat{A}_1 |\psi\rangle_1 \otimes \hat{I} |\psi_2\rangle = (\hat{A}_1 \otimes \hat{I}) |\psi\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle. \text{ В общем случае:}$$

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2) (|\psi\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle) = \hat{A}_1 |\psi\rangle_1 \otimes \hat{A}_2 |\psi_2\rangle.$$

Необходимо различать факторизованные состояния композитной системы вида (1.24) и состояния, которые не сводятся к произведению векторов состояний отдельных компонент системы. Последние называются перепутанными (*entangled*) состояниями. Произвольное состояние двухкубитной системы есть линейная комбинация базисных векторов:

$$|\Psi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle. \tag{1.26}$$

Состояние (1.26) может быть представлено в факторизованном виде  $(a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle)$  лишь при условии  $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ . В противном случае состояние двух кубитов является перепутанным.

Процесс измерения в композитной системе происходит согласно общим правилам. Рассмотрим важный пример системы двух спинов  $S_{1,2} = 1/2$ , находящихся в перепутанном состоянии с полным спином, равным нулю:

$$|\Psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2). \tag{1.27}$$

Пусть мы измеряем  $z$ -компоненту первого спина, воздействуя на (1.27) оператором  $\hat{\sigma}_z^{(1)}$ . С равной вероятностью получим либо  $|\uparrow\rangle_1$ , либо  $|\downarrow\rangle_1$ . При этом

$$\begin{aligned} \text{если } |\uparrow\rangle_1, \text{ то } \Psi_{12} &\Rightarrow |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2, \\ \text{если } |\downarrow\rangle_1, \text{ то } \Psi_{12} &\Rightarrow |\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2, \end{aligned}$$

и последующее измерение  $\hat{\sigma}_z^{(2)}$  даст детерминировано результат  $|\downarrow\rangle_2$  в первом случае и  $|\uparrow\rangle_2$  — во втором. Т.е. в состоянии (1.27) наблюдаемые значения спинов  $S_1$  и  $S_2$  *скоррелированы*.

Для описания композитной системы применяется метод **редуцированной матрицы плотности**. Пусть система, состоящая из двух подсистем  $A$  и  $B$ , находится в чистом состоянии  $|\Psi\rangle_{AB} \in H_{AB} = H_A \otimes H_B$ . Матрица плотности системы  $\rho_{AB} = |\Psi\rangle_{AB} \langle\Psi|_{AB}$  сводится к произведению матриц плотности отдельных подсистем лишь в случае, когда состояние  $|\Psi\rangle_{AB}$  является факторизованным, т.е. не перепутанным. Однако в общем случае состояние одной из подсистем (например,  $A$ ) надо описывать как смешанное состояние. Это означает, что оно описывается редуцированной матрицей плотности  $\rho_A$ , действующей в  $H_A$ . Редуцированная матрица плотности  $\rho_A$  определяется взятием частичного шпура от полной матрицы плотности  $\rho_{AB}$  по переменным системы  $B$ :

$$\rho_A \equiv \text{Tr}_B(\rho_{AB}).$$

Поясним операцию частичного шпура на примере двухкубитного перепутанного состояния  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle)$ . Используя цикличность операции шпура для редуцированной матрицы плотности кубита  $A$  получаем

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|), \\ \rho_A &= \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \frac{1}{2} \text{Tr}_2(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) = \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}_2(|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|) = \\ &= \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| \text{Tr}(|0\rangle\langle 0|) + |0\rangle\langle 1| \text{Tr}(|0\rangle\langle 1|) + |1\rangle\langle 0| \text{Tr}(|1\rangle\langle 0|) + \\ &\quad + |1\rangle\langle 1| \text{Tr}(|1\rangle\langle 1|)) = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|). \end{aligned}$$

Таким образом, в данном двухкубитном состоянии состояние каждого из кубитов является максимально смешанным. Аналогичным образом вычисляют редуцированную матрицу плотности для системы более чем двух кубитов.

Важным примером перепутанных двухкубитных состояний являются *состояния Белла*:

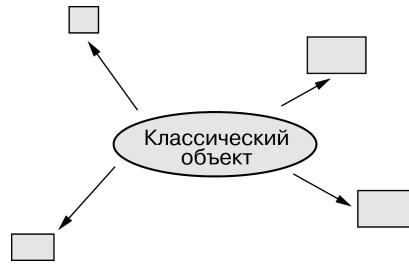
$$\begin{aligned} |v_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle), \\ |v_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle), \\ |v_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle), \\ |v_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Векторы Белла  $|v_i\rangle$  образуют базис в пространстве  $H = H_1 \otimes H_2$  и обладают замечательными свойствами. Состояния Белла являются максимально перепутанными состояниями. Измерение состояния одного из кубитов в базисе Белла детерминированно определяет результат последующего измерения состояния второго кубита. Т.е. результаты измерений для двух кубитов полностью скоррелированы.

### 1.5. КВАНТОВЫЙ МИР

Квантовая теория радикально отличается от классической картины природы. Фундаментальное отличие состоит в существовании квантовых нелокальных корреляций, которые не имеют аналога в классической физике. Выше рассмотрены перепутанные состояния в многокубитной системе. Квантово-механическое перепутывание (*entanglement*) состояний — общее свойство квантовых систем, в том числе оно определяет работу квантовых компьютеров. Э. Шредингер, который и ввел понятие перепутанности, сформулировал это свойство как целостность квантовой системы: мы не знаем ничего о состоянии подсистем, но обладаем максимальным знанием о системе в целом, поскольку она находится в чистом состоянии.

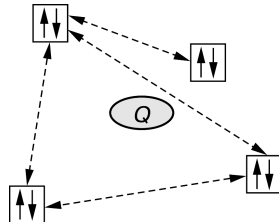
**Рис. 1.7.** Классический объект, который описывается полностью состоянием каждой из его частей в отдельности. Связь между частями отсутствует



Перепутывание состояний в квантовой системе следует из краеугольного принципа суперпозиции квантовых состояний, примененного к произвольной композитной системе, состоящей из нескольких квантовых подсистем. Представим себе, что физический объект разделяется на многие части, которые разлетаются в различных направлениях и не взаимодействуют друг с другом (рис. 1.7).

Состояние такой классической системы может быть полностью описано состояниями каждой из ее частей в отдельности. В квантовом случае ситуация совершенно иная. Принцип суперпозиции, применяемый не только к каждой из подсистем, но и к системе в целом, допускает суперпозицию квантовых состояний различных подсистем (пунктирные линии на рис. 1.8). Возможность подобных суперпозиционных, т.е. перепутанных, состояний означает, что состояние квантовой системы не всегда может быть полностью описано в терминах состояний ее отдельных компонент.

Применение классического описания к квантовой системе и игнорирование фундаментальных неклассических состояний приводит к парадоксальным выводам. Далее рассмотрены примеры знаменитых парадоксов «Эйнштейна—Подольского—Розена» и «кота Шредингера». В настоящее время стало понятно, что эти парадоксальные выводы характеризуют необычную, но тем не менее имеющую место квантовую реальность. На основе «парадоксальных» неклассических перепутанных состояний возникли и экспериментально развиваются такие направления «квантовой технологии», как квантовая криптография, квантовое плотное кодирование, и, конечно же, квантовые компьютеры.



**Рис. 1.8.** Квантовая система, для которой применим принцип суперпозиции не только к каждой из подсистем, но и к системе в целом. Суперпозиции между состояниями различных квантовых подсистем показаны пунктирными линиями

### Парадокс Эйнштейна–Подольского–Розена

В 1935 г. Эйнштейн, Подольский и Розен (ЭПР) в знаменитой работе <sup>2</sup> (наиболее цитируемая статья Эйнштейна) поставили вопрос: «Можно ли считать, что квантово-механическое описание физической реальности является полным?» В своей очередной атаке на квантовую механику Эйнштейн с соавторами формулируют мысленный эксперимент, рассматривая который, отвечают на поставленный вопрос в отрицательном смысле (парадокс ЭПР). Эйнштейн считал, что случайность в квантовой механике возникает из-за *неполной информации*, т.е. имеются «*скрытые параметры*», зная которые мы могли бы достоверно предсказать результаты измерения. Так как эти параметры являются «скрытыми», их игнорирование приводит к вероятностному характеру квантовой механики. ЭПР определяют «элементы физической реальности»: «Если никоим образом не возмущая систему, мы можем определенно (с вероятностью единица) предсказать значение физической величины, то существует элемент физической реальности, соответствующий этой характеристике системы». ЭПР аргументируют, что это определение физической реальности не согласуется с квантовой механикой и, следовательно, она является «неполной» теорией. Далее рассмотрены довольно тонкие рассуждения, приведшие ЭПР к данному выводу. Уже в немедленном ответе Бора анализ несостоятельности аргументации ЭПР был дан исходя из «непригодности обычной точки зрения натуральной философии для описания физических явлений того типа, с которыми мы имеем дело в квантовой механике».

Мысленный эксперимент сформулирован ЭПР таким образом.

Рассмотрим систему из двух частиц, приготовленных в состоянии с полным импульсом, равным нулю, и разлетающихся в разные стороны от источника на сколь угодно большое расстояние, так что между ними уже не происходит никакого взаимодействия (рис. 1.9). Согласно квантовой механике для каждой частицы ее координата и импульс не могут быть известны (измерены) одновременно, поскольку операторы  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$  не коммутируют. Однако относитель-



Рис. 1.9. Мысленный эксперимент ЭПР

<sup>2</sup> Einstein A., Podolsky B., Rosen N. // Phys. Rev. — 1935. — **47**, 777. (См. русский перевод в УФН. — 1936. — **XVI**, вып. 4. — С. 436).

ная координата  $x_2 - x_1 = x_0$  и полный импульс  $p_1 + p_2 = 0$  имеют определенные значения (операторы  $x_1 - x_2$  и  $p_1 + p_2$  коммутируют). Импульсы и координаты частиц  $A$  и  $B$  в такой системе полностью скоррелированы.

Если координата частицы  $A$  равна  $x$ , то координата частицы  $B$  равна  $x + x_0$ ; если импульс одной частицы равен  $p$ , то импульс второй частицы равен  $-p$ . ЭПР анализируют систему скоррелированных таким образом частиц  $A$  и  $B$ , исходя из их определения физической реальности. Измеряя координату частицы  $A$ , с вероятностью, равной единице, можно предсказать координату частицы  $B$ . Так как частица  $B$  удалена от частицы  $A$  и взаимодействие между ними отсутствует, измерение частицы  $A$  не может возмутить частицу  $B$ .

Следовательно, согласно критерию реальности, положение частицы  $B$  является элементом реальности. Альтернативно можно измерить импульс частицы  $A$  и предсказать значение импульса частицы  $B$ . Т.е. делаем вывод, что импульс частицы  $B$  также есть элемент реальности. По предположению взаимодействие между частицами отсутствует, следовательно, измерение над частицей  $A$  не должно иметь физического воздействия на частицу  $B$ . Было бы крайне неразумно полагать, что реальность атрибутов частицы  $B$  зависела от действий, никоим образом ее не возмущающих. Поэтому, заключают ЭПР, и координата, и импульс частицы  $B$  — элементы реальности. Так как в квантовой механике координата и импульс не определены одновременно, квантово-механическое описание не является полным. Необходимо отметить предположение **локальности**, которое Эйнштейн сформулировал в таком виде: «измерение состояния частицы  $A$  не может мгновенно возмутить удаленный объект  $B$ , так как информация не может распространяться быстрее скорости света».

Нетрудно видеть, что в парадоксе ЭПР рассматриваются действительно весьма странные с точки зрения классической интуиции свойства перепутанных состояний, которые следуют из квантово-механического формализма. Это — описанные в параграфе 1.4 дальнедействующие квантовые корреляции и проявляющиеся в процессе измерения эффекты нелокальности в квантовой композитной системе. Проблема, сформулированная в виде парадокса, ставит нас перед дилеммой. Либо справедлива квантово-механическая картина мира с ее «парадоксальными»

выводами, либо существует более полная теория со «скрытыми параметрами», которая удовлетворяет критерию «локального реализма». Ответ на этот вопрос должен дать эксперимент.

Проблема была выведена из «философской плоскости» «в лабораторию» Джоном Беллом, который тридцать лет спустя рассмотрел парадокс ЭПР и получил количественный тест, так называемые **неравенства Белла**. В 1964 г. Белл рассмотрел парадокс ЭПР с математико-логической точки зрения. Безотносительно к квантовой механике он сформулировал неравенства, которым должна удовлетворять любая локальная теория, содержащая скрытые параметры (или скрытые переменные). Эксперименты с перепутанными состояниями фотонов (Аспект (1982), Вейс и Цаллингер (1998)) обнаружили явное нарушение неравенств Белла и находятся в блестящем согласии с предсказаниями квантовой механики.

### Парадокс «шредингеровского кота»

В 1935 г., вслед за статьей ЭПР, Э. Шредингер обсуждает «текущее состояние квантовой механики» и формулирует знаменитый парадокс «шредингеровского кота». Мысленный эксперимент, предложенный Шредингером, состоит в следующем (рис. 1.10):

*«Можно построить и совсем шутовские примеры. Посадим кота в стальной сейф вместе с адской машиной (защищенной от кота). В счетчик Гейгера помещена крупинка радиоактивного вещества, столь малая, что за один час может распасться один из атомов, но с той же вероятностью может не распасться ни один. Если атом распадается, то счетчик через реле приведет в действие молоточек, который разобьет колбу с синильной кислотой. Предоставив эту систему самой себе в течение часа, мы скажем, что кот еще жив, если за это время не распался ни один атом. Первый же распад привел бы к отравлению кота. Ψ-функция всей системы выразила бы это тем, что живой и мертвый кот (с позволения сказать) смешаны или размазаны в одинаковых пропорциях<sup>3</sup>.»*

---

<sup>3</sup> Шредингер Э. Избранные труды по квантовой механике. — М.: Наука, 1976. — С. 335.

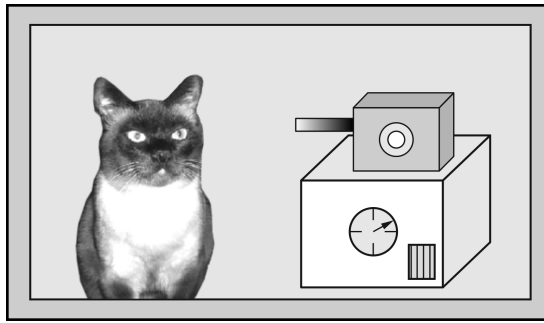


Рис. 1.10. «Шредин-  
геровский кот»

Согласно законам квантовой механики изолированная от внешнего мира система (кот + атом) находится в квантовой суперпозиции двух состояний:

$$|\Psi\rangle = |\text{живой кот, нераспавшийся атом}\rangle + \\ + |\text{мертвый кот, распавшийся атом}\rangle.$$

Открыв ящик и произведя наблюдение, мы, как и положено, обнаружим либо живого, либо мертвого кота. Вектор состояния при измерении редуцируется к одной из компонент суперпозиционного состояния. Парадокс состоит в том, является ли кот живым или мертвым до измерения состояния системы. С точки зрения квантовой механики (в копенгагенской формулировке) никакого парадокса нет. Вопрос о том, в каком состоянии находится система до измерения, запрещен (см. выше обсуждение «парадоксальности» суперпозиционного состояния электрона, одновременного находящегося в различных точках пространства). В примере Шредингера, сформулированном столь драматическим способом, неопределенность, первоначально ограниченная атомными размерами, распространяется на макроскопический уровень и поддается разрешению прямым наблюдением. Как признает и сам Шредингер, «такая модель действительности не содержит чего-либо неясного или противоречивого». Фундаментальная проблема состоит в том, распространяется ли принцип квантовой суперпозиции на макроскопически различимые состояния? Вернемся к этому вопросу в следующей главе на примере джозефсоновских кубитов.



## ДЖОЗЕФСОНОВСКИЕ КУБИТЫ

### 2.1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика возникла при описании экспериментов, направленных на изучение микромира, а именно, свойств отдельных электронов, атомов, фотонов. Наблюдавшиеся эффекты, такие как дискретные энергетические уровни атомов, фотоэффект, дифракция электронов, не находили объяснения в рамках классической физики. Законы квантовой механики (постулаты, сформулированные в гл.1) не предполагают ограничение микроуровнем, а призваны описывать природу на макроуровне. Применим ли принцип квантовой суперпозиции двух или нескольких состояний к «макроскопически различимым» состояниям? Этот вопрос о пределах применимости квантово-механического описания и возможностях его экспериментального разрешения был задан А. Легетом около 30 лет назад на примере сверхпроводящих систем. В результате интенсивных теоретических и экспериментальных исследований к настоящему времени реализованы квантовые интерференционные суперпозиционные состояния в джозефсоновских сверхпроводящих структурах — джозефсоновских кубитах.

Наряду с общими проблемами квантовой механики мощным стимулом для исследования джозефсоновских кубитов стала проблема создания квантовых компьютеров. Работа будущих квантовых компьютеров основана на квантовой суперпозиции и перепутывании состояний кубитов, заменяющих классические вычислительные элементы — биты. При этом, по сравнению с классическими компьютерами, обеспечивается экспоненциально большое вычислительное пространство, параллелизм квантовых вычислений и, как следствие, колоссальное быстродействие.

Различают микроскопические и макроскопические или мезоскопические реализации кубитов. В качестве микроскопических

кубитов можно использовать ядерные спины, двухуровневые ионы в электромагнитных ловушках, фотоны в резонаторах. К преимуществам микроскопических кубитов относятся идентичность кубитов, возможность хорошей изоляции от внешнего окружения (низкий уровень декогерентности). В то же время интеграция большого числа кубитов, селективное воздействие на кубиты и считывание результатов вычисления являются весьма сложной задачей. Предложены и исследуются различные твердотельные реализации кубитов — спины донорных примесей в кремнии, электроны в квантовых ямах, магнитные наночастицы, сверхпроводящие квантовые цепи с джозефсоновскими контактами. Сверхпроводящие устройства обеспечивают минимальный уровень декогерентности среди твердотельных реализаций. К их преимуществам по сравнению с микроскопическими кубитами можно отнести также масштабируемость и развитые контролирующие средства. Это высокочувствительные датчики магнитного поля (СКВИД) и электрического заряда (SET — одноэлектронные транзисторы).

Данная глава посвящена джозефсоновским кубитам и является вводной к основной части книги — главам 3—9. В ней кратко описаны явление сверхпроводимости, эффект Джозефсона (параграфы 2.2, 2.3). Прототипами кубитов являются классические джозефсоновские сверхпроводящие структуры (параграф 2.4). При определенных условиях (низкие температуры, малые размеры) системы с джозефсоновскими контактами представляют собой макроскопические квантовые двухуровневые системы (параграф 2.5), т.е. могут быть использованы в качестве кубитов. В параграфе 2.6 рассмотрены основные типы джозефсоновских кубитов — зарядовые и фазовые кубиты и их свойства.

## 2.2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Сверхпроводимость принадлежит к числу наиболее ярких, фундаментально и практически важных открытий XX века. Сверхпроводимость была обнаружена голландским физиком Х. Камерлинг Оннесом в 1911 г. В 1908 г. он ожилил гелий — жидкость, температура кипения которой при нормальном давлении составляет  $-269\text{ }^{\circ}\text{C}$ , что выше температуры абсолютного нуля всего на  $4,2\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Охлаждая образцы ртути, Камерлинг Оннес обнаружил скачкообразное исчезновение сопротивления электрическому току при температуре немного ниже температуры кипения жидкого гелия. Так было открыто явление, названное **сверхпроводимостью**.

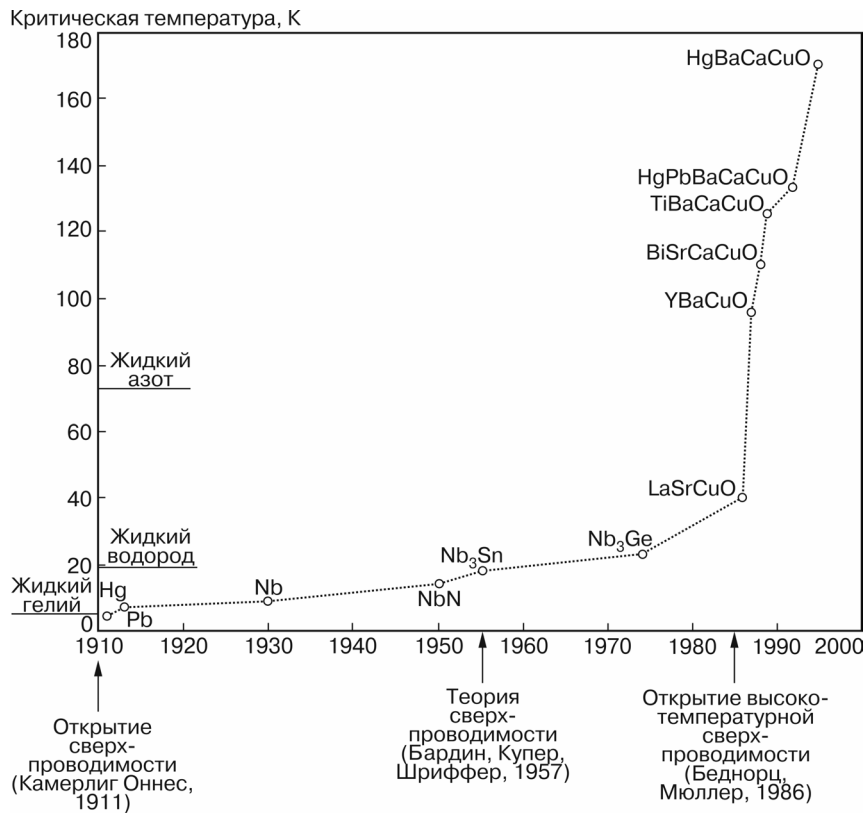
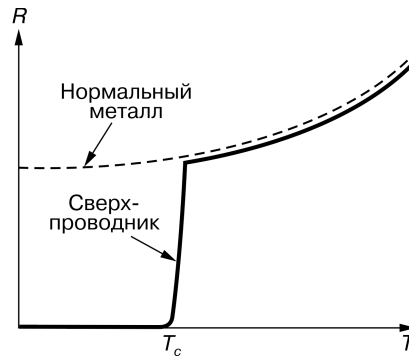


Рис. 2.1. Хронология повышения температуры сверхпроводящего перехода

В дальнейшем явление сверхпроводимости было обнаружено у многих других (но далеко не у всех) металлов и соединений. Для каждого сверхпроводника существует температура  $T_c$ , называемая критической, или температурой сверхпроводящего перехода, ниже которой сопротивление проводника обращается в нуль. Эта критическая температура крайне мала. Например, для алюминия она равна 1,2 K, или  $-271,8^\circ\text{C}$ , для ниобия — 9,2 K ( $0\text{ K} = -273^\circ\text{C}$ ). Понятно, что важнейшей задачей является поиск «высокотемпературных» сверхпроводников, обладающих большими значениями  $T_c$ . На рис. 2.1 показана вековая борьба физиков за увеличение критической температуры во все новых и новых сверхпроводниках.

Рис. 2.2. График зависимости сопротивления от температуры



В 1986 г. в науке произошел качественный скачок — Дж. Беднорцем и К. Мюллером была открыта высокотемпературная сверхпроводимость с  $T_c$ , превышающей температуру кипения жидкого азота ( $-196^\circ\text{C}$ ).

Таким образом, явление сверхпроводимости вышло за пределы физики низких температур. Сейчас достигнуто значение  $T_c \cong 138\text{ K}$  при атмосферном давлении, а при приложении гидростатического давления  $T_c$  может достигать  $164\text{ K}$  (соединение  $\text{Hg}_{0.8}\text{Tl}_{0.2}\text{Ba}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8.33}$ ).

Сверхпроводящий переход — это переход в совершенно новое физическое состояние. Рассмотрим кратко фундаментальные свойства сверхпроводников, установленные экспериментально и описываемые феноменологическими теориями и микроскопической теорией БКШ (Бардина—Купера—Шриффера).

- **Бесконечная проводимость.** Сопротивление сверхпроводника  $R$  равно нулю и, соответственно, проводимость  $\sigma = 1/R$  равна бесконечности. Переход в сверхпроводящее состояние происходит с понижением температуры при температуре  $T_c$  (рис. 2.2). Электрический ток  $J$  в сверхпроводнике является бездиссипативным; согласно закону Джоуля—Ленца выделяемая в сверхпроводнике мощность  $Q = J^2 R$  равна нулю. Из свойства бесконечной проводимости следует также, что ток, возбужденный в сверхпроводящем кольце, является незатухающим. В экспериментах незатухающий (персистентный) ток наблюдался в течение нескольких лет без измеримых признаков затухания.

- **Идеальный диамагнетизм.** Мейсснер и Оксенфельд обнаружили (1933) совершенно удивительное поведение сверхпроводника в магнитном поле, которое не может быть объяснено лишь бесконечной проводимостью. Магнитное поле, независимо от предыстории (помещаем ли мы тело в магнитное поле и охлаждаем его ниже  $T_c$ , либо прикладываем поле в сверхпроводящем состоянии), не проникает в толщу сверхпроводника. Магнитная индукция  $B$  (внешнее магнитное поле плюс поле индуцирован-

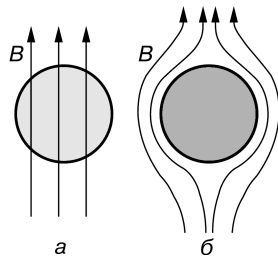


Рис. 2.3. Эффект Мейсснера. В отличие от нормального металла (а) из сверхпроводника магнитное поле выталкивается (б)

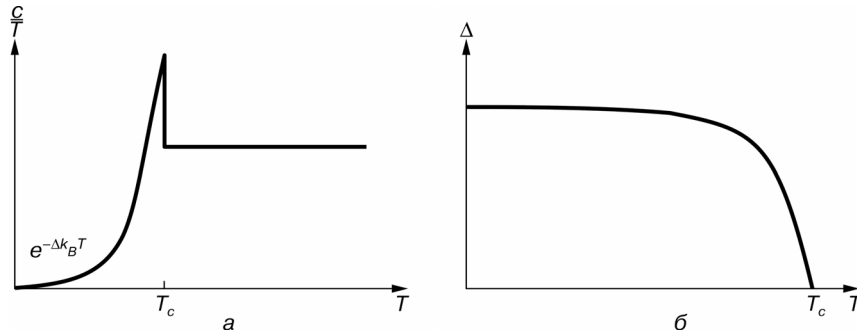


Рис. 2.4. Температурные зависимости электронной теплоемкости (а) и сверхпроводящей щели (б)

ных токов) везде внутри сверхпроводника, за исключением тонкого слоя вблизи поверхности толщиной  $\lambda \sim 10^{-5}$  см, равна нулю (рис. 2.3).

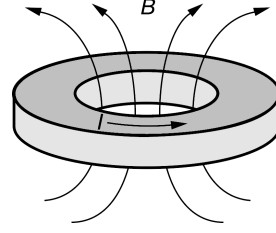
- **Энергетическая щель.** Термодинамические свойства сверхпроводников также отличаются от свойств обычных металлов. В спектре квазичастичных электронных возбуждений есть щель  $\Delta$ , т.е. запрещенный интервал энергии. Вследствие этого электронный вклад, например, в теплоемкость при низких температурах экспоненциально мал  $\sim \exp\left(-\frac{\Delta}{k_B T}\right)$ . Величина щели существен-

но зависит от температуры (в отличие от щели в полупроводниках), рис. 2.4.

- **Квантование магнитного потока.** В массивном сверхпроводящем кольце (или полом цилиндра) циркулирующий ток и производимое им магнитное поле (рис. 2.5) не могут иметь произвольное значение. Захваченный в отверстии поток магнитного поля  $\Phi$  (равный произведению магнитного поля на площадь отверстия) может принимать лишь дискретный ряд значений:

$$\Phi = n\Phi_0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

**Рис. 2.5.** Циркулирующий в сверхпроводящем кольце ток и создаваемое им магнитное поле. Поток магнитного поля через отверстие может принимать лишь дискретный ряд значений



$$\Phi_0 = \frac{hc}{2e} \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2. \quad (2.1)$$

Фундаментальная единица потока (квант потока)  $\Phi_0$  пропорциональна квантово-механической величине — постоянной Планка  $h$ .

• **Макроскопическая волновая функция  $\Psi$ .** Для объяснения необычной электродинамики сверхпроводников братья Лондоны развили в 1935 г. феноменологическую теорию. Они постулировали, что отклик «сверхпроводящих электронов» на электромагнитные поля описывается выражением (новое материальное соотношение для уравнений Максвелла):

$$\vec{j}_s = \frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \vec{A}, \quad (2.2)$$

где  $\lambda_L = (mc^2/4\pi n_s e^2)^{1/2}$  — лондоновская глубина проникновения магнитного поля,  $n_s$  — плотность сверхпроводящих электронов. Соотношение (2.2) связывает плотность сверхпроводящего тока  $\vec{j}_s$  с векторным потенциалом  $\vec{A}$  (следовательно, с магнитным потоком  $\Phi = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}$ ) в отличие от случая нормального металла, где ток определяется электрическим полем  $E$  ( $j = \sigma E$ ). Уравнения Максвелла с соотношением (2.2) описывают идеальную проводимость и идеальный диамагнетизм сверхпроводников. Исходя из феноменологического соотношения (2.2), Ф. Лондон интерпретировал сверхпроводимость как макроскопическое квантовое явление, в котором вся совокупность электронов находится в когерентном квантовом состоянии и описывается единой квантово-механической волновой функцией. При этом Ф. Лондон привел аналогии с другим известным макроскопическим квантовым явлением — Бозе—Эйнштейновской конденсацией.

В 1950 г. Гинзбург и Ландау обобщили феноменологию Ф. Лондона, исходя из общей теории фазовых переходов второго рода. Они ввели комплексный параметр порядка — волновую функцию сверхпроводящих электронов:

$$\Psi(r) = \sqrt{n_s(r)} e^{i\varphi(r)}. \quad (2.3)$$

Квадрат модуля макроскопической волновой функции (2.3) равен плотности сверхпроводящих электронов, а градиент фазы  $\varphi(r)$  определяет ток в системе. Из квантово-механического выражения для тока следует градиентно-инвариантное обобщение соотношения

$$\vec{j}_s = 2e |\Psi(r)|^2 \vec{v}_s, \quad (2.4)$$

где  $\vec{v}_s$  — сверхтекучая скорость,

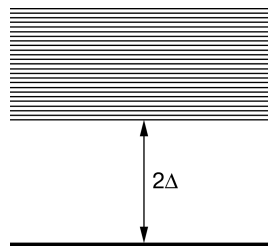
$$\vec{v}_s = \frac{1}{2m} (\hbar \nabla \varphi - 2e \vec{A} / c). \quad (2.5)$$

Из выражений (2.4) и (2.5) следует квантование потока в односвязных сверхпроводниках.

• **Куперовские пары.** Последовательная микроскопическая теория сверхпроводимости, содержащая теории Лондонов и Гинзбурга—Ландау как частные случаи, была создана Дж. Бардиным, Л. Купером и Дж. Шриффером (1957). В теории БКШ переход в сверхпроводящее состояние обусловлен объединением электронов в пары (так называемые куперовские пары), каждая из которых обладает нулевым суммарным спином, т.е. является бозе-частицей (подчиняется статистике Бозе—Эйнштейна). Заряд куперовской пары равен  $2e$ , масса —  $2m$ , что учтено в формулах (2.2)—(2.5) и подтверждено экспериментально. Сценарий БКШ образования куперовских пар имеет место во всех известных до настоящего времени сверхпроводниках, хотя механизм спаривания может быть различным. Для обычных сверхпроводников — это электрон-фононное взаимодействие. В случае высокотемпературных сверхпроводников рассматривают различные микроскопические механизмы куперовского спаривания. Куперовские пары, являясь бозе-частицами, образуют бозе-конденсат, в котором фазы волновых функций пар когерентны во всем объеме сверхпроводника. Эффективная волновая функция всего конденсата пар и есть  $\Psi$ -функция (2.3). Макроскопическая фазовая когерентность определяет квантовые интерференционные эффекты в сверхпроводниках и обуславливает эффективное использование сверхпроводящих устройств в качестве кубитов.

• **Квазичастичные возбуждения.** Утверждение о бездиссипативном характере токов в сверхпроводниках относится к стационарному равновесному состоянию. В нестационарном режиме отклик сверхпроводника определяется как сверхпроводящим конденсатом, так и квазичастичными возбуждениями над основным

**Рис. 2.6.** Квазичастичные возбуждения в сверхпроводнике (отделены щелью от основного состояния)



состоянием. Однако вследствие наличия щели  $\Delta$  в спектре возбуждений процессы диссипации и декогерентности в сверхпроводниках могут быть существенно подавлены уменьшением температуры. Квазичастичные возбуждения могут быть «заморожены» при условии  $kT \ll \Delta$ . Переменные электромагнитные поля частоты  $\omega$  воздействуют и на конденсат, вызывая при  $\hbar\omega > 2\Delta$  разрушение куперовских пар и возникновение одноэлектронных возбуждений. Таким образом, для обеспечения в сверхпроводящих кубитах низкого уровня декогерентности необходимо выполнение условий: 1)  $kT \ll \Delta$ , 2)  $\hbar\omega \ll \Delta$  (рис. 2.6).

• **Эффект Джозефсона.** Макроскопическая фазовая когерентность сверхпроводящего состояния наиболее ярко проявляется в эффекте Джозефсона, рассмотрению которого посвящен следующий параграф.

### 2.3. ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА

Джозефсоновские кубиты основаны на сверхпроводящих структурах, содержащих джозефсоновские контакты. Джозефсоновский туннельный контакт представляет собой два сверхпроводника, разделенных тонким ( $\sim 10^{-7}$  см) слоем диэлектрика (рис. 2.7).

Сверхпроводники  $S_1$  и  $S_2$ , составляющие контакт (берега контакта), характеризуются волновыми функциями  $\Psi_1 = |\Psi_1|e^{i\varphi_1}$  и  $\Psi_2 = |\Psi_2|e^{i\varphi_2}$ . В отсутствие взаимодействия между берегами фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  когерентны в каждом из сверхпроводников, но не скоррелированы между собой. Обмен электронами (туннелирование через диэлектрик) приводит к фазовой когерентности в системе как целое и установлению разности фаз  $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  на контакте. Замечательное открытие Брайана Джозефсона (1962) состоит в том, что сверхпроводящий ток может протекать без сопротивления через туннельный барьер диэлектрика, причем значение тока связано с разностью фаз  $\varphi$ . Фаза квантово-механической волновой функции прямо определяет такую измеряемую величину, как ток  $I$ .



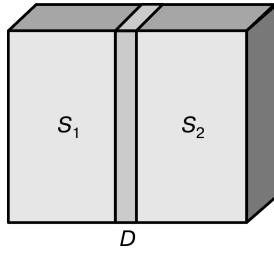


Рис. 2.7. Джозефсоновский туннельный контакт — два сверхпроводника  $S_{1,2}$ , разделенных тонким слоем диэлектрика  $D$

Джозефсон предсказал два эффекта:

- *Стационарный эффект Джозефсона.*

Зависимость сверхпроводящего тока через туннельный барьер от разности фаз на контакте определяется первым соотношением Джозефсона:

$$I = I_c \sin \varphi. \quad (2.6)$$

Критический ток  $I_c$  — максимальное значение бездиссипативного тока через контакт, при превышении которого наряду со сверхпроводящим током появляется диссипативная компонента тока квазичастиц и на контакте возникает напряжение  $V$ .

• *Нестационарный эффект Джозефсона.* Второе соотношение Джозефсона связывает напряжение на контакте с производной фазы по времени:

$$V = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.7)$$

В случае приложенного к джозефсоновскому контакту постоянного напряжения ток согласно соотношениям (2.6), (2.7) осциллирует с частотой:

$$\omega = \frac{2e}{\hbar} V, \quad (2.8)$$

где  $2e/\hbar = 483,6$  МГц/мкВ.

Подчеркнем необычность явления. Постоянное напряжение на контакте двух металлов (сверхпроводников!) вызывает переменный осциллирующий ток. Джозефсоновская генерация электромагнитного излучения частотой  $\omega = \frac{2e}{\hbar} V$  впервые наблюдалась харьковскими физиками И.М. Дмитренко, И.К. Янсоном и В.М. Свистуновым (1964).

Эффекты Джозефсона имеют место не только в туннельных контактах, но и при слабой связи между сверхпроводниками. Разные типы слабых сверхпроводящих контактов (микромостики, точечные контакты, контакты сверхпроводник — нормальный металл—сверхпроводник) обладают различными ток-фазовыми зависимостями  $I(\varphi)$ , не являющимися синусоидальными, но обладающими  $2\pi$ -периодичностью по разности фаз  $\varphi$ .

Приведем важные характеристики джозефсоновского контакта.

- Джозефсоновская энергия  $E_J$ . Наличию на контакте разности фаз  $\varphi$  соответствует энергия джозефсоновской связи  $E(\varphi)$ :

$$E(\varphi) = \int_0^{\varphi} I(\varphi) V(\varphi) d\varphi = \frac{\hbar}{2e} I_c \int_0^{\varphi} \sin \varphi d\varphi = \frac{\hbar}{2e} I_c (1 - \cos \varphi) \equiv E_J (1 - \cos \varphi),$$

где

$$E_J = \frac{\hbar I_c}{2e} \quad (2.9)$$

определяет характерную энергию джозефсоновской связи.

- Джозефсоновская индуктивность  $L_J$ . Джозефсоновский контакт является нелинейным индуктивным элементом. Из определения индуктивности  $V = L \frac{dI}{dt}$  и соотношений (2.6), (2.7) получаем

$$L_J = \frac{\hbar}{2e I_c \cos \varphi}. \quad (2.10)$$

Джозефсоновская индуктивность  $L_J$  нелинейно зависит от фазы  $\varphi$ , что, как показано далее, является необходимым для реализации кубитов на основе джозефсоновских контактов.

- Зарядовая (кулоновская) энергия  $E_C$ . На обкладках туннельного контакта емкостью  $C$  накапливается заряд  $Q = CV$  с соответствующей электростатической энергией  $\frac{Q^2}{2C}$ . Характерная зарядовая энергия на одну куперовскую пару ( $Q = 2e$ ) составляет

$$E_C = \frac{(2e)^2}{2C}. \quad (2.11)$$

## 2.4. СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ УСТРОЙСТВА С ДЖОЗЕФСОНОВСКИМИ КОНТАКТАМИ

Рассмотрим классические сверхпроводящие цепи, содержащие джозефсоновские контакты.

### Автономный джозефсоновский контакт

Простейшей сверхпроводящей системой является одиночный джозефсоновский контакт, подключенный к источнику тока (*current biased junction*) (рис. 2.8, а).

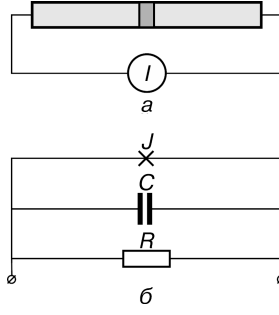


Рис. 2.8. Джозефсоновский туннельный контакт, подключенный к источнику тока (а), и его эквивалентная схема (б)

Цепь характеризуется сосредоточенными элементами — емкостью джозефсоновского контакта  $C$ , его критическим током  $I_c$  и нормальным сопротивлением (в духе двухжидкостной модели)  $R$  (рис. 2.8, б). Динамической переменной является разность фаз на контакте  $\varphi$ . Записывая полный ток  $I$  в виде суммы тока смещения  $C \frac{dV}{dt}$ , тока Джозефсона  $I_s(\varphi)$  и нормального тока  $I_N = V / R$  и используя соотношения Джозефсона (2.6), (2.7), получаем уравнение движения для фазы  $\varphi$ :

$$\frac{\hbar}{2e} C \ddot{\varphi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + I_c \sin \varphi = I, \quad (2.12)$$

которое с учетом (2.9) и (2.11) представляется в виде уравнения движения «координаты»  $\varphi$  для «частицы» массы  $M$ , движущейся в потенциале  $U(\varphi)$ :

$$M \ddot{\varphi} + \frac{dU}{d\varphi} + r \dot{\varphi} = 0, \quad (2.13)$$

где

$$M = \frac{\hbar^2}{(2e)^2} C = \frac{\hbar^2}{2E_c},$$

$$U(\varphi) = E_J \left[ (1 - \cos \varphi) - \frac{I}{I_c} \varphi \right],$$

$$r = \frac{\hbar^2}{(2e)^2 R}. \quad (2.14)$$

Феноменологический коэффициент затухания зависит от температуры  $T$ , напряжения на контакте  $V(t)$  и типа слабой связи. Приближение с постоянным значением  $r$  в формуле (2.14), в котором сопротивление  $R$  является сопротивлением контакта в нормальном состоянии, выполняется лишь для температур, близких к критической  $T_c$ .

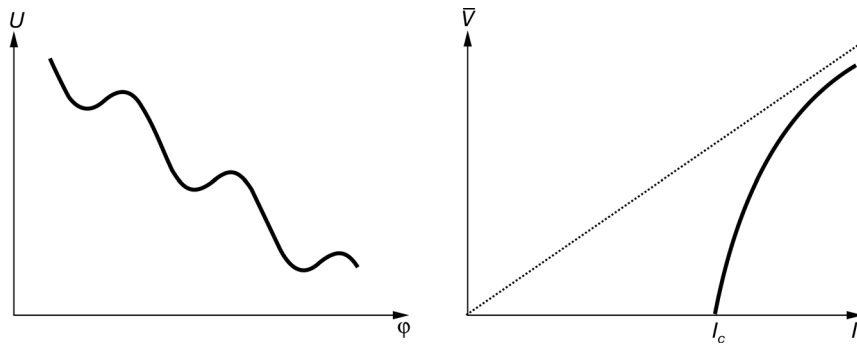


Рис. 2.9. Потенциал «стиральной доски»

Рис. 2.10. Зависимость среднего по времени напряжения на контакте от заданного тока для контакта, шунтированного сопротивлением  $R_{\text{ш}} < R$

Исходя из механической аналогии, можно качественно описать динамику системы в потенциале «стиральной доски»  $U(\varphi)$  (рис. 2.9). При токе  $I = 0$  фаза  $\varphi = 0$ . С увеличением тока «частица» остается в потенциальной яме, при этом напряжение на контакте равно нулю. При токе  $I \geq I_c$  барьеры между ямами исчезают и «частица» движется вниз по «стиральной доске», т.е. фаза начинает зависеть от времени и на контакте возникает напряжение  $V$ . Зависимость среднего по времени напряжения от приложенного тока показана на рис. 2.10.

#### Сверхпроводящее кольцо с джозефсоновским контактом (ВЧ-СКВИД)

Важной сверхпроводящей цепью является сверхпроводящее кольцо, содержащее один или несколько джозефсоновских контактов. Такие структуры, называемые квантовыми интерферометрами, составляют основу сверхчувствительных датчиков магнитного поля — сверхпроводящих квантовых интерферометров (*Superconductive Quantum Interferometer Devices*, SQUID). Современные коммерческие СКВИД позволяют измерять магнитные поля с точностью  $10^{-9}$ — $10^{-10}$  гаусс (магнитное поле Земли составляет порядка 1 гаусс). Подробное изложение свойств квантовых интерферометров и их практических применений приведено в работах Barone, Paterno и Лихарева. Мы кратко рассмотрим те их свойства, которые важны для реализации так называемых потоковых кубитов.

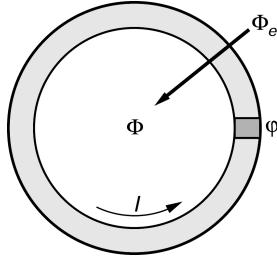


Рис. 2.11. Сверхпроводящее кольцо с джозефсоновским контактом

Различают одноконтатные (высоко-частотные) и двухконтатные (постоянного тока) СКВИД. В случае кольца с джозефсоновским контактом (рис. 2.11) имеем систему с заданным магнитным потоком (*magnetic flux biased*) в отличие от рассмотренной выше системы с заданным током.

Внешнее магнитное поле  $H_e$  задает в кольцо приложенный магнитный поток  $\Phi_e$ , который индуцирует в кольце циркулирующий ток  $I$ . Результирующий магнитный поток  $\Phi$  в кольце с индуктивностью  $L$ ,

$$\Phi = \Phi_e - LI, \quad (2.15)$$

определяет разность фаз  $\varphi$  на контакте. Для массивного кольца с джозефсоновским контактом взамен условия квантования потока (2.1) имеем соотношение  $\varphi = \frac{2e}{\hbar} \Phi$ . С учетом связи тока в

кольце с потоком  $\Phi$  (2.6), т.е. с разностью фаз на контакте  $\varphi$ , вместо уравнения (2.12) получаем динамическое уравнение для системы

$$\frac{\hbar}{2e} C \ddot{\varphi} + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\varphi} + I_c \sin \varphi + \frac{\hbar}{2eL} (\varphi - \varphi_e) = 0 \quad (2.16)$$

или

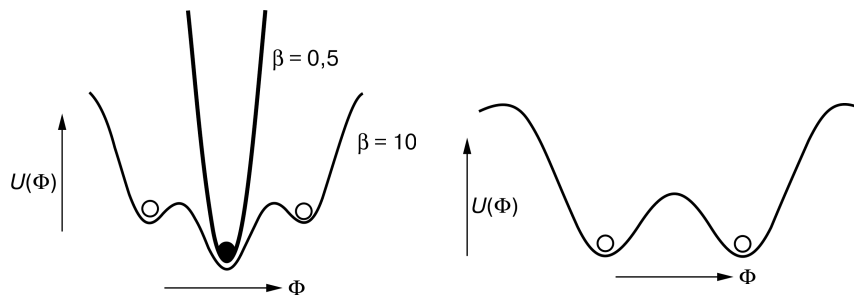
$$M \ddot{\varphi} + \frac{dU}{d\varphi} + r \dot{\varphi} = 0, \quad (2.17)$$

где потенциал  $U(\varphi)$  теперь имеет вид

$$U = E_J (1 - \cos \varphi) + E_L \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{2}, \quad E_L = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 L}, \quad \varphi_e = \frac{2e}{\hbar} \Phi_e, \quad \Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{2e}. \quad (2.18)$$

Введем параметр интерферометра  $\beta = 2\pi \frac{LI_c}{\Phi_0}$ , при этом потенциал  $U(\varphi)$  записывается в виде

$$U(\varphi) = E_J \left[ (1 - \cos \varphi) + \frac{(\varphi - \varphi_e)^2}{2\beta} \right]. \quad (2.19)$$



**Рис. 2.12.** Потенциальная энергия кольца с джозефсоновским контактом как функция захваченного магнитного потока при нулевом внешнем потоке. Белые кружки — метастабильные и черный кружок — стабильное состояния

**Рис. 2.13.** Бистабильное состояние системы при внешнем потоке, равном полуполому числу квантов потока

Потенциал  $U(\Phi)$  обладает интересными свойствами. При  $\beta \leq 1$  у потенциала только один минимум, в котором и находится «частица». При  $\beta \geq 1$  имеем несколько минимумов, и при заданном внешнем потоке  $\Phi_e$  координата «частицы» становится неоднозначной. Различные состояния системы соответствуют разным возможным значениям циркулирующего в кольце тока. На рис. 2.12 показана зависимость потенциала от захваченного магнитного потока  $\Phi$  при  $\Phi_e = 0$ .

При внешнем потоке  $\Phi_e$ , равном полуполому числу кванта потока  $\Phi_0$ , потенциал становится бистабильным (рис. 2.13). Два состояния системы соответствуют противоположным циркулирующим токам в кольце. Такая конфигурация системы используется в так называемом потоковом кубите.

### Двухконтактный СКВИД

Рассмотрим систему, состоящую из двух джозефсоновских контактов в сверхпроводящем кольце, которое включено в цепь с транспортным током (рис. 2.14). Такая система, комбинируя в себе свойства автономного контакта и кольца в магнитном поле, обладает важным преимуществом. Она ведет себя как эффективный джозефсоновский контакт в транспортной цепи, критическим током которого управляет приложенное магнитное поле.

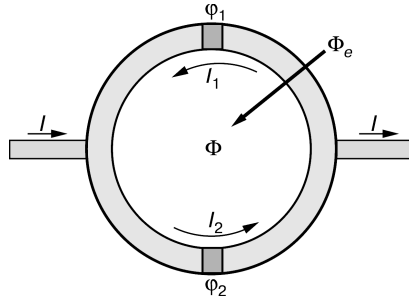


Рис. 2.14. Двухконтактный квантовый интерферометр с транспортным током

Уравнения, описывающие стационарное состояние системы, получаем аналогично рассмотренным выше случаям. Имеем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \Phi = \Phi_e - L_1 I_1 + L_2 I_2, \quad (2.20)$$

$$I = I_1 + I_2 = I_{c1} \sin \varphi_1 + I_{c2} \sin \varphi_2. \quad (2.21)$$

Рассмотрим далее для простоты *симметричный* двухконтактный СКВИД,

$$I_{c1} = I_{c2} = I_c, \quad L_1 = L_2 = L/2, \quad (2.22)$$

и случай малой индуктивности кольца  $LI_c \ll \Phi_0$ . При этом поток в кольце совпадает с приложенным потоком,  $\Phi \approx \Phi_e$ . Вводя суммарную и разностную переменные

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \theta = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad (2.23)$$

получаем

$$I(\varphi) = \tilde{I}_c \sin \varphi. \quad (2.24)$$

Соотношение (2.24) описывает ток-фазовую зависимость для эффективного джозефсоновского контакта, критический ток которого

$$\tilde{I}_c = \left| 2I_c \cos \left( \pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \right) \right| \quad (2.25)$$

модулируется магнитным потоком  $\Phi_e$ . Таким образом, двухконтактная система реализует эффективный джозефсоновский контакт с контролируемой энергией джозефсоновской связи  $\tilde{E}_J = \hbar \tilde{I}_c / 2e$ .

### Одноэлектронный сверхпроводящий транзистор (ящик для куперовских пар)

Системой, в которой важное значение имеют эффекты дискретности электронного заряда, является так называемый ящик для куперовских пар (*Cooper Pair Box*, CPB). Она представляет собой малый сверхпроводящий островок (гранулу), присоединенный через туннельный джозефсоновский контакт к массивному сверхпроводящему электроду (рис. 2.15). Заряд на островке  $Q$  контролируется емкостным гейтом  $C_g$  посредством приложенного напряжения  $V_g$ . В такой системе при определенных условиях (низкие температуры, малая емкость и соответственно большая кулоновская энергия) реализуется режим кулоновской блокады: в нормальном состоянии электроны в этом режиме с изменением  $V_g$  туннелируют на гранулу по одному, на чем и основана работа одноэлектронного транзистора (*Single Electron Transistor*, SET). В случае CPB дискретным образом, по одной, изменяется число избыточных куперовских пар в сверхпроводящей грануле.

Электростатическая энергия системы записывается в виде

$$\frac{C_J V^2}{2} + \frac{C_g (V_g - V)^2}{2}, \quad (2.26)$$

где  $V = \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi}$  — напряжение на джозефсоновском контакте, емкость которого равна  $C_J$ . Добавляя джозефсоновскую энергию, для полной энергии имеем

$$E = \frac{C}{2} \left( \frac{\hbar}{2e} \dot{\phi} - \frac{C_g}{C} V_g \right)^2 + E_J (1 - \cos \phi), \quad (2.27)$$

где  $C = C_J + C_g$ .

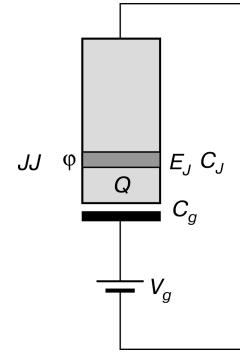


Рис. 2.15. Схема ящика для куперовских пар



## 2.5. КВАНТОВЫЕ СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ ЦЕПИ

### Реально-квантовые макроскопические эффекты в сверхпроводниках

Рассмотренные выше устройства с джозефсоновскими контактами являются прототипами джозефсоновских кубитов — структур, проявляющих квантовые эффекты на макроскопическом уровне. Необходимо различать «макроскопические квантовые эффекты» в сверхпроводниках, такие как квантование потока, эффект Джозефсона, от «реально-квантовых эффектов», или «эффектов второго уровня», которые рассмотрены далее. Сверхпроводимость — это макроскопическое квантовое явление, что означает следующее: в сверхпроводящем состоянии макроскопическое число куперовских пар сконденсировано в единое квантовое состояние. «Волновая функция» (параметр порядка)  $\Psi = \sqrt{n_s} e^{i\chi}$ , описывающая это состояние, имеет макроскопическую амплитуду  $n_s$  (плотность сверхпроводящих электронов) и когерентную фазу. Параметр порядка  $\Psi$  — это статистически усредненная величина, которая не является квантовой волновой функцией электронов. «Макроскопические квантовые эффекты» обусловлены когерентным поведением совокупности сверхпроводящих электронов. Поэтому лучше называть их когерентными эффектами. «Квантовость», а именно появление в наблюдаемых величинах постоянной Планка  $\hbar$ , происходит, например, в случае сверхпроводящего кольца вследствие одозначности градиентно-инвариантной когерентной фазы  $\chi$ . Ситуация аналогична старой квантовой теории атома Бора. Реально-квантовые эффекты, такие как макроскопическое квантовое туннелирование, квантовая суперпозиция состояний, возникают на уровне, когда фаза  $\chi$  рассматривается как квантовая переменная. При этом состояние системы описывается как вектор состояния  $|\Psi\rangle = |\Psi_0\rangle e^{i\chi}$ . Сложнейший вопрос состоит в том, распространяется ли квантово-механическое описание на макроскопически различимые состояния и можно ли выделить отдельную величину (в данном случае фазу  $\chi$ ) в качестве квантовой переменной. Именно в случае сверхпроводника такое выделение в принципе возможно. В настоящее время развита общая процедура описания квантовых сверхпроводящих цепей, учитывающая реально-

квантовые эффекты, и сформулированы условия наблюдения этих эффектов. Будем придерживаться этого канонического подхода, хотя проблема еще далека от разрешения.

### Квантование сверхпроводящих цепей с джозефсоновскими контактами

Для того чтобы поведение цепи было квантово-механическим, необходимо выполнение следующих условий:

- отсутствие диссипации — все металлические части цепи должны состоять из сверхпроводников (реально используются ниобий или алюминий). При этом, как отмечалось выше, в сверхпроводнике должны быть «заморожены» квазичастичные возбуждения, т.е. цепь должна находиться при температуре  $k_B T < \Delta$ ;

- низкий уровень шумов — низкие температуры. Условия на температуру являются еще более жесткими. Энергия тепловых флуктуаций  $k_B T$  должна быть мала по сравнению с расстоянием между уровнями энергии состояний кубита  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ ,  $k_B T < \hbar\omega_{10} < \Delta$ , поскольку кубит является макроскопическим объектом и легко термализуется. Для сверхпроводящих кубитов  $\omega_{10}$  равна порядка 10 ГГц, что составляет  $\sim 0,5$  К. Рабочая температура (включая «электромагнитную» температуру внешних наводок) в итоге должна составлять  $\sim 10^{-3} - 10^{-2}$  К;

- нелинейная индуктивность. Для реализации кубита необходимо выделение двух близко расположенных энергетических уровней с тем, чтобы остальными вышележащими уровнями можно было бы пренебречь. Это достигается за счет существенной нелинейности джозефсоновской индуктивности. Напомним, что в линейном квантовом осцилляторе все уровни энергии являются эквидистантными.

Классические джозефсоновские структуры, рассмотренные в параграфе 2.4, квантуются в соответствии со стандартной процедурой канонического квантования. В общем виде она состоит в следующем. На основании уравнений движения для «координаты»  $\varphi$  (2.12), (2.16) записываем лагранжиан системы, равный разности кинетической и потенциальной энергий:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = K(\dot{\varphi}) - U(\varphi). \quad (2.28)$$

Уравнения движения в лагранжевом формализме имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (2.29)$$

Вводя канонический импульс, сопряженный координате  $\varphi$ ,

$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ , получаем классический гамильтониан системы:

$$H(p, \varphi) = p\dot{\varphi} - L. \quad (2.30)$$

Квантование гамильтониана проводится заменой классического импульса  $p$  дифференциальным оператором:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.31)$$

Имеем полную аналогию с квантовым описанием частицы в терминах координаты и импульса. Так же, как для частицы, выполняются коммутационное соотношение и соотношение неопределенностей:

$$[\varphi, \hat{p}] = \hbar, \quad \Delta p \Delta \varphi \geq \hbar / 2. \quad (2.32)$$

Аналогично оператору импульса (2.31) записывают оператор заряда  $\hat{q} = -2ie \frac{\partial}{\partial \varphi}$  и оператор числа пар  $\hat{n} = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ . При этом коммутационное соотношение между фазой и числом куперовских пар имеет простой вид:

$$[\varphi, \hat{n}] = i. \quad (2.33)$$

Соотношения между фазой волновой функции сверхпроводника и числом куперовских пар носят общий характер. При «реально-квантовом» описании фаза  $\varphi$  и число куперовских пар  $N$  в сверхпроводнике не являются одновременно определенными величинами, а испытывают квантовые флуктуации:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{фаза} & \varphi \rightarrow \hat{\varphi}, \\ \text{число куперовских пар} & N \rightarrow \hat{N}, \\ \hat{N} = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, [\hat{\varphi}, \hat{N}] = i, & \Delta \varphi \Delta N \geq 1. \end{array} \right\}$$

Приведем получаемые рассмотренным образом квантовые гамильтонианы джозефсоновских структур:

- автономный джозефсоновский контакт с заданным током

$$\hat{H} = E_C \hat{n}^2 - E_J \cos \varphi - \frac{\hbar}{2e} I \varphi; \quad (2.34)$$

- одноконттактный СКВИД

$$\hat{H} = E_C \hat{n}^2 - E_J \cos \varphi + \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2 L} (\varphi - \varphi_e)^2; \quad (2.35)$$

- ящик для куперовских пар

$$\begin{aligned} \hat{H} &= E_C (\hat{n} - n_g)^2 - E_J \cos \varphi, \\ n_g &= -C_g V_g / 2e. \end{aligned} \quad (2.36)$$

## 2.6. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КУБИТОВ

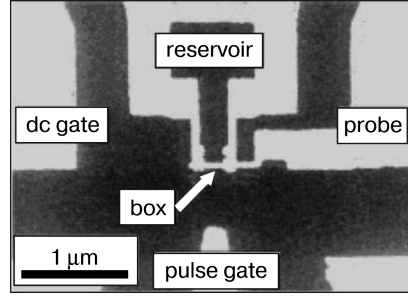
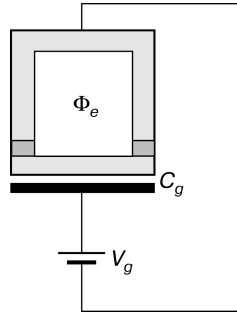
Джозефсоновские кубиты — это сверхпроводящие структуры, содержащие джозефсоновские контакты, в которых реализуются реально-квантовые эффекты. «Инженерия» джозефсоновских структур состоит в создании макроскопических квантовых двух-уровневых систем с последующим их применением в качестве элементов квантовых компьютеров. Существуют различные реализации джозефсоновских кубитов. Их можно разделить на два класса: зарядовые и фазовые (поточные) кубиты.

### Заряд и фаза. Два предела

Из соотношения коммутации для операторов  $\hat{\varphi}$  и  $\hat{N}$  и следующего из него соотношения неопределенностей (аналогичное  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$  для квантовой частицы) следует, что существуют две предельные ситуации: состояние с хорошо определенным числом куперовских пар,  $\Delta N \ll N$ , и состояние с хорошо определенной фазой,  $\Delta \varphi \ll \varphi$ .

Первая предельная ситуация осуществляется, когда кинетическая энергия системы намного больше потенциальной энергии,  $E_C \gg E_J$ . При этом мы имеем дело с контролируемой квантовой динамикой индивидуальных куперовских пар, т.е. с зарядом сверхпроводящего тела  $q = 2eN$ .

Вторая предельная ситуация  $E_J \gg E_C$  соответствует квантовой динамике фазы (магнитного потока) с  $\Delta \varphi < \varphi$ . Первая ситуа-



**Рис. 2.16.** Зарядовый кубит с регулируемой магнитным полем энергией джозефсоновской связи

**Рис. 2.17.** Электронная фотография зарядового кубита [Nakamura Y., Pashkin Yu.A., Tsai J.S. // Nature 398, 786 (1999)]

ция реализуется в зарядовых, а вторая — в фазовых (поточковых) джозефсоновских кубитах.

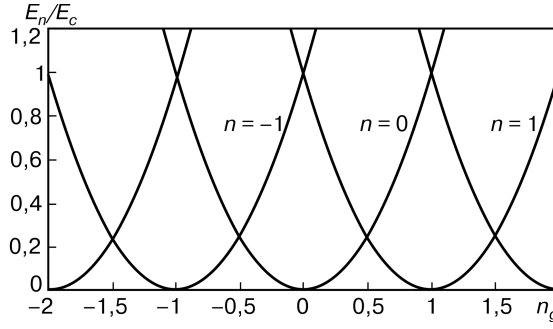
### Зарядовый кубит

Зарядовый кубит представляет собой ящик для куперовских пар, связанный джозефсоновским контактом с резервуаром заряда и контролируемый приложенным напряжением на емкостном гейте (см. параграф 2.4 и рис. 2.15). Важной модификацией таких устройств является зарядовый кубит с подстраиваемой магнитным потоком эффективной энергией джозефсоновской связи  $\tilde{E}_J(\Phi_e)$  (рис. 2.16). На рис. 2.17 приведена электронная фотография зарядового кубита, реализованного в лаборатории NEC (Япония). Указанный масштаб  $1 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ см}$  дает представление о возможностях современной технологии (напомним, что толщина человеческого волоса  $\sim 50 \text{ мкм}$ ).

В зарядовом кубите в режиме  $E_c > E_J$  заряд (число куперовских пар  $n$ ) на «ящике» хорошо определен, а фаза  $\phi$  сильно флуктуирует. В базисе зарядовых состояний  $|n\rangle$  квантовый гамильтониан (2.36) имеет вид

$$H = \sum_n \left[ E_c (\hat{n} - n_g)^2 |n\rangle\langle n| - \frac{1}{2} E_J (|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|) \right]. \quad (2.37)$$

**Рис. 2.18.** Уровни энергии зарядового кубита без учета джозефсоновской энергии связи



Второе слагаемое в гамильтониане (2.37), соответствующее джозефсоновскому туннелированию, получают преобразованием  $\cos \varphi$  в базисе  $|n\rangle$  с использованием соотношений (аналогичных соотношениям между координатой  $x$  и импульсом  $p$  для квантовой частицы):

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, [\varphi, \hat{n}] = i \rightarrow e^{\pm i\varphi}|n\rangle = |n \pm 1\rangle, |\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_n e^{in\varphi} |n\rangle. \quad (2.38)$$

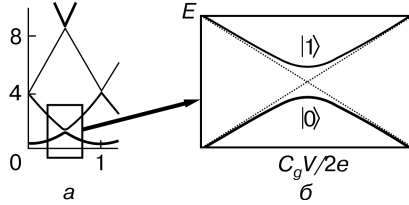
В пределе  $E_C \gg E_J$  собственные функции гамильтониана  $H$

$$E_C(\hat{n} - n_g)^2 |n\rangle = E_n |n\rangle \quad (2.39)$$

соответствуют зарядовым состояниям  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  с энергетическим спектром  $E_n = E_C(n - n_g)^2$  (рис. 2.18).

Малое джозефсоновское взаимодействие  $E_J$  снимает вырождение в точках пересечения уровней при определенных значениях  $n_g$ , например при  $n_g = 1/2$  (рис. 2.19, а). Расщепление порядка энергии джозефсоновской связи  $E_J$ .

Вблизи точки вырождения  $n_g \approx 1/2$  существенное значение имеют два нижайших уровня, получаемые гибридизацией состояний с  $n = 0$  и  $n = 1$  (рис. 2.19, а). Вышележащими зарядовыми



**Рис. 2.19.** Малое джозефсоновское взаимодействие, снимающее вырождение в точках пересечения уровней (а), уровни энергии зарядового кубита в двухуровневом приближении в зависимости от напряжения на гейте (б)

состояниями можно пренебречь. В этом приближении имеем двухуровневую квантовую систему со спектром, изображенным на рис. 2.19, б. В итоге редуцированный гамильтониан зарядового кубита обычно записывают в обозначениях для спина  $S = 1/2$  с использованием матриц Паули:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} B_z \sigma_z - \frac{1}{2} B_x \sigma_x. \quad (2.40)$$

Зарядовые состояния  $n = 0$  и  $n = 1$  соответствуют спиновым базисным состояниям кубита  $|\uparrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $|\downarrow\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Коэффициенты  $B_z$  и  $B_x$  — компоненты эффективного магнитного поля, зависящие от  $n_g$ , т.е. от напряжения на гейте  $V_g$  и от джозефсоновской энергии:

$$B_z = E_C(1 - 2n_g), \quad B_x = E_J. \quad (2.41)$$

Диагонализуя гамильтониан (2.40), получаем собственные энергии кубита  $E_{1,2}$  и соответствующие собственные состояния  $|E_{1,2}\rangle$ . В точке вырождения  $n_g = 1/2$  они имеют простой вид: расстояние между уровнями равно  $E_2 - E_1 \equiv \Delta E = E_J$ , а собственные состояния —  $|E_{1,2}\rangle = |\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle$ .

Важное свойство макроскопической реализации квантовой двухуровневой системы — «искусственного атома» — это возможность контролируемого изменения квантовых характеристик (расстояния между уровнями и собственных состояний) внешними воздействиями. В случае зарядового кубита такими воздействиями являются напряжение на гейте  $V_g$  и (в структуре, изображенной на рис. 2.16) приложенный магнитный поток  $\Phi_e$ . Впервые зарядовый кубит был экспериментально реализован и исследован в лаборатории NEC (Япония) в 1999 г.

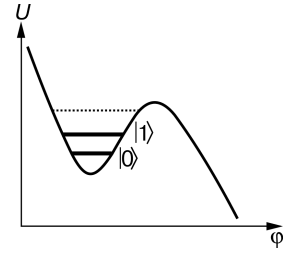
### Фазовый кубит

Второй активно изучаемый тип джозефсоновских кубитов — фазовые (или потоковые в геометрии интерферометра) кубиты. Такие системы соответствуют ситуации  $E_J \gg E_C$ , при которой квантовой переменной является разность фаз  $\varphi$  на джозефсоновском контакте (или поток магнитного поля  $\Phi$  через сверхпроводящее кольцо).

Рис. 2.20. Два нижайших энергетических уровня фазового кубита

Фазовый кубит в простейшей реализации — это джозефсоновский контакт в цепи с заданным током, классическая динамика которого рассмотрена в параграфе 2.4. В квантовом режиме система описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = -E_C \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - E_J \cos \varphi - \frac{\hbar}{2e} I \varphi, \quad (2.42)$$



аналогичным гамильтониану квантовой частицы, движущейся в «потенциале стиральной доски». В фазовом режиме  $E_J \gg E_C$  и при токе, меньшем критического тока контакта  $I < I_c$ , частица локализована в одной из потенциальных ям (см. рис. 2.9). При этом два нижайших дискретных энергетических уровня образуют базисные состояния кубита  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  (рис. 2.20).

### Потоковые кубиты

Потоковые кубиты — это системы, в которых один или несколько джозефсоновских контактов включены в сверхпроводящее кольцо. В режиме  $E_J \gg E_C$  в потоковом кубите, аналогично фазовому кубиту, реализуется квантовая динамика джозефсоновских фаз на контактах и связанного с ними потока магнитного поля в кольце  $\Phi$ . Так, в простейшем случае квантового аналога *одноконтактного ВЧ-СКВИД* (см. параграф 2.4)  $\varphi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}$  и

функцию макроскопической квантовой переменной выполняет магнитный поток. При этом квантовый гамильтониан (2.35) имеет вид

$$\hat{H} = E_C \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} - E_J \cos \left( 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right) + \frac{1}{L} (\Phi - \Phi_e)^2. \quad (2.43)$$

Потенциальная энергия квантовой системы (2.43) при внешнем потоке  $\Phi_e = \frac{\Phi_0}{2}$  и достаточно большой индуктивности кольца  $\beta = 2\pi \frac{L I_c}{\Phi_0} > 1$  имеет вид двухъямного потенциала  $U(\Phi)$  (см.



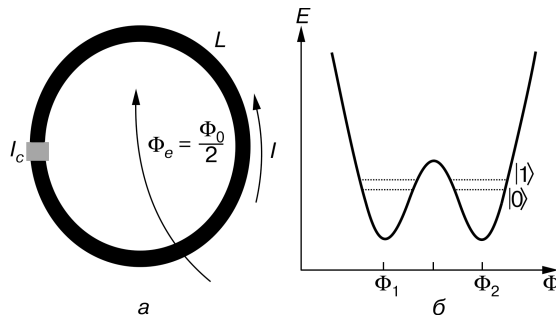


Рис. 2.21. Одноконтактный потоковый кубит (а) и его базисные состояния (б)

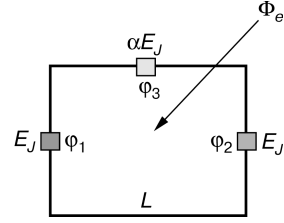
рис. 2.13), минимумы которого определяют два стабильных состояния кольца  $|\Phi_1, \vec{0}\rangle$  и  $|\Phi_2, \vec{0}\rangle$ . Эти два состояния соответствуют незатухающим токам в кольце с противоположными направлениями. Квантово-механическое туннелирование в  $\Phi$ -пространстве приводит к установлению двух дискретных квантовых уровней  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  — базисных состояний кубита (рис. 2.21).

Состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  являются когерентными суперпозициями состояний с токами, текущими по и против часовой стрелки. При этом вся совокупность сверхпроводящих электронов (куперовских пар) находится одновременно в состоянии  $|\Phi_1, \vec{0}\rangle$  и в состоянии  $|\Phi_2, \vec{0}\rangle$ . Т.е. имеем аналог знаменитого «шредингеровского кота», находящегося в суперпозиции состояний «живой кот» и «мертвый кот» (см. главу 1). Когерентная суперпозиция токовых состояний в ВЧ-СКВИД впервые наблюдалась группой исследователей в Stony Brook University (USA) в 2000 г.

### Трехконтактный потоковый кубит

Потоковый кубит, состоящий из трех джозефсоновских контактов, включенных в сверхпроводящий контур (3JJ кубит), был впервые реализован в лаборатории J. Mooij (Делфт, Нидерланды) и оказался одним из наиболее перспективных джозефсоновских кубитов, активно изучаемых в настоящее время. Замена одного контакта тремя имеет важное значение. В этом случае бистабильность потенциала возникает при сколь угодно малой геометрической индуктивности кольца. Это позволяет уменьшить размеры системы и ограничить ее взаимодействие с окружением, т.е. уменьшить влияние на кубит внешних электромагнитных шу-

Рис. 2.22. Трехконтактный потоковый кубит



мов. Результатам исследований потоковых кубитов в основном и посвящена данная монография.

Схема 3JJ кубита показана на рис. 2.22. Два контакта являются идентичными, а джозефсоновская энергия (т.е. критический ток) третьего контакта отличается на множитель  $\alpha$ . Предполагаем, что индуктивность кольца  $L$  мала,  $LI_c / \Phi_0 \ll 1$ . При этом поток в кольце совпадает с приложенным потоком,  $\Phi \approx \Phi_e$  (именно такая ситуация реализуется в эксперименте). В этом случае можно пренебречь магнитной энергией системы, которая пропорциональна  $(\Phi - \Phi_e)^2$ , а потенциальная энергия равна сумме джозефсоновских энергий:

$$U = E_J(2 + \alpha - \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 - \alpha \cos \varphi_3). \quad (2.44)$$

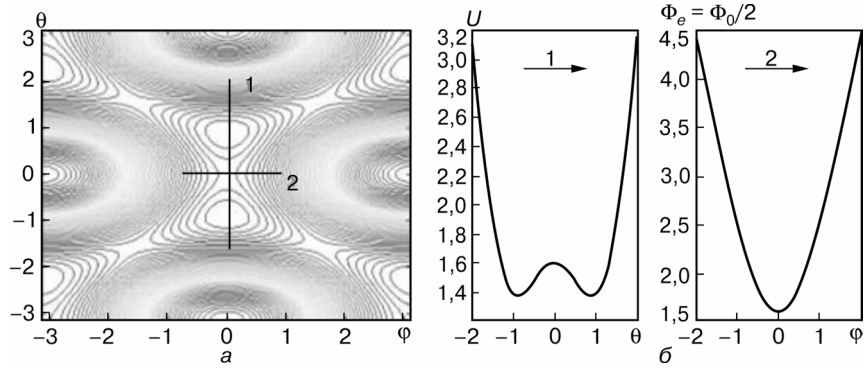
Фазы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  в замкнутом контуре связаны соотношением

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \approx 2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \equiv 2\pi(f + 1/2). \quad (2.45)$$

Вводя новые переменные  $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ ,  $\theta = (\varphi_1 - \varphi_2)/2$  и исключая с помощью выражения (2.45) фазу  $\varphi_3$ , получаем потенциал (2.44) в виде

$$U(\varphi, \theta) = E_J \{2 + \alpha - 2 \cos \varphi \cos \theta - \alpha \cos(2\pi(f + 1/2) + 2\theta)\}. \quad (2.46)$$

При квантовом рассмотрении потенциал (2.46) описывает потенциальную энергию квантовой частицы в двухмерном пространстве «координат»  $\varphi$  и  $\theta$ . Рассмотрим свойства этого потенциала в зависимости от величины  $\alpha$  и управляющего параметра  $f$ . Потенциал (2.46) является  $2\pi$ -периодической функцией координат  $\theta$  и  $\varphi$ . Рассматривая одну из  $2\pi \times 2\pi$  ячеек периодического потенциала, получаем, что при  $f = 0$  ( $\Phi_e = \Phi_0/2$ ) потенциал имеет два равных локальных минимума в точках  $\varphi = 0$ ,  $\theta = \pm \arccos 1/2\alpha$ . Минимумы существуют при  $1/2 \leq \alpha \leq 1$ . Для этого и выбирается асимметрия контактов с типичным значением  $\alpha \approx 0,8$ . Контурный график  $U(\varphi, \theta)$  при  $f = 0$  показан



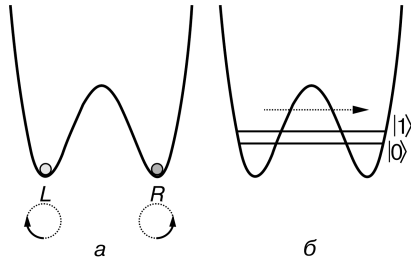
**Рис. 2.23.** Контурный график потенциальной энергии 3JJ кубита (а) и профили потенциала вдоль направлений 1 и 2 (б)

на рис. 2.23, а. Профили потенциала вдоль сечений  $\phi = 0$  и  $\theta = 0$  приведены на рис. 2.23, б. Два минимума существуют лишь в малой области вблизи  $f = 0$ . С отходом от значения  $f = 0$  минимумы становятся не равными и при  $|f| > f_c$  бистабильность исчезает; размер критической области  $f_c \approx \pm 0,1$  при  $\alpha = 0,8$ .

При оптимальном выборе величины  $\alpha \approx 0,8$  ячейки разделены высокими барьерами, но внутри ячейки возможно квантовое туннелирование между двумя минимумами. Состояния в локальных минимумах соответствуют циркулирующим по и против часовой стрелки персистентным токам  $I_L$  и  $I_R$  (рис. 2.24, а). При  $f = 0$  токи имеют равные значения:

$$I_{L,R} = I_c \sin(\phi + \theta) = \pm I_c \sqrt{1 - 1/(2\alpha)^2}. \quad (2.47)$$

Квантово-механическое туннелирование устанавливает два энергетических уровня (рис. 2.24, б), которые являются базисными состояниями  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  кубита.



**Рис. 2.24.** Двухъямный потенциал потокового 3JJ-кубита: а — состояния в локальных минимумах, соответствующие циркулирующим в кольце токам; б — туннелирование между ямами, которое приводит к двум уровням, образующим вычислительный базис кубита

Двухуровневая квантовая система, реализуемая в потоковом 3JJ кубите, так же, как в выше рассмотренных случаях, описывается гамильтонианом вида (2.40) с «магнитными полями»  $B_z$  и  $B_x$ , зависящими от параметров  $\alpha$  и  $f$  (см. главу 4).

Наряду с основными типами джозефсоновских кубитов существуют иные многочисленные варианты сверхпроводящих кубитов. К ним относятся так называемые  $d$ -волновые кубиты на основе высокотемпературных сверхпроводников, имеющих необычную симметрию сверхпроводящего параметра порядка; многотерминальные джозефсоновские структуры.

Вторая (основная) часть монографии посвящена результатам совместных исследований зарядовых и потоковых сверхпроводниковых кубитов немецкими учеными из Института фотонных технологий (г. Йена) и харьковскими учеными из ФТИНТ НАНУ.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### Квантовая механика

- Дирак П. А. М.* Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). Том III. Теоретическая физика. — М.: Физматлит, 2004.
- Бом Д.* Квантовая механика: основы и приложения. — М.: Мир, 1990.
- Peres A.* Quantum Theory: Concepts and Methods. — New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

### Квантовые компьютеры, квантовая информатика

- Прескилл Дж.* Квантовая информация и квантовые вычисления. — М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.
- Пенроуз Р.* Новый ум короля. — М.: УРСС, 2003.
- Ladd T. D., Jelezko F., Laflamme R., Nakamura Y., Monroe C., O'Brien J. L.* Quantum computers // *Nature* **464**, 45 (2010).
- Омельяничук А. Н., Оболенский М. А.* Квантовые компьютеры и джозефсоновские кубиты // Университеты: наука и просвещение. — 2005. — № 2. — С. 10—17; № 3. — С. 12—19.

### Квантовый мир. Парадокс ЭПР, неравенства Белла

- Bell J. S.* Speakable and unspeakable in quantum mechanics. — Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- Менский М. Б.* Человек и квантовый мир (странности квантового мира и тайна сознания). — М.: Век 2, 2005.
- Гринштейн Дж., Зайонц А.* Квантовый вызов. Современные исследования оснований квантовой механики. — М.: Интеллект, 2008.
- Schrodinger E.* The present situation in quantum mechanics. — A translation of Schrodinger's «Cat paradox paper», [www.tu-harburg.de/rzt/rzt/it/QM/cat.html](http://www.tu-harburg.de/rzt/rzt/it/QM/cat.html); Die gegenwartige Situation in der Quantenmechanik // *Naturwissenschaften*. — 1935. — N 23. — P. 807—812; 823—828; 844—849.

### Сверхпроводимость, эффект Джозефсона

- Шмидт В. В.* Введение в физику сверхпроводников. — М.: МЦНМО, 2000.

- Тинкхам М.* Введение в сверхпроводимость. — М.: Атомиздат, 1980.  
*Бароне А., Патерно Дж.* Эффект Джозефсона. — М.: Мир, 1984.  
*Лихарев К. К., Ульрих Б. Е.* Системы с джозефсоновскими контактами. — М.: МГУ, 1978.  
*Кулик И. О., Янсон И. К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. — М.: Наука, 1970.  
*Локтев В. М.* Лекції з фізики надпровідності. — К.: Наукова думка, 2008.  
*Golubov A. A., Kupriyanov M. Yu., Il'ichev E.* The current-phase relation in Josephson junctions//Rev. Mod. Phys. **76**, 411 (2004).

#### Макроскопические квантовые эффекты

- Leggett A. J.* Testing the limits of quantum mechanics: motivation, state of play, prospects//J. Phys.: Condens. Matter **14**, R415 (2002).  
*Leggett A. J.* The superposition principle in macroscopic systems//Proceedings of the International symposium «Foundations of quantum mechanics in the light of new technology», ed. by S. Kamefuchi, 1983.  
*Лихарев К. К.* Реально-квантовые макроскопические эффекты в слабой сверхпроводимости//УФН **139**, 169 (1983).

#### Джозефсоновские кубиты

- Wendin G., Shumeiko V. S.* Quantum bits with Josephson junctions // ФНТ **33**, 957 (2007).  
*Clarke J., Wilhelm F. K.* Superconducting quantum bits // Nature **453**, 1031 (2008).  
*You J. Q., Nori F.* Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits // Nature (London) **474**, 589 (2011).  
*Kolesnichenko Yu. A., Omelyanchouk A. N., Zagoskin A. M.* Spontaneous currents in Josephson junctions between unconventional superconductors and d-wave qubits // ФНТ **30**, 714 (2004).

## ЧАСТЬ II

# КВАНТОВЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КУБИТАХ

### ГЛАВА 3

---

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

### 3.1. ТЕХНОЛОГИЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ОБРАЗЦОВ

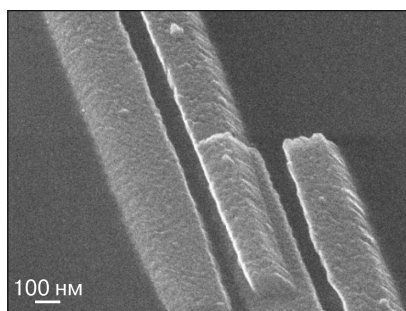
Как правило, для изготовления кубитов необходимы субмикронные джозефсоновские контакты. Одной из самых распространенных методик, позволяющей реализовать требуемые размеры, является так называемое «теневое напыление». Этот процесс можно условно разделить на два этапа.

1. Изготовление маски, необходимой для формирования структуры; для этой цели используют специально разработанные резисты.

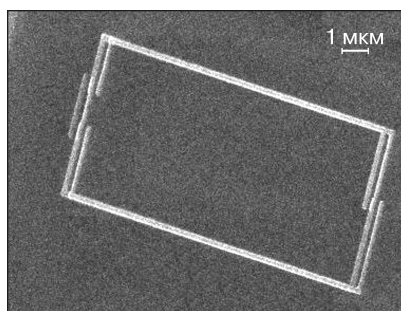
2. Собственно напыление и последующее удаление резиста.

Для изготовления структур с малыми размерами применяют электронную литографию, с помощью которой можно получать структуры с размерами в несколько десятков нанометров. В качестве чувствительного к электронному пучку резиста на практике, как правило, используется двухслойная структура из полиметилметакрилата (*polymethyl methacrylate* — РММА) и кополимера полиметилметакрилата и метакриловой кислоты (РММА + МАА). Преимущество таких полимеров состоит в том, что РММА растворяется в неполярных растворителях, в то время как РММА+МАА — в полярных (например, в алкоголе). Это свойство дает возможность обрабатывать их независимо. Чувствительность обоих резистов к электронному пучку разная, поэтому в результате облучения двухслойного образца и дальнейшей его химической обработки можно получить профиль в форме ниши с окошками, изображенный на рис. 3.1 (см. вклейку).

Формирование джозефсоновских контактов осуществляется напылением сверхпроводящего металла под одним углом, дальнейшим окислением в атмосфере кислорода с целью формирования туннельного барьера и напылением второго слоя сверхпроводника под противоположным углом.



**Рис. 3.2.** Микрограф джозефсоновского контакта, изготовленного теневым напылением. Изображение получено с помощью сканирующего электронного микроскопа [1]



**Рис. 3.3.** Изображение потокового кубита, полученное с помощью сканирующего электронного микроскопа

Наглядная схема процесса показана на рис. 3.1 (см. вклейку). Своеобразная форма резиста и не прямое осаждение металла приводят к тому, что джозефсоновский контакт не касается стенок резиста. Таким образом, в момент удаления резиста (*lift-off*) вероятность попутного удаления самого металла крайне мала.

Технологический процесс приготовления маски стандартен и состоит из следующих операций.

- **Приготовление диэлектрических слоев.** Сначала наносится слой РММА + МАА (3:1) резиста на кремниевую подложку. В нашем конкретном случае размеры чипа, содержащего катушки резонансного контура, были  $12 \times 12$  мм<sup>2</sup>. Чип раскручивается до скорости 5000 оборотов в секунду с ускорением  $200 \text{ об/с}^2$ . После 30-секундного вращения центрифуга останавливается и образец прогревается при температуре  $200^\circ\text{C}$  в течение 5 минут. В результате формируется однородный слой кополимера РММА + МАА толщиной 300 нм. Далее на чип наносится слой полимера РММА, раскручивается до скорости 4000 об/с с тем же самым ускорением  $200 \text{ об/с}^2$  и вращается в течение 30 секунд. За этим следует 5-минутное прогревание при температуре  $180^\circ\text{C}$ . Таким образом формируется второй слой полимера толщиной 70 нм.

- **Электронная литография.** Пучок сканирующего электронного микроскопа рисует дорожки на позитивном резисте, соответствующие форме образца (петля с тремя джозефсоновскими контактами. Пример такого контакта показан на рис. 3.2). Электронный пучок имеет диаметр 15 нм и ускоряется напряжением 20 кэВ. Характерная доза облучения составляет  $400 \text{ мкКл/см}^2$ .



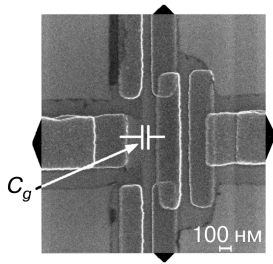


Рис. 3.4. Изображение зарядового кубита, полученное с помощью сканирующего электронного микроскопа [2]

- **Проявление.** Области позитивного резиста, облученные электронным пучком, удаляются в процессе проявления (*development*) структуры. Для этого чип помещается попеременно в полярные и неполярные растворители для последовательного развития обоих слоев РММА+ММА и РММА (в смесь метилизобутилкетона с изопропанолом МИБК:IPA (1:3) 30 с, далее в IPA 5 с, Ethanol+IPA (2:1) 1 мин, IPA 1 мин).

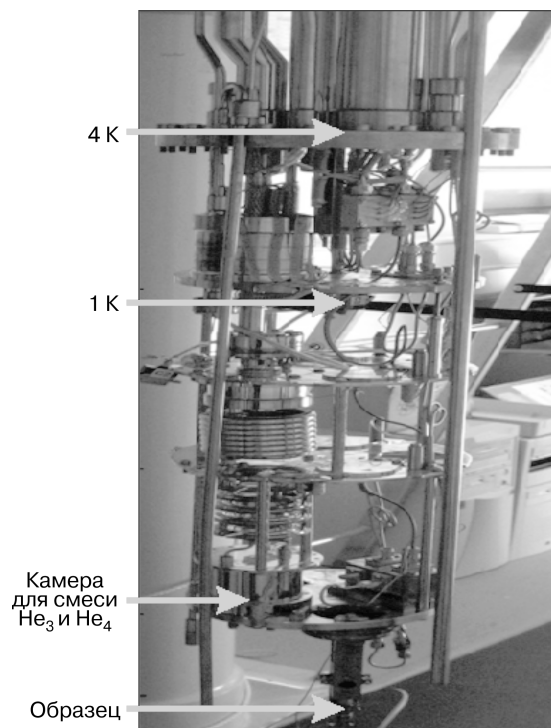
Вслед за изготовлением маски осуществляется теневое напыление алюминия по уже известному сценарию (см. рис. 3.1 на вклейке) слоями с толщинами 80 и 50 нм соответственно. После удаления маски в процессе lift-off получаем трехконтактный кубит, характерный вид которого показан на рис. 3.3. Таким же образом можно изготовить и зарядовый кубит, микрограф которого представлен на рис. 3.4.

Наличие дополнительных меток позволяет размещать кубит на чипе с точностью позиционирования 1 мкм, что оптимизирует связь с измерительным детектором. Отметим, что характерные размеры джозефсоновских контактов — 150—200 нм ширина и 150—600 нм длина (см. рис. 3.2). Тем не менее, легко изготавливаются контакты и с более маленькими размерами.

### 3.2. МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Как правило, процесс измерения в квантовой механике основан на противопоставлении макроскопического прибора и микроскопического объекта и описывается постулатом редукции (коллапса) волновой функции. Для недавно открытого нового типа макроскопических квантовых систем (таких систем, в которых реализуется когерентная суперпозиция макроскопических состояний) концепция противопоставления макроскопического прибора и микроскопического объекта должна быть пересмотрена. Действительно, в потоковом кубите, например, наблюдается когерентная суперпозиция между двумя состояниями с разными направлениями токов (по и против часовой стрелки). Поскольку как индуктивности кубита ( $L$  порядка нескольких десятков пикогенри), так и токи в его кольце ( $I$  порядка нескольких сотен

**Рис. 3.5.** Рефрижератор растворения. Образец находится в пермалоевом и сверхпроводящем экранах



наноампер) являются вполне макроскопическими величинами, то соответствующий магнитный момент составляет порядка миллиона магнетонов Бора, что вполне измеримо обычными магнитными датчиками, не требующими предельных чувствительностей.

С другой стороны, макроскопическая система сильно связана с окружением. Это окружение, как правило, диссипативно, что вызывает разрушение когерентной суперпозиции, называемой декогеренцией. Поэтому для таких систем температура должна быть ниже, чем характерные энергии кубитов,  $k_B T < \Delta$ . Как правило,  $\Delta$  составляет несколько гигагерц (в единицах частоты), что соответствует температурам ниже одного кельвина (энергия в 1 К равна 21 ГГц).

Для достижения низких температур используют рефрижераторы растворения (рис. 3.5), в которых номинальная температура достигает 6 мК, хотя температура образца, как правило, выше. Принцип работы такого криостата основан на откачке паров смеси  $\text{He}_3$  и  $\text{He}_4$ .

Достигнутые в настоящее время характерные времена когерентности сверхпроводящих кубитов составляют несколько микросекунд, что еще недостаточно для их применения в современных приборах обработки и передачи информации.

Для квантовой системы измерительный прибор является неотъемлемой частью окружения. Для того чтобы минимизировать влияние датчика на время когерентности сверхпроводящего кубита, датчики изготавливают из сверхпроводящих материалов. Вообще говоря, диссипация связана с наличием квазичастиц в окружении кубита, а их количество в сверхпроводниках экспоненциально мало при низких температурах.

Первые измерения сверхпроводящих кубитов — зарядового [3] и потокового [4] — были проведены с помощью так называемых датчиков переключения. Основная идея таких измерений состоит в следующем: на датчик (в случае потокового кубита это нешунтированный СКВИД, в случае зарядового кубита — джозефсоновский контакт) подается пробный импульс тока. Параметры импульса подобраны таким образом, чтобы напряжение на датчике зависело от состояния кубита. Например, если кубит находится в состоянии  $|1\rangle$ , то при измерении датчик переходит в состояние с конечным напряжением; если в состоянии  $|0\rangle$ , то при измерении напряжение на датчике остается нулевым. Если же кубит находится в когерентной суперпозиции состояний  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , то каждое состояние реализуется с определенной долей вероятности, как показано выше. Таким образом, измерения с помощью датчиков переключения относятся к проективным измерениям, обуславливающим редукцию волновой функции.

В 2002—2004 гг. был предложен иной способ контроля сверхпроводящих кубитов — **непрерывные слабые измерения**. Слабые непрерывные измерения кубита рассмотрены в следующей главе.

## ИЗМЕРЕНИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО КУБИТА

### 4.1. КЛАССИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР И АДИАБАТИЧЕСКОЕ ИЗМЕРЕНИЕ КУБИТА

Для реализации непрерывных слабых измерений было предложено получать информацию о поведении кубита с помощью высокочастотного колебательного контура, связанного с кубитом индуктивно. В этом параграфе сначала для простоты будем предполагать, что кубит находится в основном состоянии. Это, с одной стороны, позволяет описать систему с помощью простых физических величин, рассматривая эффективный лагранжиан резонансного контура. С другой стороны, результаты, изложенные в этом параграфе, были успешно использованы для описания реалистичных систем, реализованных экспериментально. Случай, когда кубит может находиться в суперпозиционном состоянии (т. е. с некоторой вероятностью в возбужденном состоянии), более подробно рассмотрен в следующей главе. Соответствующие экспериментальные результаты и применение теории для их описания представлены в последующих двух главах — для одиночных кубитов и системы связанных кубитов соответственно.

Контур, состоящий из параллельно соединенных емкости  $C_T$ , индуктивности  $L_T$  и эффективного сопротивления  $R_T$ , запитывается переменным током  $I_b(t)$  на частоте  $\omega_p$ , близкой к резонансной частоте контура  $\omega_T = 1/\sqrt{L_T C_T}$  (рис. 4.1).

Как правило, характерная частота кубита  $\Delta/h$  составляет порядка нескольких гигагерц и при температурах ниже 50 мК кубит находится в своем основном состоянии. Так как резонансная частота контура  $\omega_T$  на два порядка ниже (десяток мегагерц), то вероятность возбуждения кубита контуром экспоненциально мала.

Энергии основного и первого возбужденного состояний потокового 3JJ кубита (см. гл. 2) могут быть записаны следующим образом:

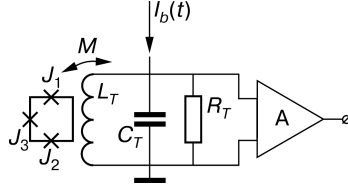


Рис. 4.1. Кубит, индуктивно связанный с резонансным контуром. Сигнал с контура считывается с помощью усилителя А [5]

$$E_{\pm}(\Phi) = \pm 2\sqrt{(I_p \Phi)^2 + \Delta^2}, \quad (4.1)$$

где  $\Phi = \Phi_{dc} + \Phi_{rf}$  и соответственно  $\Phi_{dc} = MI_{dc}$  и  $\Phi_{rf} = M\dot{q}$ ;  $I_{dc}$  — постоянный ток, протекающий через катушку резонансного контура;  $M$  — взаимная индуктивность;  $q$  — заряд на конденсаторе контура;  $\dot{q}$  — ток контура.

Рассмотрим случай, когда кубит находится в основном состоянии. (Более общий случай, когда кубит может находиться в суперпозиционном состоянии, будет рассмотрен в гл. 5 и 6.) Динамика системы контур—кубит описывается лагранжианом:

$$L = T - U = \frac{1}{2} L_T \dot{q}^2 + E_-(\Phi_{dc} + M\dot{q}) - \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_T}. \quad (4.2)$$

Соответствующее уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \left( L_T + M^2 \frac{\partial^2 E_-(\Phi_{dc} + M\dot{q})}{\partial \Phi^2} \right) \ddot{q} + \frac{q}{C_T} = 0. \quad (4.3)$$

Для малых амплитуд  $\dot{q}$  лагранжиан может быть упрощен разложением  $E_-(\dot{q})$  в ряд Тейлора в точке  $\Phi_{dc}$ . В результате получаем уравнение движения частицы в параболическом потенциале, лагранжиан которого хорошо известен:

$$L = \frac{1}{2} m^* \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k^* q^2, \quad (4.4)$$

где эффективная масса частицы записывается как

$$m^* = L_T + M^2 \frac{d^2 E_-(\Phi_{dc})}{d\Phi_{dc}^2}, \quad (4.5)$$

а  $k^* = 1/C_T$  — кривизна параболической потенциальной ямы. Таким образом, резонансная частота системы контур—кубит

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k^*}{m^*}} \approx \omega_T \left( 1 - \frac{M^2}{2L_T} \frac{d^2 E_-(\Phi_{dc})}{d\Phi_{dc}^2} \right) \quad (4.6)$$

содержит информацию о кривизне основного состояния кубита.

Использование уравнения

$$\frac{d^2 E_-(\Phi_{dc})}{d\Phi_{dc}^2} = -\frac{(I_p \Delta)^2}{(\varepsilon^2(\Phi_{dc}) + \Delta^2)^{3/2}} \quad (4.7)$$

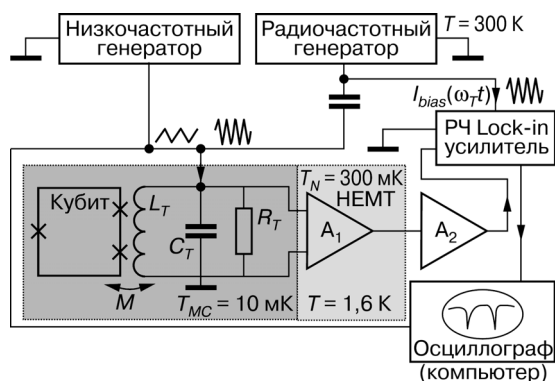
позволяет из сдвига резонансной частоты определить  $\Delta$  и  $I_p$ . Если  $\dot{q}$  не мало, то поправки к сдвигу частоты могут быть получены из уравнений гармонического баланса. На амплитуду и фазу осцилляций в резонансном контуре влияют как ток от внешнего генератора  $I_b(t)$ , так и среднее значение оператора тока  $I_q$  кубита. Более подробно этот вопрос рассмотрен в п. 5.2.

Физика, стоящая за этой алгеброй, довольно проста. Эффективная индуктивность системы контур—кубит, следовательно, и ее резонансная частота зависят от состояния кубита, которое контролируется внешним магнитным потоком  $\Phi_{dc}$ . Сдвиг резонансной частоты удобно контролировать по изменению фазового угла между током в контуре и напряжением на индуктивности. Как было показано выше, измерение фазового сдвига на контуре в зависимости от внешнего магнитного потока, приложенного к кубиту, позволяет экспериментально определить его параметры.

Пусть внешний магнитный поток кубита создается катушкой резонансного контура, при этом амплитуда переменной составляющей внешнего потока пренебрежимо мала. Постоянная составляющая магнитного потока близка к точке вырождения кубита  $\Phi_{dc} = \Phi_0/2$ . Будем медленно сканировать  $\Phi_{dc}$  от меньших значений к большим, проходя через точку  $\Phi_0/2$  и записывая тангенс фазового угла  $\delta$  резонансного контура. Если температура не превышает энергетическую щель  $\Delta$ , кубит все время будет оставаться на основном уровне  $E_-$ . С квантово-механической точки зрения система протуннелирует из одной потенциальной ямы в другую сквозь энергетический барьер. Таким образом, восстановим кривизну основного состояния кубита, из которой могут быть определены  $\Delta$  и  $I_q$ .

Схема измерений представлена на рис. 4.2. Резонансный контур запитывается радиочастотным (РЧ) и низкочастотным сигналами с помощью соответствующих генераторов (см. рис. 4.2). Низкочастотный сигнал служит для сканирования по  $\Phi_{dc}$ , радиочастотный — для измерения параметров контура.

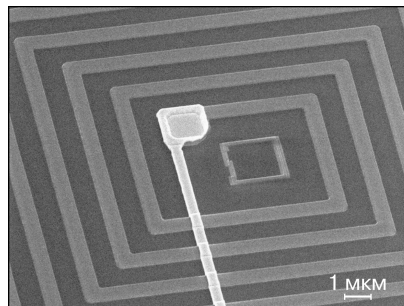
Образцы были изготовлены с помощью комбинированной ниобиево-алюминиевой технологии, описанной в предыдущей главе.



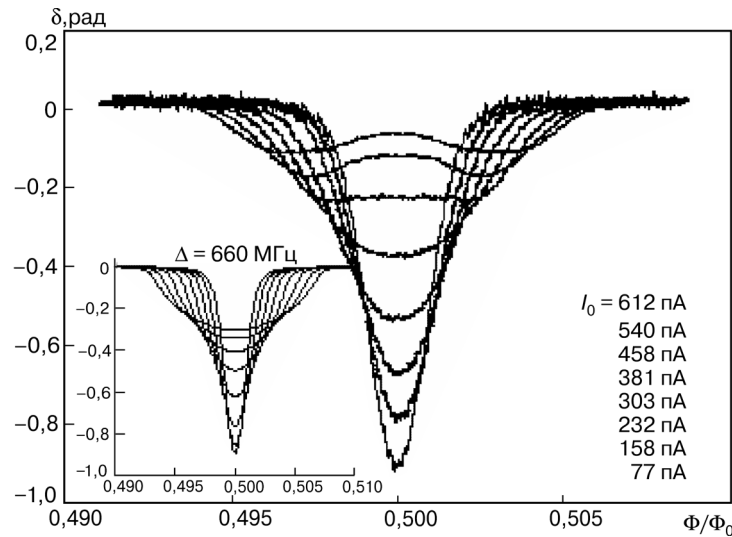
**Рис. 4.2.** Измерительная схема. Сигнал с резонансного контура, усиленный холодным усилителем  $A_1$  и комнатным  $A_2$ , поступает на ВЧ Lock-in усилитель, который определяет изменение как амплитуды, так и фазы радиочастотного сигнала

Пример такого образца показан на рис. 4.3. Для приготовления резонансного контура изготовлены ниобиевые катушки на окисленной силиконовой подложке. Маркировка подложки позволяет поместить кубит в центр катушки с достаточной точностью. Емкость  $C_T$  колебательного контура является внешней, что легко позволяет изменять резонансную частоту контура. Ширина линии в 20—150 витковых катушек варьировалась от 1 до 2 мкм с таким же расстоянием между соседними витками. Резонансные свойства контура определяли из его амплитудно-частотной характеристики: частота была в диапазоне 5—50 МГц, добротность — 300—2000.

Трехконтактный потоковый кубит, находящийся в центре катушки, был изготовлен из алюминия с помощью стандартного теневого напыления, описанного в гл. 3. В данном случае площадь двух одинаковых джозефсоновских контактов была оценена из измерений на электронном микроскопе и составляла  $190 \times 650 \text{ нм}^2$ . Площадь третьего контакта была на фактор  $\alpha = 0,8$  меньше. Площадь и индуктивность петли кубита равны, соответственно,  $90 \text{ мкм}^2$  и  $L \cong 40 \text{ пГ}$ . Критический ток был определен из измерений тест-структуры, приготовленной на том же самом чипе.



**Рис. 4.3.** Фотография исследуемого образца. В центре ниобиевой катушки резонансного контура расположен алюминиевый потоковый кубит [6]

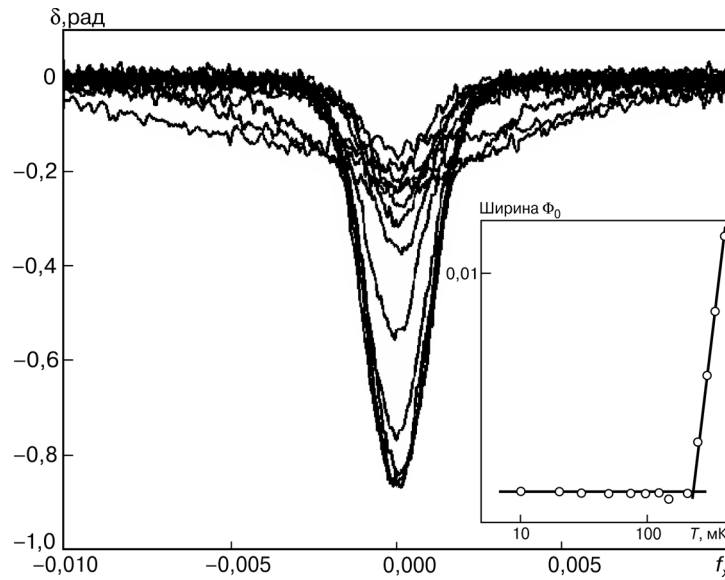


**Рис. 4.4.** Фазовый сдвиг сигнала с резонансного контура в зависимости от внешнего потока вблизи точки вырождения. От нижней кривой к верхней (при  $\Phi_{dc} = 0$ ) напряжение на контуре  $V$  принимает значения 0,5; 1,0; 1,5; 1,9; 2,9; 3,5; 3,9 мкВ. На вставке показаны теоретические кривые для  $\Delta/h = 650$  МГц и  $I_0 = 0,07; 0,13; 0,20; 0,26; 0,39; 0,47; 0,53$  нА [7]

Кривые  $\delta(\Phi_{dc})$ , измеренные при различных амплитудах переменного тока  $I_0$  и номинальной температуре  $T = 10$  мК, показаны на рис. 4.4. Их форма находится в полном согласии с качественным представлением, полученным из уравнений (4.6). Все экспериментальные параметры для этих уравнений известны, и  $\Delta$  является подгоночным параметром. Результаты подгонки для  $\Delta/h = 650$  МГц приведены на вставке к рис. 4.4. Отметим, что для больших значений  $I_0$  экспериментальные и теоретические кривые не согласуются, поскольку для таких амплитуд тока смещения между энергетическими зонами кубита индуцируются переходы Ландау—Зинера, которые и подавляют наблюдаемый минимум.

Зависимость отклика от температуры  $T$  показана на рис. 4.5. С увеличением температуры амплитуда минимума уменьшается, в то время как его ширина остается неизменной, что доказывает ожидаемую независимость туннельного матричного элемента от температуры. Для больших значений температур минимум размывается, и его ширина увеличивается, начиная с температуры перехода, которая в данном эксперименте составляет 225 мК.





**Рис. 4.5.** Фазовый сдвиг резонансного контура в зависимости от внешнего потока вблизи точки вырождения для напряжения на контуре  $V = 0,5$  мкВ. От нижней кривой к верхней (при  $\Phi_{dc} = 0$ ) температура принимает значения 10, 20, 30, 50, 75, 100, 125, 150, 200, 250, 300, 350, 400 мК. На вставке показана зависимость ширины провала фазового сдвига от температуры [7]

Для температур такого диапазона кубит уже не описывается только основным состоянием — становится важной суперпозиция состояний (см. теоретическое описание этого результата далее, результаты вычислений представлены на рис. 6.1 на вклейке).

## 4.2. ПРЯМОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИЙ РАБИ

Из курса квантовой механики известно, что облучение двухуровневой системы на частоте, близкой к резонансной, вызывает осцилляции вероятности заселенности ее уровней. Эти колебания (называемые колебаниями Раби) детектируются, как правило, с помощью статистического анализа отклика системы на проекционный импульс. Процедура измерения состоит в следующем. Сначала квантовая система инициализируется в одном из своих состояний (обычно это основное состояние). Затем во время  $t = 0$  возбуждаются осцилляции Раби. Через время  $\Delta t$  происходит измерение состояния системы. При каждом  $\Delta t \in (0, T)$

измерения проводят много раз для надежного установления среднего значения заселенности. Результирующая кривая представляет собой затухающую гармоническую кривую. Характерное время затухания называется временем декогеренции кубита.

Высокочастотное возмущение  $f(t) = f_{ac} \sin \omega t$  вызывает переходы между уровнями кубита, в результате чего волновая функция системы становится суперпозицией состояний  $\Psi_+$  и  $\Psi_-$ :  $\Psi(t) = C_+(t)\Psi_+ + C_-(t)\Psi_-$ . Коэффициенты  $C_{\pm}(t)$  находят из решения нестационарного уравнения Шредингера.

Пусть перед возбуждением система находилась на основном уровне, тогда начальные условия есть  $C_-(t=0) = 1$ ,  $C_+(t=0) = 0$ . Соответствующее решение уравнения Шредингера для коэффициентов  $C_{\pm}(t)$  легко определить в так называемом приближении вращающейся волны [8]:

$$\begin{aligned} C_-(t) &= e^{-i\frac{E_-}{\hbar}t} e^{i\frac{\omega-\omega_0}{2}t} \left[ \cos \Omega t - i \frac{\omega-\omega_0}{2\Omega} \sin \Omega t \right], \\ C_+(t) &= e^{-i\frac{E_+}{\hbar}t} e^{-i\frac{\omega-\omega_0}{2}t} \left( -i \frac{\Omega_R}{\Omega} \right) \sin \Omega t, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где  $\hbar\omega_0 = \Delta E = E_+ - E_-$ ,  $\Omega_R = \frac{|\langle \Psi_+ | V | \Psi_- \rangle|}{2\hbar}$ ,  $\Omega = \sqrt{\frac{(\omega-\omega_0)^2}{4} + \Omega_R^2}$ . В резонансе  $\omega = \omega_0$  получаем  $\Omega = \Omega_R$ . Частоту Раби также легко определить по формуле

$$\Omega_R = \frac{E_J}{\hbar} f_{ac} |\lambda(\alpha)| \frac{\Delta}{\hbar\omega_0}. \quad (4.9)$$

С такой частотой происходят переходы между уровнями кубита под воздействием внешнего облучения.

Теперь опишем динамику кубита. Для нахождения тока в петле кубита при осцилляциях Раби усредним оператор тока по состоянию  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} I_q &= \langle \Psi(t) | \hat{I}_q | \Psi(t) \rangle = |C_+(t)|^2 \langle \Psi_+ | \hat{I}_q | \Psi_+ \rangle + \\ &+ |C_-(t)|^2 \langle \Psi_- | \hat{I}_q | \Psi_- \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из этого выражения получаем средний ток кубита при нулевой температуре  $T = 0$ :

$$I_q = -I_C f \frac{\lambda^2(\alpha)}{\pi} \frac{E_J}{\hbar\omega_0} \cos 2\Omega_R t. \quad (4.11)$$

При конечной температуре вычисление тока в петле кубита в присутствии облучения основано на решении уравнения для матрицы плотности  $\rho$ ,

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [ (H_0 + H_{int}(t)), \rho(t) ], \quad (4.12)$$

с начальными условиями в термическом равновесии:  $\rho_{++}(0) = \rho_{++}^{eq}$ ;  $\rho_{--}(0) = \rho_{--}^{eq}$ ;  $\rho_{+-}(0) = \rho_{-+}(0) = 0$ , где  $\rho_{++}^{eq}$ ,  $\rho_{--}^{eq}$  — равновесные элементы матрицы плотности:

$$\rho_{++}^{eq} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_+}{k_B T}}, \rho_{--}^{eq} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_-}{k_B T}}, Z = e^{-\frac{E_+}{k_B T}} + e^{-\frac{E_-}{k_B T}}. \quad (4.13)$$

Диагональные элементы матрицы плотности определяют так:

$$\rho_{--}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} \cos 2\Omega_R t, \rho_{++}(t) = 1 - \rho_{--}(t). \quad (4.14)$$

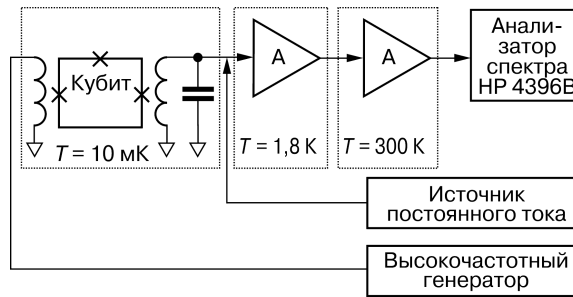
Таким образом, при конечной температуре средний ток в петле кубита при его резонансном облучении записывается как

$$\begin{aligned} I_q &= \langle \Psi_+ | \hat{I}_q | \Psi_+ \rangle \rho_{++}(t) + \langle \Psi_- | \hat{I}_q | \Psi_- \rangle \rho_{--}(t) = \\ &= -I_c \frac{E_J f \lambda^2(\alpha)}{\pi \hbar \omega_0} \tanh \left( \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} \right) \cos 2\Omega_R t. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Из приведенных выражений можно оценить частоту Раби для экспериментально полученных параметров кубита:  $I_c = 400$  нА,  $\Delta/h = 0,3$  ГГц,  $\alpha = 0,8$ ,  $L = 15$  пГ,  $E_J/E_C = 100$ .

Для оценок амплитуду высокочастотного поля положим равной  $10^{-4}\Phi_0$ . Поскольку в точке вырождения  $\varepsilon = 0$  средний ток в кольце кубита равен нулю, сдвинемся от этой величины на  $\Delta\varepsilon = 3,5 \times 10^{-4}\Phi_0$ . Следовательно,  $\hbar\omega_0 = 2\sqrt{2}\Delta$ ,  $\omega_0/2\pi = 0,85$  ГГц, а частота Раби  $\Omega_R/2\pi = 32$  МГц. Таким образом, изменением амплитуды внешнего ВЧ поля и соответствующей подстройкой внешнего магнитного потока частоту Раби можно сделать сравнимой с резонансной частотой контура. На этой идее и основано детектирование фотонов Раби колебательным контуром.

Вообще говоря, амплитуда осцилляций Раби уменьшается экспоненциально со временем после приложения к системе резонансного электромагнитного поля. Тем не менее, системные корреляции будут существовать так долго, как долго электромагнитное поле включено, и свидетельство об осцилляциях Раби может быть найдено из автокорреляционной функции или ее фурье-

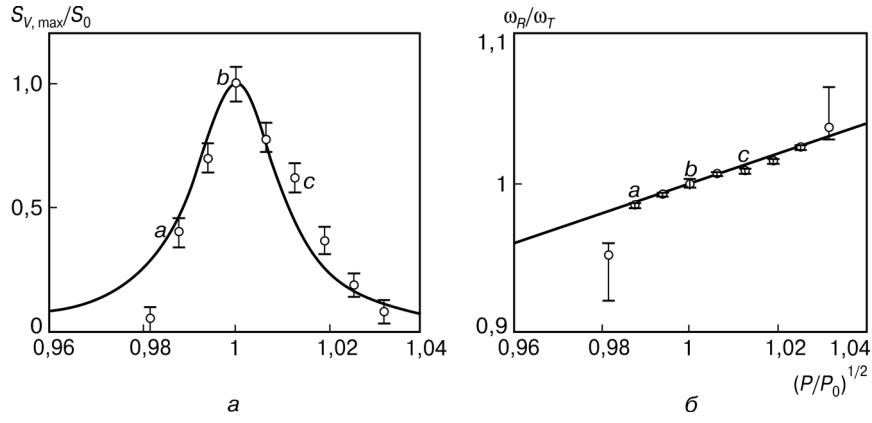


**Рис. 4.6.** Схема измерений для спектроскопии Раби. Кубит индуктивно связан с резонансным контуром. Источник постоянного тока создает постоянный магнитный поток через кубит. Генератор высокочастотного поля посылает электромагнитную волну в кубит через дополнительную катушку. Частота волны совпадает с расстоянием между энергетическими уровнями кубита. Выходное напряжение (на резонансной частоте контура) измеряется как функция амплитуды радиочастотного поля

образа (спектральной плотности). В случае, когда кубит связан с колебательным контуром, спектральная плотность флуктуаций напряжения  $S_v$  на контуре должна возрасти по отношению к фоновому шуму, если частота Раби совпадает с резонансной частотой контура. Эту процедуру мы назвали спектроскопией Раби.

Такой подход имеет сходство с экспериментами на ридберговских атомах и микроволновых фотонах в резонаторе [9]. Резонансный контур при этом используется одновременно как чувствительный детектор осцилляций Раби в кубите и фильтр, защищающий его от шумов внешних контуров (рис. 4.6). Далее напряжение на резонансном контуре усиливается и измеряется с помощью анализатора спектра.

Для измерения спектральной амплитуды напряжения  $S_v$  высокочастотный сигнал настроен в резонанс с кубитом. Значительное увеличение шумов на контуре наблюдалось, когда частота резонансного электромагнитного поля составляла 868 МГц, что согласуется с оценками расщепления в кубите. Важно отметить, что частота кубита и резонансная частота контура различаются на два порядка. Вместе с высокой добротностью контура  $Q_T$  это позволяет сделать вывод, что измеряемый сигнал может быть обусловлен только резонансными переходами в самом кубите. Это утверждение было проверено измерением  $S_v$  при изменении постоянного внешнего магнитного потока. Сигнал, превышающий фоновый шум, зарегистрирован только тогда, когда кубит находился вблизи точки вырождения. Измерения были



**Рис. 4.8.** Сравнение экспериментальных и теоретических данных (а). Буквы на рисунке соответствуют тем же самым значениям интенсивностей, что и на рис. 4.7 на вклейке; зависимость частоты Раби от приложенной амплитуды высокочастотного поля (б). Прямая линия — теоретически ожидаемая зависимость

$$\omega_R / \omega_T = \sqrt{P/P_0} \quad [10]$$

выполнены при базовой температуре  $T = 10$  мК. Эффект пропал при температуре 40 мК, что ожидаемо, поскольку при 40 мК  $k_B/h$  составляет примерно 800 МГц.

На рис. 4.7 (см. вклейку) построены графики изменения  $S_v$  при различных интенсивностях  $P$  высокочастотного поля. Если  $P$  возрастает, то частота Раби также увеличивается и проходит через частоту резонансного контура, обуславливая немонотонную зависимость максимального сигнала от интенсивности  $P$ , как и ожидалось.

Для количественного сравнения теоретических и экспериментальных данных вычтен фоновый шум (в отсутствии высокочастотного облучающего поля) из наблюдаемой спектральной плотности. На рис. 4.8 приведены максимальные значения  $S_{v,max}$  в зависимости от частоты высокочастотного поля. На том же рисунке построены теоретические кривые для  $S_{v,max}$ , нормированные на собственный максимум  $S_0$ :

$$\frac{S_{v,max}(w)}{S_0} = \frac{w^2 g^2}{(w^2 - 1)^2 + g^2} \approx \frac{(g/2)^2}{(w - 1)^2 + (g/2)^2}, \quad (4.16)$$

где  $g = \Gamma / \omega_T$ . Лучшее совпадение значений найдено для  $\Gamma \approx 0,02\omega_T \sim 8 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

Таким образом, оценка времени жизни осцилляций Раби —  $\tau_{\text{Раби}} \sim 2,5$  микросекунды. Более того, была также получена ожидаемая линейная зависимость частоты осцилляций Раби от амплитуды резонансного сигнала (см. рис. 4.8, б).

### 4.3. «ЭФФЕКТ СИЗИФА»

Как известно, одним из стандартных методов изучения квантовых систем является спектроскопия. В рамках этого метода система облучается внешним электромагнитным полем. Когда частота внешнего сигнала  $\omega$  имеет значение, приблизительно равное расстоянию между энергетическими уровнями системы  $\Delta E/\hbar$ , система, с конечной вероятностью, возбуждается и это возбуждение детектируется.

Естественно, что первыми экспериментами с потоковыми кубитами и была их спектроскопия. Здесь изучалась зависимость энергетической щели  $\Delta$  от приложенного магнитного потока с использованием нешунтированного СКВИД постоянного тока в качестве детектора [4].

Кроме того, резонансный контур может быть также использован как датчик для спектроскопии кубита. В этом случае механизм отклика датчика представляет отдельный интерес, поэтому остановимся на нем подробнее [11].

Взаимодействие резонансного контура и кубита в присутствии высокочастотного поля показано на рис. 4.9 (см. вставку). Кубит (см. вставку на рисунке — замкнутый контур с тремя контактами) здесь представлен двумя энергетическими уровнями, разнесенными согласно  $\Delta E(f_x) = \sqrt{\varepsilon^2(f_x) + \Delta^2}$ . Внешний электромагнитный сигнал с частотой  $\omega$  обуславливает переход между энергетическими уровнями кубита вблизи точки  $\Delta E(f_{x1}) = \hbar \omega$ . Колебания тока резонансного контура приводят к колебаниям  $\varepsilon(f_x)$  вокруг точки  $\varepsilon(f_{DC})$  в основном состоянии кубита, определенной  $DC$ -компонентой внешнего потока.

Предположим, что эта точка расположена на основном состоянии кубита так, что колебания тока резонансного контура достаточны, чтобы перевести основное состояние кубита в точку, определяемую выражением  $\Delta E(f_{x1}) = \hbar \omega$ . Тогда может произойти возбуждение кубита. Если точка  $\varepsilon(f_{DC})$  выбрана таким образом, что  $\Delta E(f_{DC}) > \hbar \omega$ , то такая расстройка называется «голубой» (*blue detuning*), и имеет место так называемый охлаждающий

«сизифов цикл». В первой части этого цикла кубит находится в основном состоянии и низкочастотный поток резонансного контура перемещает кубит к резонансу, где  $\Delta E = \hbar \omega$ . Здесь энергия кубита возрастает за счет работы, проделанной  $LC$  контуром. Как только система оказывается вблизи точки резонанса, кубит может перейти в возбужденное состояние за счет внешнего электромагнитного сигнала  $\omega$ . Для оптимальных параметров это происходит при повороте колебаний, вызванных контуром.

Таким образом, кубит в возбужденном состоянии выходит из резонансной области. Во время этого процесса энергия кубита продолжает возрастать снова за счет работы, выполненной  $LC$  контуром. Цикл заканчивается процессом релаксации в основное состояние кубита с рассеиванием энергии в окружающую среду.

Максимальный эффект охлаждения достигается, когда резонансная частота контура  $\omega_T$  и обратное время релаксации имеют тот же порядок величины так, чтобы релаксация происходила в месте, близком к другой поворотной точке. Если релаксация  $\Gamma_R$  является слишком медленной, то возбужденное состояние кубита изменяется адиабатически во время многих периодов резонатора, «замывая» эффект охлаждения. Когда релаксация происходит слишком быстро, то разность энергий между точкой резонанса и точкой релаксации становится меньше, тем самым уменьшая эффект охлаждения за цикл. Таким образом, как в основном, так и в возбужденном состоянии резонансный контур увеличивает энергию кубита адиабатически. Естественно, при этом контур теряет энергию, т. е. охлаждается.

Если изменить знак расстройки так, что  $\Delta E(f_{DC}) < \hbar \omega$  (такая расстройка называется «красной» — *red detuning*), то эффект взаимодействия кубит—контур приводит к нагреванию резонатора.

Описанный физический процесс получил название «сизифова охлаждения (нагрева)», поскольку напоминает древнегреческую легенду, когда наказанный богами Сизиф должен был закатить на гору тяжелый камень, который, едва достигнув вершины, каждый раз скатывался вниз. При красной расстройке «счастливый Сизиф» всегда катит камень под гору.

Таким образом, если проводить измерение, описанное в п. 4.1, в присутствии резонансного возбуждения, то вблизи резонанса ожидается изменение добротности контура. Проанализируем отклик системы контур—кубит в этом случае.

Резонансный  $LC$  контур запитывается переменным током с частотой, близкой к  $\omega_T$ , и амплитудой  $I_T$ . Тогда в резонансе амплитуду колебаний напряжения  $V_T$  записывают так:

$$V_T = \omega_T L_T I_T = Q_T \omega_T L_T I_{Td}, \quad (4.17)$$

где  $I_T = Q_{\text{tank}} I_{Td}$  — амплитуда колебаний тока в контуре;  $Q_T$  — эффективная добротность контура, которая определяется отношением  $Q_T = 2\pi W_T / A$  между энергией контура  $W_T = L_T I_T^2 / 2$  и ее потерями за период  $A$ . Последний состоит из двух вкладов:  $A = A_T + A_{\text{sis}}$ . Внутренние потери контура записываются как  $A_T = 2\pi W_T / Q_0$ , где  $Q_0$  — добротность ненагруженного контура.

Для того чтобы оценить среднюю работу, проделанную контуром над кубитом за один период, рассмотрим оптимальную ситуацию, когда осциллятор приводит кубит в резонанс в поворотной точке его траектории (см. рис. 4.9 на вклейке). Полагая далее, что состояние кубита мгновенно «термализуется»: с равными вероятностями остаться в основном состоянии или перейти в возбужденное. В последнем случае, после выхода из области резонанса, кубит релаксирует на основное состояние. Вероятность этого процесса в интервале  $dt$  за время  $0 < t < T$  (здесь  $T = 2\pi/\omega_T$ ) задана выражением  $dP = \exp(-\Gamma_R t) \Gamma_R dt$ . Учитывая, что сизифова работа осциллятора выражается как  $2MI_p I_T [1 - \cos(\omega_T t)]$ , получаем среднюю работу контура за период:

$$A_{\text{sis}} = MI_p I_T \int dP [1 - \cos(\omega_T t)] = MI_p I_T f(\Gamma_R / \omega_T), \quad (4.18)$$

где

$$f(\Gamma_R / \omega_T) \equiv \frac{1 - e^{-2\pi\Gamma_R/\omega_T}}{1 + (\Gamma_R / \omega_T)^2}. \quad (4.19)$$

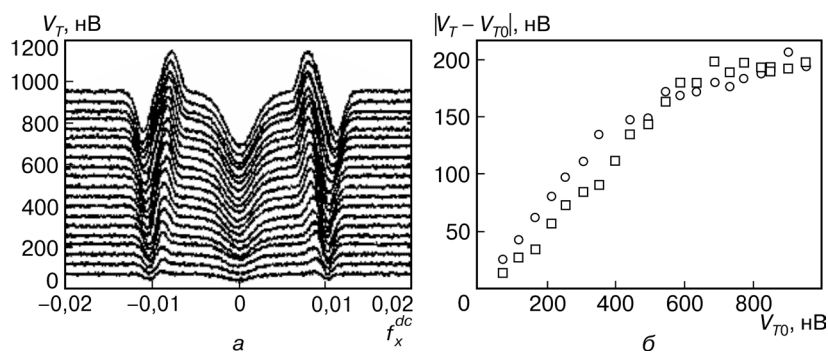
Эта функция имеет максимум при  $\Gamma_R = 0,37$ , показывая, что оптимум для охлаждения (нагрева) достигается при  $1/\Gamma_R = 0,43 T$ . Далее, для эффективной добротности получаем

$$Q = Q_0 \left( 1 \pm \frac{A_{\text{sis}} Q_0}{2\pi W_T} \right)^{-1} = Q_0 \left( 1 \pm \frac{MI_p Q_0 \omega_T f(\Gamma_R, \omega_T)}{\pi V_T} \right)^{-1}, \quad (4.20)$$

где знак плюс соответствует охлаждению, а минус — нагреву. Подставляя это выражение в уравнение (4.17), записываем

$$V_T - V_{T0} = \mp M \omega_T I_p Q_0 f(\Gamma_R, \omega_T) / \pi, \quad (4.21)$$





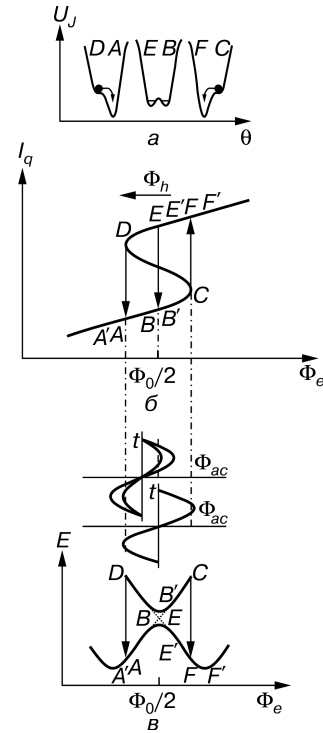
**Рис. 4.10.** Амплитуда радиочастотного напряжения на контуре как функция магнитного потока в петле кубита для внешнего электромагнитного сигнала с частотой  $\nu = 14,125$  ГГц и при разных амплитудах радиочастотного тока на контуре (а); высота пиков (квадраты) и амплитуда провалов (круги) как функция амплитуды напряжения на контуре  $V_{T0}$  (б) [11]

где  $V_{T0} = Q_0 \omega_T L_T I_{Td}$  — напряжение на контуре вне резонанса. С помощью этого уравнения можно оценить изменение напряжения на контуре вблизи резонанса для относительно большой амплитуды тока контура: в основном кубит находится вне резонансной области. При уменьшении амплитуды тока, когда времена нахождения вне и в резонансной области становятся сравнимыми, изменение напряжения уменьшается (рис. 4.10).

#### 4.4. ЭФФЕКТ ЛАНДАУ—ЗИНЕРА

Суть эффекта Ландау—Зинера состоит в следующем. Предположим, что есть некоторая двухуровневая система такая, что расстояние между основным и первым возбужденным состояниями является функцией внешнего параметра. В частности, для потокового кубита этим параметром является магнитный поток через петлю кубита. Как показано ранее, зависимость расстояния между уровнями от потока — немонотонная функция с минимумом в точке вырождения. Допустим, что система в основном состоянии достаточно далеко от точки вырождения. Стартуя с этой точки, будем постепенно изменять поток через кольцо кубита. Оказывается, что при прохождении через точку вырождения существует отличная от нуля вероятность перехода системы на возбужденный уровень. Иными словами, кубит остается в начальном «классическом» состоянии вместо адиабатического эволюционирования вдоль

**Рис. 4.11.** Зависимости: *a* — джозефсоновской энергии от фазы  $\theta$  вдоль траектории, проходящей через седловую точку. Графики приведены для трех значений внешнего потока через кубит; *б* — тока кубита от внешнего магнитного потока. Для «классического кубита» внешний переменный поток  $\Phi_{ac}$  (нижний синус) центрирован относительно точки вырождения  $\Phi_e = \Phi_0/2$  и реализуются два «скачка» потока вдоль *DA* и *CF* траекторий, приводящие к потерям энергии в кубите. Если амплитуда потока накачки контура меньше  $\Phi_h$ , то возможен только один «классический скачок» (вдоль *DA* или *CF*), который может быть замкнут только «квантовой» траекторией *BE*. Тогда амплитуда потока накачки контура должна быть не меньше  $\Phi_h/2$  (верхний синус); *в* — энергетических квантовых уровней кубита от внешнего потока [13]



основного состояния системы. Такие переходы называют переходами Ландау–Зинера. Впервые они рассматривались применительно к неупругому столкновению атомов [12]. Покажем, что подобные явления наблюдаются и в сверхпроводящем потоковом кубите [13].

Как и в предыдущих случаях, детектором будет служить высокочастотный резонансный контур. Для того чтобы лучше понять принцип детектирования, рассмотрим рис. 4.11. Допустим, что барьер между двумя токовыми состояниями кубита достаточно большой и вероятность квантового туннелирования между ними пренебрежимо мала. Это означает, что траектория *EBE* (см. рис. 4.11, *a*, *б*) запрещена. Такое устройство, состоящее из «классического кубита», индуктивно связанного с резонансным контуром, хорошо известно и называется радиочастотным СКВИД. Проанализируем качественно принцип работы такого СКВИД.

Зависимость тока в кубите от внешнего потока (см. рис. 4.11) является гистерезисной. В присутствии внешнего потока  $\Phi_e(t) = \Phi_{dc} + \Phi_{ac} \cos(2\pi\nu t)$ , обусловленного резонансным контуром, с амплитудой  $\Phi_{ac} > \Phi_h$ , равной половине гистерезисной петли *ACFD* (см. рис. 4.11, *б*), резонансный контур будет детектировать потери, пропорциональные площади этой петли, до тех пор, пока выполняется неравенство:  $|\Phi_{dc} - \Phi_0/2| < \Phi_{ac} - \Phi_h$ . Эти поте-

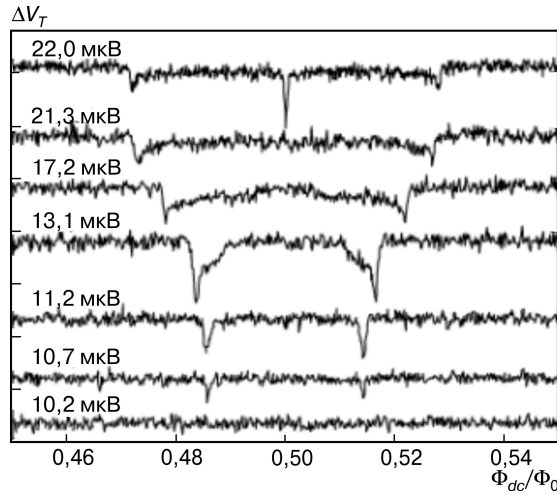
ри возникают вследствие «скачков» между токовыми состояниями кубита.

Если  $|\Phi_{dc} - \Phi_0/2| > \Phi_{ac} - \Phi_h$ , то классическая гистерезисная петля незамкнута. Потери, тем не менее, возможны из-за квантового туннелирования. Тогда охватывается площадь, равная половине «классического» гистерезиса, например, вдоль траектории  $A'BEE'DAA'$  на рис. 4.11, б для  $\Phi_{dc} < \Phi_0/2$ . При этом реализуются следующие процессы: туннелирование потока (траектория  $BE$ ), переход Ландау—Зинера (в точке  $E$  вдоль  $E'D$ ) и «классический скачок» (траектория  $DA$ ). В этом частном случае переход Ландау—Зинера препятствует обратному туннелированию вдоль траектории  $E'EBA$ , оставляя систему в классическом метастабильном состоянии (пунктирные линии на рис. 4.11, в). Порядок макроскопического туннелирования и перехода Ландау—Зинера может быть изменен — эволюция вдоль траектории  $A'B'BEDAA'$  наглядно это демонстрирует. Аналогичные процессы, включающие вторую половину  $FEBC$  гистерезисной петли, имеют место для  $\Phi_{dc} > \Phi_0/2$ . Таким образом, эти «квантовые» гистерезисные петли могут быть замкнуты и соответствующие потери измерены, если  $\Phi_h - \Phi_{ac} < |\Phi_{dc} - \Phi_0/2| < \Phi_{ac}$ . Для меньших амплитуд  $\Phi_{ac} > \Phi_h/2$  потери, вызванные описанным механизмом, невозможны.

Однако, для того чтобы замкнуть квантовую гистерезисную петлю по любой траектории, обязательно должен произойти переход Ландау—Зинера и макроскопическое квантовое туннелирование. Это означает, что вероятности туннелирования  $P_T$  и перехода Ландау—Зинера  $P_{ЛЗ}$  должны быть сравнимы. Действительно, если  $P_T \gg P_{ЛЗ}$ , то имеем адиабатическую эволюцию, описанную в п. 4.1, в случае  $P_T \ll P_{ЛЗ}$  — отклик чисто классический, подобный отклику радиочастотного СКВИД (см. выше).

Итак, подытожим наши рассуждения. Для детектирования отклика с «квантовых» петель мы измеряем напряжение на контуре в зависимости от  $\Phi_{dc}$  при различных амплитудах  $\Phi_{ac}$ . При этом ожидается, что:

1.  $\Phi_{ac} < \Phi_h/2$ . В этом случае  $V_T(\Phi_{dc}) = \text{const}$ .
2.  $\Phi_h/2 < \Phi_{ac} < \Phi_h$ . На  $V_T(\Phi_{dc})$  появляются два провала, симметричные относительно точки  $\Phi_{dc} = \Phi_0/2$ .
3.  $\Phi_{ac} > \Phi_h$ . Дополнительно к двум провалам появляется третий при  $\Phi_{dc} = \Phi_0/2$ , соответствующий классическому гистерезису.



**Рис. 4.12.** Зависимость амплитуды напряжения на контуре от внешнего потока вблизи точки вырождения  $\Phi_{dc} = \Phi_0/2$  при различных амплитудах радиочастотного тока. Соответствующие напряжения указаны над кривыми. Расстояние между штрихами на вертикальной оси соответствует 0,1 мкВ [13]

Как показывают теоретические расчеты, если отношение  $E_J/E_C$  порядка  $10^2$ , то кубит ведет себя квазиклассически: существует конечная вероятность туннелирования между токовыми состояниями кубита, при этом в основном кубит находится в одном из своих классических состояний. Только у такого кубита можно ожидать предсказанные выше характеристики.

Экспериментальные результаты для кубита с  $E_J/E_C \cong 10^2$  и  $\alpha = 0,9$  при малых амплитудах радиочастотного напряжения на контуре  $\Delta V_T$  приведены на рис. 4.12. Два квантовых провала появляются вблизи  $\Delta V_T = 10,7$  мкВ и последовательно удаляются друг относительно друга. При меньших значениях напряжения диссипативный отклик не был обнаружен. Как и ожидалось, расстояние между провалами изменяется пропорционально амплитуде напряжения смещения резонансного контура. Более того, классический провал появляется в центре при амплитуде напряжения смещения вдвое большей, чем 10,7 мкВ (см. рис. 4.12).

Очевидно, что при увеличении  $\Delta$  вероятность  $P_{ЛЗ}$  уменьшается. Для количественной оценки  $P_{ЛЗ}$  необходимо проанализировать динамику двухуровневой системы в присутствии внешнего сигнала  $W(t)$ . Как известно, в естественном базисе гамильтониан

такой системы вблизи точки вырождения записывают в виде  $H(t) = -\frac{1}{2}\varepsilon(t)\sigma_z - \frac{1}{2}\Delta\sigma_x$ . В простейшем случае внешний сигнал можно рассмотреть в линейном приближении  $W(t) = \nu t$ . В этом случае мгновенные собственные состояния гамильтониана соответствуют энергиям  $\pm\Omega(t) \equiv \pm\frac{1}{2}\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon(t)^2} \approx \pm\nu|t|$  при  $t \rightarrow \infty$ , а вероятность переходов Ландау—Зинера может быть определена точно  $P_{\text{ЛЗ}} = \exp(-\pi\Delta^2 / 4\hbar\nu)$ .

При изучении взаимодействия двухуровневой системы с электромагнитным полем линейный внешний сигнал должен быть заменен на гармонический. Тогда система периодически проходит через точку вырождения и возможные траектории с фазами, зависящими от внешних параметров, могут интерферировать между собой. Более подробно об этом см. в гл. 6.

## ПОЛУКЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СИСТЕМЫ КУБИТ—РЕЗОНАТОР

В предыдущей главе приведены результаты для системы кубит—резонатор. Теория, рассмотренная в главе 4, описывает главным образом ситуацию, когда кубит находится в одном из возможных состояний — основном или возбужденном. Как было обсуждено в Ч. I, важна и интересна также ситуация, когда кубит может находиться в суперпозиционном состоянии. Это происходит, например, из-за температурного возбуждения или вследствие высокочастотного (микроволнового) возбуждения.

Система кубит—резонатор аналогична одной из основных систем квантовой оптики — атому в электромагнитном поле. Важно отметить, что большое количество эффектов для этой системы описывается полуклассической теорией, в которой атом рассматривают как дискретную квантовую систему, а поле полагают классическим [14]. Примечательно, что многие суперпозиционные эффекты для системы кубит—резонатор также могут быть описаны полуклассической теорией. Такая теория представлена в этой главе, а в последующих двух главах она использована для описания наблюдений суперпозиционных (возбужденных) состояний одно- и двухкубитных систем соответственно.

Итак, в этой главе рассмотрена система, состоящая из кубита, связанного с резонатором. Показано, что в полуклассическом подходе влияние кубита на резонатор может быть описано путем введения эквивалентных коэффициента упругости и коэффициента затухания, которые зависят от состояния кубита. Аналогично в случае индуктивной или емкостной связи влияние кубита на резонатор может быть описано путем введения зависящей от состояния кубита эффективной индуктивности или емкости, в то время как потери могут быть описаны эффективным сопротивлением. Для конкретизации рассмотрим две реалистичные системы: потоковый кубит, индуктивно связанный с резонансным контуром [15], и зарядовый кубит, связанный емкостно с наномеханическим резонатором (НР) [16].

### 5.1. ФОРМАЛИЗМ КРЫЛОВА–БОГОЛЮБОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ КУБИТ–РЕЗОНАТОР

Здесь представлена полуклассическая теория для системы кубит–резонатор. В качестве резонаторов рассмотрим как  $LC$  контур, так и НР. Однако для простоты сначала рассмотрим механический аналог резонатора — пружину с коэффициентом упругости  $k_0$  и коэффициентом затухания  $\lambda_0$  (который полагается малым), нагруженную массой  $m$  (рис. 5.1). Резонатор имеет собственную частоту  $\omega_0 = \sqrt{k_0/m}$  и добротность  $Q_0 = m\omega_0/\lambda_0$ . На его состояние воздействует сила  $\varepsilon F_q$  со стороны кубита и пробная периодическая сила  $\varepsilon F_p \sin \omega_p t$ . Здесь малый параметр  $\varepsilon$  вводится явным образом, чтобы подчеркнуть важность малости взаимодействия кубита и резонатора, а также амплитуды внешней гармонической силы  $\varepsilon F_p$ , что позволяет воспользоваться методом асимптотического разложения. Предполагается, что внешняя нелинейная сила зависит только от переменной  $x$  и ее производной  $dx/dt$ ,  $F_q = F_q(x, dx/dt)$ .

Смещение  $x$  является решением уравнения движения:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda_0 \frac{dx}{dt} + k_0 x = \varepsilon F_q \left( x, \frac{dx}{dt} \right) + \varepsilon F_p \sin \omega_p t. \quad (5.1)$$

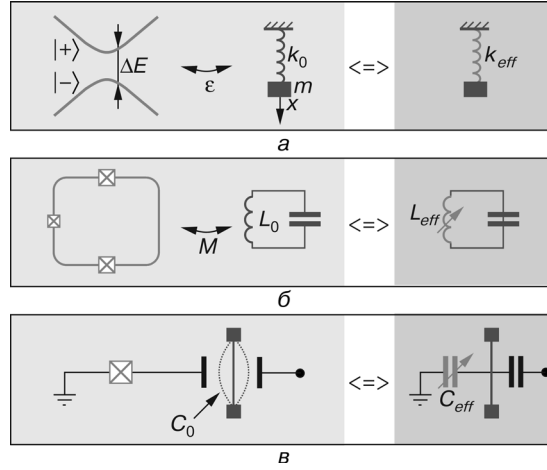
Осцилляции в нелинейной системе, описываемой уравнением (5.1), могут быть сведены к осцилляциям эквивалентной линейной системы, используя формализм асимптотического разложения Крылова–Боголюбова [17]. А именно, в первом приближении по параметру  $\varepsilon$  вблизи основного резонанса,  $\omega_p \approx \omega_0$ , эквивалентный линейный контур описывается эффективным коэффициентом упругости  $k_{eff}(v)$  и эффективным коэффициентом затухания  $\lambda_{eff}(v)$  (см. [17, гл. 7]):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda_{eff}(v) \frac{dx}{dt} + k_{eff}(v)x = \varepsilon F_p \sin \omega_p t, \quad (5.2)$$

$$x = v \cos(\omega_p t + \delta), \quad (5.3)$$

$$k_{eff}(v) = k_0 - \frac{\varepsilon}{\pi v} \int_0^{2\pi} \tilde{F}_q(v, \psi) \cos \psi d\psi \equiv k_0 + k_q, \quad (5.4)$$

$$\lambda_{eff}(v) = \lambda_0 + \frac{\varepsilon}{\pi v \omega_0} \int_0^{2\pi} \tilde{F}_q(v, \psi) \sin \psi d\psi \equiv \lambda_0 + \lambda_q, \quad (5.5)$$



**Рис. 5.1.** Кубит (квантовая двухуровневая система), связанный с классическим резонатором: *a* — схема системы кубит–резонатор. Кубит представлен двухуровневой системой с состояниями  $|-\rangle$  и  $|+\rangle$  и разницей энергий  $\Delta E$ . Резонатор показан как пружинный осциллятор с коэффициентом упругости  $k_0$ . Влияние кубита на резонатор может быть описано путем введения эквивалентного коэффициента упругости  $k_{eff}$ , который включает в себя зависящий от состояния кубита коэффициент упругости  $k_q$ ; *б* — потоковый кубит, связанный через взаимную индуктивность  $M$  с резонансным контуром. Влияние кубита на резонансный контур может быть описано путем введения эффективной индуктивности  $L_{eff}$ , которая включает в себя индуктивность  $L_q$ , зависящую от состояния кубита; *в* — влияние зарядового кубита на состояние НР. Может быть описано путем введения эффективной емкости  $C_{eff}$ , которая включает в себя емкость  $C_q$ , зависящую от состояния кубита

где для краткости записи введено обозначение  $\tilde{F}_q(v, \psi) \equiv F_q\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = F_q(v \cos \psi, -\omega_p v \sin \psi)$ . Здесь введены *параметрические* (или, как иногда говорят в данном контексте, «квантовые») коэффициент упругости  $k_q$  и коэффициент затухания  $\lambda_q$ . Прилагательное «квантовый» используется в кавычках, чтобы подчеркнуть, что данные параметры зависят от состояния кубита, т. е. от квантовых свойств этой подсистемы. В последующем, просто изменив обозначения, с помощью параметрического коэффициента упругости получим *параметрическую индуктивность* или *параметрическую емкость*, когда связь с резонансным контуром соответственно индуктивная или емкостная. При этом с помо-



щью параметрического коэффициента затухания находим *параметрическое сопротивление*. Отметим, что в приведенных уравнениях коэффициенты упругости  $k_q$  и затухания  $\lambda_q$  определены в первом приближении по малому параметру задачи  $\varepsilon$ .

Процедура линеаризации позволяет получить важную информацию, даже не решая уравнения движения. В частности, эффективная резонансная частота линеаризованной системы  $\omega_{eff} = \sqrt{k_{eff}/m}$  дает следующую формулу для вычисления сдвига резонансной частоты:

$$\Delta\omega = \omega_{eff} - \omega_0 = \frac{k_q}{2m\omega_0}. \quad (5.6)$$

Для физической интерпретации важно подчеркнуть, что применение процедуры линеаризации приводит к замене нелинейной силы на линейную:

$$F \equiv \varepsilon F_q \left( x, \frac{dx}{dt} \right) \rightarrow F_q = -k_q x - \lambda_q \frac{dx}{dt}. \quad (5.7)$$

Последняя параметрическая сила, зависящая от состояния квантовой системы, описывает работу, выполняемую квантовой системой над резонатором. Соответствующий перенос энергии за один период составляет

$$W = \int_0^{2\pi/\omega_p} F_q \left( x, \frac{dx}{dt} \right) \frac{dx}{dt} dt = -\pi\omega_p v^2 \lambda_q. \quad (5.8)$$

В этой формуле отрицательный знак параметрического коэффициента затухания  $\lambda_q$  описывает накачку энергии в резонатор, а положительный знак соответствует извлечению энергии из резонатора. Такие процессы известны как «сизифово охлаждение и нагрев» (см. гл. 4).

Решение уравнения (5.2) в первом приближении по  $\varepsilon$  имеет вид выражения (5.3) с медленно изменяющимися во времени амплитудой  $v = v(t)$  и фазой  $\delta = \delta(t)$ . Для этих величин методом асимптотического разложения получаем следующую систему уравнений (см. [17, гл. 15]):

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda_{eff}(v)}{2m} v - \frac{\varepsilon F_p}{m(\omega_0 + \omega_p)} \cos \delta, \quad (5.9)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_{eff}(v) - \omega_p + \frac{\varepsilon F_p}{mv(\omega_0 + \omega_p)} \sin \delta. \quad (5.10)$$

В режиме стационарных осцилляций имеем  $dv/dt = d\delta/dt = 0$  и, соответственно, получаем уравнения для амплитуды  $v$  и фазового сдвига  $\delta$ , которые записываем в виде

$$\tan \delta = \frac{k_q(v)}{\omega_0 \lambda_{eff}(v)}, \quad (5.11)$$

$$v = -\frac{\varepsilon F_p \cos \delta}{\omega_0 \lambda_{eff}(v)}. \quad (5.12)$$

В дальнейшем показано, что фазовый сдвиг  $\delta$  и амплитуду  $v$  можно напрямую наблюдать в эксперименте, что позволяет получать информацию о квантовой системе через значения параметрических коэффициентов упругости  $k_q$  и затухания  $\lambda_q$ .

## 5.2. СЛУЧАЙ РЕЗОНАНСНОГО КОНТУРА. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ

Рассмотрим в качестве примера систему, состоящую из потокового кубита (с геометрической индуктивностью  $L$  и средним незатухающим током  $I_{qb}$ ), связанного индуктивно с резонансным контуром, как показано на рис. 4.1. Квантовая система связана с резонансным контуром через взаимную индуктивность  $M$ . Контур состоит из индуктивности  $L_T$ , емкости  $C_T$  и сопротивления  $R_T$ , которые для определенности полагаем расположенными параллельно. Резонансный контур накачивается током  $I_b$ , а измеряемой величиной является напряжение на контуре  $V$ .

Чтобы получить уравнение для напряжения, запишем систему уравнений для токов в трех ветвях контура, а именно: через индуктивность ( $I_L$ ), емкость ( $I_C$ ) и сопротивление ( $I_R$ ) (см. также [18]):

$$I_b = I_L + I_C + I_R, \quad (5.13)$$

$$I_C = C_T V, \quad I_R = V/R_T, \quad (5.14)$$

$$V = L_T \dot{I}_L - \Phi_e, \quad (5.15)$$

где  $\Phi_e$  — поток через индуктивность резонансного контура. Этот поток является откликом квантовой системы на поток, индуцируемый в ней током  $I_L$ . В результате накачки контура током  $I_b = I_A \sin \omega_p t$  получаем нелинейное уравнение для напряжения  $V$  [19]:

$$C_T \frac{d^2 V}{dt^2} + R_T^{-1} \frac{dV}{dt} + L_T^{-1} V = -\frac{\dot{\Phi}_e(V, \dot{V})}{L_T} + I_A \omega_p \cos \omega_p t. \quad (5.16)$$

Предполагают, что внешний поток  $\Phi_e$  пропорционален параметру связи  $k^2 = M^2/LL_T \ll 1$  и зависит от напряжения  $V$  и от производной по времени  $\dot{V}$ . Уравнение для напряжения  $V$  совпадает с нелинейным уравнением (5.1) для переменной  $x$  после очевидной замены обозначений.

Таким образом, формализм, представленный в предыдущем параграфе, напрямую применим к данной задаче. А именно, в первом приближении по параметру связи  $k^2$  и вблизи основного резонанса ( $\omega_p \approx \omega_T \equiv 1/\sqrt{L_T C_T}$ ) эквивалентная линейная система характеризуется эффективной индуктивностью  $L_{eff}$  и эффективным сопротивлением  $R_{eff}$  следующим образом:

$$C_T \frac{d^2 V}{dt^2} + R_{eff}^{-1} \frac{dV}{dt} + L_{eff}^{-1} V = I_A \omega_p \cos \omega_p t, \quad (5.17)$$

$$V = v \cos(\omega_p t + \delta), \quad (5.18)$$

$$\frac{1}{R_{eff}(v)} = \frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_q(v)}, \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{L_{eff}(v)} = \frac{1}{L_T} + \frac{1}{L_q(v)}. \quad (5.20)$$

Здесь *параметрическая* индуктивность  $L_q$  и *параметрическое* сопротивление  $R_q$  заданы формулами

$$\frac{1}{R_q(v)} = -\frac{Q_0}{\pi v R_T} \int_0^{2\pi} \tilde{\Phi}_e(v, \psi) \sin \psi d\psi, \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{L_q(v)} = \frac{1}{\pi v L_T} \int_0^{2\pi} \tilde{\Phi}_e(v, \psi) \cos \psi d\psi, \quad (5.22)$$

где  $Q_0 = \omega_T C_T R_T$  — добротность ненагруженного резонансного контура (при  $\Phi_e = 0$ ),  $\tilde{\Phi}_e(v, \psi) \equiv \dot{\Phi}_e(V, \dot{V}) = \dot{\Phi}_e(v \cos \psi, -v \omega_p \sin \psi)$ .

Сдвиг резонансной частоты  $\omega_{eff}$  зависит от амплитуды  $v$ :

$$\Delta\omega = \omega_{eff}(v) - \omega_T = \frac{\omega_T L_T}{2L_q(v)}. \quad (5.23)$$

Фазовый сдвиг  $\delta$  и амплитуда  $v$  зависят от частотной отстройки  $\xi_0 \equiv \frac{\omega_T - \omega_p}{\omega_T}$  и от состояния кубита (через  $L_q$  и  $R_q$ ). В стационарном режиме их получают решением системы уравнений

$$\begin{cases} \tan \delta = 2Q_0 \frac{R_{eff}}{R_T} \left( \xi_0 + \frac{L_T - L_{eff}}{2L_T} \right), \\ v = I_A R_{eff} \cos \delta, \end{cases} \quad (5.24)$$

которая может быть также записана в терминах эффективной добротности  $Q_{eff}$  и эффективной частотной отстройки  $\xi_{eff}$ :

$$\begin{cases} v \sqrt{1 + 4Q_{eff}^2 \xi_{eff}^2} = \frac{I_A Q_{eff}}{\omega_T C_T}, \\ \tan \delta = 2Q_{eff} \xi_{eff}, \end{cases} \quad (5.25)$$

$$Q_{eff}(v) = \omega_T C_T R_{eff}(v), \quad (5.26)$$

$$\xi_{eff}(v) = \frac{\omega_{eff}(v) - \omega_p}{\omega_T} = \xi_0 + \frac{L_T}{2L_q(v)}. \quad (5.27)$$

Таким образом, наблюдаемые величины — фазовый сдвиг  $\delta$  и амплитуду  $v$  — определяют уравнениями (5.24) или (5.25), которые зависят от отклика измеряемой системы  $\Phi_e(V, \dot{V})$ .

Как указано ранее, динамика резонансного контура должна быть рассмотрена совместно с динамикой кубита. Однако в последующем в качестве примеров приведем два предельных случая, когда динамика кубита может быть рассмотрена отдельно от динамики резонансного контура. Для упрощения вводим феноменологически время релаксации  $T_1$ , которое обусловлено связью с диссипативным окружением и с резонансным контуром.

### 1. Низкодобротный кубит ( $T_1 \ll T$ ): фазовый сдвиг определяется параметрической индуктивностью кубита

Когда все характерные времена кубита и, в частности, время релаксации  $T_1$  меньше, чем период резонансного контура  $T = 2\pi/\omega_T$ , уравнения могут быть упрощены, поскольку уравнения для напряжения  $V$  можно усреднить по периоду быстрых осцил-

ляций. Это усреднение далее предполагаем для всех величин в этом параграфе. Тогда производная по времени от потока  $\Phi_e$ , индуцированного кубитом в резонансном контуре, может быть записана следующим образом:

$$\dot{\Phi}_e = M \dot{I}_{qb} = M \frac{\partial I_{qb}}{\partial \Phi} \dot{\Phi}, \quad (5.28)$$

где  $\Phi = \Phi_{dc} + MI_L$  — поток через петлю кубита (здесь не учтен малый самоиндуцированный поток  $-LI_{qb}$  [19]), который состоит из независимой от времени части  $\Phi_{dc}$  и потока, индуцированного током  $I_L$  в индуктивности резонатора. Формулу (5.28) можно переписать, если ввести (обратную) эффективную индуктивность кубита  $l = \partial I_{qb}(\Phi) / \partial \Phi$  и индуктивность, которая характеризует отклик кубита,  $\tilde{L} = M^2 l^{-1}$ . Тогда  $\dot{\Phi}_e = \tilde{L}(I_L) \dot{I}_L$  и для напряжения на резонансном контуре имеем

$$V = L_T \dot{I}_L - \dot{\Phi}_e = (L_T - \tilde{L}(I_L)) \dot{I}_L. \quad (5.29)$$

Поскольку  $\tilde{L} \propto k^2$  и  $\tilde{L} \ll L_0$ , в первом приближении по  $k^2$  выражение  $\dot{\Phi}_e = \tilde{L}(I_L) \dot{I}_L$  можно вставить  $I_L$ , найденное из уравнения (5.29):

$$I_L(t) \approx \frac{1}{L_T} \int V dt \approx \frac{v}{\omega_T L_T} \sin(\omega_p t + \delta). \quad (5.30)$$

Тогда из уравнений (5.21) и (5.22) находим

$$R_q^{-1} = 0, \quad \frac{L_T}{L_q} = \frac{k^2 L}{\pi} \int_0^{2\pi} l^{-1}(v, \psi) \cos^2 \psi d\psi, \quad (5.31)$$

где эффективная индуктивность кубита определяется полным потоком  $\Phi$ , пронизывающим петлю кубита:

$$l^{-1}(v, \psi) \equiv \left. \frac{\partial I_{qb}(\Phi)}{\partial \Phi} \right|_{\Phi = \Phi_{dc} + (M / L_T \omega_T) v \sin \psi}. \quad (5.32)$$

Для фазового сдвига  $\delta$  и амплитуды напряжения  $v$  получаем

$$\tan \delta \approx 2Q_0 \xi_0 + Q_0 \frac{L_T}{L_q}, \quad v \approx I_A R_T \cos \delta. \quad (5.33)$$

Фактически, этот результат является обобщением результата работы [5] для случая, когда кубит может находиться в возбужден-

ном состоянии (которое учитывается при вычислении ожидаемого тока  $I_{qb}$ ).

Если амплитуда тока накачки  $I_A$  достаточно мала и ею можно пренебречь в уравнении (5.32), то имеем

$$L_q^{-1} = k^2 \frac{L}{L_T} L^{-1}, \quad L^{-1} \approx \frac{\partial I_{qb}(\Phi_{dc})}{\partial \Phi_{dc}},$$

$$\tan \delta \approx 2Q_0 \xi_0 + k^2 Q_0 L L^{-1}, \quad v \approx I_A R_T \cos \delta. \quad (5.34)$$

Это означает, что при резонансной частоте накачки ( $\xi_0 = 0$ ) фазовый сдвиг  $\delta$  приближенно пропорционален обратной индуктивности кубита  $L^{-1}$ . Здесь необходимо записать в явном виде формулу для квантовой индуктивности, которая выражается через производную ожидаемого тока в петле кубита  $I_{qb} = -I_p \langle \sigma_z \rangle$ :

$$L_q^{-1} = -L_T^{-1} k^2 \frac{L I_p}{\Phi_0} \frac{\partial \langle \sigma_z \rangle}{\partial f_{dc}}. \quad (5.35)$$

## 2. Высокодобротный кубит ( $T_1 \lesssim T$ ): параметрическое сопротивление как следствие запаздывания кубита

Рассмотрим случай, когда время релаксации  $T_1$  кубита одного порядка с периодом резонансного контура  $T$ , а именно: полагаем  $T_1 \lesssim T$ . Предполагаем, что экспоненциальному закону релаксации  $\sim \exp(-t/T_1)$  соответствует запаздывающий отклик кубита.

Тогда уравнение  $\dot{\Phi}_e = \tilde{L}(I_L) \dot{I}_L$  нужно записать так:

$$\dot{\Phi}_e(t) = \tilde{L}(I_L(t')) \dot{I}_L(t'), \quad (5.36)$$

где  $t' = t - T_1$  — время с задержкой. Таким образом, отклик кубита зависит от тока в резонаторе  $I_L = I_L(t')$ :

$$I_L(t') \approx \frac{v}{\omega_T L_T} \sin(\omega_p t' + \delta) = \frac{v}{\omega_T L_T} (C \sin(\omega_p t + \delta) - S \cos(\omega_p t + \delta)), \quad (5.37)$$

где  $S = \sin(\omega_p T_1)$  и  $C = \cos(\omega_p T_1)$ . Для простоты рассмотрим случай малого тока накачки, тогда уравнения (5.21), (5.22) и (5.36), (5.37) приводят к следующим выражениям для параметрической индуктивности и *параметрического сопротивления*:

$$\begin{aligned} L_T/L_q &\approx C \cdot k^2 L l^{-1}, \\ R_T/R_q &\approx -S \cdot k^2 Q_0 L l^{-1}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Аналогично тому, как было записано уравнение (5.35), последнее выражение может быть представлено в виде, явно демонстрирующем квантовый характер:

$$R_q^{-1} = S \frac{k^2 Q_0}{R_T} \frac{L I_p}{\Phi_0} \frac{\partial \langle \sigma_z \rangle}{\partial f_{dc}}. \quad (5.39)$$

Как следствие наличия этого параметрического сопротивления, из выражения (5.8) видно, что энергию, переданную из кубита в резонатор (или из резонатора — для противоположного знака) за один период, можно определить так:

$$W = -\pi \omega_p v^2 R_q^{-1}. \quad (5.40)$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что параметрические индуктивность и сопротивление в выражении (5.38) пропорциональны индуктивности кубита  $l$ . В результате получаем

$$\tan \delta \approx \frac{2Q_0 \xi_0 + C \cdot k^2 Q_0 L l^{-1}}{1 - S \cdot k^2 Q_0 L l^{-1}}, \quad (5.41)$$

$$\frac{v}{I_A R_T} \approx \frac{\cos \delta}{1 - S \cdot k^2 Q_0 L l^{-1}}. \quad (5.42)$$

Рассмотрим эти выражения в первом приближении по малому параметру  $k^2 Q_0 L l^{-1}$ . Тогда для пробной частоты, равной резонансной частоте, т. е. для  $\xi_0 = 0$ , получаем следующий важный результат:

$$\tan \delta \approx C \cdot k^2 Q_0 L l^{-1}, \quad (5.43)$$

$$\frac{v}{I_A R_T} \approx 1 + S \cdot k^2 Q_0 L l^{-1}.$$

Отсюда, в частности, видно, что для  $C \rightarrow 0$  может иметь место такая ситуация, при которой изменения амплитуды напряжения  $v$  будут происходить при почти неизменном фазовом сдвиге  $\delta$  и, соответственно, в отсутствие изменений резонансной частоты (см. (5.23)). Важно отметить, что как фазовый сдвиг, так и амплитуда определяются эффективной индуктивностью кубита  $l$ ,

что объясняет их подобное поведение в соответствующих экспериментальных измерениях. Эти выражения целесообразно использовать для анализа экспериментальных результатов, как продемонстрировано далее.

### 5.3. СЛУЧАЙ НАНОМЕХАНИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЕМКОСТЬ

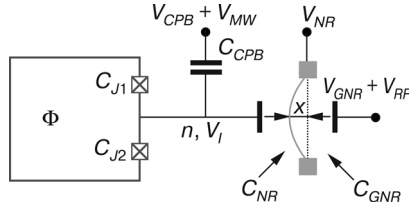
Рассмотрим зарядовый кубит, емкостно связанный с резонатором. В этом случае, как и в случае с потоковым кубитом, рассмотренном выше, в роли резонатора может выступать резонансный контур. В качестве альтернативы резонатором может быть наномеханический резонатор (НР), как в работе [20]. С целью продемонстрировать разные возможности кубита рассмотрим именно этот случай.

Зарядовый кубит с двумя контактами Джозефсона состоит из маленького островка между ними (*Cooper-pair box*), состояние которого контролируется магнитным потоком  $\Phi$  и затворным напряжением  $V_{CPB} + V_{MW}$  (рис. 5.2). Здесь  $V_{CPB}$  — это постоянное напряжение, которое используют для изменения расстояния между уровнями энергии кубита;  $V_{MW} = V_\mu \sin \omega t$  — микроволновой сигнал, который используют для изменения заселенностей энергетических уровней. Состояние островка описывается в двух-уровневом приближении гамильтонианом в зарядовом представлении [20]:

$$H(t) = -\frac{\Delta}{2} \sigma_x - \frac{\varepsilon_0}{2} \sigma_z - \frac{A \sin \omega t}{2} \sigma_z. \quad (5.44)$$

Здесь туннельное расщепление  $\Delta$  равно джозефсоновской энергии  $E_J$ , которая контролируется магнитным потоком  $\Phi$ :  $\Delta \equiv E_J = E_{J0} |\cos(\pi\Phi/\Phi_0)|$ . Зарядовую энергию и возбуждающую амплитуду находят так:  $\varepsilon_0 = 8E_C(n_g - 1/2)$  и  $A = 8E_C n_\mu$ , где кулоновская энергия  $E_C = e^2/2C_\Sigma$  определяется полной емкостью островка:  $C_\Sigma = 2C_J + C_{CPB} + C_{NR}$ ; эффективная джозефсоновская емкость составляет  $2C_J \equiv C_{J1} + C_{J2}$  и безразмерная амплитуда возбуждения  $n_\mu = C_{CPB}V_\mu/2e$ . Безразмерный поляризационный заряд  $n_g = n_{NR} + n_{CPB}$  является дробной частью соответствующих поляризационных зарядов двух емкостей:  $n_{NR} = \{N_{NR}\}$  и  $n_{CPB} = \{N_{CPB}\}$ , где  $N_{NR} = C_{NR}V_{NR}/2e$  и  $N_{CPB} = C_{CPB}V_{CPB}/2e$ .





**Рис. 5.2.** Схема зарядового кубита, связанного с наномеханическим резонатором. Зарядовый кубит с двумя джозефсоновскими контактами (показанными крестиками) контролируется магнитным потоком  $\Phi$  и напряжением с постоянной и микроволновой составляющими  $V_{CPB} + V_{MW}$ ,

которое прикладывается через емкость  $C_{CPB}$ . Кубит связан с НР через емкость  $C_{NR}$ . К НР прикладывается постоянное напряжение  $V_{NR}$ ; состояние НР контролируется и измеряется приложением напряжения с постоянной  $V_{GNR}$  и переменной  $V_{RF}$  компонентами через емкость  $C_{GNR}$ . Движение НР описывается смещением в средней точке  $x$ . Емкости образуют островок с суммарной емкостью  $C_{\Sigma}$ , напряжением  $V_I$  и зарядом  $-2en$

Рассмотрим сверхпроводниковый островок (*Cooper-pair box*), образованный четырьмя емкостями  $C_{J1}$ ,  $C_{J2}$ ,  $C_{CPB}$  и  $C_{NR}$  ( $C_J \ll \ll C_{CPB}$ ,  $C_{NR}$ ). Одна из обкладок конденсатора  $C_{NR}$  образована НР, который характеризуется смещением серединной точки  $x$ . Это смещение намного меньше, чем расстояние  $d$  между обкладками. Тогда емкость между НР и кубитом имеет вид

$$C_{NR}(x) \approx C_{NR} + \frac{\partial C_{NR}}{\partial x} x \equiv C_{NR} \left( 1 + \frac{x}{\xi} \right). \quad (5.45)$$

Смещение НР влияет на кубит через изменение поляризационного заряда. Чтобы это влияние было существенным, прикладывают большое (порядка нескольких вольт) напряжение  $V_{NR}$ . С другой стороны, к НР приложены постоянное и переменное напряжения  $V_{GNR}$  и  $V_{RF}$  через емкость  $C_{GNR}$ .

Один из подходов к описанию системы кубит—резонатор — введение в рассмотрение *параметрической емкости* следующим образом (более подробно см. в работе [16]). Введем эффективную емкость, как показано на рис. 5.1, в, дифференцируя заряд  $Q_{NR}$  на обкладках конденсатора  $C_{NR}$  [21]:  $C_{eff} = \partial Q_{NR} / \partial V_{NR}$ . Тогда для заряда  $Q_{NR} = (V_{NR} - V_I) C_{NR}$  с потенциалом островка  $V_I = 2e(n_g - \langle n \rangle) : C_{\Sigma}$  получаем выражение  $C_{eff} = C_{geom} + C_q$ , которое состоит из *параметрической емкости*:

$$C_q = \frac{C_{NR}^2}{C_{\Sigma}} \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial n_g}, \quad (5.46)$$

зависящей от состояния квантовой подсистемы, и геометрической емкости:

$$C_{geom} = \frac{C_{NR}(C_{\Sigma} - C_{NR})}{C_{\Sigma}} \approx \frac{2C_J C_{NR}}{2C_J + C_{NR}} \approx C_{NR}, \quad (5.47)$$

где указанные приближения подразумевают, что  $C_{CPB} \ll C_J, C_{NR}$  и  $C_{NR} \ll C_J$  соответственно. Теперь можно рассматривать силу  $F_{NR}$ , которая действует на НР со стороны левого электрода, как электростатическую силу с эффективной емкостью  $C_{eff}$  (см. рис. 5.1, в):  $F_{NR} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (C_{eff} V_{NR}^2)$ . Тогда член с квантовой емкостью, в которой  $C_{NR}^2 \approx C_{NR}^2 (1 + x/\xi)^2$ , приводит к следующему сдвигу резонансной частоты НР:

$$\frac{\Delta\omega_{NR}}{\omega_{NR}} = -\frac{\beta C_{\Sigma}}{C_{NR}^2} C_q = -\beta \frac{\partial \langle n \rangle}{\partial n_g}, \quad (5.48)$$

$$\beta = \frac{1}{m\omega_{NR}^2 C_{\Sigma}} \left( \frac{C_{NR} V_{NR}}{\xi} \right)^2.$$

Необходимо подчеркнуть, что конкретная модель системы в виде НР, связанного с двухконтактным зарядовым кубитом, выбрана в качестве примера. Такой подход может быть применен и к описанию других систем. Тот же зарядовый кубит может быть связан с резонансным контуром вместо НР. В отличие от индуктивной связи, рассмотренной в предыдущем параграфе, здесь связь будет емкостной. Тогда простая процедура позволяет получить выражение для измеряемой величины — фазового сдвига напряжения на резонансном контуре  $\delta$ . При резонансной частоте  $\xi_0 = 0$  имеем (сравни с формулой (5.33) с параметрической индуктивностью) [16]:

$$\tan \delta \approx Q_0 \frac{C_q}{C_T}. \quad (5.49)$$

Далее показано, как эти выражения могут быть использованы для описания реалистичной системы.

## **МНОГОФОТОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В СВЕРХПРОВОДНИКОВЫХ КУБИТАХ**

Возбуждаемый внешним электромагнитным полем кубит может находиться в состоянии, описываемом суперпозицией основного и возбужденного состояний. При этом переход из основного состояния в возбужденное сопровождается поглощением одного или нескольких фотонов внешнего поля. Возбуждение кубитов необходимо как для инициализации (контроля их состояния), так и для определения их параметров методами спектроскопических и интерференционных измерений. Параметры кубита могут быть определены измерениями в основном состоянии или использованием спектроскопических измерений, когда кубит возбуждают относительно слабым сигналом [22]. Более сильное возбуждение используют для многофотонной спектроскопии и так называемой интерферометрии Ландау—Зинера—Штюкельберга [23], что целесообразно, например, для измерений при меньших частотах, когда возбуждающая частота равна расстоянию между уровнями энергии кубита, деленному на целое число.

После ознакомления в главах 3 и 4 с экспериментальной методикой измерения состояний кубита и рассмотрения в главе 5 формализма для полуклассического описания системы кубит—резонатор, представим более детально экспериментальные результаты и их теоретическое описание для случая, когда суперпозиционное состояние возбужденного кубита измеряется с помощью классического резонансного контура. В данной главе это показано с помощью соответствующих теоретических результатов и с использованием теории, развитой в предыдущих главах. Акцент сделан на демонстрации согласия теоретических результатов с экспериментальными. Поскольку рассмотрены два типа кубитов — зарядовые и потоковые, сначала приведены формулы для их описания в терминах параметрической индуктивности. Затем рассмотрены случаи температурного возбуждения и переходов в кубите под влиянием слабого и сильного переменного поля.

## 6.1. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ СВЕРХПРОВОДНИКОВЫХ КУБИТОВ

Рассмотрим кубит, магнитный поток в котором состоит из постоянной  $\Phi_{dc}$  и переменной  $\Phi_{ac} \sin \omega t$  составляющей. Для простоты введем соответствующие безразмерные переменные:

$$f_{dc} = \Phi_{dc}/\Phi_0 - 1/2, \quad f_{ac} = \Phi_{ac}/\Phi_0. \quad (6.1)$$

Чтобы получить выражение для эффективной индуктивности  $I$ , определяемой уравнением (5.32), необходимо вычислить средний ток:  $I_{qb} = \langle I \rangle = \text{Tr}(\rho I)$ , где  $I = -I_p \sigma_z$  — оператор тока, определяемый с амплитудой  $I_p$  и матрицей Паули  $\sigma_z$ . Редуцированную матрицу плотности  $\rho$  можно получить, решая уравнения Блоха [24], в которые входят феноменологические параметры — времена релаксации  $T_1$  и  $T_2$ . Удобно записать матрицу плотности в энергетическом представлении:  $\rho = (1/2)(\tau_0 + X\tau_x + Y\tau_y + Z\tau_z)$ , где  $\tau_i$  — матрицы Паули для этого базиса и  $\tau_0$  обозначает единичную матрицу. Величина  $Z = \langle \tau_z \rangle$  равна разности заселенностей основного и возбужденного состояний.

Найдем явные выражения для эффективных индуктивностей кубитов как для зарядового кубита [25, 26], так и для потокового кубита [27], учитывая, что  $\hat{I} = I_{circ} \hat{\sigma}_z$  и, следовательно,  $I_{qb} = I_{circ} \langle \hat{\sigma}_z \rangle$ . Для зарядового кубита циркулирующий ток  $I_{circ} = I_0$  зависит от потока и уравнение (5.34) приводит к тому, что есть два слагаемых, которые дают вклад в выражение для фазового сдвига резонансного контура:

$$\tan \delta \approx k^2 Q L \left( \frac{\partial I_0}{\partial \Phi_{dc}} Z + I_0 \frac{\partial Z}{\partial \Phi_{dc}} \right). \quad (6.2)$$

В классическом случае направление тока определено, что соответствует  $Z = \text{const}$ ; также и для системы в основном состоянии в квантовом случае. Тогда второй член в уравнении (6.2) равен нулю. В противоположность этому для квантовой системы в суперпозиционном состоянии важно учитывать оба этих члена. Отметим, что второй член может доминировать при резонансном возбуждении, как показано в работе [2] (см. далее). Это означает, что второй («квантовый») член может существенно увели-

чить чувствительность методики описываемых измерений по сравнению с ситуацией, описываемой только первым членом в уравнении (6.2).

Рассмотрим случай потокового кубита. Оператор тока определен в потоковом базисе [27],  $\hat{I} = I_p \hat{\sigma}_z$ , где величина  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$  определяет разность между вероятностями протекания тока в петле по направлению часовой стрелки и против:  $\langle \hat{\sigma}_z \rangle = P_\downarrow - P_\uparrow = 2P_\downarrow - 1$ . Тогда из уравнения (5.34) получаем

$$\tan \delta \approx k^2 Q \frac{L I_p}{\Phi_0} 2 \frac{\partial P_\downarrow}{\partial f_{dc}}. \quad (6.3)$$

В энергетическом представлении это выражение принимает вид

$$\tan \delta \approx k^2 Q \frac{L I_p}{\Phi_0} \frac{\partial}{\partial f_{dc}} \left( \frac{\Delta}{\Delta E} X - \frac{I_p \Phi_0 f_{dc}}{\Delta E} Z \right). \quad (6.4)$$

Здесь  $\Delta E = \sqrt{\Delta^2 + (I_p \Phi_0 f_{dc})^2}$  — расстояние между уровнями энергии кубита. Если первым членом в уравнении (6.4) можно пренебречь, тогда выражение может быть упрощено:

$$\tan \delta \approx -k^2 Q \frac{L I_p^2}{\Delta} \left( \frac{\Delta^3}{\Delta E^3} + \frac{\Delta}{\Delta E} f_{dc} \frac{\partial}{\partial f_{dc}} \right) Z. \quad (6.5)$$

Если кубит резонансно возбуждают сигналом с частотой  $\omega$ , то разность заселенностей энергетических уровней  $Z$  как функция  $f_{dc}$  имеет форму лоренциана. Как следствие, производная  $\partial Z / \partial f_{dc}$  будет иметь знакопеременный вид в резонансе, изменяя форму с пика на провал в точке резонанса, где  $\Delta E(f_{dc}) = k \hbar \omega$ .

## 6.2. ИЗМЕРЕНИЕ РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ

Для описания измерения одного *потокового кубита в равновесном состоянии* при ненулевой температуре нужно положить  $X = 0$  и  $Z = \tanh(\Delta E / 2T)$  в уравнении (6.4). Получаем

$$\tan \delta \approx -k^2 Q \frac{L I_p^2}{\Delta} \left( \frac{\Delta^3}{\Delta E^3} + \frac{\Delta}{\Delta E} f_{dc} \frac{\partial}{\partial f_{dc}} \right) \tanh \left( \frac{\Delta E}{2T} \right). \quad (6.6)$$

Измерение в основном состоянии описывается  $X = 0$  и  $Z = 1$ ,

что соответствует замене гиперболического тангенса в уравнении (6.6) на единицу. Полученная таким образом формула для основного состояния совпадает с результатами работы [28].

На рис. 6.1 (см. вклейку) показана расчетная зависимость фазового сдвига резонансного контура  $\delta$  от постоянного магнитного потока для параметров, описывающих реальную систему в работе [7]:  $\Delta/h = 2 \cdot 0,65$  ГГц,  $I_p \Phi_0/h = 930$  ГГц,  $\omega_T/2\pi = 32,6$  МГц,  $LI_p/\Phi_0 = 0,005$ ,  $M/L = 0,7$ ,  $Q_0 = 725$ ,  $k = 0,02$ . Аккуратный учет величины  $Z$  в уравнении [7] позволяет описать как подавление, так и уширение провала (см. экспериментальные данные в работе [7] и на рис. 4.5). Действительно, уменьшение глубины провала при  $f_{dc} = 0$  описывается первым членом в уравнении (6.6). Уширение связано со вторым членом, который происходит от дифференцирования гиперболического тангенса; этот член становится существенным для температур, больших  $\Delta$ , и приводит к экспоненциальному возрастанию ширины при  $T > T^* = \Delta$  (поскольку  $\frac{d}{dx} \tanh x \approx 4 \exp(-2x)$  при  $x > 1$ ), как это показано на вставке рис. 6.1 (см. вклейку).

### 6.3. РЕЗОНАНСНОЕ ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗАРЯДОВОГО КУБИТА

Ранее были рассмотрены устройство зарядового кубита и случай, когда кубит связан с резонансным контуром. Теперь, следуя работе [2], рассмотрим *резонансное возбуждение зарядового кубита*. В соответствии с формулой (6.2) ожидаем, что резонансное возбуждение будет проявляться различным образом, когда первый или второй член доминирует. Чтобы продемонстрировать это, на рис. 6.2 (см. вклейку) приведена зависимость фазового сдвига напряжения на резонансном контуре как функция безразмерного напряжения смещения  $n_g = C_g V_g / 2e$  и безразмерного магнитного потока  $f_{dc}$ . В первом случае берем  $f_{dc} = 0$ , тогда  $I_0 = 0$  и второй член в уравнении (6.2) зануляется. В результате резонансные возбуждения кубита визуализируются как пики в форме лоренцианов на рис. 6.2, а, б (см. вклейку). Когда же второй член доминирует, многофотонные переходы в кубите приводят к образованию структур «пик-провал» на зависимости фазового сдвига  $f_{dc}$  от потока на рис. 6.2, в, г (см. вклейку).

Теоретическая подгонка экспериментальных графиков, как это показано на рис. 6.2 (см. вклейку), позволяет определять параметры кубита — это называют многофотонной спектроско-

пией (2). В описанном случае были найдены такие параметры: джозефсоновские энергии двух контактов  $E_{J1}/h \approx 40$  ГГц и  $E_{J2}/h \approx 34,5$  ГГц; кулоновская энергия островка  $E_C/h \approx 5$  ГГц; скорости релаксации и декогерентности  $\Gamma_1/(E_C/h) = 0,03$  и  $\Gamma_2/(E_C/h) = 0,05$ , что соответствует таким временам релаксации и декогерентности:  $T_1 = \Gamma_1^{-1} \approx 7$  нс и  $T_2 = \Gamma_2^{-1} \approx 4$  нс.

На рис. 6.2 (см. вклейку) показано, как положение резонансов зависит от частоты возбуждающего сигнала  $\omega$  и как многофотонные резонансы появляются с увеличением амплитуды возбуждения  $n_{ac}$ . На рис. 6.2, *а*, *б* (см. вклейку) при изменении частоты, которая составляла, соответственно, для кривых снизу вверх 6,5, 7,1, 8,1 и 9,1 ГГц, амплитуда возбуждения не изменялась,  $n_{ac} \approx 0,3$ , так же, как и магнитный поток, зафиксированный при  $f_{dc} = 0$ . На рис. 6.2, *в*, *г* (см. вклейку) кривые соответствуют переменному параметру — мощности возбуждения: в эксперименте мощность составляла для кривых снизу вверх –80, –60, –57 дБ, а для теоретических кривых —  $n_{ac} = 0,1, 0,2, 0,4$  при фиксированной частоте  $\omega / 2\pi = 7$  ГГц.

#### 6.4. ОДНО- И МНОГОФОТОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ПОТОКОВОМ КУБИТЕ

Ранее показано, что как фазовый сдвиг  $\delta$ , так и амплитуда  $v$  напряжения резонансного контура могут быть использованы для наблюдения резонансного возбуждения сверхпроводникового кубита. На рис. 6.2 (см. вклейку) продемонстрировано это для фазового сдвига резонансного контура, связанного с зарядовым кубитом. Теперь рассмотрим одно- и многофотонные резонансные возбуждения потокового кубита (рис. 6.3, см. вклейку) и покажем, как немонотонная зависимость амплитуды напряжения  $v$  визуализирует резонансные возбуждения кубита.

Рассмотрим сначала *спектроскопические измерения*, когда потоковый кубит возбуждают переменным потоком малой амплитуды. Мы ожидаем резонансное возбуждение, когда возбуждающая частота может соединить уровни энергии кубита,  $\hbar\omega = \Delta E(f_{dc})$ . При экспериментальном изучении положение этих резонансов при фиксированной частоте позволяет описать энергетическую структуру измеряемого кубита [22].

На рис. 6.3, *б*, *в* (см. вклейку) показана зависимость напряжения на резонансном контуре  $V$  от магнитного потока  $f_{dc}$  при пробной частоте, равной резонансной,  $\omega_p = \omega_0$ , для разных возбуждающих частот  $\omega/2\pi = 3,5$ ; 5 и 18 ГГц. Резонансное возбуждение может быть объяснено энергетической диаграммой на рис. 6.3, *а* (см. вклейку). Для построения рис. 6.3, *б* (см. вклейку) решены уравнения (5.41), (5.42). Параметры для вычислений взяты как в соответствующем эксперименте [22], результаты которого приведены на рис. 6.3, *в* (см. вклейку): туннельная амплитуда  $\Delta/h = 3,5$  ГГц; энергетическое смещение  $I_p\Phi_0/h = 700$  ГГц; температура  $T/h = 1,4$  ГГц; скорости релаксации  $\Gamma_1/h = 0,7$  ГГц и декогерентности  $\Gamma_2/h = 0,7$  ГГц; величина, которая описывает связь между кубитом и резонансным контуром,  $k^2Q_0(LI_p/\Phi_0) = 2,6 \cdot 10^{-3}$ .

Кривые приведены для возбуждающих амплитуд  $f_{ac} \cdot 10^3 = 1$ ; 1,5 и 3, сверху вниз. Феноменологический параметр задержки выбран  $S = 0,8$ .

На рис. 6.4, *а*, *б* (см. вклейку) показаны результаты вычисления фазового сдвига  $\delta$  и амплитуды  $v$  как функций пробной частоты  $\omega_p$  и отстройки магнитного потока  $f_{dc}$  с феноменологическим параметром задержки  $S$  для *потокowego кубита при сильном возбуждении*. Вычисления проведены с теми же параметрами, что и для рис. 6.3 (см. вклейку) и с амплитудой и частотой возбуждения  $f_{ac} = 0,008$  и  $\omega/2\pi = 4,15$  ГГц. Они находятся в хорошем соответствии с экспериментальными наблюдениями, приведенными на рис. 6.4, *в*, *г* (см. вклейку). Пунктирная линия обозначает резонансную частоту резонансного контура  $\omega_p/2\pi = \omega_0/2\pi = 20,8$  МГц. Стрелки на энергетической диаграмме рис. 6.3, *а* (см. вклейку) демонстрируют ожидаемое положение многофотонных резонансов  $k\hbar\omega = \Delta E(f_{dc})$  при  $k = 1, 2, 3$  и 4 (см. рис. 6.4, вклейка).

Заметим, что для параметра задержки, приблизительно равного 1 (здесь  $S = 0,8$ ), изменения фазового сдвига на рис. 6.4, *а* (см. вклейку) малы при резонансной частоте (т.е. вдоль пунктирной линии), в то время как амплитуда напряжения на рис. 6.4, *б* (см. вклейку) изменяется существенно (см. формулы (5.43)). Это же было продемонстрировано и на предыдущем рисунке (см. рис. 6.3, вклейка). Такие изменения эффективного сопротивления резонансного контура или, что эквивалентно, добротности были изучены в работе [11] для полной квантово-



механической модели системы кубит—резонатор. Отметим, что это может быть также описано полуклассической моделью, представленной в данной работе. Эта модель дает результаты, согласующиеся с экспериментом (см., например, рис. 6.3, 6.4 на вклейке), которые подразумевают перенос энергии между кубитом и резонатором согласно уравнению (5.40). Более детально об этом переносе энергии, известном как «сизифово затухание и усиление», можно узнать в работах [11, 29].

Далее на рис. 6.5 (см. вклейку) показана зависимость фазового сдвига напряжения на резонансном контуре от отстройки по  $DC$  магнитному потоку  $f_{dc}$  и от амплитуды микроволнового возбуждения  $f_{ac}$ . Указанная двойная квазипериодическая зависимость (как от энергетической отстройки, так и от возбуждающей амплитуды) называется *интерферограмма Ландау—Зинера—Штюкельберга* [23]. Параметры — такие же, как и для рис. 6.3 (см. вклейку), а частота возбуждения  $\omega/2\pi = 4,15$  ГГц. На рис. 6.5, а приведена вычисленная интерферограмма из работы [15], а на рис. 6.5, б — экспериментально измеренная интерферограмма [22]. На рисунке видны многофотонные резонансы при некоторых значениях  $dc$  магнитного потока  $f_{dc}$ . Эти резонансы появляются, когда энергия  $k$  фотонов может быть поглощена двухуровневой системой,  $k\hbar\omega = \Delta E(f_{dc})$ . Квазипериодический характер зависимости от  $AC$  магнитного потока  $f_{ac}$  известен как осцилляции Штюкельберга. Сравнение такого графика с экспериментальным аналогом (а именно определение периода осцилляций Штюкельберга: сигнал  $2\pi$ -периодичен по параметру  $4I_p\Phi_{ac}/\hbar\omega$ ) позволяет сравнивать микроволновую мощность с амплитудой  $AC$  магнитного потока  $f_{ac}$ . Такая процедура называется калибровкой мощности. С другой стороны, эту же калибровку можно выполнить с помощью сравнения наклона интерференционной полосы в экспериментальных результатах с расчетными (этот наклон показан белой линией на рис. 6.5, см. вклейку).

### 6.5. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ С НАНОМЕХАНИЧЕСКИМ РЕЗОНАТОРОМ

Формализм, приведенный в п. 5.3, позволяет описать систему, состоящую из возбуждаемого кубита и наномеханического резонатора (НР). Как показано в работе [16], представляют интерес две постановки задачи для такой системы, называемые *прямая и обратная интерферометрия Ландау—Зинера—Штюкель-*

берга. При прямой постановке задачи состояние кубита определяют измерением сдвига резонансной частоты НР [20]. В обратной задаче изучают влияние состояния НР на параметры гамильтониана кубита.

*Прямая* интерферометрия показана на рис. 6.6 (см. вклейку), где построен сдвиг резонансной частоты  $\Delta\omega_{NR}$ , вычисленный с помощью уравнения (5.48) для таких параметров [20]:  $\omega_{NR}/2\pi = 58$  МГц,  $E_{J0}/h = 13$  ГГц,  $E_C/h = 14$  ГГц,  $\omega/2\pi = 4$  ГГц,  $k_B T/h = 2$  ГГц,  $\alpha = 0,005$ ,  $B = 0,2$ , а коэффициент  $\beta$  был определен через константу взаимодействия кубит—НР  $\lambda$  из работы [20]:  $\hbar\lambda^2/\pi E_{J0} = \beta E_C \omega_{NR}/\pi E_{J0} = 1,6$  кГц. Хорошее согласие приведенных на рис. 6.6 (см. вклейку) результатов вычисления с результатами экспериментальных исследований из работы [20] указывает на то, что наш формализм применим для описания реалистичных систем. В работе [16] также показано, как аналогичная интерферограмма может быть вычислена для системы кубит—резонансный контур, что соответствует экспериментальной реализации в работе [30]. Такое описание позволяет корректно определить положение резонансных пиков на интерферограмме и продемонстрировать знакопеременное поведение квантовой емкости, которая определяет наблюдаемые величины.

Для формулировки *обратной* задачи рассмотрим энергетическое смещение кубита  $\varepsilon_0$  как функцию координаты НР  $x$ . Для малых  $x \ll \xi$  имеем разложение (5.45), которое приводит к разложению энергетического смещения  $\varepsilon_0(x) \approx \varepsilon_0^*(n_g) + \delta\varepsilon_0(x)$ , где  $\varepsilon_0^*(n_g) = 8E_C(n_g - 1/2)$  и  $\delta\varepsilon_0(x) = 8E_C n_{NR} x/\xi$ . Здесь использовано, что  $x \ll \xi$  и  $C_{NR} \ll C_\Sigma$ .

Гамильтониан кубита с зависящим от параметра  $x$  смещением  $\varepsilon_0(x)$  приводит к следующей постановке задачи. Предположим, что состояние кубита (его волновая функция, вероятность заселенности верхнего уровня, частота осцилляций Раби и т.д.) известно. Т. е. предполагаем, что состояние кубита измеряется другим прибором, который здесь для простоты не включаем в рассмотрение. И наша цель — найти параметры гамильтониана кубита, в частности, зависящее от параметра  $x$  смещение  $\varepsilon_0(x)$ .

Теперь задача может быть сформулирована достаточно общей, в контексте «обратной инженерии» в духе работ [31, 32]. В этих работах задача формулируется так: пусть состояние квантовой системы задано (например, если нужно получить определен-

ное распределение по базисным состояниям), тогда требуется найти параметры гамильтониана, приводящие к такой заданной эволюции. Кроме того, в работе [16] предложено использовать этот подход для определения координаты НР  $x$  путем определения состояния кубита. При этом функция  $x = x(t)$  предполагается медленной. В такой задаче акцент делается на определении оптимальных параметров для возбуждения и контролирующей отстройки  $\varepsilon_0^*$  с целью улучшения чувствительности к малым изменениям искомой величины  $\Delta\varepsilon_0$ . Проблема, сформулированная таким образом, решалась в работе [16] для нескольких иллюстративных режимов возбуждения: с одно-, двух- и многократным прохождением точки сближения уровней кубита.

## СВЯЗАННЫЕ ПОТОКОВЫЕ КУБИТЫ

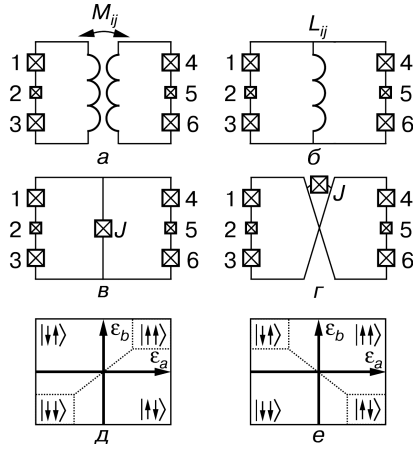
### 7.1. ТИПЫ СВЯЗЕЙ МЕЖДУ КУБИТАМИ

Для реализации любого мыслимого протокола квантовой передачи информации необходима система связанных кубитов. Более того, такие системы могут оказаться полезными как при изготовлении источников одиночных фотонов, так и для сверхчувствительных квантовых детекторов. Реализации и изучению свойств многокубитных систем посвящена эта глава.

Для потоковых кубитов очевидной является индуктивная связь, когда кубиты, например  $i$  и  $j$ , расположены на подложке достаточно близко друг к другу. Количественно такая связь описывается с помощью взаимной индуктивности  $M_{ij} = k\sqrt{L_i L_j}$  (см. рис. 7.1, а), где  $k$  — коэффициент связи;  $L_i$  и  $L_j$  — индуктивности соответствующих кубитов. На практике, однако, из-за малого размера петель кубита, и следовательно, малых  $L_i$  и  $L_j$ ,  $M_{ij}$  оказывается малой величиной. Связь может быть увеличена за счет использования кубитами общей стороны: ее кинетическая индуктивность увеличит  $M_{ij}$  (см. рис. 7.1, б). Дальнейшее увеличение связи возможно за счет формирования на общей стороне джозефсоновского контакта. Напомним, что подобная процедура уже была описана: для уменьшения размеров петли кубита его геометрическая индуктивность была заменена на джозефсоновскую (см. гл. 2). Более того, джозефсоновская связь позволяет реализовать как антиферромагнитную связь (см. рис. 7.1, в), так и ферромагнитную (см. рис. 7.1, г).

В общем случае энергия взаимодействия  $J$  записывается как  $J = M_{ij} I_{p1} I_{p2}$ , где  $M_{ij}$  в зависимости от схемы кубита может зависеть от геометрической, кинетической или джозефсоновской индуктивностей, а  $I_{p1}$ ,  $I_{p2}$  — незатухающие токи кубитов.

Ниже на примере двух связанных кубитов показано, как  $J$  может быть получено из полного гамильтониана системы. Для



**Рис. 7.1.** Реализации магнитной связи между потоковыми кубитами: *a* — индуктивная связь с помощью взаимной индуктивности; *б* — индуктивная связь с помощью кинетической индуктивности общей стороны кубитов; *в*, *г* — джозефсоновская связь через общий контакт, антиферромагнитная и ферромагнитная соответственно; *д*, *е* — диаграммы основного состояния системы двух кубитов для антиферромагнитной и ферромагнитной связей соответственно

упрощения вычислений рассмотрим только джозефсоновскую связь между кубитами (см.

рис. 7.1, *в*, *г*), пренебрегая геометрической и кинетической индуктивностями. В изложении в основном будем следовать работе [33].

Рассмотрим схему кубита, приведенную на рис. 7.1, *в*. Джозефсоновская энергия этой цепи записывается так:  $U_J = -\sum_{j=0}^6 E_j \cos \varphi_j$ , где  $\varphi_j$  — фазы соответствующих контактов и нулевой номер присвоен контакту, расположенному на общей стороне кубитов. Поскольку индуктивности кубитов пренебрежимо малы, правило квантования потока для обоих кубитов ( $r, l$ ) записывается так:  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_0 = \varphi_x^r$  и  $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_0 = \varphi_x^l$ , где  $\varphi_x^{r,l} = 2\pi\Phi_x^{r,l} / \Phi_0$  — обезразмеренные внешние потоки обоих кубитов.

Рассмотрим случай, когда  $E_{1,3,4,6} = E$  и  $E_{2,5} = \alpha E$  ( $1/2 < \alpha < 1$ ). Тогда потенциал принимает вид

$$U_J = -E_0 \cos \varphi_0 + E[-\cos \varphi_1 - \cos \varphi_3 + \alpha \cos(\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_0) - \cos \varphi_4 - \cos \varphi_6 + \alpha \cos(\varphi_4 + \varphi_6 - \varphi_0)]. \quad (7.1)$$

Равновесные фазы соответствуют условиям:  $\partial_0 U_J = \partial_1 U_J = \partial_3 U_J = \partial_4 U_J = \partial_6 U_J = 0$ , и легко видеть, что в искомым решениях  $\varphi_1 = \varphi_3$  и  $\varphi_4 = \varphi_6$ . Таким образом, остается три уравнения, решения которых есть

$$\varphi_0^F = 0, \varphi_1^F = \varphi_4^F = \pm \arccos(1/2\alpha), U_J^F = -E_0 - (1/\alpha + 2\alpha)E. \quad (7.2)$$

Эти решения соответствуют ферромагнитной связи в том смысле, что токи в кубитах текут в одну сторону. Тогда ток на общей стороне кубитов равен 0.

Однако для антиферромагнитной связи  $\varphi_1^A = -\varphi_0^A$  и оставшиеся уравнения

$$E_0 \sin \varphi_0^A = 2E \sin \varphi_1^A, \quad \sin \varphi_1^A = \alpha \sin (2\varphi_1^A + \varphi_0^A) \quad (7.3)$$

можно решить приближенно, учитывая, что  $E_0 \gg E$ . Поскольку первый порядок разложения соответствует несвязанным кубитам, получаем

$$\varphi_1^A = \pm \arccos(1/2\alpha) + \varphi_1^{(1)} E / E_0 + O[(E/E_0)^2]. \quad (7.4)$$

С помощью подстановки записываем

$$\varphi_0^A = \pm 2 \left( \frac{E}{E_0} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{4\alpha^2}} + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^2\right] \equiv \pm 2 \frac{I_p / 2e}{E_0} + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^2\right]. \quad (7.5)$$

В результате находим

$$U_J(\varphi^A) = U_J(\varphi^F) - \frac{I_p^2}{2e^2 E_0} + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^2\right]. \quad (7.6)$$

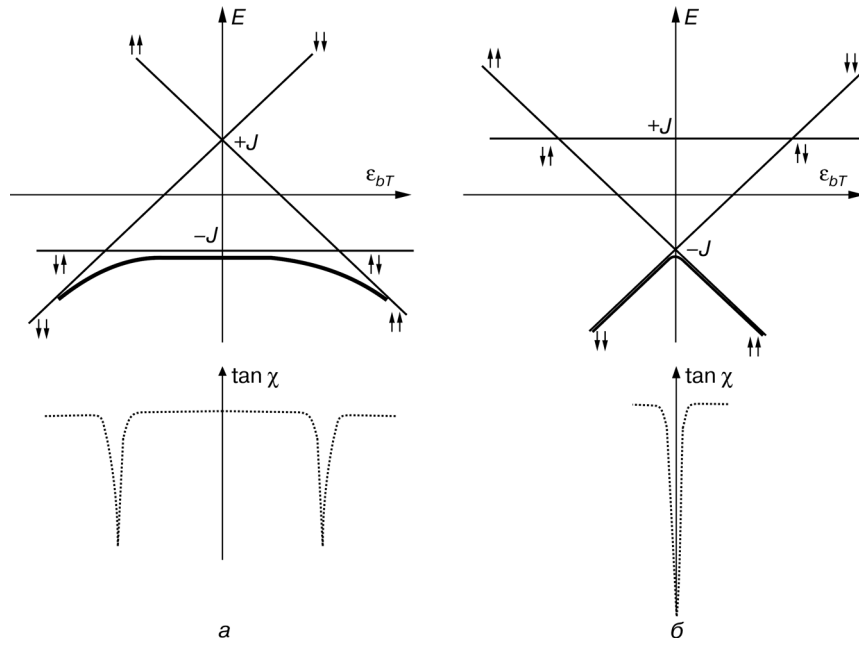
Таким образом, антиферромагнитное состояние является энергетически более выгодным.

## 7.2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УРОВНИ СИСТЕМЫ СВЯЗАННЫХ КУБИТОВ

Гамильтониан системы двух связанных кубитов, изображенных на рис. 7.1, очевидным образом записывается как  $H = H_1 + H_2 + H_{int}$ . Здесь  $H_1$  и  $H_2$  — гамильтонианы невзаимодействующих кубитов и  $H_{int}$  описывает связь между ними. Как рассмотрено ранее, в двухуровневом приближении гамильтониан кубита выражается через матрицы Паули. Таким образом, получаем

$$H_{2qbs} = -\frac{\Delta_1}{2} \sigma_x^{(1)} - \frac{\Delta_2}{2} \sigma_x^{(2)} - \frac{\varepsilon_1}{2} \sigma_z^{(1)} - \frac{\varepsilon_2}{2} \sigma_z^{(2)} + \frac{J}{2} \sigma_z^{(1)} \sigma_z^{(2)}, \quad (7.7)$$

где, как обычно,  $\Delta_{1,2}$  — туннельное расщепление энергетических уровней соответствующего кубита;  $\varepsilon_{1,2}$  — внешний магнитный поток в энергетических единицах измерения, который характеризует отклонение потенциала кубитов от точки вырождения;



**Рис. 7.2.** Схема структуры энергетических уровней системы двух антиферромагнитно (а) и ферромагнитно (б) связанных кубитов (для простоты принято, что кубиты идентичны и  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$  и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{bT}$ ). Толстая линия соответствует энергии основного состояния с учетом конечной вероятности туннелирования  $\Delta_1 = \Delta_2 \neq 0$ . Под диаграммами схематически показана зависимость кривизны основного состояния от  $\varepsilon_{bT}$

$J$  — энергия связи (см. предыдущий параграф;  $J < 0$  для антиферромагнитной связи и  $J > 0$  для ферромагнитной связи). Такая двухкубитная система, описываемая этим гамильтонианом, характеризуется набором собственных состояний  $|\mu\rangle$  и собственных энергий  $E_\mu$  (где  $\mu = 0, 1, 2, 3$ ), которые могут быть найдены из уравнения  $H|\mu\rangle = E_\mu|\mu\rangle$ . Пример упрощенного решения этого уравнения ( $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ) представлен на рис. 7.2.

Для анализа состояния системы двух кубитов в параметрическом пространстве  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  рассмотрим случай «высокого» барьера между состояниями кубитов, когда вероятность туннелирования пренебрежимо мала, т. е.  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ . Тогда четырем возможным состояниям системы  $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$  соответствуют энергии:

$$\begin{aligned}
 E_{|\uparrow\uparrow\rangle} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + J, \\
 E_{|\uparrow\downarrow\rangle} &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - J, \\
 E_{|\downarrow\uparrow\rangle} &= -\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - J, \\
 E_{|\downarrow\downarrow\rangle} &= -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + J.
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

Отсюда видно, что энергии между состояниями вырождаются при  $\varepsilon_{1,2} = \pm J$  и  $\varepsilon_1 = \pm\varepsilon_2$ . Таким образом, эти линии делят пространство параметров  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  на области, в которых одно из четырех состояний  $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$  является основным.

Полученный результат легко обобщается на «квантовый» случай, когда  $\Delta_{1,2} \neq 0$ . Действительно, вдали от линий вырождения (когда величинами  $\Delta_{1,2}$  можно пренебречь) получен результат, описанный выше. Вдоль линий вырождения возникает суперпозиция соответствующих состояний, что приводит к уширению линии перехода из одного (основного) состояния в другое (возбужденное).

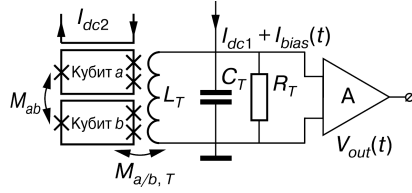
Очевидно, что для измерения диаграммы основного состояния можно использовать метод, описанный в главе 4, когда для восстановления параметров гамильтониана одиночного кубита использовался низкочастотный резонансный контур. Действительно, пусть имеется система двух связанных кубитов, каждый из которых индуктивно связан с резонансным контуром, как показано на рис. 7.3. Для независимого контроля  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  наряду с катушкой резонансного контура (которая служит также источником постоянного магнитного поля, определяя  $\varepsilon_1$ ) на образце вблизи кубитов формируется сверхпроводящая линия, несущая ток  $I_{dc2}$  и определяющая  $\varepsilon_2$  (см. рис. 7.3).\*

Как показано ранее, максимальный отклик резонансного контура будет в тех точках в пространстве параметров  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , где реализуется максимальная (по модулю) кривизна основного состояния системы двух кубитов. Очевидно, что эти точки расположены вблизи линий вырождения. Как видно из рис. 7.2, для

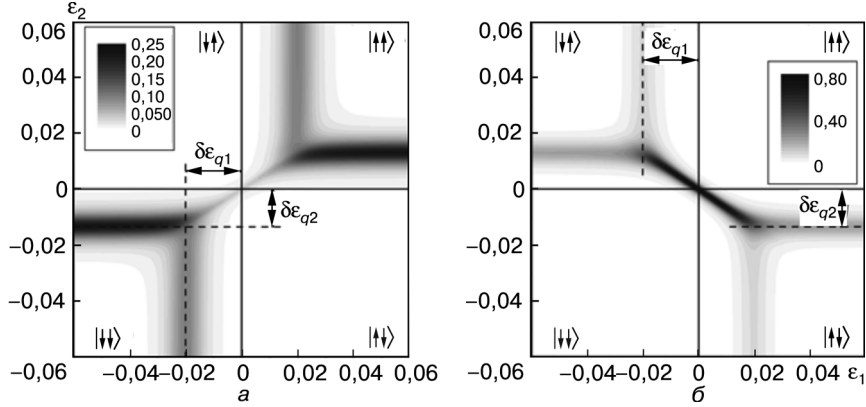
---

\* В принципе, ток катушки  $I_{dc1}$  изменяет как  $\varepsilon_1$ , так и  $\varepsilon_2$ . На практике это изменение можно скомпенсировать с помощью тока сверхпроводящей линии  $I_{dc2}$ . Математически эта операция аналогична диагонализации матрицы взаимной индуктивности.





**Рис. 7.3.** Принципиальная схема измерения. Два кубита связаны друг с другом, с DC и микроволновой линиями так же, как и с неизбежным диссипативным окружением. Состояние системы кубитов измеряется с помощью резонансного контура



**Рис. 7.4.** Рассчитанный сдвиг фазы сигнала резонансного контура для системы двух связанных кубитов с антиферромагнитной (а) и ферромагнитной (б) связью. Отклик рассчитан для контура с добротностью  $Q = 500$ ,  $L_T = 50$  нГ, взаимная индуктивность между контуром и каждым кубитом составляет  $M_{q1,T} = M_{q2,T} = 50$  пГ. Используемые параметры кубитов:  $I_{p1} = 100$  нА,  $I_{p2} = 150$  нА и  $\Delta_1/k_B = \Delta_2/k_B = 100$  мК. Температура системы  $T_{eff} = 70$  мК

ферромагнитного типа связи линии вырождения «притягиваются», увеличивая (по модулю) кривизну основного состояния в общей для двух кубитов точке вырождения и, следовательно, увеличивая измеряемый сигнал. Для антиферромагнитного типа связи линии вырождения «отталкиваются», и при  $J > \Delta$  в точке вырождения остается структура, состоящая из двух минимумов (см. рис. 7.2).

Пример численного расчета отклика резонансного контура, индуктивно связанного с двухкубитной системой, показан на рис. 7.4. Для снятия вырождения между состояниями  $|\uparrow\downarrow\rangle$  и  $|\downarrow\uparrow\rangle$  выбраны кубиты со слегка различающимися параметрами, что, как правило, соответствует экспериментальной реализации.

Таким образом, сканируя по  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и контролируя  $\tan \delta$ , где  $\delta$  — фаза радиочастотного сигнала резонансного контура (см. гл. 3), можно получить экспериментально диаграмму основного состояния и, следовательно, энергию связи между кубитами.

Сначала необходимо определить однокубитные параметры. Для этого предположим, что кубит  $a$  отстроен далеко от точки вырождения таким образом, что  $\varepsilon_a$  велико по сравнению со всеми остальными характерными энергетическими величинами. Тогда кубит  $a$  имеет хорошо определенное основное состояние со средними спиновыми величинами  $\langle \sigma_z^{(a)} \rangle = 1$  и  $\langle \sigma_x^{(a)} \rangle = 0$ , которые могут быть исключены усреднением из двухкубитного гамильтониана (7.7). В результате получаем редуцированный гамильтониан:

$$H_{2qbs,red} = -\frac{\Delta_b}{2} \sigma_x^{(b)} - \frac{\varepsilon_b + J}{2} \sigma_z^{(b)}. \quad (7.9)$$

За исключением сдвижки, связанной со связью со вторым кубитом, это идентично однокубитному гамильтониану. Эта сдвижка может быть легко скомпенсирована и измерена, что позволяет вычислить связь  $J$  [33]. Параметры кубита  $\Delta_b$  и  $I_p^{(b)}$  определяют или по измерению в равновесном состоянии, или по спектроскопии, как указано в предыдущей главе. Аналогично отстраивая кубит  $b$  от точки вырождения, определяют параметры кубита  $a$ ,  $\Delta_a$  и  $I_p^{(a)}$ .

Изложенное выше можно обобщить на систему, содержащую произвольное число кубитов. Гамильтониан системы из  $N$  связанных кубитов записывается так:

$$H = \sum_i^N (\varepsilon_i \sigma_z^{(i)} + \Delta_i \sigma_x^{(i)}) + \sum_{i < j} J_{ij} \sigma_z^{(i)} \sigma_z^{(j)}. \quad (7.10)$$

Параметры  $i$ -го кубита определяют подгонкой измерений вблизи  $\varepsilon_i^* = 0$  при условии, что остальные кубиты смещены достаточно далеко от их точек вырождения. Энергия связи для любой пары кубитов  $(i, j)$  может быть получена из диаграммы их основного состояния, которая измеряется сканированием по  $\varepsilon_i^*$  и  $\varepsilon_j^*$ , когда для остальных кубитов  $\varepsilon_n \gg \Delta_n$ .

Таким образом, приходим к важному заключению: параметры гамильтониана системы  $N$  связанных кубитов могут быть вос-

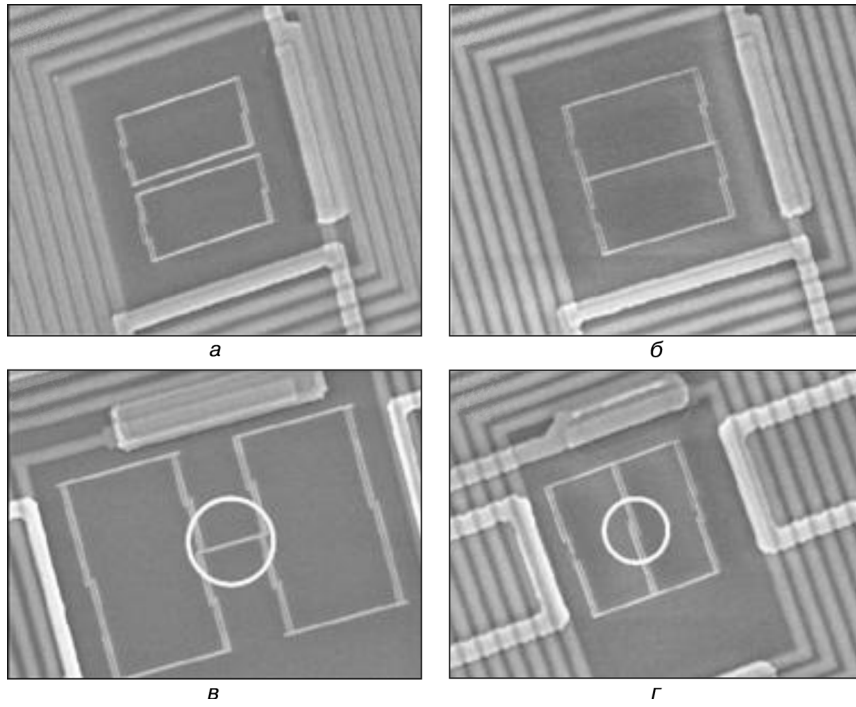
становлены из кривизны основного состояния. Экспериментально эта кривизна может быть измерена с помощью резонансного контура, индуктивно связанного с интересующей нас системой. В следующих параграфах представлены результаты некоторых подобных экспериментов.

### 7.3. СВЯЗАННЫЕ ПОТОКОВЫЕ КУБИТЫ (ЭКСПЕРИМЕНТ)

Схемы связанных потоковых кубитов приведены на рис. 7.5. Для всех этих реализаций связь между кубитами антиферромагнитна и фиксирована. Значение связи (см. рис. 7.5) варьируется от 10 мК до 1 К [22, 33, 34]. Пример экспериментально полученной диаграммы основного состояния и ее теоретическая подгонка для образца (рис. 7.5, *з*) показаны на рис. 7.6 (см. вклейку). Аналогично тому, как детально описано в конце п. 7.2, измерена трехмерная диаграмма основного состояния системы, состоящей из трех потоковых кубитов. Параметры гамильтониана этой системы получены подгонкой измерений, выполненных вдалеке от общей точки вырождения. Микрограф исследуемого образца представлен на рис. 7.7. Последующие измерения вокруг их общей точки вырождения показывают полное согласие с теоретическими предположениями, которые следуют из свойств восстановленного гамильтониана [35].

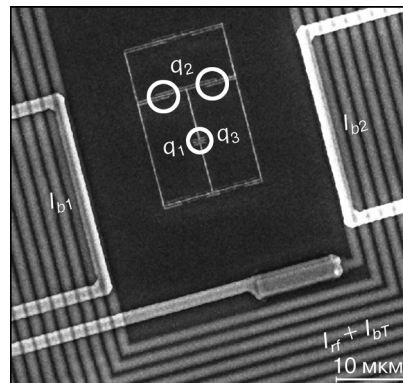
Также была выполнена схема для потоковых кубитов с ферромагнитной связью. Был изготовлен четырехкубитный образец, в котором сосуществует ферромагнитная и антиферромагнитная связи. Его эквивалентная электрическая схема и микрограф показаны на рис. 7.8. Кубиты связаны друг с другом как магнитно, так и через общие джозефсоновские переходы в середине четырехкубитной структуры (см. рис. 7.8). В «витой» конструкции кубитных пар  $q_1-q_3$  и  $q_2-q_4$  (такая конструкция показана на рис. 7.1, *з*) связь между ними является ферромагнитной, в то время как другие пары кубитов связаны антиферромагнитно [36].

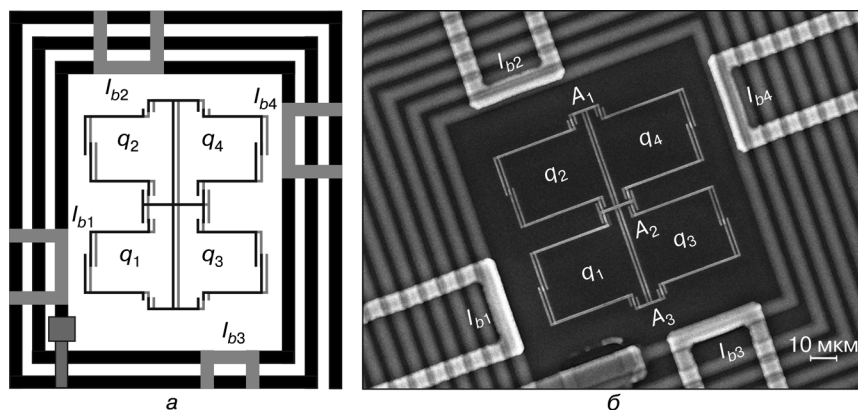
Как указывалось выше, для двухкубитной системы (см. п. 7.1) и антиферромагнитного типа связи линии вырождения в пространстве параметров ( $\epsilon_1, \epsilon_2$ ) «отталкиваются» и при  $J > \Delta$  в точке вырождения остается структура, состоящая из двух минимумов. Наоборот, для ферромагнитного типа связи линии вырождения «притягиваются», увеличивая (по модулю) кривизну основного состояния в общей для двух кубитов точке вырождения.



**Рис. 7.5.** Микрографы связанных алюминиевых кубитов, расположенных внутри ниобиевой катушки резонансного контура:  
*а* — индуктивная связь,  $J / k_B = 20$  мК; *б* — связь через общую сторону,  $J / k_B = 150$  мК;  
*в*, *г* — связь через общий джозефсоновский контакт (показанный белым кружком) для  $J / k_B = 100$  мК и 1 К соответственно [6]

**Рис. 7.7.** Микрограф трехкубитного Al образца, расположенного внутри ниобиевой катушки резонансного контура. С помощью подгонки диаграммы основного состояния определены его параметры:  $J_{12}/k_B = J_{13}/k_B = J_{23}/k_B = 0,61$  К;  $\Delta_1/k_B = \Delta_2/k_B = \Delta_3/k_B = 70$  мК;  $I_{p1} = I_{p2} = 115$  нА;  $I_{p3} = 125$  нА. Кружками выделены контакты связи [35]





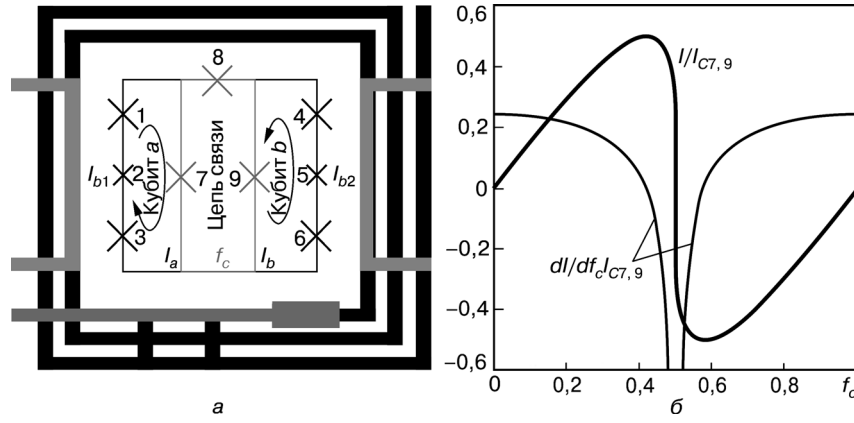
**Рис. 7.8.** Принципиальная схема (а) и микрограф (б) четырехкубитного алюминиевого образца, расположенного внутри ниобиевой катушки резонансного контура [36]

Двумерное сечение четырехмерного пространства  $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$  для четырехкубитного образца показано на рис. 7.9 (см. вклейку). Действительно, между линиями вырождения  $(q_1, q_2)$ ,  $(q_2, q_3)$  и  $(q_1, q_4)$  наблюдается отталкивание, что указывает на антиферромагнитный тип связи между этими парами кубитов. Наблюдаемое «притяжение» между кривыми  $(q_1, q_3)$  наглядно демонстрирует их ферромагнитную связь (см. рис. 7.9 на вклейке).

Отметим, что в отличие от рис. 7.6 (см. вклейку, где по осям отложены внешние магнитные потоки различных кубитов), на рис. 7.9 (см. вклейку) переменной по оси абсцисс является постоянный ток катушки резонансного контура  $I_{bT}$ . Магнитный поток, создаваемый этим током, смещает все кубиты одновременно. Однако чувствительность кубитов к  $I_{b1}$  разная (это показал численный расчет) и уменьшается в порядке  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . Поэтому кривые вырождения кубитов имеют разные наклоны, что позволяет их идентифицировать [36].

#### 7.4. КОНТРОЛИРУЕМАЯ СВЯЗЬ МЕЖДУ КУБИТАМИ

Как показано в п. 7.1, связь между потоковыми кубитами через джозефсоновский контакт (см. рис. 7.1, в) зависит от его джозефсоновской энергии. Тогда очевидно, что задавая разницу фаз на контакте (например, пропуская ток через контакт), можно контролировать в определенных пределах связь между кубитами.



**Рис. 7.10.** Схема образца с контролируемой связью между кубитами: *a* — контакты 1, 2 и 3 образуют кубит *a*, контакты 4, 5 и 6 — кубит *b*. Серым выделена цепь связи, образованная контактами 7, 8 и 9. Отношения между джозефсоновскими энергиями контактов следующие:  $E_8 / E_{7,9} = 1/2$ ;  $E_{2,5} : E_{1,3,4,6} = 0,75$ ;  $E_1 / E_7 = 7/20$ ; *b* — зависимость тока цепи связи и энергии связи от внешнего магнитного потока

Действительно, рассмотрим схему образца, схематично представленную на рис. 7.10, *a*, для случая, когда через джозефсоновский контакт, расположенный на общей стороне кубитов, течет ток. Тогда потенциал (7.1) можно переписать следующим образом [37]:

$$U_J = -E_0 \cos \varphi_0 - (I_T / 2e) \cos \varphi_0 - E[\cos \varphi_1 + \cos \varphi_3 + \alpha \cos(\varphi_x^a - \varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_0) + \cos \varphi_4 + \cos \varphi_6 + \alpha \cos(\varphi_x^b - \varphi_4 - \varphi_6 + \varphi_0)]. \quad (7.11)$$

Управляющий ток  $I_T$  не должен превышать критический ток контакта. Точно так же, как выполнено в п. 7.1, находим равновесную фазу:

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\frac{I_T}{2eE_0}\right) + \varphi_0^{(1)}\left(\frac{E}{E_0}\right) + \varphi_0^{(2)}\left(\frac{E}{E_0}\right)^2 + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^3\right]. \quad (7.12)$$

Для того чтобы кубиты оставались в точке вырождения, изменение внешнего потока, вызванное управляющим током, должно быть скомпенсировано внешним потоком. В первом порядке малости изменение внешнего потока записывается так:

$$\varphi_x^{a/b} = \pi \pm \arcsin\left(\frac{I_T}{2eE_0}\right). \quad (7.13)$$

Для ферромагнитной связи (как и в случае постоянной джозефсоновской энергии общего контакта, см. п. 7.1) токи, текущие по общей стороне кубитов, компенсируют друг друга:

$$\left(\varphi_0^{(1)}\right)^F = \left(\varphi_0^{(2)}\right)^F = 0, \quad (7.14)$$

а остальные фазы заданы уравнением (7.2).

Для ферромагнитной связи фазы также описывают уравнением (7.5) и  $\varphi_1^A = -\varphi_4^A$  с  $\varphi_0^{(1)}$  измененными  $\varphi_{1,4}^{(1)}$ , в результате чего имеем

$$\left(\varphi_0^{(1)}\right)^A = \pm 2 \frac{I_p / 2eE}{\sqrt{1 - (I_T / 2eE_0)^2}}. \quad (7.15)$$

Используя представление потенциала (7.1), получаем обобщение формулы (7.6):

$$U_J(\varphi^A) = U_J(\varphi^F) - \frac{2I_p^2}{\sqrt{(2eE_0)^2 - I_T^2}} + O\left[\left(\frac{E}{E_0}\right)^2\right]. \quad (7.16)$$

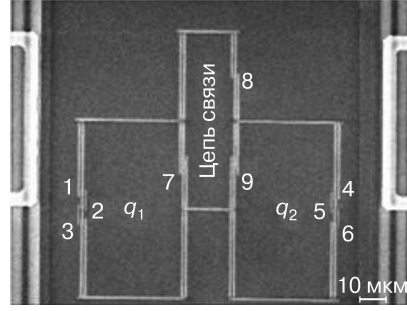
На практике исследователи стараются избегать гальванических контактов с кубитами, которые являются потенциальными источниками дополнительных шумов. Поэтому была предложена схема, представленная на рис. 7.10, в которой цепь связи контролируется внешним магнитным потоком. Действительно, приложенный к цепи связи внешний магнитный поток (см. рис. 7.10), определяет джозефсоновскую энергию контактов 7 и 9 и, следовательно, связь между кубитами.

Для вычисления энергии связи  $J$  у образца, приведенного на рис. 7.10, с параметрами  $E_{7,9} = E$  и  $E_8 = \alpha_c E$ , рассмотрим потенциал:

$$U_J = U_a(\varphi_a + \varphi_7) + U_b(\varphi_b + \varphi_9) - E[\cos \varphi_7 + \cos \varphi_9 + \alpha_c \cos(\varphi_c - \varphi_7 - \varphi_9)]. \quad (7.17)$$

Здесь  $\varphi_{a,b,c}$  — внешние магнитные потоки (в единицах фазы) кубитов  $a$ ,  $b$  и цепи связи  $c$  соответственно, а энергии кубитов  $U_{a,b}$  уже минимизированы по их внутренним степеням свободы  $\varphi_{1-6}$ .

**Рис. 7.11.** Микрограф цепи с контролируемой связью между кубитами. Цифрами обозначены джозефсоновские контакты [6]



Как и в предыдущих случаях, решение уравнений  $\partial U_J : \partial \varphi_7 = \partial U_J / \partial \varphi_9 = 0$  раскладываем в ряд по  $E^{-1}$ , учитывая, что в первом порядке  $\varphi_7 = \varphi_9 = \varphi$ . Поскольку  $-2eU'_{a,b} = \pm I_{p;a,b}$ , где  $I_{p;a,b}$  — незатухающий ток кубитов  $a, b$  соответственно, то для членов, пропорциональных  $I_{pa} I_{pb}$ , находим

$$J = \frac{I'(\varphi_c)}{2e(I_c^2 - I(\varphi_c)^2)} I_{pa} I_{pb}, \quad (7.18)$$

где  $I(\varphi_c) = I_c \sin \varphi$  — ток цепи связи и  $I_c = 2eE$ . Из полученной формулы видно, что как знак, так и величина связи зависят от производной по внешнему магнитному потоку ток-фазовой зависимости цепи связи. Соответствующие кривые показаны на рис. 7.10, б.

Для экспериментальной реализации идей, описанных выше, внутри ниобиевой катушки резонансного контура был изготовлен алюминиевый образец, микрограф которого представлен на рис. 7.11 [38]. Диаграмма основного состояния этой двухкубитной системы была измерена в зависимости от внешнего магнитного потока цепи связи. Полученные экспериментальные результаты показаны на рис. 7.12 (см. вклейку). Как видно из рисунка, при изменении управляющего потока связь между кубитами плавно изменяется с ферромагнитной на антиферромагнитную, проходя через ноль.

## 7.5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ СВЯЗАННЫХ КУБИТОВ

В предыдущих параграфах этой главы рассмотрено, как могут быть реализованы системы из нескольких кубитов с различными типами связи между ними. В дальнейшем нашей целью будет исследование динамического поведения возбуждаемой двухкубитной системы. Сначала представим уравнения, необходимые для описания суперпозиционного состояния связанных кубитов,



а затем — результаты экспериментального и теоретического исследования системы двух потоковых кубитов в контролирующем переменном электромагнитном поле.

### Гамильтониан

Как показано ранее, вблизи точки вырождения одиночный потоковый кубит может быть описан псевдоспиновым гамильтонианом  $H_{1qb} = -\frac{\Delta}{2}\sigma_x - \frac{\varepsilon(t)}{2}\sigma_z$ . На рис. 7.3 приведена система двух связанных потоковых кубитов. Для этой системы эффективный гамильтониан  $H_{2qbs}$  имеет вид (7.7), где  $J$  — энергия связи между кубитами;  $\sigma_x^{(i)}$  и  $\sigma_z^{(i)}$  — матрицы Паули в собственном базисе оператора тока в  $i$ -м  $\{|\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle\}$  кубите; а именно:  $\sigma_a^{(1)} = \sigma_a \otimes \sigma_0$ ,  $\sigma_a^{(2)} = \sigma_0 \otimes \sigma_a$ ,  $\sigma_0$  — единичная матрица. Оператор тока определяется так:  $I_i = -I_p^{(i)}\sigma_z^{(i)}$ , где  $I_p^{(i)}$  — абсолютное значение незатухающего тока в  $i$ -м кубите. Таким образом, собственные состояния матрицы  $\sigma_z$  соответствуют току в  $i$ -м кубите по направлению часовой стрелки ( $\sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$ ) и против ( $\sigma_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$ ). Туннельные амплитуды  $\Delta_i$  предполагают постоянными. Смещения  $\varepsilon_i = 2I_p^{(i)}\Phi_0 f^{(i)}(t)$  контролируются (безразмерными) магнитными потоками через  $i$ -й кубит  $f^{(i)}(t) = \Phi_i/\Phi_0 - 1/2$ . Эти потоки состоят из трех компонент:

$$f^{(i)}(t) = f_i + \frac{M_i I_L}{\Phi_0} + f_{ac} \sin \omega t. \quad (7.19)$$

Здесь  $f_i$  — адиабатически медленно изменяющийся магнитный поток, создаваемый токами в катушках с постоянным током. Второй член описывает поток, индуцированный током  $I_L$  в катушке резонансного контура, к которому  $i$ -й кубит подсоединен через взаимную индуктивность  $M_i$ . Член  $f_{ac} \sin \omega t$  — гармоническая компонента возбуждения кубита, обычно прилагаемая со стороны микроволновой антенны, расположенной на том же чипе.

### Запутывание

Целесообразно выбрать для матрицы плотности следующую параметризацию:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{R_{\alpha\beta}}{4} \sigma_\alpha \otimes \sigma_\beta = \\ &= \frac{R_{00}}{4} \sigma_0 \otimes \sigma_0 + \frac{R_{a0}}{4} \sigma_a \otimes \sigma_0 + \frac{R_{0b}}{4} \sigma_0 \otimes \sigma_b + \frac{R_{ab}}{4} \sigma_a \otimes \sigma_b, \end{aligned} \quad (7.20)$$

которая (см. например, работы [39, 40]), применима как для определения, так и для вычисления меры запутывания и других характеристик многокубитных систем. Здесь  $\alpha, \beta = 0, x, y, z$  и  $a, b = x, y, z$  и подразумевается суммирование по дважды повторяющимся индексам. Два вектора,  $R_{a0}$  и  $R_{0b}$ , так называемые векторы когерентности или блоховские векторы, определяют свойства индивидуальных кубитов, в то время как тензоры  $R_{ab}$  (тензоры корреляции) учитывают корреляции.

Следуя работе [39], определяем меру запутывания:

$$\tilde{E} = \frac{1}{3} \text{Tr}(M^T M), \quad M_{ab} = R_{ab} - R_{a0} R_{0b}. \quad (7.21)$$

Эта мера запутывания удовлетворяет нескольким целесообразным требованиям ( $0 \leq \tilde{E} \leq 1$ ), в частности, для сепарабельного состояния-произведения  $\tilde{E} = 0$  и для чистого состояния с зануляющимися векторами Блоха  $\tilde{E} = 1$ , что соответствует максимальному запутыванию.

### Уравнение Лиувилля

Без учета релаксационных процессов динамика матрицы плотности может быть описана уравнением Лиувилля,  $i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho]$ , которое, в принципе, является комплексным уравнением. Надлежащий выбор параметризации позволяет переписать уравнение Лиувилля в форме системы уравнений с минимальным числом уравнений (3 — для одного кубита и 15 — для двух связанных кубитов). Здесь выбрана параметризация в виде (7.20). Это позволяет использовать свойства матрицы плотности: эрмитовость (которая приводит к тому, что функции  $R_{\alpha\beta}$  — вещественные) и условие нормировки  $\text{Tr} \rho = 1$  (отсюда  $R_{00} = 1$ ). В результате матрица плотности параметризуется 15 независимыми вещественными величинами. Отметим соотношения

$$\mathrm{Tr}(\rho\sigma_a^{(1)}) = R_{a0}, \quad \mathrm{Tr}(\rho\sigma_b^{(2)}) = R_{0b}, \quad (7.22)$$

которые легко проверить прямой подстановкой.

После несложных преобразований уравнение Лиувилля может быть записано в виде системы уравнений для функций  $R_{\alpha\beta}$  [41]:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{i0} &= \varepsilon_{mni} B_m^{(1)} R_{n0} + \varepsilon_{3ni} J R_{n3}, \\ \dot{R}_{0j} &= \varepsilon_{mnj} B_m^{(2)} R_{0n} + \varepsilon_{3nj} J R_{3n}, \\ \dot{R}_{ij} &= \varepsilon_{mni} B_m^{(1)} R_{nj} + \varepsilon_{mnj} B_m^{(2)} R_{in} + \delta_{j3} \varepsilon_{3ni} J R_{n0} + \delta_{i3} \varepsilon_{3nj} J R_{0n}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

где  $\mathbf{B}^{(i)}$  — «локальные магнитные поля», которые для потоковых кубитов определены как  $\mathbf{B}^{(i)} = (-\Delta_i, 0, -\varepsilon_i)$ ;  $\varepsilon_{mni}$  — символы Леви-Чивита.

### Эффективная индуктивность связанных кубитов

Для описания эффективной (эквивалентной) индуктивности связанных кубитов важно отметить, что ток в  $i$ -м кубите зависит от потоков в обоих кубитах:  $I_{qb}^{(i)} = I_{qb}^{(i)}(\Phi_x^{(a)}, \Phi_x^{(b)})$ . Здесь потоки  $\Phi_x^{(a,b)}$  состоят из постоянной  $DC$  части  $\Phi_i$  и потока, индуцированного током  $I_L$  в петле резонансного контура:  $\Phi_x^{(i)} = \Phi_i + M I_L$ . Для простоты полагаем, что взаимная индуктивность  $M$  кубита и резонансного контура одинакова для обоих кубитов (более детально об этом см. в работе [19]). Тогда производная тока в  $i$ -м кубите по времени принимает вид

$$\dot{I}_{qb}^{(i)} = \left( \frac{\partial}{\partial \Phi_x^{(a)}} + \frac{\partial}{\partial \Phi_x^{(b)}} \right) I_{qb}^{(i)} \cdot M \dot{I}_L. \quad (7.24)$$

В пределе малого тока накачки в резонансном контуре можно заменить  $\Phi_i$  на  $\Phi_x^{(i)}$  и определить эффективную индуктивность кубита с симметричным изменением потока в обоих кубитах  $\Phi_x = (\Phi_a, \Phi_b)$  [33]:

$$I_i^{-1} = \frac{\partial}{\partial \Phi_x} I_{qb}^{(i)} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial \Phi_a} + \frac{\partial}{\partial \Phi_b} \right) I_{qb}^{(i)}. \quad (7.25)$$

Тогда для случая кубитов с малыми временами релаксации получаем (аналогично тому, как показано выше для одиночного кубита) на резонансной частоте ( $\xi_0 = 0$ ) выражение для фазового сдвига  $\delta$ :

$$\tan \delta \approx Q_0 \sum_{i=1,2} \frac{L_0}{L_q^{(i)}}, \quad L_0 \left( L_q^{(i)} \right)^{-1} = k^2 L_i L_i^{-1}, \quad (7.26)$$

записанное в терминах параметрических индуктивностей  $L_q^{(i)}$ .

## 7.6. СПЕКТРОСКОПИЯ ПРИ СЛАБОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

В предыдущей главе рассмотрено, как измерение одиночных кубитов позволяет определить их параметры: туннельные амплитуды  $\Delta_{a(b)}$  и незатухающие токи  $I_p^{a(b)}$ . В работе [22] показано, что для определения параметров систем с одиночными и несколькими связанными кубитами могут быть использованы как измерения в равновесном состоянии, так и спектроскопия. В этом параграфе продемонстрировано это на примере системы двух потоковых кубитов, описываемых гамильтонианом (7.7). После нахождения однокубитных параметров определялась энергия связи  $J$  по отстройке линии провалов от линии  $\Phi_{a/b} = 0$  (см. формулу (7.9)), как это видно при измерении основного состояния на рис. 7.13, а) (см. вклейку).

Далее кубиты возбуждались магнитным потоком  $\Phi_{ac} \sin \omega t$  с малой амплитудой и разными частотами. Предполагалось, что положение резонансных переходов с уровня  $E_j$  на вышележащий уровень  $E_i$  определяется однофотонным соотношением:  $\Delta E_{ij}(\Phi_a, \Phi_b) = \hbar\omega$ , которое имеет место, когда расстояние между уровнями  $\Delta E_{ij} = E_i - E_j$  связывается энергией одного фотона  $\hbar\omega$ . На рис. 7.13, б) (см. вклейку) была использована частота в промежутке между двумя расстояниями между однокубитными уровнями ( $\Delta_b < \hbar\omega < \Delta_a$ ) и, следовательно, видны только переходы на первый возбужденный уровень. Для более высоких частот видны также переходы на второй и третий возбужденные уровни, как это видно на рис. 7.13, в, г) (см. вклейку). На экспериментально измеренные графики наложены контурные линии на рис. 7.13, б—г) (см. вклейку) для трех различных частот, для которых вы-

полняется условие  $\Delta E_{ij}(\Phi_a, \Phi_b) = \hbar\omega$ ; энергетические уровни  $E_i = E_i(\Phi_a, \Phi_b)$  найдены путем диагонализации гамильтониана.

На рис. 7.14 (см. вклейку) показан пример теоретических вычислений фазового сдвига напряжения на резонаторе  $\delta$  для частоты возбуждения  $\omega/2\pi = 17,6$  ГГц (см. рис. 7.13, *в* на вклейке). Параметры, найденные подгонкой экспериментальных результатов, следующие: туннельные амплитуды  $\Delta_{a(b)}/h = 15,8$  (3,5) ГГц, энергетическое смещение  $I_p^{(b)}\Phi_0/h = 375$  (700) ГГц (что соответствует  $I_p^{(b)} = 120$  (225) нА), энергия межкубитного взаимодействия  $J/h = 3,8$  ГГц и величина, которая описывает связь между кубитами и контуром, составляет  $\Xi_{a(b)} = 1,4$  (2,6)  $\cdot 10^{-3}$ , которую определили как  $\Xi_i = k_i^2 Q_0 (L_i I_p^{(i)} / \Phi_0)$ . Резонансы на рис. 7.14 (см. вклейку) проявляются как линии, с одной стороны от которых идет пик, с другой — провал, как описано в п. 6.1. Широкий провал вокруг  $f_b \sim 0$  связан с кривизной основного состояния. Линии — это контурные линии, которые показывают, где фотонная энергия  $\hbar\omega$  соединяет соответствующие уровни энергии: основной и первый возбужденный (черная линия), основной и второй возбужденный (белая линия) и второй возбужденный и верхний (третий возбужденный) уровни (оранжевая линия). Интересна ситуация, когда энергия одного фотона может возбудить систему на промежуточный уровень (на рис. 7.14 на вклейке — второй возбужденный), а затем второй фотон с такой же энергией может возбудить систему на вышележащий уровень (третий возбужденный уровень на рис. 7.14 на вклейке). Это показано на рис. 7.14 (см. вклейку) белой окружностью, которая обводит область, где сигнал усиливается. Серая окружность показывает, что имеется случай, когда такое усиление не видно. Это происходит тогда, когда первичное возбуждение (на второй возбужденный уровень) создает такую заселенность (близкую к 1/2), что сигнал близок к максимальному. Такие лестничные переходы более подробно рассмотрены далее.

## 7.7. ПРЯМЫЕ И ЛЕСТНИЧНЫЕ МНОГОФОТОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ

Теперь рассмотрим исследования резонансного возбуждения системы двух кубитов при сильном возбуждении. Сначала опишем эффекты резонансного возбуждения в системе в терминах энергетической структуры, меры запутывания и наблюдаемой величины — фазового сдвига. Затем представим результаты с многофотонными возбуждениями двух типов: прямые (когда энергия нескольких фотонов  $k \cdot \hbar\omega$  соединяет расстояния между уровнями  $\Delta E_{ij}$ ) и лестничные (когда переход происходит через промежуточный уровень). После этого продемонстрируем, как это может быть использовано для создания инверсной заселенности в диссипативной двухкубитной системе.

### Двухкубитная система при сильном возбуждении

Для описания системы двух связанных кубитов, находящихся под воздействием сильного возбуждающего сигнала, приведены результаты вычислений матрицы плотности  $\rho$  (для чего решено уравнение Лиувилля), фазового сдвига напряжения на резонаторе  $\delta$  (которое вычислено с использованием эффективных индуктивностей кубитов) и меры запутывания  $\tilde{E}$ , используя уравнения (7.21)–(7.26). Таким образом построены графики, приведенные на рис. 7.15 (см. вклейку), для набора параметров двухкубитной системы, реализованной в работе [34]:  $\Delta_{a(b)}/h = 1,2(0,9)$  ГГц,  $I_p^{(a,b)}\Phi_0/h = 990$  ГГц,  $J/h = 0,84$  ГГц,  $\Xi_{a,b} = 1,8 \cdot 10^{-3}$ , а возбуждающая частота взята  $\omega/2\pi = 4$  ГГц; также полагали для этих вычислений симметричное изменение  $DC$  потоков:  $f_a = f_b \equiv f_{dc}$ . Четыре энергетических уровня показаны на рис. 7.15, *a* (см. вклейку). Для простоты здесь не учтены релаксационные процессы (в дальнейшем этому вопросу уделено отдельное внимание) и рассмотрен случай, когда характерное время измерений  $T_p = 2\pi/\omega_p$  больше, чем характерные времена динамики кубитов. В этом случае резонансный контур фактически измеряет усредненные характеристики состояний кубитов, поэтому рассматриваем усредненные по времени фазовый сдвиг и меру запутывания.

Когда энергия  $k$  фотонов равна разности энергий между двумя уровнями  $E_j$  и  $E_i$ , ожидаем резонансное многофотонное возбуждение на верхний уровень. Соответственно, на рис. 7.15 (см.

вклейку) показано положение возможных одно-, двух- и трехфотонных возбуждений стрелками длиной 4 (зеленая), 8 (коричневая) и 12 ГГц (пурпурная). Усредненная по времени суммарная вероятность протекания тока в двух кубитах по часовой стрелке,  $Z = R_{03} + R_{30}$ , показана на рис. 7.15, б (см. вклейку); черная и красная линия соответствуют случаям без возбуждения ( $f_{ac} = 0$ ) и с возбуждением ( $f_{ac} = 10^{-3}$ ). Резонансы на рис. 7.15, в (см. вклейку) в фазовом сдвиге напряжения проявляются как чередование пика и провала. Усредненная по времени мера запутывания  $\tilde{E}$ , как показано на рис. 7.15, г на вклейке, имеет пики в резонансе. Увеличение меры запутывания в резонансе связано с образованием суперпозиционного состояния. Это обстоятельство может быть использовано для контроля запутывания в системе. С другой стороны, сравнение результатов, подобных рис. 7.15, в, г, может служить основой для метода определения запутывания.

### Многофотонные переходы

На рис. 7.16, а, в, д (см. вклейку) показаны экспериментальные результаты — амплитуда напряжения на резонансном контуре как функция потоковых смещений двух связанных потоковых кубитов. Возбуждающая частота  $\omega/2\pi$  составляла 17,6 (а), 7,0 (в) и 4,1 ГГц (д). Система может быть резонансно возбуждена с уровня  $i$  на уровень  $j$ , когда выполняется многофотонное соотношение:

$$\Delta E_{ij}(f_a, f_b) \equiv E_j - E_i = k \cdot \hbar\omega. \quad (7.27)$$

Тогда вдоль контурных линий, определяемых этим соотношением, появляются резонансные структуры. Резонансы проявляются как линия типа «пик—провал». Отметим, что такая линия прерывается усиленным или ослабленным сигналом — некоторые из этих изменений показаны белыми кружочками. Это свидетельствует об изменении эффективной индуктивности, связанной с кубитами, в этих точках. Так проявляются многофотонные возбуждения лестничного типа на вышележащие уровни (подробнее см. далее).

Для понимания приведенных экспериментальных результатов на рис. 7.16, б, г, е (см. вклейку) построены контурные линии уровней для трех значений частоты с использованием соотношения (7.27). Рассмотрим сначала рис. 7.16, б (см. вклейку). Черная и красная линии показывают положение ожидаемого резонанс-

ного возбуждения с основного на первый и второй возбужденные уровни. Синяя и оранжевая линия — контурные линии для возможного перехода с первого и второго возбужденного уровней на третий. *Однофотонные резонансы* вдоль черной и красной кривых хорошо видны на рис. 7.16, *a* (см. вклейку); это использовано для спектроскопических измерений двухкубитной системы, описанных выше. Для лучшей наглядности результатов построены энергетические уровни при фиксированном потоке через кубит  $a$ ,  $f_a$ , как функция потока через кубит  $b$ ,  $f_b$ , на рис. 7.17, *a* (см. вклейку). Стрелки длиной  $\omega/2\pi = 17,6$  и  $7,0$  ГГц соединяют энергетические уровни при определенных значениях потока. Черная и красная стрелки на рис. 7.17, *a* и на рис. 7.16, *b* (оба на вклейке) показывают положение однофотонных переходов на первый и второй возбужденный уровни. Двойные зеленая и синяя стрелки на рис. 7.17 (см. вклейку) — положение двухфотонных процессов, когда возбуждение первым фотоном создает заселенность первого и второго уровней, а второй фотон возбуждает систему на вышележащий уровень. Подчеркиваем, что такое возбуждение происходит *через промежуточный уровень*. Ожидаемое положение таких резонансов показано на рис. 7.16, *b* (см. вклейку) синим кружком и зеленым квадратом. На рис. 7.16, *a* (см. вклейку) видно изменение сигнала в этих точках. Оранжевый треугольник на рис. 7.16, *b* (см. вклейку) обозначает лестничный трехфотонный резонанс  $0 - 1 - -3$  (с одним фотоном, чтобы заселить первый уровень, и двумя фотонами для заселения верхнего уровня), и это также видно на рис. 7.16, *a* (см. вклейку).

Рассуждая аналогичным образом, приходим к выводу, что на рис. 7.16, *b* (см. вклейку) резонансные линии соответствуют прямым одно- и двухфотонным переходам на первый возбужденный уровень, а особенности графиков, показанные на рис. 7.16, *c* (см. вклейку), соответствуют лестничным резонансам, обозначенным оранжевым треугольником (трехфотонный переход  $0 - -1 - 2$ ) и розовой звездочкой (четырефотонный переход  $(0 - -1 - -2)$ ). Резонансные линии на рис. 7.16, *a* (см. вклейку) обозначают прямые *одно-, двух-, трех- и четырехфотонные переходы* на первый возбужденный уровень; видны также многочисленные усиления и ослабления сигнала вдоль линий резонанса, которые соответствуют лестничным переходам на второй и третий возбужденный уровни.

Вероятность перехода из состояния  $|E_m\rangle$  в состояние  $|E_n\rangle$  определяется абсолютным значением матричного элемента оператора возбуждения. Для гамильтониана (7.7) имеем



$$T_{nm} = |\langle E_n | \hat{v} | E_m \rangle|^2, \quad \hat{v} = \frac{1}{I_p^{(b)}} (I_p^{(a)} \hat{\sigma}_z^{(a)} + I_p^{(b)} \hat{\sigma}_z^{(b)}), \quad (7.28)$$

где нормализуем оператор возбуждения на величину  $I_p^{(b)} \Phi_0 f_{ac}$ .

Соответствующие матричные элементы построены на рис. 7.17, б (см. вклейку), чтобы описать лестничные резонансы, показанные на рис. 7.16, б (см. вклейку), зеленым квадратом и синим кружком. Положение соответствующих резонансов показано на рис. 7.17, а (см. вклейку) соответственно зеленой и синей стрелками. Слева на рис. 7.17, а построены матричные элементы для переходов между тремя уровнями  $E_0$ ,  $E_1$  и  $E_3$ , а справа — для переходов между уровнями  $E_0$ ,  $E_2$  и  $E_3$ . В последнем случае матричный элемент для перехода между двумя верхними уровнями ( $E_2$  и  $E_3$ ) меньше, чем между двумя нижними ( $E_0$  и  $E_2$ ):  $T_{23} \ll T_{02}$ . А в первом случае вероятность перехода между верхними уровнями ( $E_1$  и  $E_3$ ) намного больше вероятности перехода между нижними уровнями ( $E_0$  и  $E_1$ ):  $T_{13} \gg T_{01}$ . Важно отметить, что в обоих случаях матричный элемент для прямого перехода с основного состояния в верхнее возбужденное  $T_{03}$  очень мал. (Тот факт, что вероятность прямого перехода мала, иногда обозначают термином «искусственные правила отбора», см. об этом далее, после уравнения (7.38).) Это означает, что переход на верхний уровень происходит исключительно благодаря лестничному механизму.

На вставке (см. рис. 7.16, е на вклейке) показано решение уравнения Блоха—Рэдфилда (подробнее об этом далее) для таких величин: параметр диссипации  $w = 0,1$  и амплитуда возбуждения  $f_{ac} \times 10^3 = 4, 6$  и  $8$  для рис. 7.16, а, в, д (см. вклейку) соответственно. Заселенности уровней энергии на рис. 7.17, в (см. вклейку) построены для параметров  $\omega/2\pi = 17,6$  ГГц,  $f_{ac} = 4 \times 10^{-3}$ ,  $f_a = 15 \times 10^{-3}$  как функция потока  $f_b$ , т. е. вдоль пунктирной линии на рис. 7.17, б (см. вклейку). Этот график демонстрирует два интересных явления, подобно аналогичным явлениям для атомов в поле лазера [43]. Во-первых, лестничное возбуждение показано слева, где вероятность нахождения на верхнем уровне  $P_3$  одного порядка с вероятностью заселенности промежуточного уровня  $P_1$ . Это соответствует области, обозначенной зеленым квадратом на рис. 7.16, б (см. вклейку). Во-вторых, инверсная заселенность уровней продемонстрирована справа,  $P_1 > P_0$ . В нашем случае инверсная заселенность аккумулируется на первом

уровне после релаксации с третьего возбужденного уровня, поскольку релаксация с третьего уровня на первый больше, чем релаксация с третьего на второй и с первого на основной.

### 7.8. ЛАЗЕРНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ В ДВУХКУБИТНОЙ СИСТЕМЕ

Рассмотрим влияние диссипации на динамику двухкубитной системы. Воспользуемся формализмом Блоха—Рэдфилда, который явно включает параметры релаксации, зависящие от параметров системы. Это позволяет в дальнейшем рассмотреть несколько механизмов для лазерной генерации в рамках этой четырехуровневой модели [41].

Базисные векторы для рассматриваемой двухкубитной системы  $\{|\downarrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\uparrow\uparrow\rangle\}$  составляют из однокубитных состояний:  $|\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle_{(a)}|\uparrow\rangle_{(b)}$  и т.д. Для идентификации энергетической структуры и для понимания различных параметров релаксации начнем рассмотрение со случая невзаимодействующих кубитов. Тогда уровни энергии кубитов состоят из попарного суммирования однокубитных уровней:

$$E_i^{\pm} = \pm \frac{\Delta E_i}{2} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_i^{(0)2} + \Delta_i^2}, \quad (7.29)$$

которые являются собственными значениями однокубитного стационарного гамильтониана. Это продемонстрировано на рис. 7.18, а (см. вклейку), где построены уровни энергии при фиксированном потоке в первом кубите  $f_a$  в зависимости от парциального потока во втором кубите  $f_b$ . При этом однокубитные уровни энергии выглядят как горизонтальные линии при

$E_a^{\pm} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_a^{(0)2} + \Delta_a^2}$  для первого кубита, а для второго — как пары:  $E_b^{\pm}(f_b) = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_b^{(0)}(f_b)^2 + \Delta_b^2}$ .

Теперь предположим, что релаксация в первом кубите происходит намного быстрее, чем во втором (как этого добиться — рассмотрено далее), что показано стрелками на рис. 7.18, а (см. вклейку). Теперь с четырьмя уровнями и иерархией времен релаксации имеем постановку задачи, аналогичную ситуации для лазеров. Это позволяет предлагать схемы для трех- и четырехуровневой лазерной генерации для двухкубитной системы (см. рис. 7.18, б, в на вклейке).

Только что рассмотрена система двух несвязанных кубитов. Однако такая система не может быть использована для лазерной генерации, поскольку это требует накачки с основного состояния на верхнее, что подразумевает одновременное изменение состояния двух кубитов. Это возможно только для системы взаимодействующих кубитов, которую рассмотрим далее.

Для дальнейшего анализа системы перейдем к базису собственных состояний невозмущенного гамильтониана  $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ . Эти состояния связаны с исходным (потокowym) базисом унитарной матрицей  $\hat{S}$ , состоящей из собственных векторов гамильтониана. После преобразования  $\hat{H}'_0 = \hat{S}^{-1}\hat{H}_0\hat{S}$  получаем гамильтониан  $\hat{H}'_0$  в энергетическом представлении:  $\hat{H}'_0 = \text{diag}(E_0, E_1, E_2, E_3)$ . Аналогично преобразуем оператор возбуждения:

$$\hat{V}'_0(t) = \hat{S}^{-1}\hat{V}(t)\hat{S} = \sum_{i=1,2} -\frac{1}{2}\varepsilon_i(t)\hat{\tau}_z^{(i)}, \quad \hat{\tau}_z^{(i)} = \hat{S}^{-1}\hat{\sigma}_z^{(i)}\hat{S}. \quad (7.30)$$

Имея полный гамильтониан возбуждаемой кубитной системы в представлении энергетических состояний, можно далее описывать релаксацию в этом базисе.

### Основное уравнение Блоха—Рэдфилда

Следуя [24], описываем диссипацию в открытой системе двух кубитов, предполагая, что она взаимодействует с термостатом (резервуаром). В формализме Блоха—Рэдфилда уравнение Лиувилля для квантовой системы, взаимодействующей с термостатом, преобразуется в основное уравнение для редуцированной матрицы плотности  $\rho(t)$ . После этого основное уравнение для матрицы плотности  $\rho(t)$  возбуждаемой системы в энергетическом представлении может быть записано в виде следующих дифференциальных уравнений [24]:

$$\dot{\rho}_{ij} = -i\omega_{ij}\rho_{ij} - \frac{i}{\hbar}[\hat{V}', \hat{\rho}]_{ij} + \delta_{ij} \sum_{n \neq j} \rho_{nn} W_{jn} - \gamma_{ij}\rho_{ij}. \quad (7.31)$$

Здесь  $\omega_{ij} = (E_i - E_j)/\hbar$ , и релаксационные показатели

$$W_{mn} = 2\text{Re}\Gamma_{nnmm}, \quad (7.32)$$

$$\gamma_{mn} = \sum_r (\Gamma_{mrrm} + \Gamma_{nrrn}^*) - \Gamma_{nnmm} - \Gamma_{mmnn}^* \quad (7.33)$$

заданы релаксационным тензором  $\Gamma_{lmnk}$ , который получен «золотым правилом» Ферми:

$$\Gamma_{lmnk} = \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty dt e^{-i\omega_{nk}t} \langle H_{1,lm}(t) H_{1,nk}(0) \rangle, \quad (7.34)$$

где  $\hat{H}_1(t)$  — гамильтониан взаимодействия системы с термостатом в представлении взаимодействия; угловые скобки обозначают усреднение по степеням свободы термостата. В работах [44—46] показано, что шумы от электромагнитного окружения могут быть описаны в терминах импеданса  $Z(\omega)$  от резервуара  $LC$  осцилляторов. Для простоты предполагаем, что оба кубита привязаны к одному резервуару, и тогда гамильтониан взаимодействия имеет вид  $\hat{H}_1 = \frac{1}{2}(\hat{\sigma}_z^{(a)} + \hat{\sigma}_z^{(b)})\hat{X}$  в терминах коллективной координаты резервуара  $\hat{X} = \sum_k c_k \hat{\Phi}_k$ . Здесь  $\hat{\Phi}_k$  обозначает магнитный поток (обобщенную координату) в  $k$ -м осцилляторе, который связан с кубитами силой  $c_k$ .

Тогда получаем, что выражение для тензора релаксации  $\Gamma_{lmnk}$  определяется корреляционной функцией шума  $S(\omega)$ :

$$\Gamma_{lmnk} = \frac{1}{\hbar^2} \Lambda_{lmnk} S(\omega_{nk}), \quad S(\omega) = \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \langle X(t) X(0) \rangle, \quad (7.35)$$

$$\Lambda_{lmnk} = \left( \hat{\tau}_z^{(1)} + \hat{\tau}_z^{(2)} \right)_{lm} \left( \hat{\tau}_z^{(1)} + \hat{\tau}_z^{(2)} \right)_{nk}. \quad (7.36)$$

Коррелятор шума  $S(\omega)$  вычислен в работах [45, 46] в рамках спин-бозонной модели, где показано, что его мнимая часть приводит только к малой перенормировке уровней энергии, чем можно пренебречь. Имеющая значение вещественная часть релаксационного тензора

$$\text{Re} \Gamma_{lmnk} = \frac{1}{8\hbar} \Lambda_{lmnk} J(\omega_{nk}) \left[ \coth \frac{\hbar\omega_{nk}}{2k_B T} - 1 \right] \quad (7.37)$$

определяется омической спектральной функцией окружения  $J(\omega) = w\hbar\omega$  и обрезается на некой большой частоте  $\omega_c$ ;  $w$  — безразмерный параметр, который описывает силу диссипативных эффектов; в численных вычислениях использовались  $w = 0,01$  и  $\omega_c/2\pi = 10^4$  ГГц.

Из приведенных выше уравнений следует выражение для скорости релаксации с уровня  $|n\rangle$  на уровень  $|m\rangle$ :

$$W_{mn} = \frac{1}{4\hbar} \Lambda_{nnmm} J(\omega_{mn}) \left[ \coth \frac{\hbar\omega_{mn}}{2T} - 1 \right]. \quad (7.38)$$

В работе [41] эти скорости релаксации вычислены как функции двух парциальных потоков  $f_a$  и  $f_b$ . Показано, что более быстро происходят переходы между уровнями энергии, соответствующими изменению состояния первого кубита при неизменном состоянии второго. Такая разница в скоростях релаксации представляет искусственные правила отбора, подобно тем, какие рассматривались, например, в работе [47]. В нашем случае переходы индуцируются взаимодействием с окружением и разница в скоростях релаксации связана с различием в параметрах кубитов.

Чтобы лучше понять этот вопрос, для простоты рассмотрим однокубитные времена релаксации. Из приведенных выше уравнений можно получить время энергетической и фазовой релаксации,  $T_1$  и  $T_2$ , для одного кубита. Для двухуровневой системы с двумя состояниями  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  время релаксации задано суммой  $T_1^{-1} = W_{01} + W_{10}$  [24]. Распределение Больцмана  $W_{10}/W_{01} = \exp(-\Delta E/T)$  означает, что при низких температурах основной эффект от окружения — релаксация с верхнего уровня на нижний. И теперь из уравнения (7.38) следует

$$T_1^{-1} = \frac{w\Delta^2}{2\hbar\Delta E} \coth \frac{\Delta E}{2T}. \quad (7.39)$$

Также из выражения (7.33) получаем формулу для времени декогерентности [24]:

$$T_2^{-1} = \text{Re}\gamma_{01} = \frac{1}{2} T_1^{-1} + \frac{wT}{\hbar} \frac{\varepsilon^{(0)2}}{\Delta E^2}. \quad (7.40)$$

Для вычислений, приведенных на рис. 7.18, а для двух кубитов с  $J = 0$  в окрестности точки  $f_b = f_b^*$ , в которой  $\Delta E^{(a)} = \Delta E^{(b)}$ , получаем  $T_1^{(a)}/T_1^{(b)} \simeq (\Delta_b/\Delta_a)^2$ . Лазерная генерация в четырехуровневой системе требует иерархии времен релаксации. В частности, мы полагали  $T_1^{(1)} \ll T_1^{(2)}$ . Поэтому в вычислениях было выбрано  $\Delta_1 \gg \Delta_2$  и, следовательно, первый кубит релаксировал быстрее. Это качественно объясняет появление доминирующих времен релаксации, о чем указывалось выше.

Для численных вычислений необходимо решать систему уравнений (7.31). Используя эрмитовость и нормировку матрицы плотности, 16 комплексных уравнений (7.31) могут быть сведены к 15 вещественным. Здесь воспользуемся наиболее простой параметризацией матрицы плотности,  $\rho_{ij} = x_{ij} + iy_{ij}$ . Получаем систему уравнений, удобную для численных вычислений [41]:

$$\dot{x}_{ii} = -\frac{1}{\hbar}[V', y]_{ii} + \sum_{r \neq i} W_{ir} x_{rr} - x_{ii} \sum_{r \neq i} W_{ii}, \quad i = 1, 2, 3; \quad (7.41)$$

$$\dot{x}_{ij} = \omega_{ij} y_{ij} - \frac{1}{\hbar}[V', y]_{ij} - \gamma_{ij} x_{ij}, \quad i > j; \quad (7.42)$$

$$\dot{y}_{ij} = -\omega_{ij} x_{ij} + \frac{1}{\hbar}[V', y]_{ij} - \gamma_{ij} y_{ij}, \quad i > j; \quad (7.43)$$

а также имеем соотношения:  $y_{ii} = 0$ ,  $x_{00} = 1 - (x_{11} + x_{22} + x_{33})$ ;  $x_{ji} = x_{ij}$ ,  $y_{ji} = -y_{ij}$ .

### Схемы для лазерной генерации

При рассмотрении рис. 7.18 (см. вклейку), указывалось, что система двух связанных кубитов позволяет реализовывать лазерную генерацию, используя три или четыре уровня для создания инверсной заселенности между рабочими уровнями. В работе [41] лазерная накачка в двухкубитной системе описана с использованием численного решения уравнений (7.41)–(7.43) с релаксационными параметрами, заданными выражениями (7.32), (7.33), (7.37). Кроме того, что была показана возможность создания инверсной заселенности между рабочими уровнями, рассмотрен также дополнительный сигнал с частотой, заданной расстоянием между рабочими уровнями. Это позволило стимулировать переход с верхнего рабочего уровня на нижний. Т. е. сначала возбуждение рассматривалось в виде монохроматического сигнала  $f(t) = f_{ac} \sin \omega t$  для того, чтобы накачать верхний уровень и продемонстрировать инверсную заселенность. Затем другой сигнал использовался для стимулирования перехода между двумя рабочими уровнями:  $f(t) = f_{ac} \sin \omega t + f_L \sin \omega_L t$ . Решение системы уравнений (7.41)–(7.43) позволяет получить заселенность  $i$ -го уровня двухкубитной системы,  $P_i = x_{ii}$ . Результаты вычислений приведены на рис. 7.19 (см. вклейку), где временная

динамика заселенностей уровней представлена для двух ситуаций, которые схематично показаны на вставках.

На рис. 7.19 (см. вклейку) доминирующие релаксационные переходы такие:  $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$  и  $|1\rangle \rightarrow |0\rangle$ , и теперь инверсная заселенность должна быть между уровнями  $|2\rangle$  и  $|1\rangle$ . Для этого были выбраны следующие парциальные потоки:  $f_a = 14 \times 10^{-3}$  и  $f_b = 20 \times 10^{-3}$  (эта точка обозначена кружком на рис. 7.18 на вклейке). Сначала система накачивается только одним сигналом с частотой, заданной однофотонным соотношением  $\hbar\omega = E_3 - E_0$  для рис. 7.19, а (см. вклейку), или двухфотонным соотношением  $2\hbar\omega = E_3 - E_0$  для рис. 7.19, б (см. вклейку). Эта накачка вместе с быстрой релаксацией ( $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ ) создает инверсную заселенность между уровнями  $|2\rangle$  и  $|1\rangle$ . Быстрая релаксация с рабочего уровня  $|1\rangle$  в основное состояние  $|0\rangle$  помогает увеличить инверсную заселенность между рабочими уровнями  $|2\rangle$  и  $|1\rangle$ , что и является преимуществом четырехуровневой схемы. Затем прикладывается второй сигнал с частотой, связывающей рабочие уровни ( $\hbar\omega_L = E_2 - E_1$ ). Это стимулирует переход  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ , что и обуславливает применимость данной схемы для создания четырехуровневого лазера. Для вычислений, приведенных на рис. 7.19 (см. вклейку), были взяты такие параметры:  $\omega_L/2\pi = 9$  ГГц ( $\hbar\omega_L = E_2 - E_1$ ), а также: а —  $\omega/2\pi = 47,4$  ГГц,  $f_{ac} = 5 \times 10^{-3}$ ,  $f_L = 3 \times 10^{-3}$ ; б —  $\omega/2\pi = 23,7$  ГГц,  $f_{ac} = 5 \times 10^{-3}$ ,  $f_L = 5 \times 10^{-3}$ . Параметры для кубитов приняты для реалистичной системы, реализованной в работе [42]:  $\Delta_a/h = 15,8$  ГГц,  $\Delta_b/h = 3,5$  ГГц,  $I_p^{(a)}\Phi_0/h = 375$  ГГц,  $I_p^{(b)}\Phi_0/h = 700$  ГГц,  $J/h = 3,8$  ГГц,  $k_B T/h = 1$  ГГц ( $T = 50$  мК).

При экспериментальной реализации рассмотренных схем для лазерной генерации система двух кубитов должна быть помещена в квантовый резонатор, например, в виде резонатора на линии передач, как в работе [48]. Тогда стимулированный переход между рабочими уровнями, показанный на рис. 7.19 (см. вклейку), приведет к передаче энергии от кубитов в резонатор в виде фотонов с энергией  $\hbar\omega_L = E_2 - E_1$ . Для этого разница энергий между рабочими уровнями должна быть настроена в соответствии с частотой квантового резонатора.

## ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ КУБИТ В КВАНТОВОМ РЕЗОНАТОРЕ

В настоящее время большой интерес привлекает проблема «квантовой оптики искусственных атомов» — поведения джозефсоновских кубитов в квантованном электромагнитном поле. Макроскопическую двухуровневую систему помещают в высокодобротную СВЧ-резонансную линию (квантовый резонатор) и изучают эффекты фотон-кубитного взаимодействия. Большой дипольный электрический или магнитный момент кубита, в отличие от микроатома, позволяет изучать эффекты сильной связи квантовой системы с квантованным электромагнитным полем. Эта идея была предложена и изучена экспериментально [49, 50] и теоретически [51—53] для зарядового кубита, электростатически связанного с резонатором, и для потокового кубита с индуктивной связью [54—56]. В данной главе описаны [57] результаты исследований эффектов взаимодействия 3JJ кубита с резонатором в экспериментально реализованном режиме промежуточной силы связи [56], когда число фотонов в резонаторе мало и важное значение имеет их квантование.

### 8.1. КУБИТ В КВАНТОВАННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим потоковый 3JJ кубит, связанный индуктивно с квантовым резонатором (рис. 8.1).

Полный гамильтониан системы (без учета релаксационных процессов) имеет вид

$$H = H_{qb-r} + H_{MW}, \quad (8.1)$$

где гамильтониан кубита + резонатора

$$H_{qb-r} = H_{qb} + H_r + H_{\text{int}} \quad (8.2)$$

включает в себя гамильтонианы невзаимодействующих кубита и резонатора и член взаимодействия. Гамильтониан кубита в пото-



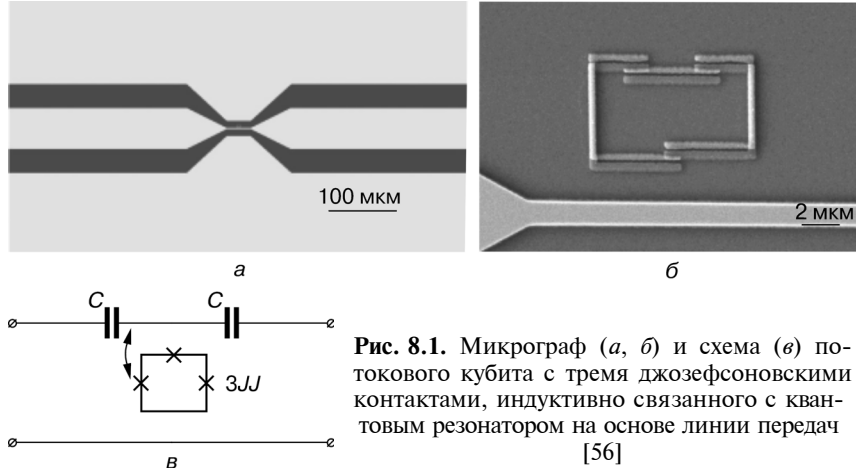


Рис. 8.1. Микрограф (а, б) и схема (в) потокового кубита с тремя джозефсоновскими контактами, индуктивно связанного с квантовым резонатором на основе линии передач [56]

ковом базисе (базисе состояний циркулирующих токов)  $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ , как показано ранее, имеет вид  $H_{qb} = -\frac{\Delta}{2}\tau_x - \frac{\varepsilon}{2}\tau_z$ , где  $\Delta$  — амплитуда туннелирования; смещение  $\varepsilon = 2I_p(\Phi - \Phi_0/2)$  определяется приложенным магнитным потоком  $\Phi$ ;  $I_p$  — незатухающий ток;  $\tau_x, \tau_z$  — матрицы Паули в потоковом базисе ( $\tau_z|\uparrow\rangle = -|\downarrow\rangle$ ). Оператор тока в кубите в этом базисе равен  $I_{qb} = -I_p\tau_z$ .

Одномодовый резонатор описывается следующим гамильтонианом:

$$H_r = \hbar\omega_r\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right), \quad (8.3)$$

где  $a$  и  $a^\dagger$  — операторы уничтожения и рождения, действующие в пространстве числа фотонов (фоковские состояния):

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n-1\rangle = \sqrt{n}|n\rangle. \quad (8.4)$$

Гамильтониан взаимодействия кубита с резонатором имеет вид

$$H_{int} = MI(0)I_{qb} = -\hbar g(a^\dagger + a)\tau_z, \quad (8.5)$$

где  $M$  — взаимная индукция;  $I_r$  — ток в резонаторе.

Через полосковую линию пропускают управляющий сигнал амплитуды  $\xi$  и частоты  $\omega_d$ , воздействующий на кубит. Гамильтониан  $H_{MW}$  описывает периодический обмен фотонами между резонатором и управляющим полем:

$$H_{MW} = \xi(a^\dagger e^{-i\omega_d t} + a e^{i\omega_d t}). \quad (8.6)$$

## 8.2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ УРОВНИ И СПЕКТРОСКОПИЯ «ОДЕТЫХ» СОСТОЯНИЙ

Взаимодействие кубита с фотонами перенормирует уровни энергии кубита аналогично фононным перенормировкам спектра электронов в металле. Таким образом, для кубита в резонаторе мы имеем дело со спектроскопией «одетых» энергетических уровней [51, 58].

Чтобы найти перенормированные уровни энергии, перейдем сначала от потокового базиса к энергетическому базису собственных состояний гамильтониана кубита, т.е. диагонализуем  $H_{qb}$ . В новом базисе для гамильтониана  $H_{qb-r}$  (без управляющего поля  $H_{MW}$ ) имеем

$$H'_{qb-r} = H'_0 + H'_{int}, \quad (8.7)$$

$$H'_0 = \frac{\hbar\omega_{qb}}{2}\sigma_z + \hbar\omega_r\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right),$$

$$H'_{int} = -\hbar g(a^\dagger + a)\left(\frac{\varepsilon}{\hbar\omega_{qb}}\sigma_z - \frac{\Delta}{\hbar\omega_{qb}}\sigma_x\right), \quad (8.8)$$

где  $\hbar\omega_{qb} = \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon^2}$  — затравочная (не перенормированная) разность уровней энергии кубита;  $\sigma_x, \sigma_z$  — матрицы Паули в энергетическом базисе  $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ ,  $(\sigma_z|g\rangle = -|g\rangle)$ . Собственные состояния  $H'_0$  равны  $|e/g, n\rangle = |e/g\rangle \otimes |n\rangle$ , а собственные значения

$$E_{e/g, n} = \pm \frac{\hbar\omega_{qb}}{2} + \hbar\omega_r\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (8.9)$$

Учтем теперь фотон-кубитное взаимодействие  $H'_{int}$ . Рассмотрим случай, когда частота резонатора  $\omega_r$  близка к частоте куби-

та  $\omega_{qb}$  (полагаем для определенности, что  $\omega_r > \omega_{qb}$ ). Тогда для каждого значения  $n$  существует пара уровней  $|e, n\rangle$  и  $|g, n+1\rangle$ , которые имеют приблизительно одинаковые значения энергии. Следовательно, чтобы найти модификацию этих уровней взаимодействием (8.5), нужно рассмотреть только переходы между этими двумя уровнями:

$$\langle g, n+1 | H'_{int} | e, n \rangle = \langle e, n | H'_{int} | g, n+1 \rangle = \hbar g_\epsilon \sqrt{n+1}, \quad g_\epsilon = g \frac{\Delta}{\hbar \omega_{qb}}. \quad (8.10)$$

Это приводит к новым собственным векторам гамильтониана  $H'_{qb-r}$ , которые выражаются в терминах собственных состояний затравочного гамильтониана  $H'_0$  следующим образом:

$$\begin{pmatrix} |-, n\rangle \\ |+, n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \eta & \cos \eta \\ -\cos \eta & \sin \eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |g, n+1\rangle \\ |e, n\rangle \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Решая задачу для новых собственных значений, получаем

$$\tan 2\eta = \frac{2g_\epsilon \sqrt{n+1}}{\delta}, \quad (8.12)$$

$$E_{\pm, n} = \hbar \omega_r (n+1) \pm \frac{\hbar \Omega_n}{2}, \quad (8.13)$$

$$\Omega_n = \sqrt{4g_\epsilon^2 (n+1) + \delta^2}, \quad (8.14)$$

$$\delta = \omega_{qb} - \omega_r < 0. \quad (8.15)$$

«Одетые» уровни энергии кубита изображены на рис. 8.2 (см. вклейку). Энергия основного состояния  $|g, 0\rangle$  равна  $E_{gr} \equiv E_{g,0} = -\frac{\hbar \delta}{2}$ . Частота  $\Omega_n$  (8.14) определяет расстояние между уровнями:  $E_{+,n} - E_{-,n} = \hbar \Omega_n$ .

Пропускание через полосковую линию пробного сигнала частоты  $\omega_d$  и измерение коэффициента прохождения сигнала позволяет проводить спектроскопию «одетых» энергетических уровней кубита. В режиме малой амплитуды  $\xi$  управляющего поля ( $H_{MW}$ ) существенными являются только несколько нижних фоковских состояний резонатора. При совпадении частоты  $\omega_d$  с

расстояниями между уровнями (показаны стрелками на рис. 8.2,  $a$  на вклейке) прохождение резонансно возрастает, что и измеряем при эксперименте. Далее рассчитаем коэффициент прохождения с учетом процессов затухания в системе и сравним теоретические и экспериментальные результаты.

### 8.3. ГАМИЛЬТОНИАН КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ КУБИТ–РЕЗОНАТОР

**Гамильтониан Джейнса—Каммингса.** Перепишем гамильтониан (8.8), введя повышающий и понижающий операторы кубита:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y), \quad \sigma^\dagger = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y), \quad (8.16)$$

так что  $\sigma^\dagger |g\rangle = |e\rangle$ ,  $\sigma^\dagger |e\rangle = 0$  и т.д. Получаем

$$H'_{int} = \hbar g_e (a^\dagger \sigma + a \sigma^\dagger) + \hbar g_e (a \sigma + a^\dagger \sigma^\dagger) - \hbar g \frac{\varepsilon}{\hbar \omega_{qb}} (a^\dagger + a) \sigma_z. \quad (8.17)$$

Вторым и третьим членами в выражении (8.17) можно пренебречь в приближении вращающейся волны (ПВВ) (см. также п. 4.2), поскольку они не сохраняют число фотонов в системе (это обосновано далее). Первый член и гамильтониан  $H'_0$  из выражения (8.8) образуют гамильтониан Джейнса—Каммингса [59]:

$$H_{JC} = \frac{\hbar \omega_{qb}}{2} \sigma_z + \hbar \omega_r \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \hbar g_e (a^\dagger \sigma + a \sigma^\dagger). \quad (8.18)$$

**Представление взаимодействия.** Рассмотрим гамильтониан взаимодействия  $H'_{int}$  в представлении взаимодействия. Для этого используем следующие соотношения:

$$e^{ia^\dagger a \omega t} a e^{-ia^\dagger a \omega t} = a e^{-i\omega t},$$

$$e^{i\frac{\omega}{2} \sigma_z t} \sigma e^{-i\frac{\omega}{2} \sigma_z t} = \sigma e^{-i\omega t}. \quad (8.19)$$

Получаем

$$H'_{int} = e^{\frac{i}{\hbar} H'_0 t} H'_{int} e^{-\frac{i}{\hbar} H'_0 t} = \hbar g_e (a \sigma^\dagger e^{i(\omega_{qb} - \omega_r)t} + h.c.) +$$

$$+ \hbar g_e (a \sigma e^{-i(\omega_{qb} + \omega_r)t} + h.c.) - \hbar g \frac{\varepsilon}{\hbar \omega_{qb}} (a e^{-i\omega_r t} + h.c.). \quad (8.20)$$

В ПВВ, где  $\omega_{qb} - \omega_r \ll \omega_{qb}$ , первый член является медленно вращающимся, в то время как второй и третий члены — быстро вращающимися, что и обосновывает пренебрежение этими членами в данном приближении.

**Приближение вращающейся волны.** При наличии управляющего поля к гамильтониану  $H'_{qb-r}$  (8.7) следует добавить член  $H_{MW}$  (8.6). В области частот вблизи резонанса  $\omega_{qb} \approx \omega_r \approx \omega_d$  результирующий полный гамильтониан в ПВВ существенно упрощается.

Рассмотрим гамильтониан возбуждаемой системы в ПВВ:

$$H_{RWA} = U(H'_{qb-r} + H_{MW})U^\dagger + i\hbar \dot{U}U^\dagger. \quad (8.21)$$

Для этого используем преобразование

$$U = \exp\left[i\omega_d t \left(a^\dagger a + \sigma_z / 2\right)\right] \quad (8.22)$$

и получаем

$$H_{RWA} = \hbar \frac{\delta\omega_{qb}}{2} \sigma_z + \hbar\delta\omega_r a^\dagger a + \hbar g_\varepsilon (a\sigma^+ + a^\dagger\sigma^-) + \xi(a + a^\dagger), \quad (8.23)$$

где  $\delta\omega_{qb} = \omega_{qb} - \omega_d$ ,  $\delta\omega_r = \omega_r - \omega_d$  — малые частотные расстройки.

**Дисперсионный режим.** В дисперсионном режиме (т. е. вдали от резонанса, в котором  $\delta = 0$ ) в результате диагонализации гамильтониана (8.18) во втором порядке по малому параметру  $g/\delta$  имеем [59]:

$$H = -\frac{1}{2} \left( \hbar\omega_{qb} + \frac{\hbar g_\varepsilon^2}{\delta} \right) \sigma_z + \left( \hbar\omega_r + \frac{\hbar g_\varepsilon^2}{\delta} \sigma_z \right) a^\dagger a. \quad (8.24)$$

Это выражение в явном виде показывает: во-первых, как энергия кубита сдвинута (перенормирована) связью с резонатором и, во-вторых, как энергия резонатора  $\hbar\omega_r$  сдвигается кубитом в разных направлениях в зависимости от того, находится ли кубит в основном или возбужденном состоянии:

$$\Delta\omega_r = \pm \frac{\hbar g_\varepsilon^2}{\omega_{qb} - \omega_r}. \quad (8.25)$$

В п. 8.5 будет показано, как в дисперсионном режиме этот сдвиг частоты позволяет осуществить измерение кубитов.

#### 8.4. ДИССИПАТИВНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ КУБИТ–РЕЗОНАТОР. КОЭФФИЦИЕНТ ПРОХОЖДЕНИЯ

Динамику диссипативной системы описывает уравнение движения для матрицы плотности  $\rho$ :

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + L[\rho], \quad (8.26)$$

которое включает динамическую часть и диссипативный член Линдблада [59]:

$$L[\rho] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 (2C_k \rho C_k^\dagger - C_k^\dagger C_k \rho - \rho C_k^\dagger C_k), \quad (8.27)$$

где

$$C_1 = \sqrt{\gamma_1} \sigma_+, \quad \gamma_1 = \frac{1}{T_1}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{\gamma_\phi}{2}} \sigma_z, \quad \gamma_\phi = \frac{1}{T_\phi} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{2T_1}, \quad C_3 = \sqrt{\kappa} a. \quad (8.28)$$

Оператор Линдблада  $L$  описывает диссипацию в резонаторе (затухание фотонов) со скоростью  $\kappa$  и декогерентность в кубите — скорость релаксации  $\gamma_1$  и скорость дефазировки  $\gamma_\phi$ . Гамильтониан в ПВВ (8.21) не зависит от времени и решение уравнения для матрицы плотности  $\rho$  (8.26) с учетом диссипации выходит на стационарное значение, которое определяет наблюдаемые величины. Интересующей нас величиной является ожидаемое значение фотонного поля в резонаторе:

$$\langle a \rangle = Sp(a\rho). \quad (8.29)$$

Гильбертово пространство композитной системы — это тензорное произведение пространств кубита и фотонов в резонаторе с базисными векторами  $|e/g, n\rangle = |e/g\rangle \otimes |n\rangle$ . Базисные векторы  $|g\rangle$  и  $|e\rangle$

$$|g\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |e\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

являются собственными векторами оператора  $\sigma_z$ . Фоковские векторы фотонного поля  $|n\rangle$  (собственные векторы оператора числа фотонов  $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ ) — векторы в бесконечномерном пространстве,  $N = \infty$ :

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \dots |n\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (8.31)$$

В базисе  $|e/g, n\rangle$  матричное уравнение (8.26) имеет вид системы бесконечного числа уравнений для бесконечномерной матрицы  $\rho_{ij}$ . Рассмотрим далее случай  $N = 2$ , который допускает аналитическое решение. При  $N \gg 1$  задача решается численно.

### Приближение слабого управляющего поля

Для нахождения аналитического решения ограничиваем фотонное пространство до  $N = 2$ , предполагая, что среднее число фотонов в резонаторе (рождаемое управляющим полем амплитуды  $\xi$ ) намного меньше единицы. Это предположение соответствует условиям эксперимента [56]. В этом случае базис  $|e/g, n\rangle$  состоит из четырех базисных векторов,

$$b_1 = |g, 0\rangle, b_2 = |e, 0\rangle, b_3 = |g, 1\rangle, b_4 = |e, 1\rangle, \quad (8.32)$$

и матрица плотности  $\rho_{ij} = \langle b_i | \rho | b_j \rangle$  имеет вид

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{e0,e0} & \rho_{e0,g0} & \rho_{e0,e1} & \rho_{e0,g1} \\ \rho_{g0,e0} & \rho_{g0,g0} & \rho_{g0,e1} & \rho_{g0,g1} \\ \rho_{e1,e0} & \rho_{e1,g0} & \rho_{e1,e1} & \rho_{e1,g1} \\ \rho_{g1,e0} & \rho_{g1,g0} & \rho_{g1,e1} & \rho_{g1,g1} \end{pmatrix}. \quad (8.33)$$

В стационарном состоянии из уравнения (8.26) получаем 16 линейных уравнений для матричных элементов  $\rho_{ij}$  (с условием  $Sp(\rho) = 1$ ). Ограничиваясь членами до первого порядка по амплитуде поля  $\xi$ , находим решение для  $\rho$ . Ненулевые элементы матрицы  $\rho_{ij}$  равны

$$\begin{aligned} \rho_{g0,g0} &= 1, \\ \rho_{g1,g0} &= \rho_{g0,g1}^* = \frac{-i(\xi/\hbar)(\delta\omega_{qb} - i\gamma)}{g_\varepsilon^2 - (\delta\omega_r - i\frac{\kappa}{2})(\delta\omega_{qb} - i\gamma)}, \end{aligned}$$

$$\rho_{e0,g0} = \rho_{g0,e0}^* = \frac{-i(\xi/\hbar)g_\varepsilon}{g_\varepsilon^2 - (\delta\omega_r - i\frac{\kappa}{2})(\delta\omega_{qb} - i\gamma)}, \quad (8.34)$$

где  $\gamma = \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_\phi$ . Подставляя уравнения (8.34) в формулу (8.29), получаем среднее значение фотонного поля в резонаторе:

$$V_{r0} \langle -ia^\dagger \rangle_{WD} = V_{r0} \frac{\xi(\delta\omega_{qb} + i\gamma)}{g_\varepsilon^2 - (\delta\omega_r + i\frac{\kappa}{2})(\delta\omega_{qb} + i\gamma)}. \quad (8.35)$$

Амплитуда прохождения сигнала  $|t|$  определяется средним значением фотонного поля в резонаторе (см. приложение в работе [57]), поэтому в соответствии с выражением (8.35) записываем

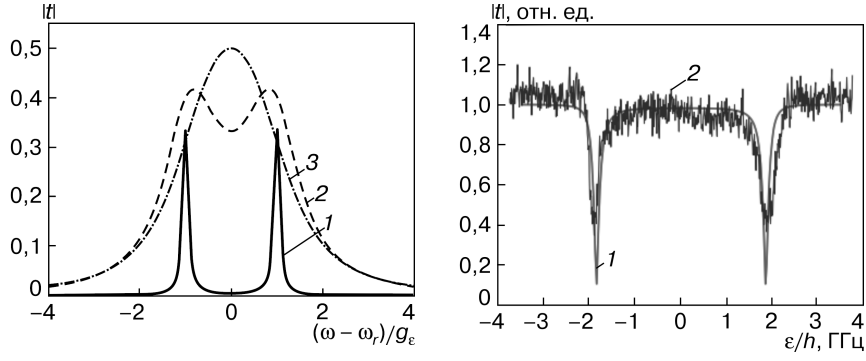
$$t_{WD} = -i\frac{\kappa_{ext}}{2} \frac{\delta\omega_{qb} + i\gamma}{g_\varepsilon^2 - (\delta\omega_r + i\frac{\kappa}{2})(\delta\omega_{qb} + i\gamma)}. \quad (8.36)$$

Величина  $|t|$  нормирована на ее значение при  $g = 0$  и  $\omega_d = \omega_r$ .

На рис. 8.3 показана зависимость амплитуды прохождения от расстройки по частоте  $\omega_d$  при  $\omega_{qb} = \omega_r$  и различных скоростях затухания  $\kappa$  и  $\gamma$ . При малых скоростях затухания  $\kappa$  и  $\gamma$  спектр прохождения демонстрирует расщепленные пики Раби (кривая 1) в соответствии со структурой «одетых» состояний, показанных на рис. 8.2 (см. вклейку). Диссипация приводит к размытию резонансных пиков (кривые 2 и 3).

Амплитуда коэффициента прохождения  $|t|$  (8.36) как функция смещения  $\varepsilon$  и расстройки  $\omega_d - \omega_r$  показана на рис. 8.4, а (см. вклейку). Параметры выбраны для сравнения с соответствующей экспериментальной зависимостью, полученной в [56] и представленной на рис. 8.4, б (см. вклейку) для  $\Delta/\hbar = 1,8$  ГГц,  $g/2\pi = 3$  МГц,  $\omega_r/2\pi = 2,5$  ГГц,  $\kappa/2\pi = 1,25 \cdot 10^{-4}$  ГГц,  $\gamma = g$ . Отметим, что рассматривается промежуточный режим связи, когда  $g = \gamma \gg \kappa$ . Амплитуда коэффициента прохождения резонансно возрастает вдоль линий, показанных на рис. 8.4, б (см. вклейку). В малой окрестности  $\omega_d \in (\omega_r - g, \omega_r + g)$  происходит расщепление пересекающихся уровней энергии.





**Рис. 8.3.** Нормированная амплитуда прохождения  $|t|$  как функция отстройки возбуждающей частоты  $\omega_d - \omega_r$  при  $\varepsilon = \varepsilon^*$  (когда  $\omega_{qb}(\varepsilon^*) = \omega_r$ ) для параметров релаксации  $\kappa$  и  $\gamma$  (в единицах  $g_\varepsilon$ ) [57]:  
 1 —  $\kappa = 0,1, \gamma = 0,1$ ; 2 —  $\kappa = 1, \gamma = 1$ ; 3 —  $\kappa = 1, \gamma = 2$

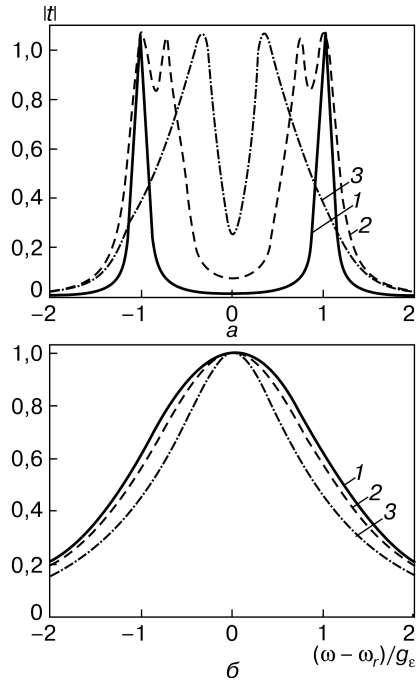
**Рис. 8.5.** Нормированная амплитуда прохождения  $|t|$  как функция энергетического смещения  $\varepsilon$  при  $\omega_d = \omega_r$ : 1 — теоретические вычисления с помощью уравнения (8.36); 2 — результаты эксперимента [57]

Более детальное сравнение теоретических и экспериментальных данных для одного из сечений зависимости  $|t|(\omega_d, \varepsilon)|_{\omega_d = \omega_r}$  показано на рис. 8.5.

### Численное решение уравнения для матрицы плотности (за пределами линейного режима)

При большой амплитуде управляющего сигнала, т.е. когда среднее число фотонов  $\langle a^\dagger a \rangle \gg 1$ , ограничение  $N = 2$  неприменимо и задачу решают численно. Например, результаты вычислений для  $N = 10$  приведены на рис. 8.6. Амплитуда прохождения во всех случаях нормирована на ее максимальное значение, и, как и ранее,  $\omega_{qb} = \omega_r$ . На рис. 8.6, а амплитуда коэффициента прохождения показана при малом затухании:  $\kappa/g_\varepsilon = \gamma/g_\varepsilon = 0,1$ . При малой амплитуде сигнала  $\xi$  кривая 1 на рис. 8.6 совпадает с аналитической зависимостью  $|t|(\omega_d)$  (см. рис. 8.3). С возрастанием  $\xi$  каждый расщепленный пик Раби дополнительно расщепля-

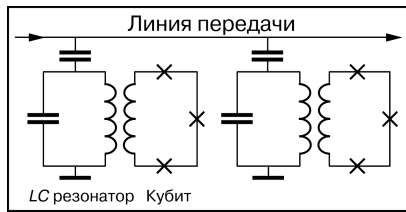
**Рис. 8.6.** Нормированная амплитуда прохождения  $|t|$  как функция отстройки возбуждающей частоты  $\omega_d - \omega_r$  при  $\varepsilon = \varepsilon^*$  (когда  $\omega_{qb}(\varepsilon^*) = \omega_r$ ) для  $\kappa/g_\varepsilon = \gamma/g_\varepsilon = 0,1$  (а) и  $\kappa/g_\varepsilon = 1$ ,  $\gamma/g_\varepsilon = 2$  (б). Кривые получены численным решением основного уравнения для  $\xi$  (в единицах  $g_\varepsilon$ ) [57]: 1 — 0,01; 2 — 0,15; 3 — 0,3



ется (рис. 8.6, кривая 2) (см. также [60]). При дальнейшем увеличении амплитуды  $\xi$  это сверхрасщепление размывается (рис. 8.6, кривая 3). Таким образом, в нелинейном режиме появляются качественно новые черты по сравнению с пределом слабого сигнала. В то же время такие качественные различия отсутствуют, если затухание достаточно велико (см. рис. 8.6, а). Рассчитаны также средние числа фотонов в резонаторе,  $n = \langle a^\dagger a \rangle$ . Для параметров на рис. 8.6 они зависят от частоты  $\omega_d$  и их максимальные значения составляют:  $n_{\max} = 0,005$  для  $\xi/g_\varepsilon = 0,01$ ,  $n_{\max} = 0,3$  для  $\xi/g_\varepsilon = 0,15$ ,  $n_{\max} = 1,8$  для  $\xi/g_\varepsilon = 0,3$ .

### 8.5. СЧИТЫВАНИЕ МНОГОКУБИТНОЙ СИСТЕМЫ: РАЗДЕЛЕНИЕ ПО ЧАСТОТЕ

Как подчеркивалось ранее, сверхпроводящие кубиты в перспективе могут быть основой для изготовления как сверхвысокочувствительных детекторов, так и приборов для квантовой передачи и обработки информации. Очевидно, что для реализации этих целей необходимы многокубитные структуры, позволяющие измерять состояние каждого кубита индивидуально. На практике это серьезно усложняет архитектуру считывающей системы, поскольку каждому кубиту необходим его собственный канал.



**Рис. 8.7.** Схема принципа измерения многих кубитов с помощью одной линии передачи: разделение по частотам (*frequency multiplexing*) [61]

В радиотехнике данная проблема хорошо известна. Например, когда считывание ин-

формации с определенного массива датчиков происходит на его конкретной частоте. Такая процедура называется разделением по частоте. Она позволяет использовать один входной и один выходной каналы связи с массивом, который несет информацию о состоянии всех датчиков.

Такой принцип измерения системы потоковых кубитов описан в работе [61]. Схема, поясняющая принцип такого измерения, приведена на рис. 8.7. Каждый кубит связан со считывающим резонатором. Все резонаторы связаны через емкость с линией передачи на одном конце и закорочены на землю на другом.

Как показано ранее, резонансная частота системы резонатор—кубит, во-первых, отличается от частоты ненагруженного резонатора (так называемый дисперсионный сдвиг) и, во-вторых, зависит от состояния кубита (см. формулу (8.25)). Таким образом, состояние кубита может быть определено по сдвигу частоты  $\Delta\omega$ ; положительный знак соответствует основному состоянию кубита, отрицательный — возбужденному. В измерительной схеме (см. рис. 8.7)  $\Delta\omega$  может быть измерена для всех резонаторов в одном измерительном цикле.

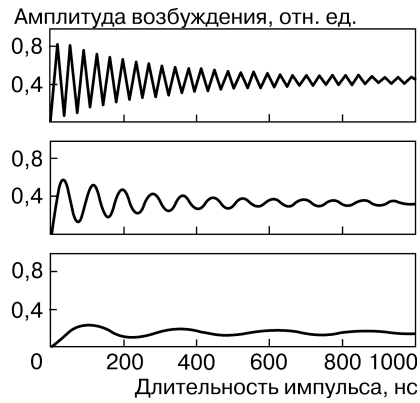
В экспериментальной реализации схемы, показанной на рис. 8.7, использованы копланарные  $\lambda/4$ -резонаторы с резонансными частотами от 9,3 до 10,3 ГГц (рис. 8.8 на вклейке). Каждый резонатор характеризуется полосой «поглощения», ширина которой определяется его добротностью. Если частота электромагнитной волны, распространяющейся по линии передачи, находится вне полос резонаторов, то передача энергии происходит без дополнительных потерь. Вблизи резонансов каждый резонатор работает как фильтр поглощения, подавляя коэффициент прохождения, поэтому его резонансная частота легко измеряется.

В первой серии экспериментов была проведена спектроскопия всех кубитов. Два микроволновых сигнала пропускались через линию передачи: один для возбуждения соответствующего кубита, который изменяет сдвиг частоты. Второй (считывающий)

**Рис. 8.10.** Осцилляции Раби одного из кубитов. Зависимость амплитуды внешнего возбуждения от длительности импульса [61]

сигнал этот сдвиг и определяет. Результаты спектроскопии показаны на рис. 8.9 (см. вклейку).

Для определения когерентных свойств кубитов использовалась обычная для такого типа измерений импульсная техника. С помощью первого импульса возбуждался исследуемый кубит. После определенной задержки посылался измерительный импульс, который по сдвигу частоты определял состояние кубита. Пример результата таких измерений приведен на рис. 8.10. Времена релаксации ( $T_1$ ) и дефазировки ( $T_2$ ) для всех кубитов массива были определены из подгонки кривых, подобных показанным на рис. 8.10 [61]. Для данного кубита (см. рис. 8.10)  $T_1 \cong \cong 1,1$  мкс и  $T_2 \cong 0,2$  мкс.



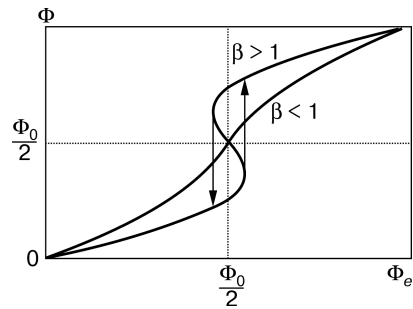
## ВЛИЯНИЕ ШУМОВ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОТОКОВЫЙ КУБИТ

В данной главе изучено влияние шума магнитного потока на свойства сверхпроводящих цепей, содержащих джозефсоновские контакты [62—64]. В п. 9.1 рассмотрено сверхпроводящее кольцо с тремя джозефсоновскими контактами — классический аналог потокового 3JJ кубита. Вычислен сверхпроводящий ток, индуцированный магнитным полем в присутствии тепловых флуктуаций. В п. 9.2 влияние классического шума изучено в квантовой системе — 3JJ кубите. Показано, что при определенных условиях имеет место аналог стохастического резонанса [65] в классических бистабильных системах. Приложенный к системе стохастический сигнал усиливает когерентные свойства кубита, в частности, квантовые осцилляции становятся не затухающими, а проявляются сколь угодно долго. Это явление названо в работе [63] незатухающими осцилляциями Раби. В п. 9.3 рассмотрена возможность «шумовой спектроскопии» многокубитных систем.

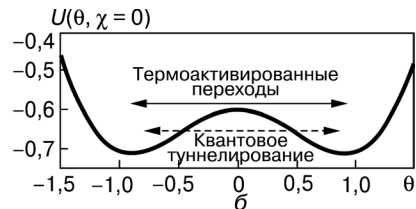
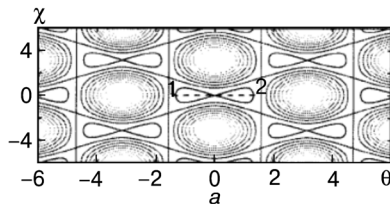
### 9.1. ШУМ МАГНИТНОГО ПОТОКА В ТРЕХКОНТАКТНОМ СКВИД

Одноконтakтный интерферометр (см. п. 2.4) является сенсором ВЧ СКВИД. В зависимости от параметра  $\beta = 2\pi LI_c / \Phi_0$  СКВИД работает либо в безгистерезисном (при  $\beta < 1$ ), либо в гистерезисном (при  $\beta > 1$ ) режиме. На рис. 9.1 показана зависимость магнитного потока в кольце  $\Phi$  от внешнего потока  $\Phi_e$  в случае, когда влиянием тепловых флуктуаций можно пренебречь. Влияние тепловых флуктуаций на одноконтakтный интерферометр и, соответственно, на ВЧ СКВИД было предметом детальных теоретических и экспериментальных исследований [66—71]. Флуктуации вызывают термоактивированные переходы в области бистабильности и размывают гистерезисную кривую.

**Рис. 9.1.** Зависимость магнитного потока  $\Phi$  в одноконтактном СКВИД от внешнего потока  $\Phi_e$



**Рис. 9.2.** Контурный график потенциала  $U(\theta, \chi)$  для  $\alpha = 0,8$  (а) и бистабильный потенциальный профиль вдоль линии 1—2 на рис. 9.2, а при  $\varphi_e = \pi$  (б) [62]



В отличие от одноконтактного интерферометра в случае кольца, содержащего три джозефсоновских контакта, бистабильное состояние реализуется при любых сколь угодно малых значениях индуктивности  $L$ . Именно это свойство, позволяющее уменьшить взаимодействие системы с окружением, делает трехконтактную конфигурацию предпочтительнее для реализации потокового кубита (см. п. 2.6). Аналогично одноконтактному СКВИД тепловые флуктуации размывают гистерезис в классическом режиме работы 3JJ кубита. Кроме того, даже при отсутствии термоактивированных переходов кубит может находиться в безгистерезисном режиме за счет квантового туннелирования (рис. 9.2). Возникает вопрос: можно ли по наблюдаемым характеристикам 3JJ кубита различить, в каком режиме — классическом или квантовом находится кубит? Для ответа на этот вопрос рассмотрим поведение классического трехконтактного интерферометра при учете шумов магнитного потока и сравним его с поведением кубита в квантовом режиме в отсутствии тепловых флуктуаций [62].

Изучаемая система представляет собой сверхпроводящую цепь (кольцо) с тремя джозефсоновскими контактами (см. рис. 2.22). Рассматриваем случай малой индуктивности кольца  $L \rightarrow 0$ , следовательно, магнитный поток в кольце совпадает с приложенным потоком  $\Phi = \Phi_e$ . Разности фаз на каждом контакте  $\varphi_i$  удовлетворяют соотношению

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi \frac{\Phi_e}{\Phi_0} \equiv \varphi_e. \quad (9.1)$$

В рамках RSJ модели ток через каждый контакт записывается в виде

$$I = \frac{\hbar C_i}{2e} \frac{d^2}{dt^2} \varphi_i + \frac{\hbar}{2e R_i} \frac{d}{dt} \varphi_i + I_{ci} \sin \varphi_i + \delta I_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.2)$$

где  $C_i$  и  $R_i$  — емкости и сопротивления контактов.

Рассмотрим практический случай, когда два контакта идентичны:  $C_1 = C_2 = C$ ,  $I_{c1} = I_{c2} = I_c$ ,  $R_1 = R_2 = R$ , а третий контакт имеет меньший критический ток (при той же критической плотности тока)  $I_{c3} = \alpha I_c$ ,  $0,5 < \alpha < 1$  и, следовательно,  $C_3 = \alpha C$ ,  $R_3 = R/\alpha$ . Присутствие белого шума задается флуктуирующими компонентами токов  $\delta I_i(t)$  с коррелятором  $\langle \delta I_i(t) \delta I_i(t') \rangle = 2kT / R_i \delta(t - t')$  и средним значением  $\langle \delta I_i(t) \rangle = 0$ .

В безразмерных единицах

$$\omega_R = 2e R I_c / \hbar, \quad \omega_R t = \tau, \quad (9.3)$$

и, пренебрегая индуктивностью  $C$ , уравнение (9.2) может быть записано в виде

$$I / I_c = d\varphi_{1,2} / d\tau + \sin \varphi_{1,2} + \delta\varphi_{1,2} = \alpha d\varphi_3 / d\tau + \sin \varphi_3 + \delta\varphi_3. \quad (9.4)$$

Корреляторы  $\delta\varphi_i$  равны

$$\langle \delta\varphi_i(\tau) \delta\varphi_i(\tau') \rangle = 2D \delta(\tau - \tau'), \quad (9.5)$$

где  $D = kT / E_J$ ;  $E_J = \hbar I_c / 2e$ .

Вводя фазы  $\theta$  и  $\chi$ :  $2\theta = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $2\chi = \varphi_1 - \varphi_2$  и учитывая, что  $\varphi_3 = \varphi_e - 2\theta$ , уравнения (9.2) в терминах фаз  $\theta$  и  $\chi$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{d\tau} &= -\cos \theta \sin \chi + 1 / 2(\delta\varphi_2 - \delta\varphi_1), \\ (1 + 2\alpha) \frac{d\theta}{d\tau} &= -\sin \theta \cos \chi + \alpha \sin(\varphi_e - 2\theta) + \delta\varphi_3(\tau) - 1 / 2(\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Эти уравнения удобно записать в виде уравнений Ланжевена, введя эффективный потенциал и случайные силы:

$$\frac{d\chi}{d\tau} = -\frac{\partial U}{\partial \chi} + \delta\chi(\tau),$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{(1+2\alpha)} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \delta\theta(\tau), \quad (9.7)$$

где эффективный потенциал и случайные силы

$$U(\theta, \chi) = -\cos \theta \cos \chi - \frac{1}{2} \alpha \cos(\varphi_e - 2\theta), \quad (9.8)$$

$$\langle \delta\chi(\tau) \delta\chi(\tau') \rangle = D\delta(\tau - \tau'),$$

$$\langle \delta\theta(\tau) \delta\theta(\tau') \rangle = \frac{3}{(1+2\alpha)^2} D\delta(\tau - \tau'). \quad (9.9)$$

Уравнения Ланжевена (9.7) описывают случайное движение «частицы» с координатами  $(\theta, \chi)$  в периодическом потенциале (9.8), который состоит из *набора двухъямных потенциалов* (см. рис. 9.2). Частица совершает термоактивированные переходы в одной из ячеек и случайное блуждание из одной ячейки в другую. Стохастические уравнения (9.7) интегрировались численно методом Ито (см., например, [72]) для различных значений параметра  $\alpha$  и интенсивности флуктуаций  $D$ . Типичные траектории  $\theta(\tau)$  и  $\chi(\tau)$  случайного движения в бистабильном потенциале показаны на рис. 9.3. Стрелки указывают на перескок из одной ячейки в другую.

Рассчитав  $\theta(\tau)$  и  $\chi(\tau)$ , получим средний циркулирующий ток в кольце как функцию заданного внешнего потока  $\varphi_e$ :

$$I(\varphi_e) = I_c \langle \langle \sin(\chi + \theta) \rangle \rangle. \quad (9.10)$$

Усреднение  $\langle \dots \rangle$  включает для каждого значения потока  $\varphi_e$  усреднение по времени траекторий  $(\theta(\tau), \chi(\tau))$  и усреднение по набору траекторий (в данном случае рассчитывалось 50 реализаций). Вычисленные таким образом ток-поток кривые для различных значений  $D$  и параметра  $\alpha$  показаны на рис. 9.4 и 9.5.

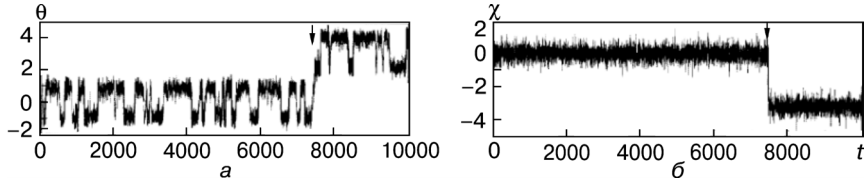


Рис. 9.3. Траектории случайного движения в бистабильном потенциале [62]:  
а —  $\theta(\tau)$ ; б —  $\chi(\tau)$



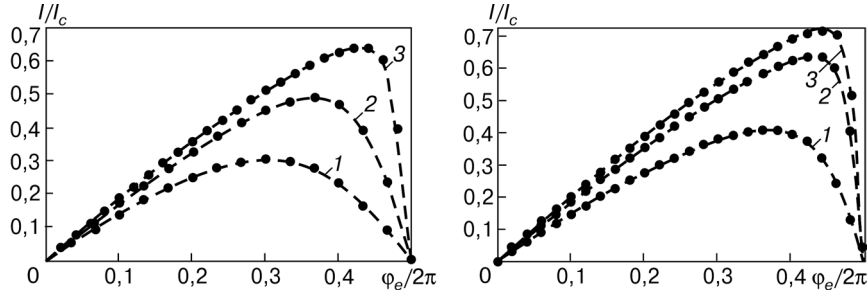


Рис. 9.4. Зависимости  $I(\varphi_e)$  для  $\alpha = 0,8$  и  $D = 0,5$  (1);  $0,25$  (2);  $0,1$  (3) [62]

Рис. 9.5. Зависимости  $I(\varphi_e)$  для  $D = 0,1$  и  $\alpha = 0,5$  (1);  $0,8$  (2);  $1,0$  (3) [62]

Отметим, что для данных уровней шумов (значений  $D$ ) зависимости  $I(\varphi_e)$  являются однозначными, т.е. гистерезис отсутствует.

Уравнениям (9.7), (9.8) соответствует уравнение Фоккера—Планка для функции распределения  $P(\chi, \theta)$ :

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \frac{\partial U}{\partial \chi} P \right) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \chi^2} + \frac{1}{(1+2\alpha)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} P \right) + \frac{1}{2} \frac{3D}{(1+2\alpha)^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \quad (9.11)$$

Уравнение Фоккера—Планка (9.11) имеет стационарное аналитическое решение (см. [72]) в специальном случае  $\alpha = 1$ , т.е. когда все три контакта идентичны. Это решение имеет вид

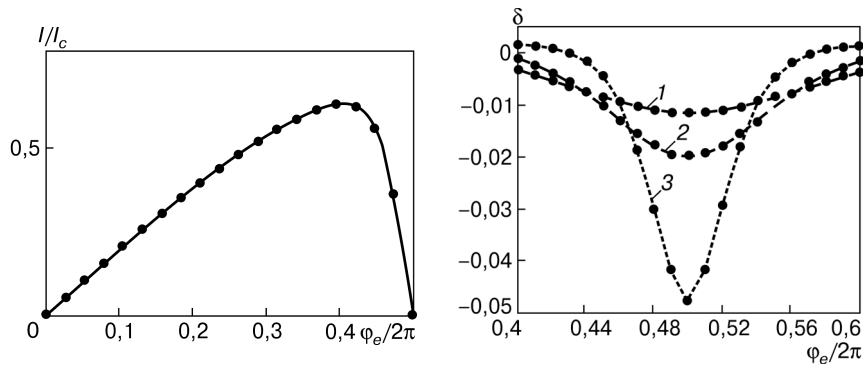
$$P = \frac{\exp(-\frac{2}{D}U(\chi, \theta))}{N},$$

$$N = \iint d\chi d\theta \exp(-\frac{2}{D}U(\chi, \theta)). \quad (9.12)$$

Так как потенциал  $U$  является  $2\pi$ -периодической функцией переменных  $\theta$  и  $\chi$ , средний ток в кольце

$$\frac{I}{I_c} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\chi d\theta \sin(\chi + \theta) \exp(-\frac{2}{D}U(\chi, \theta))}{\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} d\chi d\theta \exp(-\frac{2}{D}U(\chi, \theta))}. \quad (9.13)$$

На рис. 9.6 показано сравнение численных результатов и зависимости  $I(\varphi_e)$ , полученной из аналитической формулы (9.13)



**Рис. 9.6.** Сравнение численных (кружки) и аналитических (сплошная линия) вычислений для  $D = 0,2$  и  $\alpha = 1$  [62]

**Рис. 9.7.** Сдвиг фазы  $\delta(\varphi_e)$  в классическом режиме:  $\alpha = 0,8$  и  $D = 0,3$  (1);  $0,2$  (2);  $0,1$  (3) [62]

для случая  $\alpha = 1$  и  $D = 0,2$ . Это сравнение было использовано как дополнительная калибровка нашей численной процедуры, которая в отличие от формулы (9.13) справедлива для произвольных значений  $\alpha$ .

Обратимся к поставленному выше вопросу о сравнении поведения кубита в классическом и квантовом режимах. Используемый метод измерения состояния кубита подробно описан в главах 3—5. В эксперименте наблюдается сдвиг фазы  $\delta$  между током  $I_{rf}$  и напряжением  $V_{rf}$  в резонансном контуре, связанном с кубитом. Как в квантовом, так и в классическом случае этот сдвиг фазы определяется выражением (более подробно см. в п. 6.1):

$$\tan \delta = \Theta \frac{dI}{d\varphi_e}, \quad (9.14)$$

где  $I$  — циркулирующий в кубите ток, определяемый приложенным потоком  $\varphi_e$ ; константа  $\Theta$  характеризует индуктивную связь кубита с резонансным контуром. Используя результаты численного расчета  $I(\varphi_e)$ , получаем сдвиг фазы  $\delta$  (9.14) для классического режима в присутствии шума магнитного потока. Для различных значений уровня шума  $D$  (все из них соответствуют безгистерезисному режиму) зависимости  $\delta(\varphi_e)$  приведены на рис. 9.7. В квантовом режиме, когда преобладают процессы тун-

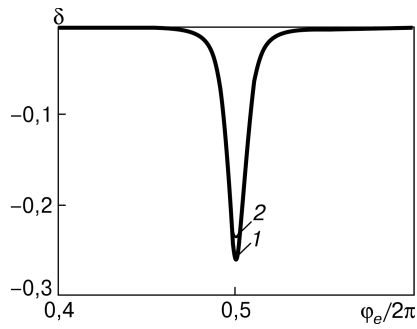


Рис. 9.8. Сдвиг фазы  $\delta(\varphi_e)$  в квантовом режиме:  
 $T/\Delta = 0,1$  (1);  $T/\Delta = 1,0$  (2) [62]

нелирования и термоактивированными переходами можно пренебречь, зависимость сдвига фазы  $\delta$  от  $\varphi_e$  построена по формулам главы 4 для экспериментально реализованных параметров кубита и показана на рис.9.8.

Сравнивая классический и квантовый режимы (см. рис. 9.7 и 9.8), видим, что в квантовом режиме провал на зависимости  $\delta(\varphi_e)$  остается неизменным при изменении температуры в широком интервале  $k_B T \leq \Delta$  (см. рис. 4.5 и 6.1). Это отражает тот факт, что амплитуда туннелирования  $\Delta$  не зависит от температуры. Глубина провала зависит от температуры — увеличение заселенности верхнего уровня уменьшает средний ток в кубите. Для классического режима ситуация существенно иная. Во-первых, для разумных параметров кубита невозможно получить такой узкий хорошо выраженный провал, как в квантовом режиме. Более того, температурная зависимость провала демонстрирует сильную зависимость его ширины от температуры. Следовательно, анализируя экспериментально наблюдаемую температурную зависимость  $\delta(\varphi_e)$ , можно уверенно различать квантовый и классический режимы.

## 9.2. ИНДУЦИРОВАННАЯ ШУМОМ КВАНТОВАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ И НЕЗАТУХАЮЩИЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ РАБИ

Осцилляции Раби — когерентные периодические переходы между состояниями двухуровневой квантовой системы, индуцированные гармоническим полем с частотой  $\omega$ , приблизительно равной расстоянию между уровнями (см. гл. 3). При этом частота Раби  $\Omega_R$  (частота «квантовых биений») намного меньше расстояния между уровнями, т.е.  $\Omega_R \ll \omega$ . Осцилляции Раби — одно из наиболее прямых проявлений квантового поведения. Их наблюдение является качественным критерием «квантовости» кубита. Скорость затухания осцилляций Раби определяется частота-

ми релаксации и дефазирования в системе. Выявление квантовой когерентности в условиях затухания осцилляций Раби возможно измерением *корреляций* в квантовой возбужденной системе. В случае, когда время когерентности в системе превышает период Раби, квантовая когерентность проявляется в виде пика в спектральной плотности отклика кубита на частоте Раби  $\Omega_R$ . Такая «спектроскопия Раби» была использована для экспериментальной демонстрации квантового поведения потокового кубита [72]. В работе [73] была показана другая возможность появления резонансного отклика на частоте  $\Omega_R$ . А именно, одновременное облучение кубита высокочастотным ( $\sim\omega$ ) и низкочастотным ( $\sim\Omega_R$ ) сигналами.

В данном параграфе рассмотрено влияние классического шума на квантовую двухуровневую систему (кубит) и показано, что при определенных условиях шум может усиливать квантовые корреляции [63]. Этот эффект подобен (но не тождественен) стохастическому резонансу, при котором шум увеличивает отношение сигнал/шум в бистабильной облучаемой системе. Стохастический резонанс активно изучался как в классических (см. обзор [65]), так и в квантовых [74, 75] системах.

### Модель и основные уравнения

Квантовую двухуровневую систему описываем, как и ранее, гамильтонианом:

$$H = -\frac{\Delta}{2}\sigma_x - \frac{\varepsilon}{2}\sigma_z, \quad (9.15)$$

где энергия туннельного расщепления  $\Delta$  определяется параметрами конкретного устройства, а смещение  $\varepsilon$  контролируется внешним воздействием и состоит из трех компонент:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(t) + \delta\xi(t) \quad (9.16)$$

(постоянное смещение, переменный сигнал, классический внешний шум).

В базисе собственных состояний гамильтониана  $H_0 = -\frac{\Delta}{2}\sigma_x - \frac{\varepsilon_0}{2}\sigma_z$  гамильтониан (9.15) имеет вид

$$H(t) = -\frac{\Delta E}{2}\tau_z - \frac{1}{2}[\varepsilon_1(t) + \delta\xi(t)]\left(-\frac{\Delta}{\Delta E}\tau_x + \frac{\varepsilon_0}{\Delta E}\tau_z\right), \quad (9.17)$$

где  $\tau_{x,y,z}$  — матрицы Паули в новом базисе;  $\Delta E = \sqrt{\Delta^2 + \varepsilon_0^2}$  — статическое расстояние между уровнями.

Без ограничения общности будем считать, что весь внешний шум вызывает внешнее магнитное поле в кубите, т.е.

$$\delta\xi(t) = \lambda \delta f_n(t), \quad (9.18)$$

где  $\lambda$  — константа, характеризующая интенсивность шума, который вызывают внешние цепи. Переменное внешнее смещение записываем в виде

$$\varepsilon_1(t) = f_{ac} \sin \omega t. \quad (9.19)$$

Присутствие шумового члена в гамильтониане естественным образом приводит к случайному источнику шума в уравнении для матрицы плотности  $\rho$ . Это тонкий момент. Роль шумового слагаемого в динамическом уравнении для  $\rho$  такая же, как и любого явно зависящего от времени слагаемого, описывающего приложенное к системе классическое внешнее поле. Для каждой данной реализации случайного процесса  $\delta\xi(t)$  уравнение для матрицы плотности — полностью детерминистическое; соответствующее усреднение по реализациям не зависит от квантового усреднения. Подчеркнем, что рассматриваемый шум (случайное классическое поле) не есть внутренние флуктуации в квантовой системе.

Используя стандартную параметризацию для матрицы плотности

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + X\tau_x + Y\tau_y + Z\tau_z), \quad (9.20)$$

получаем уравнение движения для матрицы плотности

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H(t), \rho] + \Gamma\rho \quad (9.21)$$

в виде

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -CY - \Gamma_\phi X + \frac{\varepsilon_0}{\Delta E} Y \delta\xi(t), \\ \frac{dY}{dt} &= AZ + CX - \Gamma_\phi Y - \left( \frac{\Delta}{\Delta E} Z + \frac{\varepsilon_0}{\Delta E} X \right) \delta\xi(t), \\ \frac{dZ}{dt} &= -AY - \Gamma_r (Z - Z_{eq}) + \frac{\Delta}{\Delta E} Y \delta\xi(t). \end{aligned} \quad (9.22)$$

Здесь введены феноменологические скорости дефазирования и релаксации,  $\Gamma_\phi$  и  $\Gamma_r$ , которые характеризуют внутренний шум в системе, а также  $A = -\varepsilon_1(t)\Delta / \Delta E$  и  $C = -\Delta E - \varepsilon_1(t)\varepsilon_0 / \Delta E$ . Величина  $Z_{eq} = \tanh(\Delta E / 2k_B T)$  — равновесное значение  $Z$  при температуре  $T$ .

Решения уравнений (9.22) определяют вероятности заполнения верхнего (нижнего) уровня,

$$P_{\pm}(t) = \frac{1}{2}(1 \mp Z(t)), \quad (9.23)$$

и квантовые когерентности  $X(t)$  и  $Y(t)$ . Значения наблюдаемых величин так же, как спектры их флуктуаций, могут быть определены с помощью  $X(t)$ ,  $Y(t)$  и  $Z(t)$ . Исследуем амплитуды спектров  $X(t)$  и  $Z(t)$ , т.е.  $S_X(\omega) = |X(\omega)|$  и  $S_Z(\omega) = |Z(\omega)|$ . Рассмотрим две модели шума: белый (нулевое время корреляций) и цветной (конечное корреляционное время  $\tau$ ) гауссовы шумы. Для гауссова белого шума

$$\langle \delta f_n(t) \rangle = 0, \quad \langle \delta f_n(t) \delta f_n(t') \rangle = 2D \delta(t - t'). \quad (9.24)$$

Для цветного шума стохастический процесс  $\delta f_n(t)$  определяется уравнением [74, 75]

$$\frac{d}{dt} \delta f_n(t) = -\frac{1}{\tau} \delta f_n(t) + \frac{1}{\tau} \zeta(t), \quad (9.25)$$

где  $\zeta(t)$  — гауссовский белый шум,

$$\langle \zeta(t) \zeta(t') \rangle = 2D \delta(t - t').$$

### Динамическое поведение потокового 3JJ кубита в присутствии шума

Динамические уравнения (9.22) решаем численно методом Ито так же, как в предыдущем параграфе. Для численных расчетов используем параметры кубита, бесшумовая динамика которого рассмотрена в главах 4—6. Для 3JJ кубита смещение  $\varepsilon$  в гамильтониане (9.15) равно  $\varepsilon = I_p \Phi_0 (f_e - 1/2)$ ; циркулирующий в кубите ток

$$I(t) = I_p \left[ \frac{\Delta}{\Delta E} X(t) - \frac{\varepsilon_0}{\Delta E} Z(t) \right] \quad (9.26)$$

измеряется импедансной техникой измерений (см. гл. 4). Для расчетов используем следующие типичные для экспериментов параметры кубита:  $I_p \Phi_0 = 200$  ГГц и  $\Delta = 1,4$  ГГц. Также предполагаем разумные значения для  $\Gamma_\phi$  и  $\Gamma_\sigma$ , полагая их равными 0,1 ГГц. Результаты расчетов приведены на рис. 9.9 и 9.10 (см. вклейку). Данные для амплитуд спектра усреднялись по 50 случайным реализациям шумового источника.

В случае белого шума в отсутствии переменного сигнала (рис. 9.9, *а* на вклейке) видно, что спектр когерентной части матрицы плотности кубита проявляет отклик, напоминающий классический стохастический резонанс: при увеличении интенсивности шума  $D$  от  $10^{-7}$  до  $10^{-4}$  ГГц $^{-1}$  максимальное значение  $S_X(\omega)$  проходит через хорошо определенный максимум. Этот эффект «индуцированной шумом квантовой когерентности» имеет место и для цветного шума (рис. 9.9, *б* на вклейке), причем в обоих случаях положение максимума соответствует расстоянию между уровнями. Подобная ситуация возникает и в присутствии переменного сигнала (см. рис. 9.10 на вклейке). Здесь с увеличением интенсивности шума спектральная плотность  $Z$  также сначала возрастает, а затем уменьшается. Положение максимума в  $S_X(\omega)$  в точности совпадает с частотой Раби (второй острый пик в  $S_X(\omega)$  соответствует резонансным межуровневым переходам). Существенно, что в отсутствии шума для выбранных частот релаксации и дефазирования  $\Gamma = 0,1$  осцилляции Раби быстро затухают и не видны в спектре. Шум создает вынужденные колебания на частоте Раби и делает их сохраняющимися на очень больших временах. Таким образом, стохастический резонанс в квантовой системе — кубите проявляется как резонансное усиление спектра когерентной части матрицы плотности под воздействием внешнего классического шума («индуцированные шумом незатухающие осцилляции Раби»).

### 9.3. ШУМОВАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ МНОГОКУБИТНЫХ СИСТЕМ

Результаты п. 9.2, относящиеся к одному кубиту, могут быть распространены на многокубитную систему. Не будем останавливаться подробно на этой задаче, поскольку в работе [64] исследована система двух связанных кубитов в присутствии внешнего классического шума. На рис. 9.11 (см. вклейку) приведены

рассчитанные в [64] спектральные интенсивности  $S_X(\omega)$  и  $S_Z(\omega)$ , содержащие, как и в случае одного кубита, пики, высота которых немонотонно зависит от интенсивности шума. Для одного кубита положение максимума в спектральной плотности определялось расстоянием между двумя уровнями (см. рис. 9.9 на вклейке). Спектр двухкубитной системы содержит четыре дискретных энергетических уровня. На рис. 9.11 (см. вклейку) видно четыре пика — два на  $S_X(\omega)$  и два на  $S_Z(\omega)$ . Эти четыре пика соответствуют межуровневым переходам. Частоты, при которых располагаются пики, прямо связаны с константой связи кубитов  $g$  и туннельным расщеплением энергии  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} 2\pi\nu_1 &= \omega_1 = 2g / \Delta, \\ 2\pi\nu_{2,3} &= \omega_{2,3} = \sqrt{1 + (g / \Delta)^2} \pm g / \Delta, \\ 2\pi\nu_4 &= \omega_4 = 2\sqrt{1 + (g / \Delta)^2}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Таким образом, аналогично случаю одного кубита в системе связанных кубитов квантовые корреляции могут быть усилены внешним классическим шумом. В качестве приложения данного эффекта в [64] предложена «шумовая спектроскопия кубитов», позволяющая определять важные параметры многокубитной системы.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roddatis V. V., Hubner U., Ivanov B. I., Il'ichev E., Meyer H.-G., Koval'chuk M. V., Vasiliev A. L. // J. Appl. Phys. **110**, 123903, (2011).
2. Shnyrkov V. I., Wagner Th., Born D., Shevchenko S. N., Krech W., Omelyanchouk A. N., Il'ichev E., Meyer H.-G. // Phys. Rev. B **73**, 024506 (2006).
3. Nakamura Y., Pashkin Yu. A., Tsai J. S. // Nature **398**, 786 (1999).
4. Van der Wal C. H., Ter Haar A. C. J., Wilhelm F. K., Schouten R. N., Harman C. J. P. M., Orlando T. P., Lloyd S., Mooij J. E. // Science **290**, 773 (2000).
5. Greenberg Ya. S., Izmalkov A., Grajcar M., Il'ichev E., Krech W., Meyer H.-G., Amin M. H. S., Maassen van den Brink A. // Phys. Rev. B **66**, 214525 (2002).
6. Il'ichev E., Van der Ploeg S. H. W., Grajcar M., Meyer H.-G. // Quantum Inf. Process. **8**, 133 (2009).
7. Grajcar M., Izmalkov A., Il'ichev E., Wagner Th., Oukhanski N., Hubner U., May T., Zhilyaev I., Hoenig H. E., Greenberg Ya. S., Shnyrkov V. I., Born D., Krech W., Meyer H.-G., Maassen van den Brink A., Amin M. H. S. // Phys. Rev. B **69**, 060501(R) (2004).
8. Greenberg Ya. S., Izmalkov A., Grajcar M., Il'ichev E., Krech W., Meyer H.-G. // Phys. Rev. B **66**, 224511 (2002).
9. Raimond J. M., Brune M., Haroche S. // Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
10. Il'ichev E., Oukhanski N., Izmalkov A., Wagner Th., Grajcar M., Meyer H.-G., Smirnov A. Yu., Maassen van den Brink A., Amin M. H. S., Zagoskin A. M. // Phys. Rev. Lett. **91**, 097906, (2003).
11. Grajcar M., Van der Ploeg S. H. W., Izmalkov A., Il'ichev E., Meyer H.-G., Fedorov A., Shnirman A., Schon G. // Nature Phys. **4**, 612 (2008).
12. Landau L. // Phys. Z. Sowjetunion **2**, 46 (1932); C. Zener // Proc. R. Soc. Lond. A **137**, 696 (1932).
13. Izmalkov A., Grajcar M., Il'ichev E., Oukhanski N., Wagner Th., Meyer H.-G., Krech W., Amin M. H. S., Maassen van den Brink A., Zagoskin A. M. // Europhys. Lett. **65**, 844 (2004).
14. Делоне Н. Б., Крайнов В. П. Атом в сильном световом поле. — Москва: Атомиздат, 1978.
15. Shevchenko S. N., Van der Ploeg S. H. W., Grajcar M., Il'ichev E., Omelyanchouk A. N., Meyer H.-G. // Phys. Rev. B **78**, 174527 (2008).
16. Shevchenko S. N., Ashhab S., Nori F. // Phys. Rev. B **85**, 094502 (2012).
17. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных осцилляций. — Москва: Наука, 1974.
18. Лухарев К. К. Введение в динамику джозефсоновских переходов. — Москва: Наука, 1985.
19. Shevchenko S. N. // Eur. Phys. J. B **61**, 187 (2008).
20. LaHaye M. D., Suh J., Echternach P. M., Schwab K. C., Roukes M. L. // Nature **459**, 960 (2009).
21. Johansson J., Saito S., Meno T., Nakano H., Ueda M., Semba K., Takayanagi H. // Phys. Rev. Lett. **96**, 127006 (2006).

22. *Izmalkov A., Van der Ploeg S. H. W., Shevchenko S. N., Grajcar M., Il'ichev E., Hubner U., Omelyanchouk A. N., Meyer H.-G.* // Phys. Rev. Lett. **101**, 017003 (2008).
23. *Shevchenko S. N., Ashhab S., Nori F.* // Phys. Rep. **492**, 1 (2010).
24. Блум К. Теория матрицы плотности и ее приложения. — Москва: Наука, 1983.
25. *Zorin A. B.* // Physica C **368**, 284 (2002).
26. *Krech W., Grajcar M., Born D., Zhilyaev I., Wagner Th., Il'ichev E., Greenberg Ya. S.* // Phys. Lett. A **303**, 352 (2002).
27. *Mooij J. E., Orlando T. P., Levitov L., Tian L., Van der Wal C. H., Lloyd S.* // Science **285**, 1036 (1999).
28. *Il'ichev E., Smirnov A. Yu., Grajcar M., Izmalkov A., Born D., Oukhanski N., Wagner Th., Krech W., Meyer H.-G., Zagoskin A.* // ФНТ **30**, 823 (2004).
29. *Skinner J. C., Prance H., Stiffell P. B., Prance R. J.* // Phys. Rev. Lett. **105**, 257002 (2010).
30. *Sillanpaa M., Lehtinen T., Paila A., Makhlin Yu., Hakonen P.* // Phys. Rev. Lett. **96**, 187002 (2006).
31. *Garanin D. A., Schilling R.* // Europhys. Lett. **59**, 7 (2002).
32. *Berry M. V.* // J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 365303 (2009).
33. *Grajcar M., Izmalkov A., Van der Ploeg S. H. W., Linzen S., Il'ichev E., Wagner Th., Hubner U., Meyer H.-G., Maassen van den Brink A., Uchaikin S., Zagoskin A. M.* // Phys. Rev. B **72**, 020503(R) (2005).
34. *Izmalkov A., Grajcar M., Il'ichev E., Wagner Th., Meyer H. G., Smirnov A. Yu., Amin M. H. S., Maassen van den Brink A., Zagoskin A. M.* // Phys. Rev. Lett. **93**, 037003 (2004).
35. *Izmalkov A., Grajcar M., Van der Ploeg S. H. W., Huebner U., Il'ichev E., Meyer H.-G., Zagoskin A. M.* // Europhys. Lett. **76**, 533 (2006).
36. *Grajcar M., Izmalkov A., Van der Ploeg S. H. W., Linzen S., Plecenik T., Wagner Th., Huebner U., Il'ichev E., Meyer H.-G., Smirnov A. Yu., Love P. J., Maassen van den Brink A., Amin M. H. S., Uchaikin S., Zagoskin A. M.* // Phys. Rev. Lett. **96**, 047006 (2006).
37. *Maassen van den Brink A.* — arxiv:cond-mat/0605398.
38. *Van der Ploeg S. H. W., Izmalkov A., Maassen van den Brink A., Huebner U., Grajcar M., Il'ichev E., Meyer H.-G., Zagoskin A. M.* // Phys. Rev. Lett. **98**, 057004 (2007).
39. *Schlienz J., Mahler G.* // Phys. Rev. A **52**, 4396 (1995).
40. *Ivanchenko E. A.* // ФНТ **33**, 455 (2007).
41. *Temchenko E. A., Shevchenko S. N., Omelyanchouk A. N.* // Phys. Rev. B **83**, 144507 (2011).
42. *Il'ichev E., Shevchenko S. N., Van der Ploeg S. H. W., Grajcar M., Temchenko E. A., Omelyanchouk A. N., Meyer H.-G.* // Phys. Rev. B **81**, 012506 (2010).
43. *Vitanov N. V., Halfmann T., Shore B. W., Bergmann K.* // Annu. Rev. Phys. Chem. **52**, 763 (2001).
44. *Van der Wal C. H., Wilhelm F. K., Harmans C. J. P. M., Mooij J. E.* // Eur. Phys. J. B **31**, 111 (2003).
45. *Governale M., Grifoni M., Schon G.* // Chem. Phys. **268**, 273 (2001).
46. *Storcz M. J., Wilhelm F. K.* // Phys. Rev. A **67**, 042319 (2003).
47. *De Groot P. C., Lisenfeld J., Schouten R. N., Ashhab S., Lupascu A., Harmans C. J. P. M., Mooij J. E.* // Nature Phys. **6**, 763 (2010).

48. Astafiev O., Inomata K., Niskanen A. O., Yamamoto T., Pashkin Yu. A., Nakamura Y., Tsai J. S. // *Nature* **449**, 588 (2007).
49. Wallraff A., Schuster D. I., Blais A., Frunzio L., Huang R.-S., Majer J., Kumar S., Girvin S. M., Schoelkopf R. J. // *Nature* **431**, 162 (2004).
50. Schuster D. I., Wallraff A., Blais A., Frunzio L., Huang R.-S., Majer J., Girvin S. M., Schoelkopf R. J. // *Phys. Rev. Lett.* **94**, 123602 (2005).
51. Blais A., Huang R.-S., Wallraff A., Girvin S. M., Schoelkopf R. J. // *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004).
52. Liu Y. X., Sun C. P., Nori F. // *Phys. Rev. A* **74**, 052321 (2006).
53. Bourassa J., Gambetta J. M., Abdumalikov A.A., Astafiev O., Nakamura Y., Blais A. // *Phys. Rev. A* **80**, 032109 (2009).
54. Lindstrom T., Webster C. H., Healey J. E., Colclough M. S., Muirhead C. M., Tzalenchuk A.Y. // *Supercond. Sci. Technol.* **20**, 814 (2007).
55. Abdumalikov A. A., Astafiev O., Nakamura Y., Pashkin Yu. A., Tsai J. S. // *Phys. Rev. B* **78**, 180502(R) (2008).
56. Oelsner G., Van der Ploeg S. H. W., Macha P., Hubner U., Born D., Anders S., Il'ichev E., Meyer H.-G., Grajcar M., Wunsch S., Siegel M., Omelyanchouk A. N., Astafiev O. // *Phys. Rev. B* **81**, 172505 (2010).
57. Omelyanchouk A. N., Shevchenko S. N., Greenberg Ya. S., Astafiev O., Il'ichev E. // *ФНТ* **36**, 1117 (2010).
58. Greenberg Ya. S. // *Phys. Rev. B* **76**, 104520 (2007).
59. Скалли М. О., Зубайри М. С. Квантовая оптика. — Москва: Физматлит, 2003.
60. Bishop L. S., Chow J. M., Koch J., Houck A. A., Devoret M. H., Thunberg E., Girvin S. M., Schoelkopf R. J. // *Nature Phys.* **5**, 105 (2009).
61. Jerger M., Poletto S., Macha P., Hubner U., Lukashenko A., Il'ichev E., Ustinov A. V. // *Europhys. Lett.* **96**, 40012 (2011).
62. Il'ichev E., Omelyanchouk A. N. // *ФНТ* **33**, 520 (2008).
63. Omelyanchouk A. N., Savel'ev S., Zagoskin A. M., Il'ichev E., Nori F. // *Phys. Rev. B* **80**, 212503 (2009).
64. Savel'ev S., Zagoskin A. M., Omelyanchouk A. N., Nori F. // *Chem. Phys.* **375**, 180 (2010).
65. Gammaitoni L., Hanggi P., Jung P., Marchesoni F. // *Rev. Mod. Phys.* **70**, 223 (1998).
66. Khlus V. A., Kulik I. O. // *Sov. Tech. Phys. Lett.* **20**, 283 (1975).
67. Jackel L. D., Buhrman R. A., Webb W. W. // *Phys. Rev. B* **10**, 2782 (1974).
68. Il'ichev E., Zakosarenko V., Schultze V., Meyer H.-G., Hoenig H. E., Glyantsev V. N., Golubov A. // *Appl. Phys. Lett.* **72**, 731 (1998).
69. De Bruyn Ouboter R., Omelyanchouk A. N. // *Physica B* **216**, 37 (1995).
70. Il'ichev E., Zakosarenko V., Ijsselsteijn P.J., Schultze V. // *J. Low Temp. Phys.* **106**, 503 (1997).
71. Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках. — Москва: Мир, 1986.
72. Il'ichev E., Zakosarenko V., Schultze V., Hoenig H. E., Meyer H.-G., Subke K.O., Burkhard H., Schilling M. // *Appl. Phys. Lett.* **76**, 100 (2000).
73. Greenberg Ya. S., Il'ichev E., Izmailkov A. // *Europhys. Lett.* **72**, 880 (2005).
74. Lofstedt R., Coppersmith S. N. // *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1947 (1994).
75. Grifoni M., Hanggi P. // *Phys. Rev. Lett.* **76**, 1611 (1996).

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК ОПИСАНИЯ КУБИТОВ**

Здесь рассмотрен формализм квантовой механики применительно к простейшей двухуровневой квантовой системе, называемой кубитом.

### **Пространство квантовых состояний. Бра- и кет-векторы**

■ Квантовые состояния кубита обозначаются как векторы в двумерном комплексном векторном пространстве. Удобно использовать бра- и кет-обозначения, введенные Дираком. Вектор состояния  $\psi$  (двухкомпонентный кет-вектор) обозначается

$$|\psi\rangle \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

сопряженный ему бра-вектор —

$$\langle\psi| \equiv (\psi_1^* \quad \psi_2^*).$$

■ Скалярное (внутреннее) произведение векторов состояния

$$\langle\psi|\phi\rangle \equiv \psi_1^* \phi_1 + \psi_2^* \phi_2$$

— это комплексное  $C$ -число:

$$\langle\psi|\phi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^*.$$

Векторы состояний, различающиеся на ненулевой скалярный множитель, представляют одно и то же квантовое состояние и в дальнейшем нормируются на 1:

$$\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} = 1.$$

■ Вектор произвольного состояния кубита  $|\psi\rangle$  можно разложить по базисным ортонормированным состояниям  $|e_1\rangle$  и  $|e_2\rangle$ ,  
 $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ ,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1,2} C_i |e_i\rangle,$$

при этом  $C_i = \langle e_i | \psi \rangle$ .

Суперпозиционное состояние кубита  $|\psi\rangle = a|e_1\rangle + b|e_2\rangle$  — это когерентная смесь базисных состояний. Записывая комплексные числа  $a$  и  $b$  в виде  $a = |a|e^{i\varphi_a}$  и  $b = |b|e^{i\varphi_b}$  и учитывая условие нормировки, получаем  $|\psi\rangle = e^{i\varphi_a}(|a||e_1\rangle + e^{i(\varphi_b - \varphi_a)}(1 - |a|^2)^{1/2}|e_2\rangle)$ . Общий фазовый множитель  $e^{i\varphi_a}$  не наблюдаем (для одного кубита), а разность фаз  $\varphi = \varphi_b - \varphi_a$  определяет интерференцию базисных состояний. При измерении состояния кубита когерентная суперпозиция разрушается и редуцируется с вероятностью  $|a|^2$  к состоянию  $|e_1\rangle$  и с вероятностью  $1 - |a|^2$  к состоянию  $|e_2\rangle$ .

Базисные состояния кубита могут быть выбраны произвольным образом, различаясь поворотом в двумерном пространстве состояний. Выбор базиса определяется измерительным процессом.

Стандартный (используемый в квантовых вычислениях) базис имеет вид

$$|0\rangle \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1, \langle 0|1\rangle = 0.$$

Для  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$  часто используют обозначения  $|\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$ .

Пусть состояние кубита равно

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \equiv \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, aa^* + bb^* = 1.$$

Тогда измерение  $|\psi\rangle$  в базисе  $|0\rangle, |1\rangle$  даст с вероятностью  $|a|^2$  результат  $|0\rangle$  и с вероятностью  $|b|^2$  результат  $|1\rangle$ . В другом измерительном базисе, повернутом относительно стандартного базиса на  $45^\circ$ ,

$$|e_1\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, |e_2\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

то же состояние  $|\psi\rangle$  равно

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= a|0\rangle + b|1\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |e_2\rangle) + \frac{b}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - |e_2\rangle) = \\ &= \frac{(a+b)}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{(a-b)}{\sqrt{2}}|e_2\rangle. \end{aligned}$$

Т.е. измерение  $|\psi\rangle$  в базисе  $|e_1\rangle, |e_2\rangle$  даст с вероятностью  $|a+b|^2/2$  результат  $|e_1\rangle$  и с вероятностью  $|a-b|^2/2$  результат  $|e_2\rangle$ .

### Операторы (наблюдаемые)

Наблюдаемые физические величины представляют линейными эрмитовыми операторами  $\hat{A}$ , действующими на векторы состояний:

$$\hat{A}|\psi\rangle = |\phi\rangle.$$

Линейный оператор

$$\hat{A}(c|\psi\rangle) = c\hat{A}|\psi\rangle,$$

$$\hat{A}(|\psi\rangle + |\phi\rangle) = \hat{A}|\psi\rangle + \hat{A}|\phi\rangle,$$

$$(\hat{A}, \hat{B})|\psi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\psi\rangle).$$

Единичный оператор:  $\hat{I}|\psi\rangle = |\psi\rangle$ .

Коммутатор:  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ .

#### ■ Внешнее произведение

$$|\psi\rangle\langle\phi|$$

— линейный оператор, действующий на вектор состояния:

$$(|\psi\rangle\langle\phi|)|\chi\rangle = \langle\phi|\chi\rangle|\psi\rangle.$$

Пусть  $|\psi\rangle = \sum_{i=1,2} C_i |e_i\rangle$ , тогда  $\sum_i (|e_i\rangle\langle e_i|)|\psi\rangle = \sum_i |e_i\rangle\langle e_i|\psi\rangle = |\psi\rangle$ ,

т.е.  $\sum_i |e_i\rangle\langle e_i| = \hat{I}$ .

Оператор проектирования (проектор)

$$\hat{P} = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad \hat{P}|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle|\psi\rangle, \quad \hat{P}^2 = \hat{P}$$

проектирует вектор  $|\phi\rangle$  на направление вектора  $|\psi\rangle$ .

### Матричное представление операторов

В матричном виде бра- и кет-векторы — это столбцы или строки, а оператор  $\hat{A} = |\psi\rangle\langle\varphi|$  — это матрица  $2 \times 2$ :

$$\hat{A} = |\psi\rangle\langle\varphi| = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} (\varphi_1^* \quad \varphi_2^*) = \begin{pmatrix} \psi_1\varphi_1^* & \psi_1\varphi_2^* \\ \psi_2\varphi_1^* & \psi_2\varphi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Для эрмитового оператора выполняется равенство

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* \\ A_{12}^* & A_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Все возможные значения наблюдаемой системы  $A$  заданы собственными значениями соответствующего оператора  $\hat{A}$ . Собственные значения  $\lambda$  и соответствующие собственные векторы определяются из уравнения

$$\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle.$$

Собственные значения эрмитового оператора вещественны.

### Примеры

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \quad 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \quad Z|1\rangle = -|1\rangle,$$

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \quad 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \quad X|1\rangle = |0\rangle.$$

### Матрицы Паули

Произвольная эрмитова матрица  $2 \times 2$  имеет вид линейной суперпозиции четырех матриц (операторов) — единичной матрицы и матриц Паули:

$$\hat{A} = a_0 \hat{1} + a_z \sigma_z + a_x \sigma_x + a_y \sigma_y \equiv a_0 \sigma_0 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma},$$

где

$$\hat{1} \equiv \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы Паули удовлетворяют соотношениям:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \hat{1},$$

$$\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 2i \sigma_z, \quad \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_y = 2i \sigma_x, \quad \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_z = 2i \sigma_y.$$

### Пример кубита. Частица со спином 1/2

Операторы компонент спина

$$\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_i, \quad i = x, y, z.$$

Гамильтониан кубита в магнитном поле  $\vec{B}$ :

$$\hat{H} = -g \mu_B \vec{B}(t) \cdot \vec{\hat{S}} \equiv -\frac{1}{2} \vec{H}(t) \cdot \vec{\sigma},$$

где  $g$  — гиромагнитное отношение;  $\mu_B$  — магнетон Бора;  $H(t)$  — эффективное «магнитное поле», действующее на систему.

Базисные векторы  $|0\rangle \equiv |\uparrow\rangle$  и  $|1\rangle \equiv |\downarrow\rangle$  являются собственными векторами оператора  $\hat{\sigma}_z$  с собственными значениями  $+1$  и  $-1$ :

$$\hat{\sigma}_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad \hat{\sigma}_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle.$$

В базисе векторов  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  имеем



Оператор	Собственные векторы	Собственные значения
$\hat{\sigma}_z$	$ \uparrow\rangle,  \downarrow\rangle$	$+1, -1$
$\hat{\sigma}_x$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( \uparrow\rangle +  \downarrow\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}( \uparrow\rangle -  \downarrow\rangle)$	$+1, -1$
$\hat{\sigma}_y$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( \uparrow\rangle + i \downarrow\rangle),$ $\frac{1}{\sqrt{2}}( \uparrow\rangle - i \downarrow\rangle)$	$+1$ $-1$
$\vec{n}\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$ , где $\vec{n} = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta)$	$\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \downarrow\rangle,$ $-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\varphi}{2}} \uparrow\rangle + \cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi}{2}} \downarrow\rangle$	$+1$ $-1$

### Тензорное произведение

В квантовой механике постулируется: пространство состояний композитной системы является тензорным произведением пространств состояний компонент системы. Для системы  $N$  кубитов пространство состояний является тензорным произведением двумерных подпространств отдельных кубитов  $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N$  и имеет размерность  $2^N$ .

Свойства тензорного произведения:

$$\alpha(|v\rangle \otimes |w\rangle) = (\alpha|v\rangle) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes (\alpha|w\rangle),$$

$$(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle.$$

В конкретном случае двухкубитных состояний тензорное произведение « $\otimes$ » векторов состояний определяется так:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma \\ \alpha\delta \\ \beta\gamma \\ \beta\delta \end{pmatrix}.$$

Для базисных векторов имеем

$$\begin{aligned}
 |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 |1\rangle \otimes |1\rangle &= |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Любое состояние двух кубитов  $q_1$  и  $q_2$  есть суперпозиция базисных состояний:

$$|q_1 + q_2\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle.$$

Тензорное произведение операторов (матриц)

$$\begin{aligned}
 \hat{A} \otimes \hat{B} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} A_{11} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} & A_{12} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ A_{21} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} & A_{22} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

В общем случае системы  $N$  кубитов из дистрибутивности тензорного произведения имеем

$$\begin{aligned}
 &\otimes_{i=1}^N (a_i|0\rangle + b_i|1\rangle) = \\
 &= a_1|0\rangle \otimes [\otimes_{i=2}^N (a_i|0\rangle + b_i|1\rangle)] + b_1|1\rangle \otimes [\otimes_{i=2}^N (a_i|0\rangle + b_i|1\rangle)].
 \end{aligned}$$

# ОГЛАВЛЕНИЕ

---

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
-------------------	---

## Ч А С Т Ь I . О С Н О В Ы

Г л а в а 1. Квантовая механика кубитов .....	7
1.1. Постулаты квантовой механики .....	7
1.2. Кубит .....	9
1.3. Матрица плотности .....	12
1.4. Композитные системы. Перепутывание квантовых состояний .....	19
1.5. Квантовый мир .....	22
Г л а в а 2. Джозефсоновские кубиты .....	28
2.1. Введение .....	28
2.2. Фундаментальные свойства сверхпроводников .....	29
2.3. Эффект Джозефсона .....	35
2.4. Сверхпроводящие устройства с джозефсоновскими контактами .....	37
2.5. Квантовые сверхпроводящие цепи .....	44
2.6. Основные типы джозефсоновских кубитов .....	47
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	56

## Ч А С Т Ь II. КВАНТОВЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КУБИТАХ

Г л а в а 3. Экспериментальные методы .....	58
3.1. Технология изготовления образцов .....	58
3.2. Методы измерений .....	60
Г л а в а 4. Измерения квантовых состояний джозефсоновского кубита .....	63
4.1. Классический осциллятор и адиабатическое измерение кубита .....	63
4.2. Прямое детектирование осцилляций Раби .....	68
4.3. «Эффект Сизифа» .....	73
4.4. Эффект Ландау—Зинера .....	76

<b>Г л а в а 5. Полуклассическая теория системы кубит—резонатор .....</b>	<b>81</b>
5.1. Формализм Крылова—Боголюбова для системы кубит—резонатор.....	82
5.2. Случай резонансного контура. Параметрическая индуктивность .....	85
5.3. Случай наномеханического резонатора. Параметрическая емкость .....	91
<b>Г л а в а 6. Многофотонные переходы в сверхпроводниковых кубитах.....</b>	<b>94</b>
6.1. Параметрическая индуктивность сверхпроводниковых кубитов .....	95
6.2. Измерение равновесного состояния .....	96
6.3. Резонансное возбуждение зарядового кубита .....	97
6.4. Одно- и многофотонные переходы в потоковом кубите.....	98
6.5. Прямая и обратная интерферометрия с наномеханическим резонатором.....	100
<b>Г л а в а 7. Связанные потоковые кубиты .....</b>	<b>103</b>
7.1. Типы связей между кубитами.....	103
7.2. Энергетические уровни системы связанных кубитов.....	105
7.3. Связанные потоковые кубиты (эксперимент).....	110
7.4. Контролируемая связь между кубитами .....	112
7.5. Уравнения для системы двух связанных кубитов .....	115
7.6. Спектроскопия при слабом возбуждении.....	119
7.7. Прямые и лестничные многофотонные переходы .....	121
7.8. Лазерная генерация в двухкубитной системе .....	125
<b>Г л а в а 8. Джозефсоновский кубит в квантовом резонаторе .....</b>	<b>131</b>
8.1. Кубит в квантованном электромагнитном поле .....	131
8.2. Энергетические уровни и спектроскопия «одетых» состояний .....	133
8.3. Гамильтониан квантовой системы кубит—резонатор .....	135
8.4. Диссипативная динамика системы кубит—резонатор. Коэффициент прохождения.....	137
8.5. Считывание многокубитной системы: разделение по частоте .....	141
<b>Г л а в а 9. Влияние шумов магнитного поля на потоковый кубит .....</b>	<b>144</b>
9.1. Шум магнитного потока в трехконтактном СКВИД.....	144
9.2. Индуцированная шумом квантовая когерентность и незатухающие осцилляции Раби .....	150
9.3. Шумовая спектроскопия многокубитных систем .....	154
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>156</b>
<b>П Р И Л О Ж Е Н И Е. Математический язык</b>	
<b>описания кубитов .....</b>	<b>159</b>

Наукове видання

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ  
ТЕМПЕРАТУР ім. Б.І. ВЕРКІНА

ОМЕЛЬЯНЧУК Олександр Миколайович  
ІЛІЧЕВ Євген В'ячеславович  
ШЕВЧЕНКО Сергій Миколайович

# КВАНТОВІ КОГЕРЕНТНІ ЯВИЩА В ДЖОЗЕФСОНІВСЬКИХ КУБІТАХ

(Російською мовою)

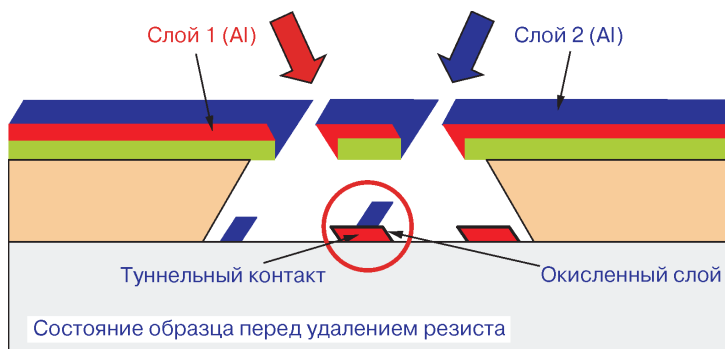
Київ, Науково-виробниче підприємство  
«Видавництво “Наукова думка” НАН України», 2013

Художній редактор *І.Р. Сільман*  
Технічний редактор *Т.С. Березяк*  
Коректор *Л.Г. Бузіашвілі*  
Оператор *О.О. Іщенко*  
Комп'ютерна верстка *О.О. Балюк*

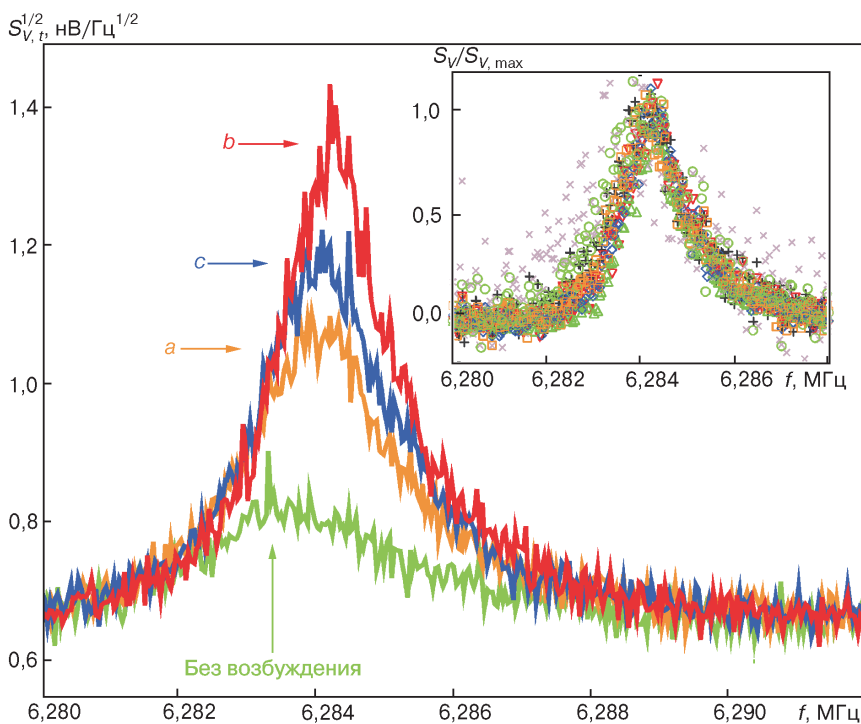
Підп. до друку 15.03.2013. Формат 60×90/16. Папір офс. № 1.  
Гарн. Таймс. Друк. офс. Фіз.друк.арк. 10,5 + 1,0 арк. вкл.  
на крейд. пап. Ум. друк. арк. 11,5.  
Ум. фарбо-відб. 15,0. Обл.-вид. арк. 10,0.  
Тираж 300 прим. Зам. № 13—200

НВП «Видавництво “Наукова думка” НАН України»  
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи  
до Державного реєстру ДК № 2440 від 15.03.2006 р.  
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3

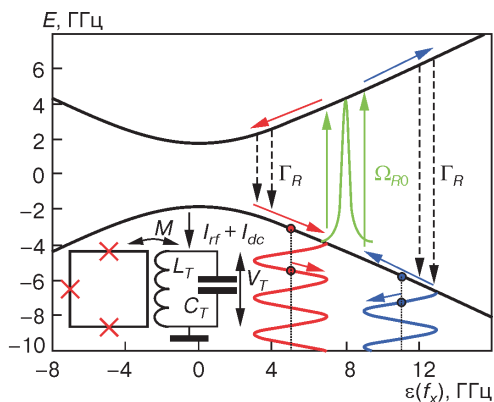
ПАТ фірма “Віпол”  
03151 Київ 151, вул. Волинська, 60  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
серія ДК № 4404 від 31.08.2012 р.



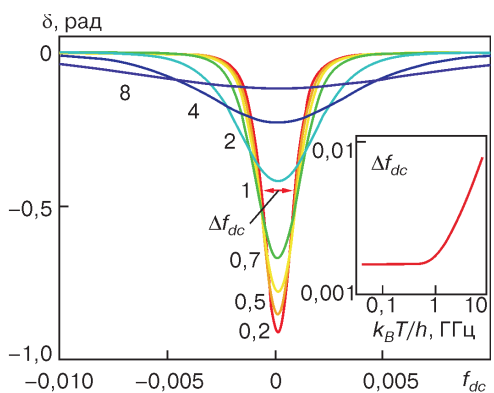
**Рис. 3.1.** Принципиальная схема теневого напыления



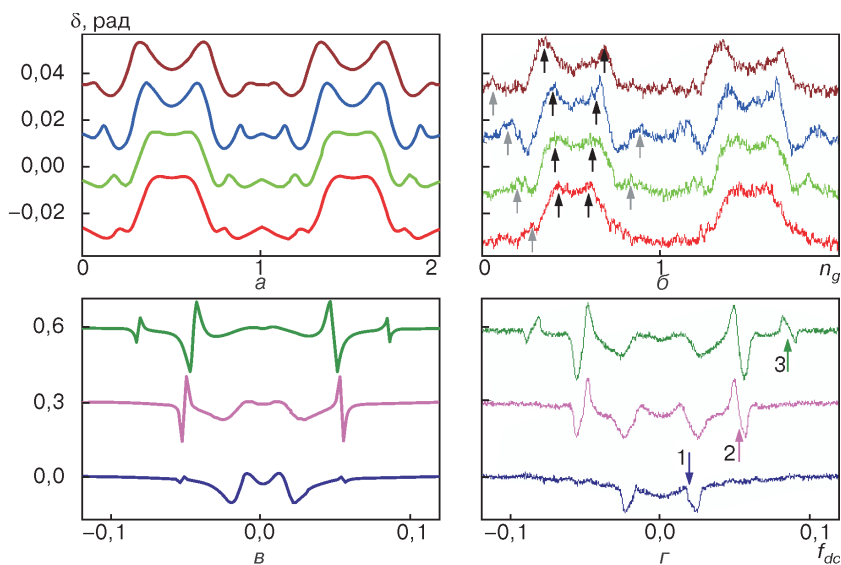
**Рис. 4.7.** Спектральная амплитуда напряжения резонансного контура для различных интенсивностей высокочастотного поля  $P_a < P_b < P_c$  с частотой 868 МГц, продетектированная с использованием схемы измерений, показанной на рис. 4.6. Нижняя кривая соответствует фоновому шуму в отсутствии резонансного поля. На вставке показан нормированный спектр напряжений для семи интенсивностей облучающего сигнала (фоновый шум уже вычтен). Форма отклика определяется резонансным контуром и почти одинакова при всех интенсивностях [10]



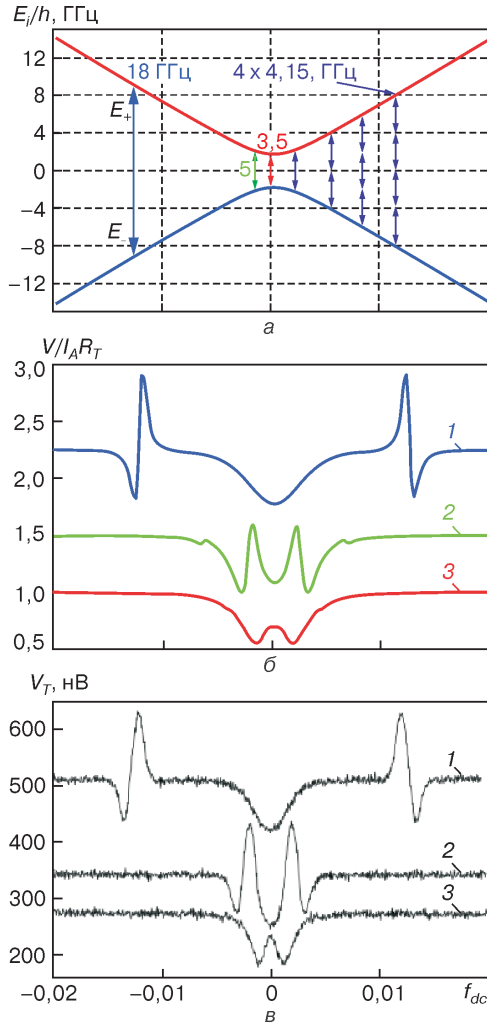
**Рис. 4.9.** Схема «эффекта Сизифа» (охлаждения/нагрева). На вставке схематично изображен кубит, связанный индуктивно с резонансным контуром [11]



**Рис. 6.1.** Влияние температуры на измерение равновесного состояния. Зависимость фазового сдвига от отстройки потока  $f_{dc} = \Phi_{dc} / \Phi_0 - 1/2$ , когда кубит возбуждается за счет ненулевой температуры. Числа рядом с кривыми обозначают температуру  $k_B T / h$  в ГГц. На вставке показана температурная зависимость ширины провала фазового сдвига на половине глубины [15]

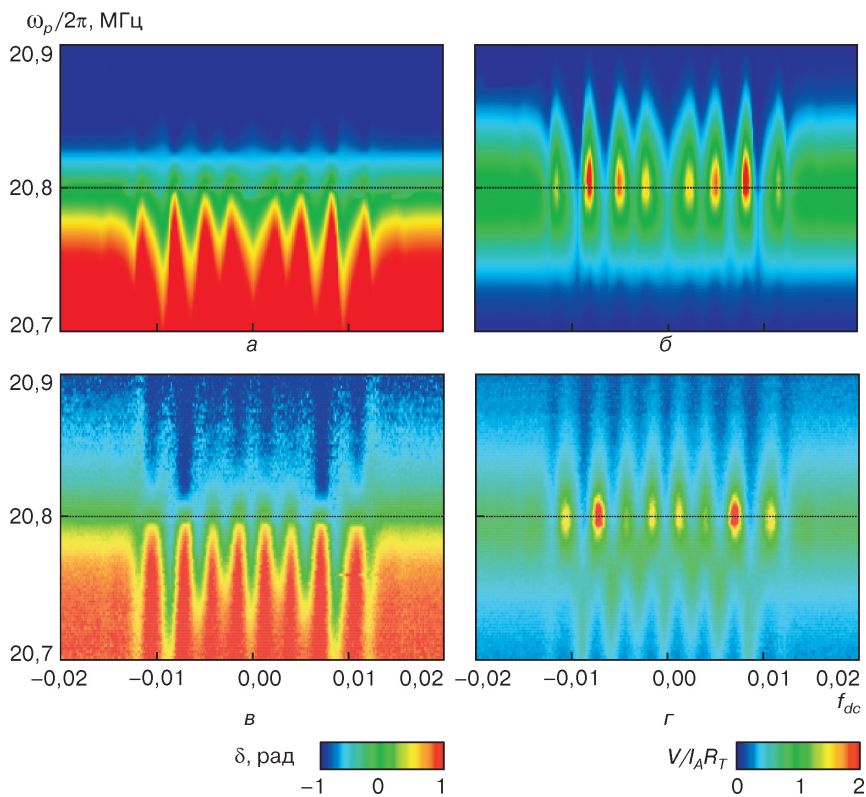


**Рис. 6.3.** Однофотонное возбуждение потокового кубита: *a* — уровни энергии  $E_{\pm}(f_{dc})$ , соединенные возбуждением с частотой, указанной возле стрелок; *б*, *в* — вычисленное и измеренное напряжения резонансного контура как функция магнитного потока  $f_{dc}$  для трех значений частоты, ГГц: 1 — 18; 2 — 5; 3 — 3,5. (Верхние кривые сдвинуты вертикально) [15, 22]

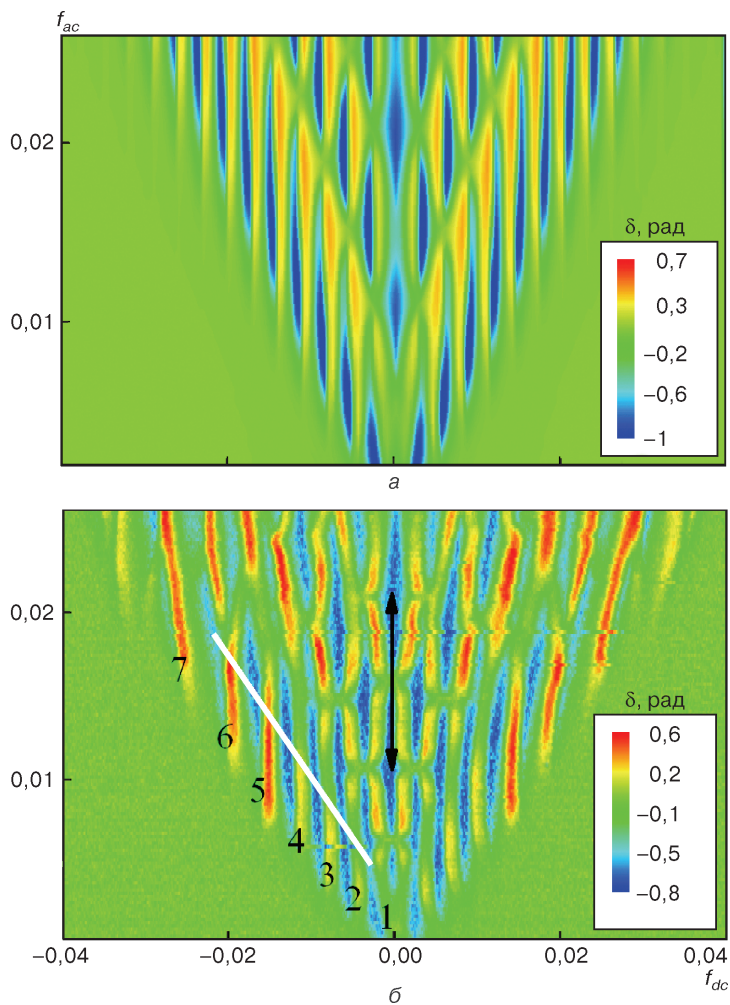


← **Рис. 6.2.** Резонансное возбуждение зарядового кубита, визуализированное резонансным контуром. Фазовый сдвиг резонансного контура, связанного с двух- контактным зарядовым кубитом, вычисленный теоретически (*a*, *в*) и измеренный (*б*, *г*): *a*, *б* — зависимости от напряжения на затворе; *в*, *г* — зависимости от потока. Черные и серые стрелки (*б*) показывают положение одно- и двухфотонных резонансных переходов, а цифры возле стрелок (*г*) обозначают одно-, двух- и трехфотонные возбуждения. Верхние кривые сдвинуты для наглядности [2]

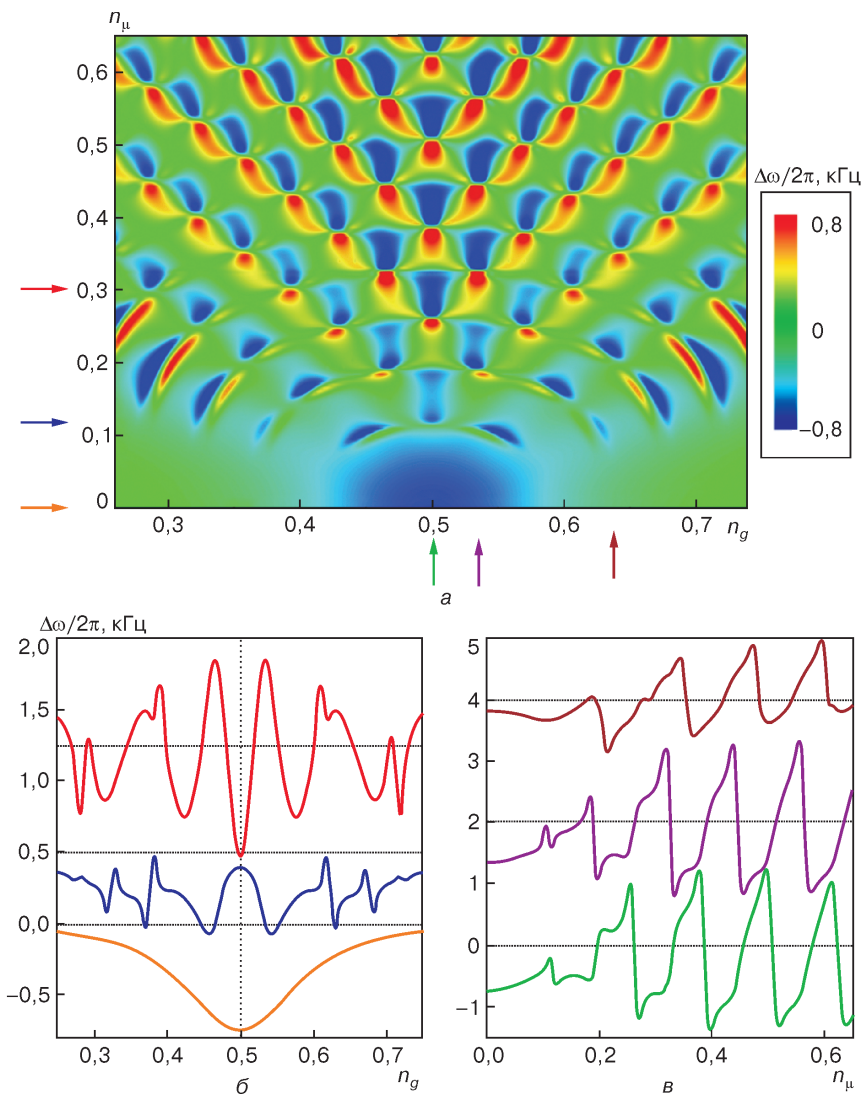




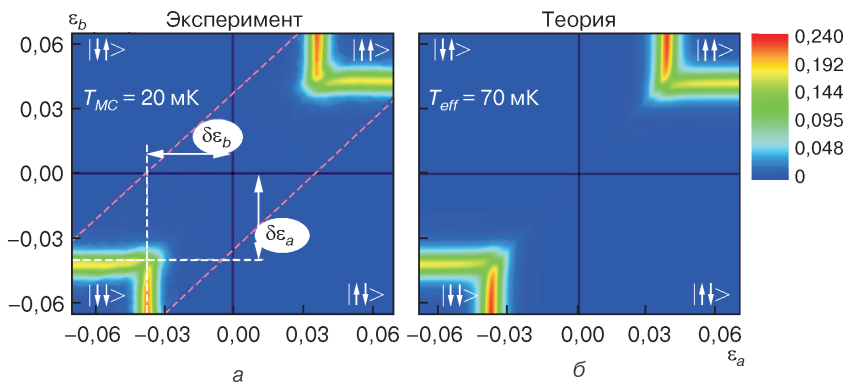
**Рис. 6.4.** Многофотонные возбуждения одиночного потокового кубита. Вычисленные зависимости: *a* — фазового сдвига  $\delta$  и *б* — амплитуды  $\nu$  от частоты пробного тока  $\omega_p$  и отстройки потока  $f_{dc}$ ; *в*, *г* — экспериментально измеренные фазовый сдвиг  $\delta$  и амплитуда  $\nu$  [15]



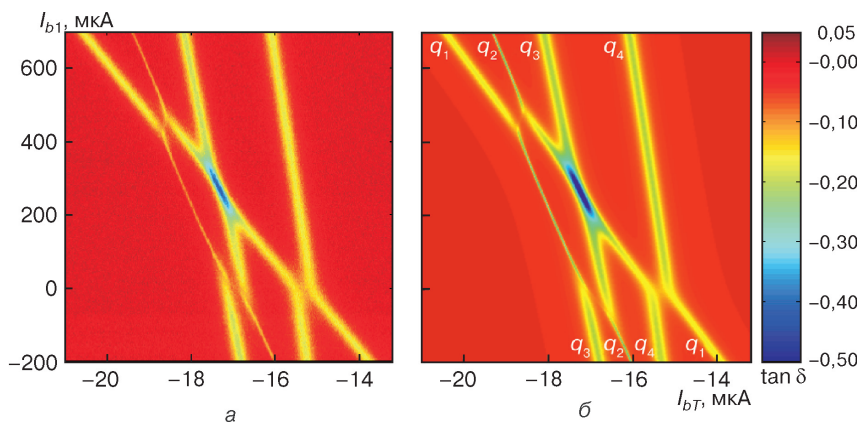
**Рис. 6.5.** Интерферометрия Ландау—Зинера—Штյюкельберга для потокового кубита, измеряемого резонансным контуром. Вычисленная (а) и измеренная (б) зависимости фазового сдвига от потоковой отстройки  $f_{dc} = \Phi_{dc}/\Phi_0 - 1/2$  и от амплитуды возбуждения  $f_{ac} = \Phi_{ac}/\Phi_0$ . Цифры от 1 до 7 показывают положения многофотонных переходов. Изменения вдоль оси ординат соответствуют осцилляциям Штյюкельберга в кубите. Мощность внешнего сигнала может быть определена как из их периода (черная стрелка), так и по наклону интерференционной полосы (белая линия) [15, 22]



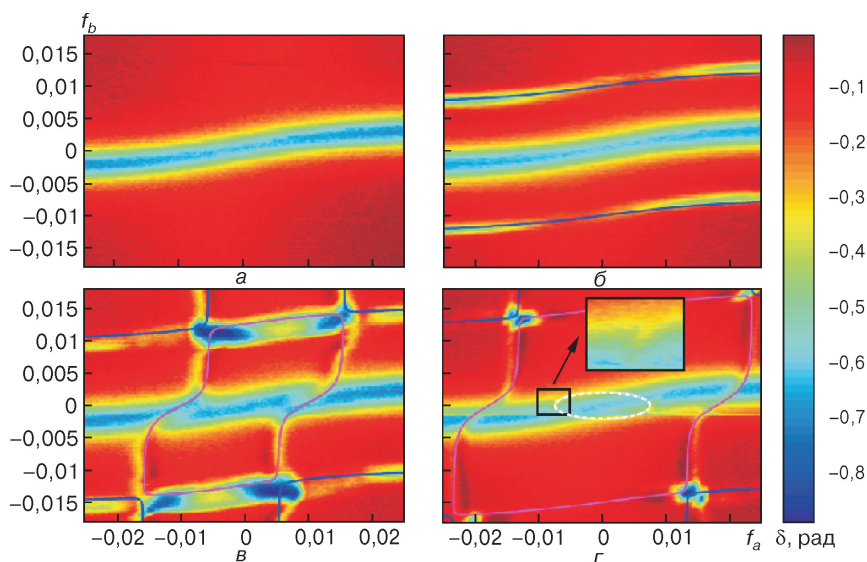
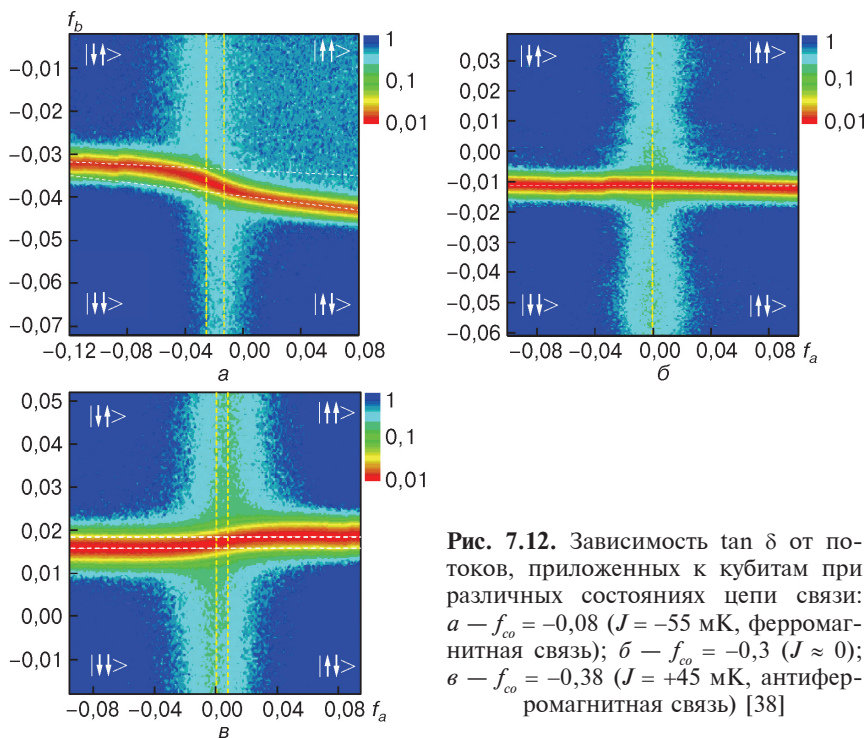
**Рис. 6.6.** Интерферометрия Ландау—Зинера—Штюкельберга, измеренная наномеханическим резонатором: *a* — сдвиг резонансной частоты НР  $\Delta\omega_{NR}$  в зависимости от энергетической отстройки ( $n_g$ ) и амплитуды возбуждения ( $n_\mu$ ). Стрелками показаны значения  $n_\mu$  и  $n_g$ , при которых построены графики (*б*) и (*в*) как функции параметров  $n_g$  и  $n_\mu$  соответственно. Верхние кривые сдвинуты вертикально [16]



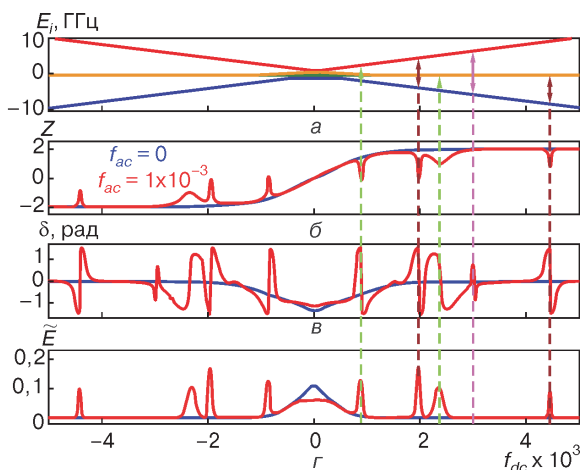
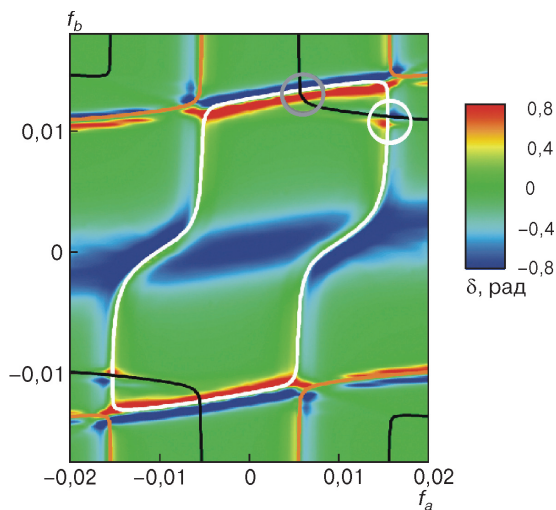
**Рис. 7.6.** Зависимость фазового сдвига  $\delta$  от  $\varepsilon_a$  и  $\varepsilon_b$  для двух кубитов, связанных через общий джозефсоновский контакт (см. рис. 7.5, з), записанная при номинальной температуре  $T = 20$  мК (а); подгонка эксперимента для эффективной температуры  $T_{\text{eff}} = 70$  мК и следующих параметров образца (б):  $\Delta_a/k_B = 80$  мК,  $\Delta_b/k_B = 90$  мК,  $I_p^{(a)} = 120$  нА,  $I_p^{(b)} = 110$  нА,  $J/k_B = 0,7$  К [6]



**Рис. 7.9.** Зависимость  $\tan \delta$  от тока катушки ( $I_{bT}$ ) и тока первой линии ( $I_{b1}$ , см. рис. 7.8) для четырех связанных кубитов: а — эксперимент, б — теоретическая подгонка эксперимента [36]



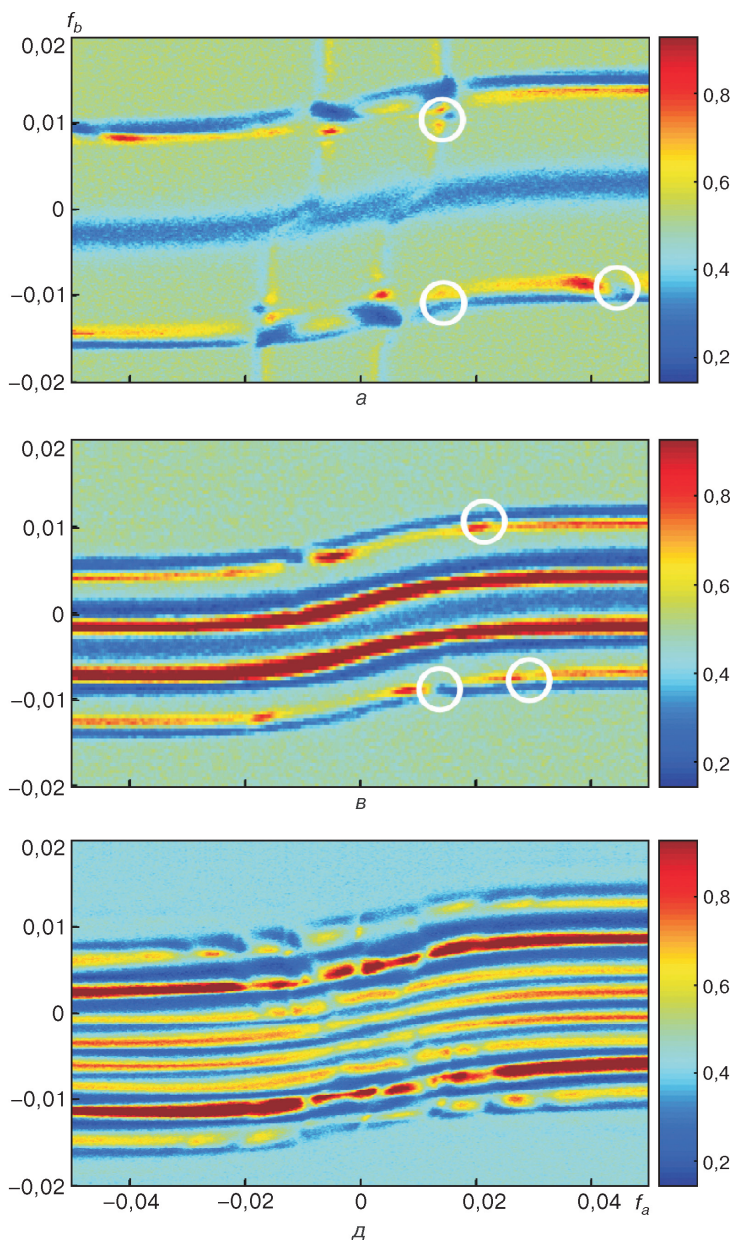
**Рис. 7.14.** Резонансное возбуждение двух связанных потоковых кубитов. Показан рассчитанный фазовый сдвиг резонансного контура  $\delta$  как функция парциальных потоков в двух кубитах —  $f_a$  и  $f_b$  [15]



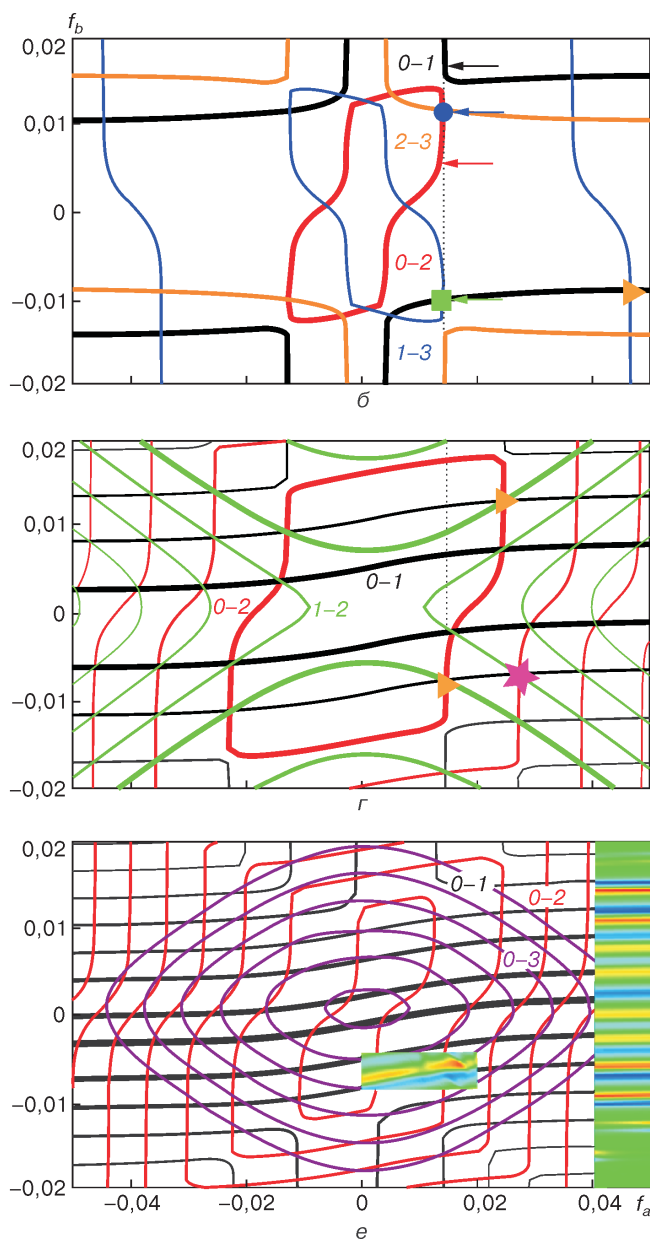
**Рис. 7.15.** Характеристика возбуждения в двухкубитной системе:  $a$  — уровни энергии;  $b$  — полная вероятность протекания тока в двух кубитах по часовой стрелке  $Z$ ;  $c$  — фазовый сдвиг напряжения в резонансном контуре  $\delta$ ;  $d$  — мера запутывания  $\tilde{E}$ . Все графики построены как функции  $f_{dc} = f_a = f_b$  [15]

← **Рис. 7.13.** Спектроскопия системы двух связанных потоковых кубитов. Зависимость фазового сдвига напряжения на резонансном контуре  $\delta$  от потоков в кубитах  $a$  и  $b$  представлена для измерения без возбуждения ( $a$ ) и с микроволновым возбуждением с частотой  $\omega/2\pi = 14,1$  ГГц ( $b$ ),  $17,6$  ГГц ( $c$ ) и  $20,7$  ГГц ( $d$ ). Голубая, пурпурная и белая линии обозначают ожидаемое положение резонансных переходов на первый, второй и третий возбужденный уровни соответственно. На вставке показан переход на третий возбужденный уровень [22]



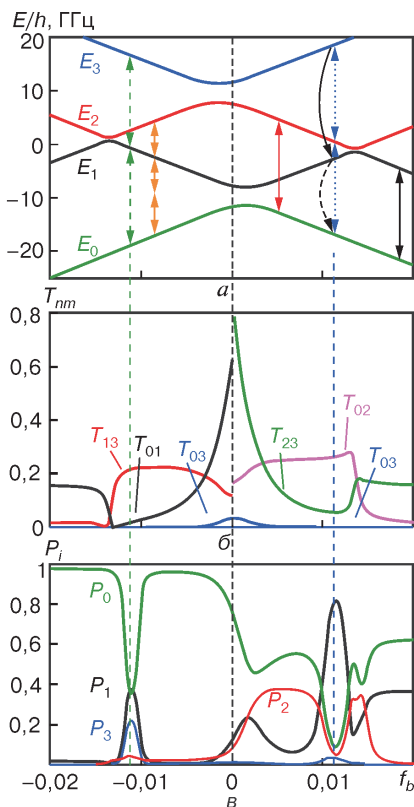


**Рис. 7.16.** Многофотонные резонансы в системе двух связанных потоковых кубитов. Амплитуда напряжения резонансного контура (*a*, *в*, *д*) в произвольных единицах и контурные линии уровней энергии (*б*, *з*, *е*) построены как функции парциальных потоков  $f_a$  и  $f_b$  для частоты возбуждения:  $\omega/2\pi = 17,6$ ;

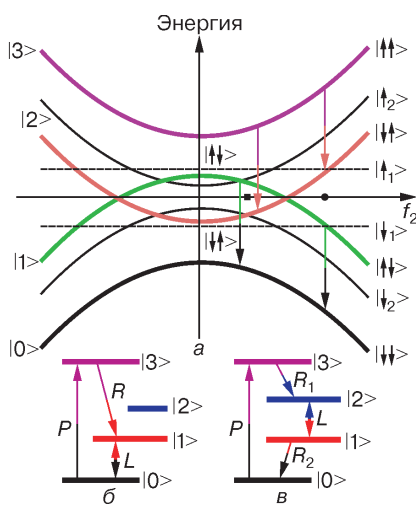


7,0; 4,1 ГГц. Числа  $k-j$  рядом с линиями относятся к разнице энергетических уровней  $E_j - E_k$ . На вставках (e) показан фазовый сдвиг, вычисленный решением уравнений Блоха—Редфилда [42]



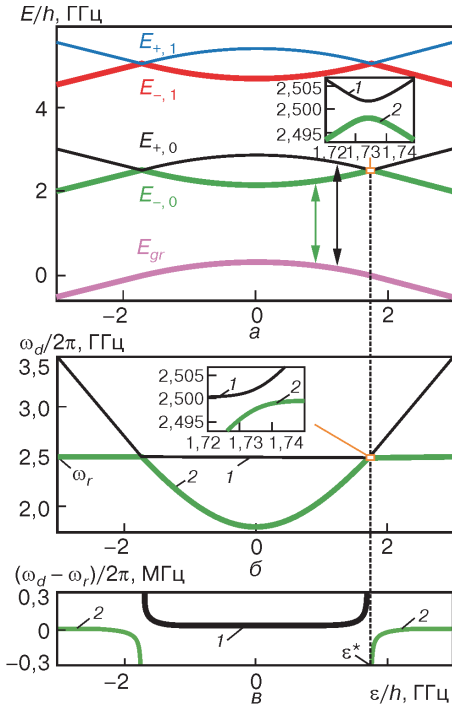
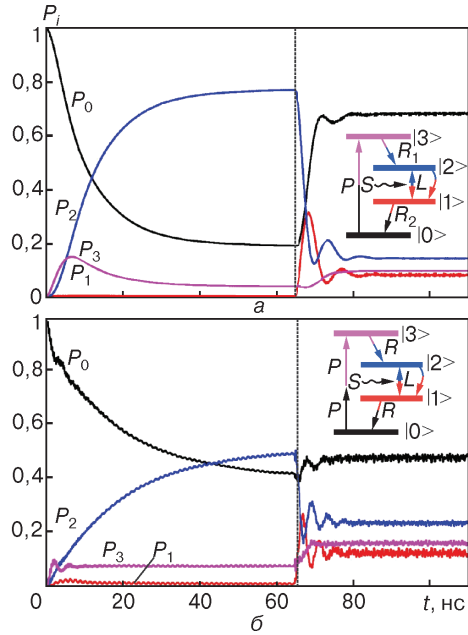


**Рис. 7.17.** Лестничные переходы и инверсная заселенность: *a* — энергетические уровни двух связанных кубитов при  $f_a = 0,015$  как функции  $f_b$  (т.е. вдоль точечной линии на рис. 7.16, *б*, *з*); *б* — матричные элементы переходов  $T_{nm}$  между собственными состояниями  $|E_m\rangle$  и  $|E_n\rangle$ ; *в* — вероятности заселенности энергетических уровней  $P_i$  при возбуждении с частотой  $\omega/2\pi = 17,6$  ГГц [42]

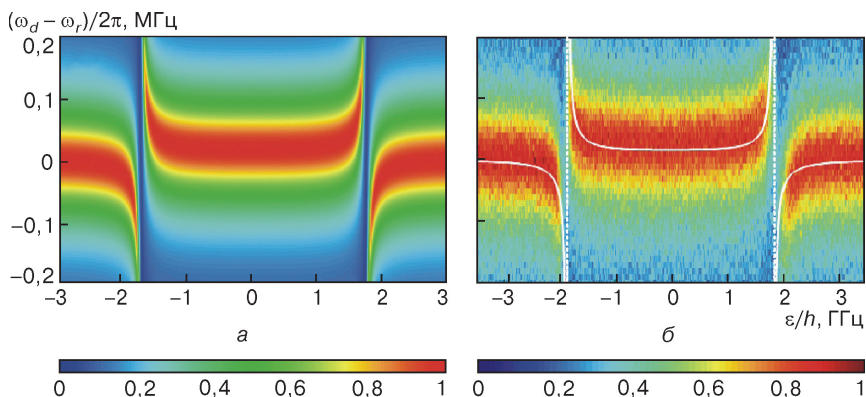


**Рис. 7.18.** Структура энергетических уровней двух несвязанных кубитов ( $J = 0$ ): *a* — однокубитные и двухкубитные энергетические уровни показаны тонкими пунктирными и сплошными линиями как функции потока  $f_b$  при фиксированном потоке  $f_a$ . Энергетические уровни обозначены с помощью собственных состояний оператора тока,  $|\downarrow\downarrow\rangle$  и т.д. В частности, указаны энергетические уровни и динамическое поведение системы для значений потоков  $f_b = f_{bL}$  (квадрат) и  $f_b = f_{bR}$  (кружок). Стрелками показана быстрая релаксация для кубита *a*; *б* — схема для *трехуровневой лазерной генерации* при  $f_b = f_{bL}$ . Возбуждающий магнитный поток накачивает ( $P$  — *pumping*) заселенность уровня  $|3\rangle$ . Быстрая релаксация ( $R$  — *relaxation*) создает инверсную заселенность первого возбужденного уровня  $|1\rangle$  по отношению к основному состоянию  $|0\rangle$ ; эти два рабочих уровня могут быть использованы для лазерной генерации ( $L$  — *lasing*); *в* — схема для *четырёхуровневой лазерной генерации* при  $f_b = f_{bR}$ . Накачка ( $P$ ) и быстрая релаксация ( $R_1$  и  $R_2$ ) создают инверсную заселенность уровня  $|2\rangle$  по отношению к уровню  $|1\rangle$  [41]

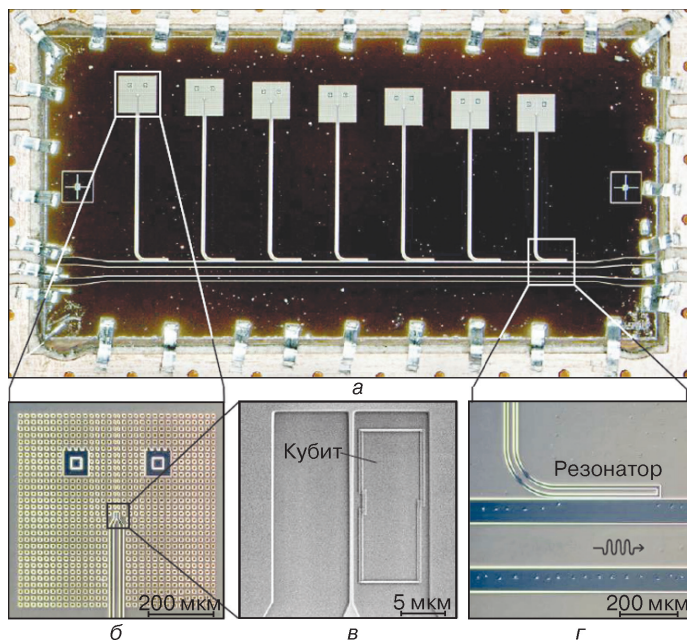
**Рис. 7.19.** Четырехуровневая накачка и стимулированный переход. Временная эволюция заселенностей уровней при потоках  $f_a = 0,014$  и  $f_b = 0,02$  построена для (а) одно- и (б) двухфотонного возбуждения. Возбуждение ( $P$ ) и быстрая релаксация ( $R$ ) создают инверсную заселенность между уровнями  $|2\rangle$  и  $|1\rangle$ . После временной задержки включается дополнительный периодический сигнал  $f_L \cos \omega_L t$ , который связывает рабочие уровни:  $\hbar \omega_L = E_2 - E_1$ . Это приводит к стимулированному переходу  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$  [41]



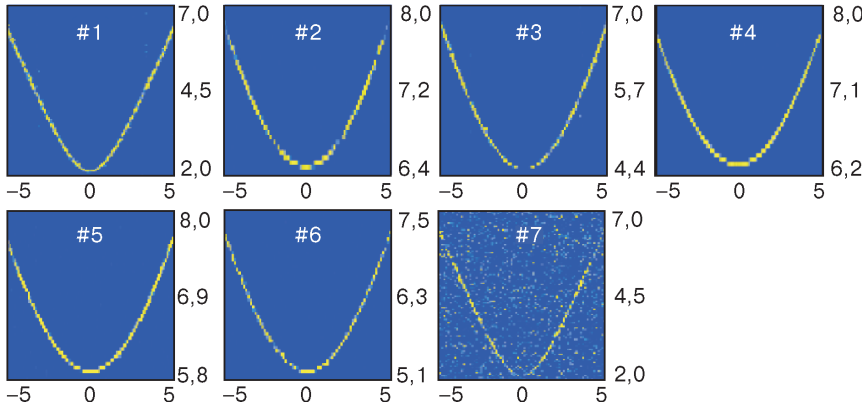
**Рис. 8.2.** Уровни энергии кубита как функция энергетического смещения  $\varepsilon$  (а). Квазипересечение уровней показано на вставке. Параметры для этого и последующих графиков:  $\Delta/h = 1,8$  ГГц,  $g/2\pi = 3$  МГц,  $\omega_r/2\pi = 2,5$  ГГц; б — контурные линии разности энергий как функция энергетического смещения  $\varepsilon$  и возбуждающей частоты  $\omega_d$ ; 1 — для  $\hbar \omega_d = E_{+,0} - E_{gr}$ , 2 — для  $\hbar \omega_d = E_{-,0} - E_{gr}$ ; в — то же, но в очень узком интервале фундаментальной частоты резонатора  $\omega_d$  [57]



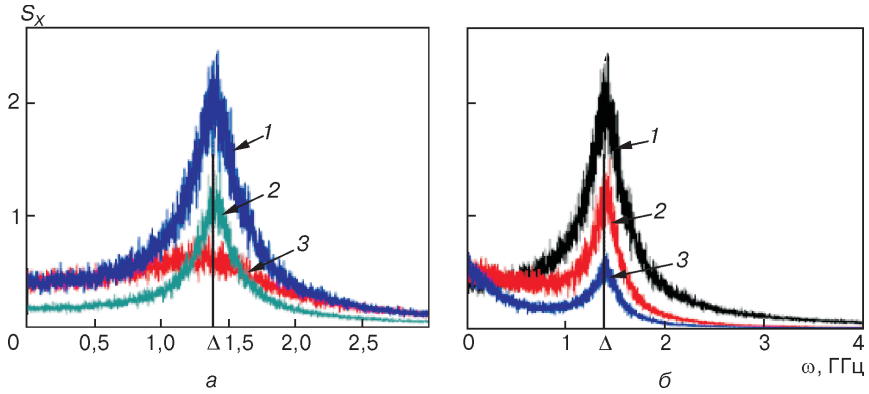
**Рис. 8.4.** Нормированная амплитуда прохождения  $|t|$  как функция энергетического смещения  $\varepsilon$  и отстройки возбуждающей частоты  $\omega_d - \omega_r$ :  $a$  — теоретические вычисления с помощью уравнения (8.36) [57];  $b$  — экспериментальные результаты из работы [56]



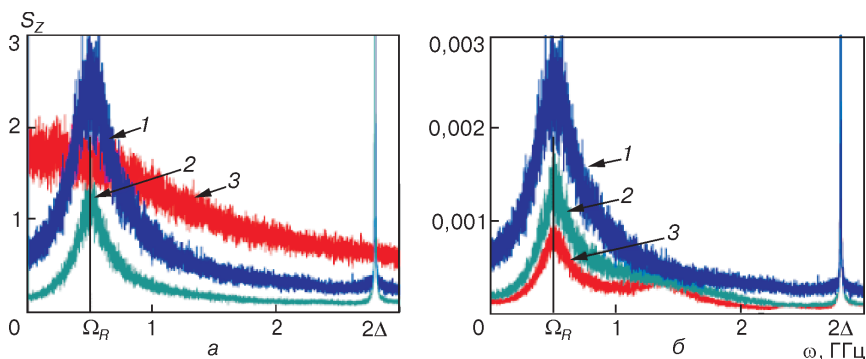
**Рис. 8.8.** Микрограф образца:  $a$  — общий вид: семь резонаторов с частотами от 9,3 до 10,3 ГГц, связанных с линией передачи,  $b$  — закороченный конец одного из резонаторов,  $в$  — один из кубитов,  $г$  — емкостная связь резонатора с линией передачи [61]



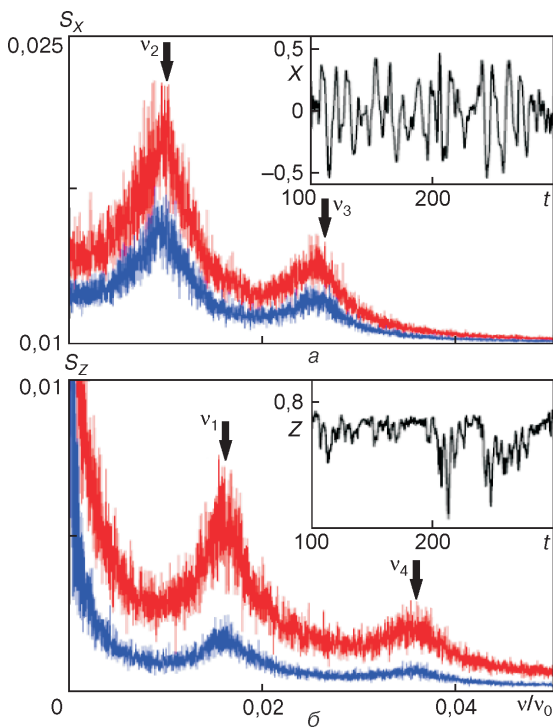
**Рис. 8.9.** Спектроскопия семи кубитов. Зависимость частоты внешнего возбуждения (ГГц) от внешнего магнитного потока (единицы  $10^{-3} \Phi_0$ ) [61]



**Рис. 9.9.** Спектральная плотность  $S_X(\omega)$  компоненты  $X$  в оптимальной точке без переменного сигнала ( $f_{dc} = 0,5$ ;  $f_{ac} = 0$ ) в присутствии внешнего белого шума (а) интенсивности  $D$ , ГГц $^{-1}$ : 1 —  $10^{-8}$ ; 2 —  $10^{-7}$ ; 3 —  $10^{-5}$ ; б — то же, но в случае цветного шума,  $D = 10^{-6}$  ГГц $^{-1}$ ,  $\tau = 0$  (1); 2 (2); 5 (3). Цифры по вертикальным осям умножены на 100 [63]



**Рис. 9.10.** Спектральная плотность  $S_Z(\omega)$  компоненты  $Z$  в оптимальной точке  $f_{ac} = 0,5$  с переменным сигналом  $f_{ac}^z = 0,005$  в присутствии внешнего белого шума ( $a$ ) интенсивности  $D$ , ГГц<sup>-1</sup>: 1 —  $10^{-6}$ ; 2 —  $10^{-7}$ ; 3 —  $2 \cdot 10^{-5}$ ;  $b$  — то же, но в случае цветного шума,  $D=10^{-6}$  ГГц<sup>-1</sup>;  $\tau = 0$  (1); 2 (2); 5 (3). Цифры по вертикальным осям умножены на 100 [63]



**Рис. 9.11.** Спектральные плотности  $S_X(a)$  и  $S_Z(b)$  для двух значений шума: красная —  $D/\Delta = 0,04$ , синяя —  $D/\Delta = 0,013$  и нормированной константы связи  $g/\Delta = 0,6$ . Четыре пика (по два на каждом рисунке) легко различимы; они соответствуют четырем межуровновым частотам  $\nu_1$ — $\nu_4$ . На вставках показаны временные зависимости  $a$  —  $X(t)$ ,  $b$  —  $Z(t)$  [64]

---

**Александр Николаевич Омелянчук**  
член-корреспондент НАН Украины, доктор  
физико-математических наук,  
руководитель отдела  
сверхпроводящих и мезоскопических структур  
Физико-технического института низких  
температур им. Б.И. Веркина

**Евгений Вячеславович Ильичев**  
доктор физико-математических наук,  
руководитель группы  
в отделе квантового детектирования  
Института фотонных технологий  
(Йена, Германия)

**Сергей Николаевич Шевченко**  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
отдела сверхпроводящих  
и мезоскопических структур  
Физико-технического института низких  
температур им. Б.И. Веркина

