ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Материалы научных семинаров

"Наукова думка"

Киев - 1976

Настоящие материалы научных семинаров "Вопросы математической физики и функционального анализа" посвящены различным вопросам теории функций одной и нескольких комплексных переменных и ее применениям к теории вероятностей, исследованию точных и приближенных решений уравнений типа Кортвега-де-Фриза, а также нелинейных уравнений в частных производных, изучению модулярных операторов в алгебрах Неймана и некоторых интегральных уравнений.

Материалы семинаров обсуждались на научном совете "Новые проблемы математики" ФТИНТ АН УССР.

Ответственный редактор
академик АН УССР В.А. МАРЧЕНКО

ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Материалы научных семинаров

Печатается по постановлению ученого совета Физико-технического института низких температур АН УССР

Редакция информационных изданий

Редактор А.А. Шатилова
Художественный редактор Н.И. Возный
Технический редактор Т.М. Зубрицкая

В $\frac{20203-506}{\text{М22I (04)-76}}$

Подписано к печати 2.XII I975 г. БФ 02297. Бумага офс № 2, 60х84 I/8. Условн. печ.л. I0,23. учетно-изд. листов I2,08. Тираж. 500. Зак. № 29 ,.Изд. № 326 И. Цена 76 коп.

Издательство "Наукова думка", Киев, Репина, 3
Ротапринт ФТИНТ АН УССР, Харьков, 86, пр. Ленина, 47.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Стр.

О СЕПАРАТНО АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н.И. Ахиезер, Л.И. Ронкин

I. Настоящая статья примыкает к нашей работе [I] и посвящена двум теоремам этой работы, а именно первой и третьей, которые представляют, как нам кажется, самостоятельный интерес, независимо от их связи с теоремами об острие клина. В статье [I] рассмотрен случай функций от двух переменных. При переходе к случаю любого числа переменных, которым мы занимаемся в этой статье, возникли некоторые трудности, правда, технического характера. Далее, теорему 3 (здесь она будет теоремой 2) удалось усилить, заменив ее условие менее ограничительным. Наконец, доказательство теоремы I, данное в нашей статье [I], было очень сжатым и в одном своем пункте содержало пробел, устранение которого нельзя считать тривиальным. Вот соображения, послужившие поводом для написания настоящей статьи. Ее чтение не требует предварительного знакомства с доказательством упомянутых двух теорем статьи [I].

2. Введем необходимые обозначения:

$$z^{(j)} = (z_1, \dots, \hat{z}_j, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1},$$

$$z = (z_1, \dots, z_n) = (z_j ; z^{(j)}) \in \mathbb{C}^n;$$

$$T_j = \{ z^{(j)} : |z_k| = 1,\ k \neq j \},\quad T^n = \{ z : |z_k| = 1,\ k = 1, \dots, n \},$$

$$q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \quad (q_k > 1,\ k = 1, 2, \dots, n),$$

$$A_j[1, q_j) = \{ z_j : 1 \leqslant |z_j| < q_j \},\quad A_j(1, q_j) = \{ z_j : 1 < |z_j| < q_j \},$$

$$A[1, q) = \{ z : z_j \in A_j[1, q_j),\ j = 1, 2, \dots, n \},\qquad A(1,q) = \{ z : z_j \in A_j(1, q_j),\ j = 1, \dots, n \}.$$

Т е о р е м а I. Пусть функции $g_j(z)$, определенные соответственно при $z_j \in A_j[1, q_j)$, $z^{(j)} \in T_j$, удовлетворяют следующим условиям:

a) $\sup_z |g_j(z)| < \infty$,

в) при любом фиксированном $z^{(j)} \in T_j$ функция $g_j(z)$ голоморфна по z_j в $A_j(1, q_j)$ и непрерывна на $A_j[1, q_j)$,

с) при любом $z \in T^n$ имеет место равенство

$$g_1(z) = g_2(z) = \dots = g_n(z) \quad (= g(z)),$$

d) определенная на T^n условием с) функция

$$g(z) = \varphi(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, \dots, e^{i\theta_n}) = \varphi(\theta),\quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$$

непрерывна и имеет все смешанные обобщенные производные порядка r $(1 \leqslant r \leqslant n)$

$$\frac{\partial^r \varphi(\theta)}{\partial\theta_{k_1} \partial\theta_{k_2} \dots \partial\theta_{k_r}} \qquad (k_\alpha \neq k_\beta \quad \text{при} \quad \alpha \neq \beta),$$

являющиеся функциями из $L^2(T^n)$.

В таком случае существует функция $G(z)$, непрерывная на

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{\rho\in\Lambda} A[1,\rho),$$

где

$$\Lambda = \left\{\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n) : \rho_1 > 1,\ \rho_2 > 1, \ldots, \rho_n > 1,\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln \rho_j}{\ln q_j} = 1\right\},$$

голоморфная в

$$\operatorname{int} \mathfrak{A} = \bigcup_{\rho\in\Lambda} A(1,\rho)$$

и такая, что

$$G(z) = g(z)$$

при $z \in T^n$.

Доказательство. В силу условия d) применение к $\varphi(\theta)$ в любом порядке n различных операций

$$I + \frac{\partial}{\partial\theta_k}$$

приводит к функции, принадлежащей $L^2(T^n)$. Если

$$\varphi(\theta) \sim \sum_k c_k e^{i\langle k,\theta\rangle}, \tag{I}$$

где $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $\langle k,\theta\rangle = k_1\theta_1 + \ldots + k_n\theta_n$ и $c_k = c_{k_1,\ldots,k_n}$ — ряд Фурье функции φ (суммирование по k означает суммирование по каждому из k_j от $-\infty$ до $+\infty$), то рядом Фурье функции

$$\prod_{j=1}^{n}\left(I + \frac{\partial}{\partial\theta_j}\right)\varphi(\theta) = \psi(\theta)$$

будет

$$\sum_k \prod_{j=1}^{n}(1 + ik_j)c_k e^{i\langle k,\theta\rangle}.$$

Поэтому, если мы положим

$$\psi(\theta) \sim \sum a_k e^{i\langle k,\theta\rangle},$$

то

$$a_k = \prod_{j=1}^{n}(1 + ik_j)c_k$$

и

$$\sum_k (1 + k_1^2)\ldots(1 + k_n^2)|c_k|^2 < \infty. \tag{2}$$

Отсюда, очевидно, следует абсолютная сходимость ряда (I).

Однако нам этого недостаточно, и мы займемся выводом более сильных оценок, что оказывается возможным благодаря условию в).

Пусть $k_j \geqslant 0$, тогда из представления

$$c_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{1}{(2\pi)^n i}\int_{T_j} e^{-i\langle k^{(j)},\theta^{(j)}\rangle}\, d\theta_1\ldots\widehat{d\theta_j}\ldots d\theta_n \oint_{1<|z_j|=r<q_j} \frac{g_j(z_j; z^{(j)})}{z_j^{k_j+1}}\, dz_j,$$

где $k^{(j)} = (k_1, \ldots, \hat{k}_j, \ldots, k_n)$, и аналогично определяется $\theta^{(j)}$, получаем оценку

$$|c_{k_1,k_2,\ldots,k_n}| \leqslant M_j q_j^{-k_j}, \tag{3}$$

где M_j – левая часть неравенства в условии а). Мы можем ввести вместо M_j наибольшее из этих чисел M. Возьмем теперь числа $\lambda_j > 0$ $(j=1,2,\dots,n)$, для которых $\lambda_1+\dots+\lambda_n = 1$, и предположим, что среди индексов $k_1, k_2, \dots, k_n$ имеется $\alpha \leqslant n$ неотрицательных. Для упрощения записи примем, что ими являются $k_1, k_2, \dots, k_\alpha$. Тогда с помощью (2) и (3) мы найдем, что

$$\left|C_{k_1,\dots,k_n}\right| \leqslant M^{\lambda_1+\dots+\lambda_\alpha} q_1^{-\lambda_1 k_1} \dots q_\alpha^{-\lambda_\alpha k_\alpha} \left|C_{k_1,\dots,k_n}\right|^{1-\lambda_1-\dots-\lambda_\alpha} \tag{4}$$

Из неравенства (4) вытекает, во-первых, неравенство

$$\left|c_{k_1,\dots,k_n}\right| \leqslant M q_1^{-\lambda_1 k_1} \dots q_\alpha^{-\lambda_\alpha k_\alpha}, \tag{4'}$$

что очевидно, и, во-вторых, при произвольном положительном $\varepsilon < \frac{1}{3}$ неравенство

$$\sum_{k_1,k_2,\dots,k_\alpha=0}^{\infty} \; \sum_{k_{\alpha+1},\dots,k_n=-\infty}^{-1} \left(q_1^{\lambda_1 k_1} \dots q_\alpha^{\lambda_\alpha k_\alpha}\right)^{\varepsilon} \left|c_{k_1,\dots,k_n}\right| < \infty, \tag{4''}$$

которое мы сейчас докажем. Для краткости перепишем левую часть (4) в виде

$$\sum\nolimits_{\alpha}^{+} \sum\nolimits_{n-\alpha}^{-} Q^{\varepsilon} \left|c_k\right|,$$

где $Q = Q_{k,\alpha} = q_1^{\lambda_1 k_1} \dots q_\alpha^{\lambda_\alpha k_\alpha}$. По числу ε построим

$$p = \frac{2}{1+\varepsilon}, \quad p' = \frac{2}{1-\varepsilon},$$

так что

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad p > \frac{3}{2}, \quad (1-\varepsilon)p > 1.$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$\sum\nolimits_{\alpha}^{+} \sum\nolimits_{n-\alpha}^{-} Q^{\varepsilon} \left|c_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum\nolimits_{\alpha}^{+} \sum\nolimits_{n-\alpha}^{-} \frac{Q^{\varepsilon p} \left|c_k\right|^{\varepsilon p}}{\left|\prod_{j=1}^{n} (k_j+i)\right|^{(1-\varepsilon)p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum\nolimits_{\alpha}^{+} \sum\nolimits_{n-\alpha}^{-} \left|a_k\right|^{(1-\varepsilon)p'} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant M^{\varepsilon} \left\{ \sum\nolimits_{\alpha}^{+} \sum\nolimits_{n-\alpha}^{-} \frac{1}{\left|\prod_j (k_j+i)\right|^{(1-\varepsilon)p}} \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum\nolimits_{\alpha}^{+} \sum\nolimits_{n-\alpha}^{-} \left|a_k\right|^2 \right\}^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

и неравенство (4″) доказано.

Теперь представим кратный ряд (I) как результат последовательных простых суммирований по отдельным индексам. При этом каждый простой ряд запишем в виде

$$\sum_{k_j} = \sum_{k_j}{}^{+} + \sum_{k_j}{}^{-},$$

где в $\sum_{k_j}^{+}$ индекс пробегает положительные значения и 0, а в $\sum_{k_j}^{-}$ – отрицательные значения. Тогда ряд для $\varphi(\Theta)$ можно будет записать в виде суммы 2^n слагаемых, типичным представителем которых является $\sum_{\alpha}^{+} \sum_{n-\alpha}^{-}$. Все слагаемые этого вида будем называть рядами типа α. Число различных рядов $\varphi_{\alpha,m}(\Theta)$ типа α равно $\binom{n}{\alpha}$. Таким образом,

$$\varphi(\Theta) = \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{m=1}^{\binom{n}{\alpha}} \varphi_{\alpha,m}(\Theta). \tag{5}$$

Каждому из рядов $\varphi_{\alpha,m}(\Theta)$ сопоставим функцию $H_{\alpha,m}(z)$, заменяя в ряде $\varphi_{\alpha,m}(\Theta)$ выражение $e^{i(k_1\theta_1+\dots+k_n\theta_n)}$ произведением $z_1^{k_1}\dots z_n^{k_n}$, и введем функцию

$$G(z)=\sum_{\alpha=0}^{n}\sum_{m=1}^{\binom{n}{\alpha}}H_{\alpha,m}(z). \tag{6}$$

Из неравенства (4′) вытекает, что функции

$$\sum_{\substack{k_1,k_2,\dots,k_\alpha\geq 0\\ k_{\alpha+1},\dots,k_n<0}} C_{k_1,k_2,\dots,k_n}\, z_1^{k_1}\dots z_\alpha^{k_\alpha}\, z_{\alpha+1}^{k_{\alpha+1}}\dots z_n^{k_n} \tag{7}$$

голоморфна в области

$$|z_1|<q_1^{\lambda_1},\dots,|z_\alpha|<q_\alpha^{\lambda_\alpha},\ |z_{\alpha+1}|>1,\dots,|z_n|>1$$

и, следовательно, голоморфна в области

$$A(1,q_1^{\lambda_1})\times A(1,q_2^{\lambda_2})\times\dots\times A(1,q_n^{\lambda_n}).$$

А так как это верно при любых $\lambda_j>0$, связанных соотношением $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, то функции (7) голоморфна в $int\,\mathfrak{A}$. Тем же свойством обладает любая из функций $H_{\alpha,m}(z)$ формулы (6), а значит и вся их сумма $G(z)$. С другой стороны из неравенства (4) следует, что ряд (7) абсолютно и равномерно сходится в области

$$|z_1|\leqslant q_1^{\varepsilon\lambda_1},\dots,|z_\alpha|\leqslant q_\alpha^{\varepsilon\lambda_\alpha},\quad |z_{\alpha+1}|\geqslant 1,\dots,|z_n|\geqslant 1,$$

и,следовательно,представляет непрерывную функцию в этой области. Функция (7) поэтому и подавно непрерывна в области

$$A_1[1,q_1^{\varepsilon\lambda_1})\times\dots\times A_n[1,q_n^{\varepsilon\lambda_n}).$$

А так как это верно при любых $\lambda_j>0$, связанных соотношением $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$, то функция (7) непрерывна в области

$$\mathfrak{A}_\varepsilon=\bigcup_{\rho\in\Lambda}A[1,\varepsilon\rho),$$

где Λ то же, что и в формулировке теоремы I. Тем же свойством обладает и вся сумма $G(z)$. $\mathfrak{A}_\varepsilon$ представляет некоторую "приграничную зону" области $\mathfrak{A}$. Таким образом,при $z\to\zeta$ $(z\in int\,\mathfrak{A},\ \zeta\in T^n)$ $G(z)$ равномерно на T^n стремится к пределу, откуда следует справедливость последнего утверждения теоремы, а именно равенство $G(z)=g(z)$ при $z\in T^n$. Однако нам нужно доказать, что $G(z)$ стремится к пределу в каждой точке $\tilde z\in\mathfrak{A}\setminus int\,\mathfrak{A}$, когда $z\to\tilde z$, $z\in int\,\mathfrak{A}$. Как и выше по другому поводу, ограничимся случаем, когда

$$|\tilde z_1|=1,\dots,|\tilde z_\alpha|=1;\quad |\tilde z_{\alpha+1}|>1,\dots,|\tilde z_n|>1. \tag{8}$$

Предварительно докажем, что для построенной нами функции $G(z)$, голоморфной в $int\,\mathfrak{A}$, справедливо неравенство

$$\sup_{int\,\mathfrak{B}}|G(z)|\leqslant M, \tag{9}$$

где M – введенная выше величина. Действительно, в противном случае в $int\,\mathfrak{A}$ нашлась бы точка z^* такая, что для любого j $(j=1,2,\dots,n)$

$$g_j(z)-G(z^*)\neq 0$$

при $z_j \in A_j[1,q_j)$, $z^{(j)} \in T_j$. Следовательно, для функций

$$\tilde{g}_j(z) = \frac{1}{g_j(z) - G(z^*)} \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

были бы выполнены все условия доказываемой теоремы и поэтому в силу уже доказанной части теоремы

$$\tilde{G}(z) = \frac{1}{G(z) - G(z^*)}$$

была бы голоморфна в $\operatorname{int} \mathfrak{A}$, что абсурдно. Следовательно, неравенство (9) доказано.

Теперь уже можно закончить доказательство теоремы. Итак, возьмем точку $\tilde{z} \in \mathfrak{A} \setminus \operatorname{int} \mathfrak{A}$, для которой имеет место неравенство (8). Для удобства положим

$$z' = (z_1, z_2, \ldots, z_\alpha), \quad z'' = (z_{\alpha+1}, z_{\alpha+2}, \ldots, z_n),$$

так что $z = (z', z'')$. Далее возьмем достаточно малое $\delta > 0$ и положим

$$U_{\tilde{z}''}(\rho) = \left\{ z'' : |z''_{\alpha+k} - \tilde{z}''_{\alpha+k}| < \delta,\ z''_{\alpha+k} \in A(1, \rho_{\alpha+k}),\ k = 1,\ldots,n-\alpha \right\},$$

а затем введем для каждого $z'' \in U_{\tilde{z}''}(\rho)$ область

$$D_w = \left\{ w : z''_{\alpha+k} + w_{\alpha+k} \in A(1, \rho_{\alpha+k}),\ k = 1,2,\ldots,n-\alpha \right\}$$

в w - пространстве $\mathbb{C}^{n-\alpha}$. Ясно, что точка $w = 0$ принадлежит D_w, а также, что $D_w^\varepsilon \subset D_w$, если D_w^ε получается из D_w заменой ρ на $\varepsilon\rho$. Рассмотрим на D_w семейство функций от w с параметром z, определяемое выражением

$$G(z', z'' + w) = G_z(w).$$

Как установлено выше, это семейство равномерно ограниченных функций и по доказанному выше[I)] при $w \in D_w^\varepsilon$

$$\lim_{\substack{z \to \tilde{z} \\ z \in \operatorname{int} \mathfrak{A}}} G(z', z'' + w) = G(\tilde{z}', \tilde{z}'' + w).$$

По теореме Стильтьеса-Витали это соотношение имеет место и притом равномерно в D_w; в частности, оно верно при $w = 0$. Следовательно, функция $G(z)$ непрерывна в $\mathfrak{A}$. Тем самым теорема полностью доказана.

3. В этом n° мы будем рассматривать континуальный аналог теоремы I, для чего необходимо ввести некоторые дополнительные обозначения:

$$x_j = \operatorname{Re} z_j,\quad y_j = \operatorname{Im} z_j,\quad x = (x_1,\ldots,x_n),\quad y = (y_1,\ldots,y_n),$$

$$x^{(j)} = (x_1,\ldots,\hat{x}_j,\ldots,x_m),$$

$$B_j[0,\lambda_j) = \left\{ z_j : -\infty < x_j < \infty,\ 0 \leqslant y_j < \lambda_j \right\},$$

$$B_j(0,\lambda_j) = \left\{ z_j : -\infty < x_j < \infty,\ 0 < y_j < \lambda_j \right\},$$

$$B[0,\lambda) = \left\{ z : z_j \in B_j[0,\lambda_j),\ j = 1,\ldots,n \right\},$$

$$B(0,\lambda) = \left\{ z : z_j \in B_j(0,\lambda_j),\ j = 1,2,\ldots,n \right\},$$

$$\mathbb{R}^{n-1}_{(j)} = \left\{ z^{(j)} : -\infty < x_m < \infty,\ y_m = 0,\ m \neq j \right\} = \left\{ x^{(j)} : -\infty < x_m < \infty,\ m \neq j \right\}.$$

I) Непрерывность в приграничной зоне.

Т е о р е м а 2. Пусть функции $f_j(z)=f_j(z_j\,;z^{(j)})$, определенные, соответственно, при $z_j\in B[0,1)$, $z^{(j)}=x^{(j)}\in\mathbb{R}^{n-1}_{(j)}$ таковы, что

а) $\sup\limits_{z}|f_j(z)|=M_j\leqslant M<\infty$,

в) при любом фиксированном $x^{(j)}$ функция $f_j(z_j;x^{(j)})$ голоморфна в $B_j(0,1)$ и непрерывна на $B_j[0,1)$,

с) при любом $x\in\mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$f_1(x)=f_2(x)=\ldots=f_n(x)\qquad(=f(x)),$$

d) определенная на $\mathbb{R}^n$ условием с), функция $f(x)$ непрерывна и такова, что при любом r $(1\leqslant r\leqslant n)$ все смешанные производные r-го порядка

$$\frac{\partial^r f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_{j_1}\,\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_r}}\qquad(j_\mu\neq j_\nu\ \text{ при }\ \mu\neq\nu)$$

непрерывны и ограничены.

В таком случае существует функция $F(z)$, непрерывная на

$$\mathcal{B}=\bigcup_{\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1}B[0,\lambda)=\Big\{z:\sum_{j=1}^n \operatorname{Im} z_j<1,\quad \operatorname{Im} z_k\geqslant 0,\ k=1,\ldots,n\Big\},$$

голоморфная в

$$\operatorname{int}\mathcal{B}=\bigcup_{\lambda_1+\ldots+\lambda_n=1}B(0,\lambda)=\Big\{z:\sum_{j=1}^n \operatorname{Im} z_j<1,\quad \operatorname{Im} z_k>0,\ k=1,\ldots,n\Big\}$$

и такая, что
$$F(x)=f(x)$$
при $x\in\mathbb{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы I. Это позволяет сократить его изложение.

Положим

$$g(x)=\frac{f(x)}{(x_1+i)^2\ldots(x_n+i)^2}$$

и заметим, что эта функция имеет все смешанные производные, о которых шла речь в условии $d)$, а также, что $g(x)$ и все эти производные принадлежат как $L^1(\mathbb{R}^n)$, так и $L^2(\mathbb{R}^n)$. Тем же свойством обладает результат применения к $g(x)$ в любом порядке r ($1\leqslant r\leqslant n$) различных операций

$$I+\frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Введем преобразование Фурье функции $g(x)$:

$$c(t)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,e^{i\langle t,x\rangle}\,dx. \tag{I0}$$

Из сказанного только что следует, что функция

$$a(t)=\prod_{j=1}^n(1-it_j)\,c(t)$$

принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $c(t)$ как произведение двух функций из $L^2(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $L^1(\mathbb{R}^n)$. Итак, $c(t)$ подобно $g(x)$ принадлежит не только $L^2(\mathbb{R}^n)$, но и $L^1(\mathbb{R}^n)$, и мы можем написать формулу обращения

$$g(x)=\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\int_{\mathbb{R}^n} c(t)\,e^{-i\langle t,x\rangle}dt. \tag{II}$$

Как и при доказательстве теоремы I, нам понадобится более сильное неравенство, чем

$$\int_{\mathbb{R}^n} |c(t)|\,dt < \infty. \tag{II'}$$

Для этого нам придется вывести континуальный аналог оценки (4). С этой целью возьмем формулу (IO) и, принимая, что $t_j \geqslant 0$, перепишем ее в виде

$$c(t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_{(j)}} \frac{e^{i\langle t^{(j)}, x^{(j)}\rangle}}{\prod\limits_{k\neq j} (x_k+i)^2}\, dx^{(j)} \int\limits_{iy_j-\infty}^{iy_j+\infty} \frac{e^{it_j z_j} f_j(z_j; x^{(j)})}{(z_j+i)^2}\, dx_j ,$$

где $0 \leqslant y_j < 1$. Отсюда мы находим, что

$$|c(t)| \leqslant \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^n M e^{-t_j y_j} = N e^{-t_j y_j}.$$

Это аналог неравенства (3). Дальнейшие оценки получаются так же, как и при доказательстве теоремы I. В частности, аналог (4″) формулируется следующим образом: пусть $\lambda_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$ и пусть $t_1, \ldots, t_\alpha \geqslant 0$; в таком случае при произвольном положительном $\varepsilon < \frac{1}{3}$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \!\!\ldots \int_0^\infty e^{(\lambda_1 t_1 + \ldots + \lambda_\alpha t_\alpha)\varepsilon}\, dt_1 \ldots dt_\alpha \int_{-\infty}^{0} \!\!\ldots \int_{-\infty}^{0} |c(t)|\, dt_{\alpha+1} \ldots dt_n < \infty. \tag{II''}$$

Далее $g(x)$ нужно записать в виде следующей суммы:

$$g(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{m=1}^{\binom{n}{\alpha}} \mathcal{G}_{\alpha,m}(x),$$

где $\mathcal{G}_{\alpha,m}(x)$ есть функция типа α, представителем которой является

$$\int_0^\infty \!\!\ldots \int_0^\infty e^{-i(t_1 x_1 + \ldots + t_\alpha x_\alpha)}\, dt_1 \ldots dt_\alpha \int_{-\infty}^{0} \!\!\ldots \int_{-\infty}^{0} c(t)\, e^{-i(t_{\alpha+1} x_{\alpha+1} + \ldots + t_n x_n)}\, dt_{\alpha+1} \ldots dt_n .$$

Затем останется повторить с надлежащими изменениями те построения, которые были применены для доказательства теоремы I. Во-первых, по функциям $\mathcal{G}_{\alpha,m}(x)$ построить функции $\mathcal{G}_{\alpha,m}(z)$. Каждая из них голоморфна в области $\operatorname{int}\mathcal{D}$. Следовательно, в области $\operatorname{int}\mathcal{D}$ голоморфна функция

$$G(z) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \sum_{\alpha=0}^{n} \sum_{m=1}^{\binom{n}{\alpha}} \mathcal{G}_{\alpha,m}(z).$$

Во-вторых, доказать, что $G(z)$ ограничена в области $\operatorname{int}\mathcal{D}$. В-третьих, построить некоторую "приграничную зону" и доказать, что $G(z)$ непрерывна в этой зоне. Наконец, с помощью теоремы Стильтьеса-Витали доказать, что $G(z)$ непрерывна в $\mathcal{D}$. Если по $G(z)$ построить функцию

$$F(z) = G(z)(z_1+i)^2 \ldots (z_n+i)^2,$$

то это и будет искомая функция.

В заключение отметим, что при предположении о бесконечной дифференцируемости функции $f(x)$ утверждение нашей теоремы 2 содержится в теореме, которая была получена в 1961 году Мальгранжем (в неопубликованной работе), а затем Цернером [2]. Эту ссылку мы даем по книге Хепп-Эпштейн [3].

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.И. Ахиезер, Л.И. Ронкин. О сепаратно аналитических функциях многих переменных и теоремах об "острие клина". УМН, XXУШ, 3 27-42, I973.

2. M.Zerner.Mimeograpfed notes of a seminar given in Marseilles, I96I.

3. Хепп-Эпштейн. Аналитические свойства амплитуд рассеяния в локальной квантовой теории поля, М., Атомиздат, I97I.

ON SEPARATE-ANALYTICAL FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

N.I.Ahiezer, L.I.Ronkin

Two theorems on analytical continuation in the domain $G \subset C^n$ of a function of the special form, defined on the (n+I)-dimensional part of boundary of G' are proved.

ОБ АРИФМЕТИКЕ ПОЛУГРУПП ШЕНБЕРГА-КЕННЕДИ

И.В. Островский, И.П. Трухина

I°. В в е д е н и е. Пусть $C_k^\nu(x)$ $(0<\nu<\infty, k=0,1,2)$ - классические полиномы Гегенбауэра, определяемые равенством

$$(1-2\zeta x+\zeta^2)^{-\nu}=\sum_{k=0}^{\infty}\zeta^k C_k^\nu(x) \qquad (|\zeta|<1, -1<x<1).$$

Положим

$$W_k^\nu(x)=\frac{C_k^\nu(x)}{C_k^\nu(1)}=\frac{k!\,\Gamma(2\nu)}{\Gamma(k+2\nu)}\,C_k^\nu(x).$$

Заметим, что

$$W_k^\nu(1)=1,\ W_k^\nu(-1)=(-1)^k,\quad |W_k^\nu(x)|<1 \text{ при } -1<x<1.$$

Обозначим через $\mathcal{P}_\nu$ класс всех функций $f(x), -1\leqslant x\leqslant 1$, представимых в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k W_k^\nu(x) \qquad (a_k\geqslant 0, \sum_{k=0}^{\infty}a_k=1). \tag{I}$$

В силу формулы Дугалла [I] (доказательство см. [2]) выполняется

$$W_p^\nu(x)\,W_q^\nu(x)=\sum_{k=0}^{q}g_\nu(k,p,q)\,W_{p+q-2k}^\nu(x), \quad p\geqslant q, \tag{2}$$

где $g_\nu(k,p,q)>0$. Отсюда следует, что множество $\mathcal{P}_\nu$ является полугруппой относительно операции обычного умножения.

Полугруппы $\mathcal{P}_\nu$ при $\nu=\frac{n}{2}-1$, где $n\geqslant 3$ - целое, впервые встретились в работе Шенберга [3] в связи с описанием общего вида эрмитово-положительных ядер на n-мерной сфере, зависящих только от расстояния. Для всех значений параметра ν, $0<\nu<\infty$, полугруппы $\mathcal{P}_\nu$ рассматривались в работе Кеннеди [4] в связи с теорией случайных процессов.

В работе [5] Бингхем получил для полугрупп $\mathcal{P}_\nu$ аналоги известных теорем А.Я.Хинчина ([6], стр. I07, II9) о факторизации эрмитово-положительных функций на прямой. Чтобы сформулировать эти аналоги, введем некоторые определения.

Будем говорить, что функция $g(x)\in\mathcal{P}_\nu$ является делителем функции $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$, если для некоторой функции $h(x)\in\mathcal{P}_\nu$ выполняется $f(x)=g(x)h(x), -1\leqslant x\leqslant 1$. Положим $e(x)\equiv 1$. Очевидно, функция $e(x)$ принадлежит $\mathcal{P}_\nu$ и является единицей в этой полугруппе. Функцию $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ будем называть простым элементом полугруппы $\mathcal{P}_\nu$, если она не совпадает с $e(x)$ и имеет лишь два делителя: $f(x)$ и $e(x)$. Функцию $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ будем называть безгранично делимой, если для любого n = 2, 3, ... найдется функция $f_n(x)\in\mathcal{P}_\nu$ такая, что $f(x)=[f_n(x)]^n, -1\leqslant x\leqslant 1$. Кеннеди показал [4], что общий вид безгранично делимой функции $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ дается формулой

$$f(x)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k\left(W_k^{\nu}(x)-1\right)\right\}, \tag{3}$$

где $c_k \geqslant 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k<\infty$.

Полученные Бингхемом [5] аналоги теорем А.Я. Хинчина можно сформулировать так.

Теорема А ([5]). Всякая функция $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ допускает представление

$$f(x)=g(x)\prod_j h_j(x),$$

где $g(x)\in\mathcal{P}_\nu$ не имеет простых делителей, а $\{h_j(x)\}$ – последовательность простых функций из $\mathcal{P}_\nu$. (Последовательность $\{h_j(x)\}$ может быть бесконечной, конечной или пустой; в первом случае произведение $\prod h_j(x)$ равномерно сходится на отрезке $[-1,1]$, а в последнем полагаем по определению $\prod h_j(x)=1$).

Теорема Б ([5]). Если функция $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ не имеет простых делителей, то она является безгранично делимой и, следовательно, допускает представление (3).

Теорема Б дает необходимое условие для того, чтобы функция $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ не имела простых делителей. Цель настоящей статьи – получить необходимое и достаточное условие. Наш основной результат формулируется так.

Теорема I. Для того, чтобы функция $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ не имела простых делителей, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление

$$f(x)=\exp\left\{\alpha_1 x^2+\alpha_2 x-\alpha_1-\alpha_2\right\}, \tag{4}$$

где $\alpha_1\geqslant 0$, $\alpha_2\geqslant 0$ – постоянные.

Заметим, что функции вида (4) образуют весьма узкий подкласс класса безгранично делимых функций. В самом деле, так как

$$W_1^{\nu}(x)=x, \quad W_2^{\nu}(x)=\frac{2(\nu+1)x^2-1}{2\nu+1},$$

то класс функций, допускающих представление (4), совпадает с классом функций, допускающих представление

$$f(x)=\exp\left\{c_1\left(W_1^{\nu}(x)-1\right)+c_2\left(W_2^{\nu}(x)-1\right)\right\},$$

где $c_1\geqslant 0$, $c_2\geqslant 0$, в то время как общий вид безгранично делимых функций дается равенством (3).

Бингхем показал [5], что если $\nu<\mu$, то $\mathcal{P}_\nu\supset\mathcal{P}_\mu$ (включение строгое). Из теоремы I непосредственно следует, что класс функций $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$, не имеющих простых делителей в $\mathcal{P}_\nu$, один и тот же для всех ν, $0<\nu<\infty$.

2°. Вспомогательные результаты. Для доказательства того, что функции вида (4) не имеют простых делителей, нам понадобятся утверждения, аналогичные известным результатам Д.А. Райкова и Леви ([6], гл. II, III) об аналитических характеристических функциях вероятностных законов.

Пусть G – область в комплексной x – плоскости, имеющая непустое пересечение с отрезком $-1\leqslant x\leqslant 1$. Если функция $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ допускает аналитическое продолжение в область G, то продолженную функцию будем обозначать снова через $f(x)$ и условимся говорить, что функция $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ аналитична в области G. Если G совпадает со всей x – плоскостью, будем говорить, что функция $f(x)$ является целой.

Обозначим через Q_R, $R>1$, внутренность эллипса E_R с фокусами в точках (+1) и (-1) и большой полуосью, равной R. Области Q_R играют для функций $f(x)\in\mathcal{P}_\nu$ ту же роль, которую для аналитических характеристических функций играют полосы, параллельные действительной оси.

Л е м м а I. Если функция $f(x)\in \mathcal{P}_\nu$ аналитична в некоторой области G, содержащей интервал $R_1 < x < R$, где $R_1 < 1 < R$, то она аналитична в области Q_R. Представление (I) сохраняет силу в Q_R, причем ряд в правой части (I) сходится там абсолютно.

Следующая лемма показывает, что имеет место аналог известного "свойства хребта" аналитических характеристических функций.

Л е м м а 2. Если функция $f(x)\in \mathcal{P}_\nu$ аналитична в области Q_R, то для всех $x\in E_r$, $1<r<R$, выполняется

$$|f(x)| \leqslant f(r). \tag{5}$$

Полагая $\sigma(r,f) = \max\limits_{x\in E_r} |f(x)|$, имеем

$$\sigma(r,f) = f(r) \geqslant 1, \quad 1<r<R. \tag{6}$$

Л е м м а 3. Если функция $f(x)\in \mathcal{P}_\nu$ аналитична в области Q_R, то там же аналитичны и все ее делители. При этом для любого ее делителя $g(x)$ выполняется

$$\sigma(r,g) \leqslant \sigma(r,f), \quad 1<r<R. \tag{7}$$

Л е м м а 4. Если функция $f(x)\in \mathcal{P}_\nu$ является целой функцией порядка ρ и типа a, то любой ее делитель является целой функцией не выше порядка ρ и типа a.

Доказательства лемм I-4 опираются на следующее замечание общего характера. Если $f(x)\in \mathcal{P}_\nu$, то $f(\cos t)$ является характеристической функцией вероятностного распределения на прямой. Чтобы убедиться в справедливости этого замечания, достаточно воспользоваться известным фактом ([7], стр. 106):

$$W_p^\nu(\cos t) = \sum_{k=0}^{p} c_\nu(p,k)\cos kt, \tag{8}$$

где $c_\nu(p,k) \geqslant 0$; из него и равенства (I) следует, что

$$f(\cos t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos kt, \tag{9}$$

где $d_k \geqslant 0, \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k = 1$.

По условию леммы I функция $f(x)$ аналитически продолжается в некоторую область G, содержащую интервал $R_1 < x < R$ $(R_1 < 1 < R)$. При отображении $x=\cos t$ комплексной t - плоскости на комплексную x - плоскость образ интервала $I_R = \{t: \operatorname{Re} t = 0, \operatorname{ch}(\operatorname{Im} t) < R\}$ попадает на интервал $R_1 < x < R$. Поэтому функция $f(\cos t)$ допускает аналитическое продолжение в некоторую область, содержащую интервал I_R. Так как $f(\cos t)$ является характеристической функцией, то отсюда следует ([6], стр. 38), что она аналитически продолжается в полосу $\Pi_R = \{t: -\infty < \operatorname{Re} t < \infty, \operatorname{ch}(\operatorname{Im} t) < R\}$ и там сохраняет силу формула (9), причем ряд в (9) сходится абсолютно в Π_R. Так как при отображении $x=\cos t$ образом полосы Π_R является область Q_R, то, учитывая (8), легко убеждаемся в справедливости леммы I.

З а м е ч а н и е. Из известной теоремы о рядах по полиномам Якоби ([7], стр 253) непосредственно следует такой факт. Для того, чтобы функция $f(x)\in \mathcal{P}_\nu$ была аналитической в Q_R, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_k в формуле (I) удовлетворяли условию

$$\varliminf_{k\to\infty} a_k^{-\frac{1}{k}} = R + \sqrt{R^2-1}.$$

Если выполнены условия леммы 2, то функция $f(\cos t)$ является характеристической функцией, аналитической в полосе $\Pi_R=\{t: -\infty < \operatorname{Re} t < \infty, ch(\operatorname{Im} t) < R\}$. В силу "свойства хребта" ([6] , стр. 42) аналитических характеристических функций имеем

$$|f(\cos t)| \leqslant f(ch(\operatorname{Im} t)), \quad \forall t \in \Pi_R .$$

Замечая, что полным прообразом эллипса E_r, $1<r<R$, при отображении $x=\cos t$ является пара прямых $\{t: -\infty < \operatorname{Re} t < \infty, \ ch(\operatorname{Im} t) = r\}$, легко получаем неравенство (5). Из (9) видно, что $f(ch(\operatorname{Im} t)) \geqslant 1$ и, значит, $f(r) \geqslant 1$ при $1 \leqslant r < R$. Соотношение $\sigma(r,f)=f(r)$ непосредственно следует из (5).

Докажем лемму 3. Пусть $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$ аналитична в Q_R , $g(x)$ - делитель $f(x)$. Тогда характеристическая функция $g(\cos t)$ является делителем $f(\cos t)$ в полугруппе характеристических функций. Поскольку функция $f(\cos t)$ аналитична в полосе Π_R , то в силу теоремы Д.А.Райкова ([6] , стр. 77) там же аналитична и функция $g(\cos t)$. Поэтому функция $g(x)$ аналитична в области Q_R .

Пусть функция $h(x) \in \mathcal{P}_\nu$ такова, что $f(x)=g(x)\,h(x)$. Так как $h(x)$ тоже является делителем $f(x)$, то она тоже аналитична в Q_R . Следовательно, равенство $f(x)=g(x)\,h(x)$ выполняется всюду в Q_R и, в частности, имеем $f(r)=g(r)\,h(r)$, $1<r<R$. В силу леммы 2 выполняется $h(r)\geqslant 1$, $\sigma(r,f)=f(r)$, $\sigma(r,g)=g(r) (1<r<R)$. Отсюда следует справедливость (7).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям леммы 4, $g(x)$ - делитель $f(x)$. Из леммы 3 непосредственно следует, что $g(x)$ является целой функцией и при всех $r>1$ выполняется $\sigma(r,g) \leqslant \sigma(r,f)$. Так как область $Q_{\sqrt{r^2+1}}$ содержит круг $|x|<r$ и содержится в круге $|x|<\sqrt{r^2+1}$, то отсюда вытекает, что

$$\max_{|x|\leqslant r} |g(x)| \leqslant \max_{|x|\leqslant \sqrt{r^2+1}} |f(x)| .$$

Поэтому справедливо утверждение леммы 4 относительно порядка и типа функции $g(x)$.

З а м е ч а н и е. Любая целая функция $f(x)$ (не обязательно принадлежащая $\mathcal{P}_\nu$) разлагается во всей x - плоскости в абсолютно сходящийся ряд

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, W_k^\nu(x).$$

Порядок ρ и тип a функции $f(x)$ связаны с коэффициентами a_k формулами

$$\rho = \overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{k \ln k}{\ln \frac{1}{|a_k|}} \quad , \quad (ae\rho)^{\frac{1}{\rho}} = 2 \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(k^{\frac{1}{\rho}} |a_k|\right)^{\frac{1}{k}}. \qquad (10)$$

Эти формулы мы не нашли в литературе. Они выводятся примерно так же, как и формулы,связывающие порядок и тип целой функции с ее коэффициентами Маклорена, но приходится применять оценку для ортогональных полиномов ([7] , стр. 167), а также следующие выражения для a_k , получаемые при помощи формулы Родрига:

$$a_k = \frac{k!\,\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu+k-1}\,\Gamma^2(k+\nu+\frac{1}{2})} \int_{-1}^{1} f^{(k)}(x)(1-x^2)^{k+\nu-\frac{1}{2}}\,dx .$$

Формулы (10) сохраняют силу и для рядов по полиномам Якоби.

3°. Ф у н к ц и и в и д а (4) н е и м е ю т п р о с т ы х д е л и т е л е й . Пусть функция $f(x)$ представляется в виде (4), $g(x)$ - ее делитель. Так как $f(x)$ является целой функцией порядка $\leqslant 2$, то по лемме 4 функция $g(x)$ также является целой порядка $\leqslant 2$. Функция $g(x)$ не имеет нулей, поскольку $f(x)$ их не имеет. По теореме Адамара справедливо представление

$$g(x) = \exp P(x), \tag{11}$$

где $P(x)$ - полином степени $\leqslant 2$. Так как функция $g(x)$ при действительных x действительна и $g(1) = 1$, то можно считать, что коэффициенты полинома $P(x)$ действительны и $P(1) = 0$. Раскладывая полином $P(x)$ по полиномам W_k^ν, можем представление (11) записать в виде

$$g(x) = \exp\left\{b_1(W_1^\nu(x) - 1) + b_2(W_2^\nu(x) - 1)\right\},$$

где b_1 и b_2 - действительные постоянные.

Если бы выполнялось $b_1 < 0$, то из равенств $W_1^\nu(-1) = -1$, $W_2^\nu(-1) = 1$ следовало бы, что

$$g(-1) = \exp(-2b_1) > 1;$$

это невозможно, так как из $g(x) \in \mathcal{P}_\nu$ следует $\max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |g(x)| = 1$.

Если бы выполнялось $b_2 < 0$, то, поскольку коэффициент при x^2 в полиноме $W_2^\nu(x)$ положителен, мы имели бы

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Это невозможно, так как в силу леммы 2 при $x > 1$ должно быть $g(x) > 1$.

Тем самым доказано, что $g(x)$ - безгранично делимая функция и, следовательно, не простая. Таким образом, всякая функция вида (4) не имеет простых делителей.

Перейдем к вспомогательным утверждениям, используемым при доказательстве того, что всякая функция $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$, не представимая в виде (4), имеет простые делители.

4°. Вспомогательные утверждения.

Лемма 5. Каковы бы ни были числа $a > 0$, $\nu > 0$ и натуральное $s \geqslant 2$, найдется $\delta = \delta(a, \nu, s) > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \delta$ функции

$$u_1(x) = (W_{2s-1}^\nu(x) - \varepsilon W_1^\nu(x))^2, \quad u_2(x) = -\varepsilon a W_1^\nu(x) + \frac{a^3}{6}(W_{2s-1}^\nu(x) - \varepsilon W_1^\nu(x))^3,$$

$$u_3(x) = (W_{2s}^\nu(x) - \varepsilon W_2^\nu(x))^2, \quad u_4(x) = -\varepsilon a W_2^\nu(x) + \frac{a^3}{6}(W_{2s}^\nu(x) - \varepsilon W_2^\nu(x))^3$$

представляются в виде

$$u_j(x) = \sum_{p\geqslant 0}{}' d_{jp} W_p^\nu(x), \quad j = 1, 2, 3, 4, \tag{12}$$

где все коэффициенты d_{jp} неотрицательны.

Лемма 6. Каковы бы ни были числа $a > 0$, $\nu > 0$ и натуральное $s \geqslant 2$, найдется $\delta = \delta(a, \nu, s) > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \delta$ функции

$$h(x) = \exp\left\{a\left[(W_{2s-1}^\nu(x) - 1) - \varepsilon(W_1^\nu(x) - 1)\right]\right\}, \tag{13}$$

$$g(x) = \exp\left\{a\left[(W_{2s}^\nu(x) - 1) - \varepsilon(W_2^\nu(x) - 1)\right]\right\} \tag{14}$$

принадлежат полугруппе $\mathcal{P}_\nu$.

Для доказательства леммы 5 запишем

$$u_1(x)=\left[W^{\nu}_{2s-1}(x)\right]^2-2\varepsilon W^{\nu}_{2s-1}(x)\,W^{\nu}_1(x)+\varepsilon^2\left[W^{\nu}_1(x)\right]^2.$$

Из формулы (2) следует, что

$$\left[W^{\nu}_{2s-1}(x)\right]^2=\sum_{0\leqslant 2l\leqslant 4s-2} A_l\, W^{\nu}_{2l}(x),$$

$$W^{\nu}_{2s-1}(x)\,W^{\nu}_1(x)=B_s\,W^{\nu}_{2s}(x)+C_s\,W^{\nu}_{2s-2}(x),$$

$$\left[W^{\nu}_1(x)\right]^2=D W^{\nu}_2(x)+E W^{\nu}_0(x),$$

где коэффициенты A_l, B_s, C_s, D, E положительны. Беря $\delta_1>0$ столь малым, что

$$A_s-2\delta_1 B_s>0,\qquad A_{s-1}-2\delta_1 C_s>0,$$

заключаем, что при $0<\varepsilon<\delta_1$ функция $u_1(x)$ представляется линейной комбинацией полиномов W^{ν}_p, коэффициенты которой неотрицательны. Аналогично показываем, что существует $\delta_2>0$ такое, что при $0<\varepsilon<\delta_2$ функция $u_3(x)$ представляется линейной комбинацией полиномов W^{ν}_p, коэффициенты которой неотрицательны.

Рассмотрим функцию $u_2(x)$. Имеем

$$\frac{1}{a}u_2(x)=-\varepsilon W^{\nu}_1(x)+\frac{a^2}{6}\left[W^{\nu}_{2s-1}(x)\right]^3-$$
$$-\frac{a^2}{2}\varepsilon\left[W^{\nu}_{2s-1}(x)\right]^2W^{\nu}_1(x)+\frac{a^2}{2}\varepsilon^2\,W^{\nu}_{2s-1}(x)\left[W^{\nu}_1(x)\right]^2-\frac{a^2}{6}\varepsilon^3\left[W^{\nu}_1(x)\right]^3.$$

Дважды применяя формулу (2), получаем соотношения

$$\left[W^{\nu}_{2s-1}(x)\right]^3=\sum_{1\leqslant 2l+1\leqslant 6s-3}\alpha_l\,W^{\nu}_{2l+1}(x),$$

$$\left[W^{\nu}_{2s-1}(x)\right]^2W^{\nu}_1(x)=\sum_{1\leqslant 2l+1\leqslant 4s-1}\beta_l\,W^{\nu}_{2l+1}(x),$$

$$W^{\nu}_{2s-1}(x)\left[W^{\nu}_1(x)\right]^2=\sum_{2s-3\leqslant 2l+1\leqslant 2s+1}\gamma_l\,W^{\nu}_{2l+1}(x),$$

$$\left[W^{\nu}_1(x)\right]^3=\varkappa_0\,W^{\nu}_1(x)+\varkappa_1\,W^{\nu}_3(x),$$

где все коэффициенты α_l, β_l, γ_l, $\varkappa_l$ положительны. Отсюда следует, что существует $\delta_3>0$ такое, что при $0<\varepsilon<\delta_3$ функция $u_2(x)$ представляется линейной комбинацией полиномов W^{ν}_p, коэффициенты которой неотрицательны. Так же доказываем, что и для функции $u_4(x)$ существует число $\delta_4 > 0$ с аналогичным свойством. Полагая $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4)$, убеждаемся в справедливости утверждения леммы 5.

Доказательство леммы 6 мы проведем только для функции $h(x)$, так как для $g(x)$ оно проводится аналогично. Пусть число $\delta > 0$ выбрано согласно лемме 5; будем считать, что $0 < \varepsilon < \delta$. Имеем

$$h(x) = e^{-a(1-\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \left(W_{2s-1}^{\nu}(x) - \varepsilon W_1^{\nu}(x)\right)^k =$$

$$= e^{-a(1-\varepsilon)} \Big\{ 1 + a W_{2s-1}^{\nu}(x) + \frac{a^2}{2} u_1(x) + u_2(x) +$$

$$+ \sum_{k=4}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \left(W_{2s-1}^{\nu}(x) - \varepsilon W_1^{\nu}(x)\right)^k \Big\} .$$

По лемме 5 функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ представляются линейными комбинациями вида (I2) с неотрицательными коэффициентами. Так как любое натуральное число $k \geqslant 4$ можно представить в виде $k = 2q + 3r$, где q и r – целые неотрицательные, то при $k \geqslant 4$ имеем

$$\left(W_{2s-1}^{\nu}(x) - \varepsilon W_1^{\nu}(x)\right)^k = \left\{\left(W_{2s-1}^{\nu}(x) - \varepsilon W_1^{\nu}(x)\right)^2\right\}^q \times$$

$$\times \left\{\left(W_{2s-1}^{\nu}(x) - \varepsilon W_1^{\nu}(x)\right)^3\right\}^r = \left\{u_1(x)\right\}^q \left\{\frac{6}{a^3} u_2(x) + \frac{6\varepsilon}{a^2} W_1^{\nu}(x)\right\}^r .$$

Применяя лемму 5, заключаем, что при любом $k \geqslant 4$ функция $\left(W_{2s-1}^{\nu}(x) - \varepsilon W_1^{\nu}(x)\right)^k$ является линейной комбинацией полиномов W_p^{ν}, коэффициенты которой неотрицательны. Отсюда легко следует, что $h(x) \in \mathcal{P}_\nu$.

5⁰. В с я к а я ф у н к ц и я $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$, н е п р е д с т а в и м а я в в и д е (4), и м е е т п р о с т о й д е л и т е л ь.

Из теоремы Б и теоремы об общем виде безгранично делимой функции заключаем, что всякая функция $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$, не представимая в виде (3), имеет простые делители. Поэтому можно ограничиться рассмотрением функций $f(x)$, представимых в виде (3), но не представимых в виде (4). Если $f(x)$ – такая функция, то хотя бы один из коэффициентов c_k, $k \geqslant 3$, в формуле (3) положителен. Отсюда следует, что достаточно доказать наличие простых делителей у функций вида

$$p(x) = \exp\left\{a\left(W_k^{\nu}(x) - 1\right)\right\}, \quad k \geqslant 3, \quad a > 0.$$

Пусть k – нечетное, $k = 2s-1$, $s \geqslant 2$. Согласно лемме 6 существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция $h(x)$, определенная равенством (I3), принадлежит полугруппе $\mathcal{P}_\nu$. Так как

$$p(x) = h(x) \exp\left\{a\varepsilon\left(W_{2s-1}^{\nu}(x) - 1\right)\right\},$$

то $h(x)$ является делителем для $p(x)$.

Функция $h(x)$, очевидно, не может быть представлена в виде

$$h(x) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} d_k \left(W_k^{\nu}(x) - 1\right)\right\},$$

где $d_k \geqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, поэтому $h(x)$ не является безгранично делимой функцией. По теореме Б она имеет простые делители. Поэтому простые делители имеются и у функции $p(x)$.

20597

Случай, когда k - четное, $k=2s$, $s \geqslant 2$, рассматривается аналогично, но используется функция $g(x)$, определяемая равенством (I4).

Тем самым доказано, что всякая функция $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$, не представимая в виде (4), имеет простые делители. Этим завершено доказательство теоремы I.

6°. О множестве простых элементов полугруппы $\mathcal{P}_\nu$.

Теорема 2. Множество простых элементов полугруппы $\mathcal{P}_\nu$ является плотным в $\mathcal{P}_\nu$ в топологии равномерной сходимости на отрезке $[-I,I]$.

Эта теорема аналогична одной теореме Партасарати, Рао и Варадана [8], относящейся к полугруппе вероятностных распределений.

Для доказательства теоремы 2 понадобится следующая лемма.

Лемма 7. Пусть функция $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k W_k^\nu(x) \qquad (2 \leqslant N < \infty).$$

Если $a_N > 0$, $a_{N-2} = 0$, то функция $f(x)$ является простым элементом полугруппы $\mathcal{P}_\nu$.

Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда имеем $f(x) = f_1(x) f_2(x)$, где $f_j(x) \in \mathcal{P}_\nu$, $f_j(x) \neq e(x)$ $(j=1,2)$. Легко видеть, что функции $f_j(x)$ представляются так:

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{N_j} a_{kj} W_k^\nu(x) \qquad (a_{kj} \geqslant 0),$$

где $N_1 + N_2 = N$, $N_1 \geqslant 1$, $N_2 \geqslant 1$, $a_{N_1 1} > 0$, $a_{N_2 2} > 0$. Отсюда следует, что

$$f(x) = a_{N_1 1} a_{N_2 2} W_{N_1}^\nu(x) W_{N_2}^\nu(x) + \sum{}' a_{r1} a_{s2} W_r^\nu(x) W_s^\nu(x)$$

(штрих у знака суммы означает, что суммирование производится по всем парам (r,s) таким, что $0 \leqslant r \leqslant N_1$, $0 \leqslant s \leqslant N_2$, исключая пару (N_1, N_2)). Применяя к произведению $W_{N_1}^\nu(x) W_{N_2}^\nu(x)$ формулу (2), убеждаемся, что равенство $a_{N-2} = 0$ невозможно.

Докажем теорему 2. Пусть $f(x)$ - произвольная функция из $\mathcal{P}_\nu$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k^\nu(x).$$

Положим $A_N = \sum_{k=0}^{N-3} a_k$ и будем считать N настолько большим, чтобы A_N было положительным. Пусть

$$f_N(x) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{1}{A_N} \sum_{k=0}^{N-3} a_k W_k^\nu(x) + \frac{1}{N} W_N^\nu(x).$$

По лемме 7 функция $f_N(x)$ является простым элементом полугруппы $\mathcal{P}_\nu$. Очевидно, что $f_N(x) \to f(x)$ $(N \to \infty)$ равномерно на отрезке $[-I,I]$.

ЛИТЕРАТУРА

I. J.Dougall. A theorem of Sonine in Bessel functions with two extensions to spherical harmonics. Proc. Edinburgh Math. Soc., 37, 33-47, 1919.

2. H.-Y. Hsü. Certain integrals and infinite series involving ultraspherical polynomials and Bessel functions. Duke math., J., 4, 374-383, 1938.

3. I. J. Schoenberg. Positive definite functions on spheres. Duke math. J., 9, 96-108, 1942.

4. M. Kennedy. A stochastic process associated with the ultraspherical polynomials. Proc. Royal Irish Acad., Sect. A, 61, 89-100, 1961.

5. N. H. Bingham. Positive definite functions on spheres. Proc. Cambr. Phil. Soc., 73, 145-156, 1973.

6. Ю.В. Линник, И.В. Островский. Разложения случайных величин и векторов, М., "Наука", 1972.

7. Г. Сеге. Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962.

8. K. R. Parthasarathy, R. R. Rao, S. R. S. Varadhan. On the category of indecomposable distributions on topological groups. Trans. Amer. Math. Soc., 102, 200-217, 1962.

ON THE ARITHMETICS OF SCHOENBERG-KENNEDY SEMIGROUPS

I. V. Ostrovskii, I. P. Truhina

Let $\mathcal{P}_\nu$ be the set of functions

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^\nu(x)\{C_k^\nu(1)\}^{-1}, \quad -1 \le x \le 1,$$

where $a_k \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, and $C_k^\nu(x)$ are classical Gegenbauer's polynomials. The set $\mathcal{P}_\nu$ is semigroup under multiplication. The function $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$ is called the prime function if its divisors are $e(x) \equiv 1$ and $f(x)$ only? The main results of the paper are following:

1) the set of the functions $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$ which have no the prime divisor in $\mathcal{P}_\nu$ consists of the functions

$$f(x) = \exp\{\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x - \alpha_2 - \alpha_1\}, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \ \alpha_2 \geqslant 0;$$

2) the set of prime functions $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$ is dense in $\mathcal{P}_\nu$ in sense of uniform convergence on $[-1, 1]$.

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

В.А. Ткаченко

§ I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Пусть заданы число $\rho>0$ и 2π - периодическая функция $H(\theta)$, тригонометрически выпуклая при порядке ρ. Это значит [I], что при любых θ_i $(i=1,2,3)$ выполняются неравенства

$$H(\theta_2)\leqslant \frac{\sin\rho(\theta_2-\theta_1)}{\sin\rho(\theta_3-\theta_1)}H(\theta_3)+\frac{\sin\rho(\theta_3-\theta_2)}{\sin\rho(\theta_3-\theta_1)}H(\theta_1) \qquad \left(0<\theta_3-\theta_1<\frac{\pi}{\rho},\ \theta_1<\theta_2<\theta_3\right).$$

Мы будем считать, что функция $H(\theta)$ принимает в каждой точке либо конечное значение, либо значение $+\infty$. Обозначим через $\mathfrak{M}(H)$ совокупность всех тригонометрически выпуклых при порядке ρ функций $h(\theta)$, каждая из которых при любом $\theta\in[0,2\pi]$ удовлетворяет неравенству $h(\theta)<H(\theta)$. В дальнейшем мы предполагаем, что

А) функция $H(\theta)$ непрерывна на каждом замкнутом отрезке, где она ограничена;

В) $\mathfrak{M}(H)\neq\phi$.

Для функции $h\in\mathfrak{M}(H)$ обозначим через $\mathcal{F}_h$ банахово пространство всех целых функций, для которых конечна норма

$$\|\psi\|_h=\sup_{r,\theta}|\psi(re^{i\theta})|\exp[-h(\theta)r^{\rho}].$$

Индуктивный предел [2] семейства банаховых пространств $\{\mathcal{F}_h\}$ мы обозначим через $\mathcal{F}$, а его сопряженное, наделенное сильной топологией - через $\mathcal{E}$.

Очевидно, в пространстве $\mathcal{F}$ непрерывно действует оператор Λ умножения на независимую переменную. Сопряженный оператор мы обозначим через D.

В настоящей работе изучаются простейшие свойства пространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ в общей ситуации и указываются некоторые аналитические реализации пространства $\mathcal{E}$ и оператора D при специальном выборе функции $H(\theta)$.

Т е о р е м а I. Если $H(\theta)$ - ρ - тригонометрически выпуклая функция, и выполнены условия А) и В), то существует такая последовательность 2π - периодических ρ - тригонометрически выпуклых функций $\{h_k(\theta)\}_1^{\infty}$, которая обладает следующими свойствами:

1) $h_k(\theta)<h_{k+1}(\theta)<H(\theta)$ для всех $k\geqslant 1$;

2) для всякой функции $h\in\mathfrak{M}(H)$ найдется такой номер k, что $h(\theta)<h_k(\theta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через I_H и F_H подмножества сегмента $[0,2\pi]$, на которых $H(\theta)=+\infty$ и $H(\theta)<\infty$ соответственно. Из тригонометрической выпуклости функции $H(\theta)$ следует, что всякая точка множества I_H содержится в нем вместе с некоторым интервалом длины, не меньшей числа $\frac{\pi}{\rho}$. Поэтому I_H и F_H являются объединениями конечного числа попарно непересекающихся максимальных интервалов[I)], причем длина каждого такого интервала, входящего в I_H не меньше $\frac{\pi}{\rho}$. Согласно условию В) существует тригонометрически выпуклая функция $h_0(\theta)$, которая удовлетворяет неравенству $h_0(\theta)<H(\theta)$ и, следовательно, принимает лишь конечные значения.

I) открытых, полуоткрытых или замкнутых.

Но тогда $h_0(\theta)$ - непрерывная функция [1] и благодаря условию А) найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $h_0(\theta)+\varepsilon < H(\theta)$ при $\theta\in[0,2\pi]$. Фиксируя ε, введем в рассмотрение функции

$$H_k(\theta)=\begin{cases} H(\theta)-\dfrac{\varepsilon}{k} & \theta\in F_H \\ \dfrac{k}{\varepsilon} & \theta\in I_H \end{cases} \qquad (k=1,2,\dots).$$

Если $\mathfrak{M}(H_k)$ - совокупность всех ρ - тригонометрически выпуклых функций, которые удовлетворяют неравенству $h(\theta)<H_k(\theta)$ при $\theta\in[0,2\pi]$, то благодаря указанному выбору числа ε имеем $\mathfrak{M}(H_k)\neq\phi$ $(k\geq k_\varepsilon)$. Всюду в дальнейшем мы считаем, что $\mathfrak{M}(H_1)\neq\phi$.

Положим теперь

$$h_k(\theta)=\sup_{h\in\mathfrak{M}(H_k)} h(\theta)$$

и проверим, что последовательность $\{h_k(\theta)\}_1^\infty$ удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы.

Прежде всего отметим, что $H_k(\theta)<H_{k+1}(\theta)<H(\theta)$ для всех значений $\theta\in[0,2\pi]$. Поэтому $h_k(\theta)<h_{k+1}(\theta)$, так что условие I выполнено. Положим $h(\theta)=\lim\limits_{k\to\infty}h_k(\theta)$ и проверим, что $h(\theta)\equiv H(\theta)$. Отсюда благодаря условию А) будет следовать, что последовательность $\{h_k(\theta)\}_1^\infty$ обладает свойством 2 "поглощения" любой функции из класса $\mathfrak{M}(H)$.

Пусть $\Delta=[\alpha,\beta]$ - замыкание одного из максимальных интервалов, составляющих множество F_H или изолированная точка множества F_H. Тогда функции $H(\theta)$ и $h(\theta)$ непрерывны на Δ. Могут представиться следующие возможности:

а) $H(\theta)$ - ограниченная на Δ функция ;

в) $\overline{\lim\limits_{\theta\to\alpha+0}}H(\theta)=+\infty$, $\quad\overline{\lim\limits_{\theta\to\beta-0}}H(\theta)<+\infty$;

с) $\overline{\lim\limits_{\theta\to\alpha+0}}H(\theta)<+\infty$, $\quad\overline{\lim\limits_{\theta\to\beta-0}}H(\theta)=+\infty$;

d) $\overline{\lim\limits_{\theta\to\alpha+0}}H(\theta)=\overline{\lim\limits_{\theta\to\beta-0}}H(\theta)=+\infty.$

С л у ч а й а). Обозначим через Δ' ту часть сегмента Δ, на которой $h(\theta)\neq H(\theta)$. Если $\Delta'=\Delta$, то существует такое число $\delta>0$, что $h(\theta)+\delta<H(\theta)$ при $\theta\in\Delta$. При $\Delta=[0,2\pi]$ это сразу противоречит определению функции $h(\theta)$. При $\Delta\neq[0,2\pi]$ к интервалу Δ примыкают один или два максимальных интервала множества I_H, на каждом из которых $H(\theta)\equiv+\infty$. Если такой интервал один, мы при прежнем выборе δ имеем $h(\theta)+\delta<H(\theta)$ снова для всех $\theta\in[0,2\pi]$, что опять противоречит выбору $h(\theta)$.

Рассмотрим случай, когда указанных интервалов оказалось два. Пусть функция $S_h(\theta)\equiv\equiv h'(\theta)+\rho^2\int^\theta h(\varphi)d\varphi$ непостоянна внутри Δ, и пусть θ_0 - ее точка роста внутри Δ. Выберем $\omega>0$ настолько малым, чтобы выполнялось включение $[\theta_0-\omega,\theta_0+\omega]\subset\Delta$ и чтобы тригонометрический индикатор $T_0(\theta)$, принимающий в точках $\theta_0-\omega$ и $\theta_0+\omega$ значения $h(\theta_0-\omega)$ и $h(\theta_0+\omega)$ соответственно, удовлетворял условию $h(\theta)<T_0(\theta)<H(\theta)$ при $\theta\in(\theta_0-\omega,\theta_0+\omega)$. Согласно определению функции $h(\theta)$ существует последовательность тригонометрически выпуклых функций $\{h_k(\theta)\}_1^\infty$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty}h_k(\theta)=h(\theta)$. Заменив каждую функцию $h_k(\theta)$ этой последовательности тригонометрическим индикатором на $[\theta_0-\omega,\theta_0+\omega]$, совпадающим с $h_k(\theta)$ на концах этого отрезка, мы снова получим последовательность тригонометрически выпуклых функций $\{\tilde h_k(\theta)\}_1^\infty$, причем $\tilde h_k(\theta)<H(\theta)$ для всех $\theta\in[0,2\pi]$. При $k\to\infty$ имеем $\lim\tilde h_k(\theta)=T_0(\theta)$, если $\theta\in(\theta_0-\omega,\theta_0+\omega)$, и при достаточно больших значениях k будет $\tilde h_k(\theta)>h(\theta)$. Получившееся противоречие с определением функции $h(\theta)$ показывает, что в рассматриваемом случае $S_h(\theta)\equiv const$ при $\theta\in\Delta$. Но тогда функция $h(\theta)$ является тригонометрическим индикатором на интервале Δ, а длина этого интервала меньше числа $\frac{\pi}{\rho}$: в противном случае при некотором $\theta\in\Delta$ для любой функции $\mu\in\mathfrak{M}_\rho(H)$ было бы $0=h(\theta+\frac{\pi}{\rho})+h(\theta)>\mu(\theta+\frac{\pi}{\rho})+\mu(\theta)\geq 0$, что невозможно.

Пусть $T(\theta)$ – тригонометрический индикатор, который принимает на концах интервала Δ значения $h(\alpha)+\delta$ и $h(\beta)+\delta$, где $\delta>0$ настолько малое число, что $h(\theta)<T(\theta)<H(\theta)$ при $\theta\in\Delta$. Неравенство $h_k(\theta)<T(\theta)$ не может выполняться на отрезке длины большей или равной $\frac{\pi}{\rho}$. Поэтому на интервале $\Delta_-\subset I_H$, который примыкает к отрезку Δ слева, найдется такая точка $\alpha_1^{(k)}$, что $T(\alpha_1^{(k)})=h_k(\alpha_1^{(k)})$ и $h_k(\theta)<T(\theta)$ при $\alpha_1^{(k)}<\theta\leqslant\alpha$. Аналогично на интервале $\Delta_+\subset I_H$, примыкающем к отрезку Δ справа, найдется такая точка $\beta_1^{(k)}$, что $T(\beta_1^{(k)})=h_k(\beta_1^{(k)})$ и $h_k(\theta)<T(\theta)$ при $\beta\leqslant\theta\leqslant\beta_1^{(k)}$. Если на отрезке $[\alpha_1^{(k)},\beta_1^{(k)}]$ функцию $h_k(\theta)$ заменить функцией $T(\theta)$, то получится тригонометрически выпуклая функция $\tilde{h}_k(\theta)$. Для последовательности $\{\tilde{h}_k(\theta)\}_1^\infty$ с одной стороны выполнено включение $\tilde{h}_k\in\mathfrak{M}_\rho(H_k)$ при всех достаточно больших значениях k, а с другой – неравенство $\tilde{h}_k(\theta)>h(\theta)$ при $\theta\in\Delta$. Это противоречит определению функции $h(\theta)$.

Итак, в случае а) множество $\Delta''\subset\Delta$, на котором $h(\theta)=H(\theta)$, есть непустое замкнутое множество. Пусть $I\subset\Delta$ – какой-нибудь максимальный открытый интервал дополнения $\Delta'=\Delta\setminus\Delta''$. Пусть замыкание интервала I лежит внутри сегмента Δ. Если $h(\theta)$ – тригонометрический индикатор на I, то $mes\,I<\frac{\pi}{\rho}$ и получается, что $h(\theta)<H(\theta)$ на I вопреки тригонометрической выпуклости функции $h(\theta)$. Значит функция $S_h(\theta)=h'(\theta)+\rho^2\int^\theta h(\varphi)d\varphi$ имеет точку роста внутри I. Обозначив эту точку через θ_0, подберем $\omega>0$ настолько малым, чтобы тригонометрический индикатор $T_0(\theta)$, равный $h(\theta_0-\omega)$ и $h(\theta_0+\omega)$ в точках $\theta_0-\omega$ и $\theta_0+\omega$, соответственно, удовлетворял условию $h(\theta)<T_0(\theta)<H(\theta)$ для $\theta\in(\theta_0-\omega,\theta_0+\omega)$. Как и выше каждую функцию последовательности $\{h_k(\theta)\}_1^\infty$ можно заменить на сегменте $[\theta_0-\omega,\theta_0+\omega]$ такой функцией $T_k(\theta)$, что получим последовательность $\{\tilde{h}_k(\theta)\}_1^\infty$ тригонометрически выпуклых функций, для которой при $\theta\in(\theta_0-\omega,\theta_0+\omega)$ и всех достаточно больших номерах k выполняется неравенство $h(\theta)<\tilde{h}_k(\theta)$, что противоречит определению $h(\theta)$. Тем самым показано, что множество Δ' может содержать лишь интервалы I вида (α,α_2) и (β_2,β) при $\alpha\leqslant\alpha_2\leqslant\beta_2<\beta$.

Пусть $I=(\alpha,\alpha_2)$. Тогда при наличии точки роста функции $S_h(\theta)$ внутри I мы могли бы описанным выше локальным изменением последовательности $\{h_k(\theta)\}_1^\infty$ в окрестности этой точки получить противоречие с определением $h(\theta)$. Поэтому можно считать $h(\theta)$ тригонометрическим индикатором на I. По функции $h_k(\theta)$ построим на отрезке $[\alpha,\alpha_3]$, где $\alpha<\alpha_3<\alpha_2$, тригонометрический индикатор $T_k(\theta)$, принимающий на его концах значения $h(\alpha)+\delta$ и $h_k(\alpha_3)$, где $0<\delta<H(\alpha)-h(\alpha)$. Тогда $T_k(\theta)<H(\theta)$ при $\theta\in[\alpha,\alpha_3]$. Поскольку длина интервала $\Delta_-\subset I_H$, который примыкает к Δ слева, не меньше числа $\frac{\pi}{\rho}$, на Δ_- найдется такая точка $\alpha_4^{(k)}$, что $\alpha_4^{(k)}<\alpha$, $T_k(\alpha_4^{(k)})=h_k(\alpha_4^{(k)})$ и $T_k(\theta)>h_k(\theta)$ при $\theta\in(\alpha_4^{(k)},\alpha_3)$. Если каждую функцию $h_k(\theta)$ на отрезке $[\alpha_4^{(k)},\alpha_3]$ заменить тригонометрическим индикатором $T_k(\theta)$, получим новую последовательность $\{\tilde{h}_k(\theta)\}_1^\infty$ тригонометрически выпуклых функций, для которой $\tilde{h}_k(\theta)<H(\theta)$, но $\tilde{h}_k(\theta)>h(\theta)$ при $\theta\in(\alpha,\alpha_3)$, что приводит к противоречию. Аналогичные соображения показывают, что множество Δ' не может содержать интервал вида (β_2,β).

Отсюда заключаем, что $\Delta'=\phi$ и $\Delta=\Delta''$. Иными словами в случае а) имеем $\lim\limits_{k\to\infty}h_k(\theta)=H(\theta)$ при $\theta\in\Delta$.

С л у ч а й в). Если функция $H(\theta)$ ограничена на какой-нибудь последовательности точек отрезка Δ, сходящейся к α, то существует конечный предел $\lim\limits_{\theta\to\alpha+0}H(\theta)$, и функция $H(\theta)$ ограничена на Δ. Поэтому с необходимостью в случае в) имеем $\lim\limits_{\theta\to\alpha+0}H(\theta)=+\infty$.

Если $\lim\limits_{k\to\infty}h_k(\alpha)<\infty$, то последовательность $\{h_k(\theta)\}_1^\infty$ ограничена на Δ. В таком случае должен существовать отрезок $[\alpha,\alpha_1]\subset\Delta$, внутри которого $h(\theta)<H(\theta)$. Это неравенство с помощью соображений, которые были использованы при рассмотрении случая а), приводит к противоречию, так что мы можем считать, что $h(\alpha)=H(\alpha)=+\infty$.

Из последнего условия, благодаря непрерывности функции $h(\theta)$ на сегменте Δ, следует, что $\lim\limits_{\theta\to\alpha+0} h(\theta)=+\infty$. Но тогда в достаточно малой правосторонней окрестности точки α функция $h(\theta)$ не может быть тригонометрическим индикатором. Отсюда следует, что $h(\theta)=H(\theta)$ на некотором отрезке $[\alpha,\alpha_1]$ при $\alpha<\alpha_1\leqslant\beta_1$, и дальнейшая аргументация совпадает с приведенной для случая а).

Случаи с) и d) рассматриваются аналогично, и мы опускаем относящиеся к ним подробности.

Остается показать, что $h(\theta)=+\infty$ во всех внутренних точках множества I_H. Пусть θ_0 – одна из таких точек и пусть $h(\theta_0)<\infty$. Если $\Delta\subset I_H$ – максимальный интервал, содержащий точку θ_0, то существует неотрицательная тригонометрически выпуклая функция $\tilde h(\theta)$, равная нулю на концах Δ, и такая, что $\tilde h(\theta_0)=1$. Если положить

$$\tilde h_k(\theta)=\begin{cases} h_k(\theta) & \theta\,\overline{\in}\,\Delta \\ h_k(\theta)+\tilde h(\theta) & \theta\in\Delta\,, \end{cases}$$

получим $\tilde h_k(\theta)<H(\theta)$ и $\tilde h_k(\theta_0)=h_k(\theta_0)+1$, что противоречит определению функции $h(\theta)$.

Итак, $\lim\limits_{k\to\infty} h_k(\theta)=H(\theta)$. Если $p\in\mathfrak{M}(H)$, то в силу условия А) будет $\inf\limits_{\theta}(H(\theta)-p(\theta))>0$, и благодаря монотонности и непрерывности последовательности функций $\{h_k(\theta)\}_1^\infty$ существует такой номер $k=k(p)$, что $p(\theta)<h_k(\theta)$. Теорема доказана.

По последовательности $\{h_k(\theta)\}_1^\infty$ построим индуктивный предел $\mathcal{F}^{(s)}$ последовательности банаховых пространств $\{\mathcal{F}_{h_k}\}_1^\infty$.

П р е д л о ж е н и е I. Пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{(s)}$ топологически изоморфны.

Доказательство этого утверждения несложно, и мы его опускаем. Всюду в дальнейшем пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^{(s)}$ не различаются.

Л е м м а I. Если функции $h\in\mathfrak{M}(H)$ и $g\in\mathfrak{M}(H)$ таковы, что $h(\theta)<g(\theta)$, то вложение $\mathcal{F}_h\to\mathcal{F}_g$ вполне непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим, что единичный шар $B_h\subset\mathcal{F}_h$ допускает при каждом $\varepsilon>0$ конечную ε – сеть по норме пространства $\mathcal{F}_g$. Полагая $\delta=\min\limits_{\theta}\{g(\theta)-h(\theta)\}$, выберем число $R>0$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $\exp(-\delta R^\rho)<\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда для $\varphi\in B_h$ при $r\geqslant R$ будет $|\varphi(re^{i\theta})|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\exp[g(\theta)r^\rho]$.

Заметим теперь, что сужение множества функций, образующих шар B_h, на любой компакт комплексной плоскости образует равномерно ограниченное семейство. Поэтому можно найти такую конечную систему $\{\varphi_m\}$ функций из шара B_h, что для любой функции $\varphi\in B_h$ при некотором m и $r\leqslant R$ будет выполняться оценка $|\varphi(re^{i\theta})-\varphi_m(re^{i\theta})|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\exp[g(\theta)r^\rho]$. Но тогда $\|\varphi-\varphi_m\|_g\leqslant\varepsilon$ и лемма доказана.

Как показывают теорема I и лемма I, пространство $\mathcal{F}$ является индуктивным пределом монотонно растущей последовательности банаховых пространств, вложенных друг в друга вполне непрерывно. Такие индуктивные пределы под названием регулярных были введены и изучены в работе [3]. Оказалось, что сами эти пространства и их сопряженные обладают рядом простых и удобных свойств.

Из результатов работы [3] прежде всего следует

П р е д л о ж е н и е 2. $\mathcal{F}$ есть отделимое, бочечное, рефлексивное пространство.

Далее, множество A ограничено в $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда существует такой номер k, что A содержится в пространстве $\mathcal{F}_{h_k}$ и ограничено в нем. Если $\{\varphi_n\}_1^\infty$ – последовательность элементов пространства $\mathcal{F}$, то $\lim\varphi_n=0$ в том и только в том случае, когда существует такой номер k, что $\varphi_n\in\mathcal{F}_{h_k}$ для всех h и $\lim\varphi_n=0$ в топологии пространства $\mathcal{F}_{h_k}$. Последнее свойство эквивалентно следующему признаку:

Для того, чтобы в топологии $\mathcal{F}$ выполнялось равенство $\lim \varphi_n = 0$, необходимо и достаточно выполнение условия:

I) $\lim \varphi_n(\lambda) = 0$ равномерно на каждом компакте $K \subset \mathbb{C}^1$;

2) $|\varphi_n(re^{i\theta})| \leqslant C\exp[h_k(\theta)r^\rho]$ при некотором целом $k \geqslant 1$ и постоянной C, одних и тех же для всех номеров n.

П р е д л о ж е н и е 3. $\mathcal{E}$ является рефлексивным пространством Фреше.

Это утверждение также является следствием результатов работы [3].

П р е д л о ж е н и е 4. $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ являются совершенно полными пространствами.

Это утверждение является непосредственным следствием известных в теории ЛВП свойств пространств Фреше и сопряженных к рефлексивным пространствам Фреше [3].

Отметим еще, что пространство $\mathcal{F}$ не является строгим индуктивным пределом [2] последовательности $\{\mathcal{F}_{h_k}\}_1^\infty$.

§ 2. П Р И М Е Р Ы

В настоящем параграфе мы для большей выразительности будем обозначать пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$ через $\mathcal{F}_\rho(H)$ и $\mathcal{E}_\rho(H)$ соответственно, указывая тем самым явно ρ-тригонометрически выпуклую функцию $H(\theta)$, по которой эти пространства строятся.

I. Пространство $\mathcal{E}_\infty$ всех целых функций с топологией равномерной сходимости на каждом компакте.

Пространство $\mathcal{F}_1(+\infty)$ является пространством всех целых функций экспоненциального типа. В этом случае можно принять $h_k(\theta) = k$. Если $\varphi(\lambda) = \sum_{m=0}^\infty c_m \lambda^m \in \mathcal{F}_k$, то $|c_m| \leqslant (ekm^{-1})^m \|\varphi\|_k$ и

$$\Big\| \sum_{m=0}^\infty c_m \lambda^m \Big\|_{k+1} \leqslant \sum_{m=0}^\infty |c_m| \, \|\lambda^m\|_{k+1} \leqslant \|\varphi\|_k \sum_{m=0}^\infty \left(\frac{k}{k+1}\right)^m.$$

Следовательно, система степеней образует базис пространства $\mathcal{F}_1(+\infty)$. Но тогда для $f \in \mathcal{E}_1(+\infty)$ имеем

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{m=0}^\infty f_m c_m, \qquad f_m = \langle f, \lambda^m \rangle. \tag{I}$$

Каждому функционалу $f \in \mathcal{E}_1(+\infty)$ сопоставим ряд

$$f \to \hat{f}(z) = \sum_{m=0}^\infty a_m z^m, \qquad a_m = \frac{1}{m!}\langle f, \lambda^m \rangle. \tag{2}$$

Поскольку f – непрерывный функционал на $\mathcal{F}_k$ при любом k, то $|f_m| \leqslant \|f\|_k \|\lambda^m\|_k \leqslant \|f\|_k (me^{-1}k^{-1})^m$, $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |a_m|^{\frac{1}{m}} \leqslant k^{-1}$ и, значит, $\hat{f}(z)$ – целая функция. Более того, если $M_{\hat f}(R) = \max\limits_{|z|=R} |\hat f(z)|$ и $R < k$, то

$$M_{\hat f}(R) \leqslant \sum_{m=0}^\infty |a_m| R^m \leqslant \|f\|_k \sum_{m=0}^\infty \frac{(me^{-1})^m}{m!}\left(\frac{R}{k}\right)^m = C_{R,k}\|f\|_k. \tag{3}$$

Обратно, если $\hat f(z) = \sum_{m=0}^\infty a_m z^m$ – целая функция, то $\lim \sqrt[m]{|a_m|} = 0$ и равенство (I) при $f_m = m!\, a_m$ определяет функционал f на $\mathcal{F}_1(+\infty)$. Если $k < R$ и $\varphi \in \mathcal{F}_k$, то

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leqslant \sum_{m=0}^\infty m!\,|c_m a_m| \leqslant \|\varphi\|_k M_{\hat f}(R) \sum_{m=0}^\infty m!\, R^{-m}(ekm^{-1})^m.$$

Значит, $f \in \mathcal{E}_1(+\infty)$ и для каждого $k \geqslant 1$ будет $\|f\|_k \leqslant C_{R,k} M_{\hat f}(R)$. Вместе с оценкой (3) это неравенство показывает, что отображение (2) реализует топологический изоморфизм пространства $\mathcal{E}_1(+\infty)$ на пространство $\mathcal{E}_\infty$. При этом

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} a_m c_m m! \qquad (\hat{f} \in \mathcal{E}_\infty). \tag{4}$$

Для $\hat{f}_k(z) \equiv z^k$ и $\varphi_m(\lambda) \equiv \lambda^m$ отсюда получаем

$$\langle D\hat{f}_k, \varphi_m \rangle = \langle \hat{f}_k, \lambda\varphi_m \rangle = \langle \hat{f}_k, \varphi_{m+1} \rangle = k!\ \delta_{k,m+1} = \langle \frac{d}{dz}\hat{f}_k, \varphi_m \rangle$$

и, следовательно, $D = \dfrac{d}{dz}$.

2. Пространство $G(\Omega)$ всех функций, голоморфных в выпуклой области Ω с топологией равномерной сходимости на каждом внутреннем компакте.

Предположим, что $\rho = 1$ и $H(\theta) = h(-\theta)$, где $h(\theta)$ - опорная функция области Ω. В этом случае $\mathcal{F}_1(H)$ является пространством всех тех целых функций $\psi(\lambda)$ экспоненциального типа, индикаторы $h_\psi(\theta)$ которых удовлетворяют условию $h_\psi(\theta) < H(\theta)$. Преобразование Бореля $\mathcal{B}$ каждой функции $\psi \in \mathcal{F}_1(H)$ сопоставляет функцию

$$\hat{\psi}(z) = (\mathcal{B}\psi)(z) = \int_0^\infty e^{-\lambda z} \psi(\lambda)\, d\lambda, \tag{5}$$

которая аналитична на дополнении Ω и обращается в нуль на бесконечности. Обратное преобразование имеет вид

$$\psi(\lambda) = (\mathcal{B}^{-1}\hat{\psi})(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\ell e^{\lambda z} \hat{\psi}(z)\, dz, \tag{6}$$

где ℓ - контур, охватывающий все особенности функции $\hat{\psi}$. Из формул (5) и (6) следует, что $\mathcal{F}_1(h(-\theta))$ изоморфно пространству $G(C\Omega)$ функций, аналитических на дополнении Ω и равных нулю на бесконечности, с индуктивной топологией, которая определяется системой норм

$$\| \hat{\psi} \|_\ell = \sup_{z \in \ell} |\psi(z)|,$$

где ℓ - замкнутый контур, лежащий в Ω.

Как известно, пространство $G(C\Omega)$ имеет своим сопряженным пространство $G(\Omega)$, причем двойственность этих пространств задается формой

$$\langle \hat{f}, \hat{\psi} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_\ell \hat{f}(z)\, \hat{\psi}(z)\, dz \qquad (\hat{f} \in G(\Omega)).$$

Поскольку $\mathcal{B}(\lambda\psi) = -\hat{\psi}'$, находим

$$\langle D\hat{f}, \hat{\psi} \rangle = \langle \hat{f}, \mathcal{B}(\lambda\psi) \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint \hat{f}(z)\, \hat{\psi}'(z)\, dz = \langle \hat{f}', \hat{\psi} \rangle,$$

так что $D = \dfrac{d}{dz}$.

3. Пространство $\mathcal{E}[\rho, \sigma]$ целых функций $\hat{f}(z)$ типа не выше σ при порядке $\rho > 1$ с топологией проективного предела, которая определяется системой норм

$$\| \hat{f} \|_m = \sup_{r,\theta} |\hat{f}(re^{i\theta})| \exp\left[-(\sigma + m^{-1}) r^\rho\right] \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Обозначим через ρ^* и σ^* соответственно порядок и тип, сопряженные с порядком ρ и типом σ по Юнгу:

$$\rho^* = \rho(\rho - 1)^{-1}, \qquad \sigma^* = \frac{1}{\rho^*} (\rho\sigma)^{-\frac{\rho^*}{\rho}}.$$

Тогда $\sup_x (rx - \sigma x^\rho) = \sigma^* r^{\rho^*}$, $(\rho^*)^* = \rho$ и $(\sigma^*)^* = \sigma$. Пространство $\mathcal{F}_{\rho^*}(\sigma^*)$ является пространством всех целых функций, тип которых строго меньше σ^*. Если принять $h_k = (\sigma + k^{-1})^*$, то окажется, что $\lim_{k\to\infty} h_k = \sigma^*$ и $h_k < h_{k+1}$. Следовательно, последовательность $\{h_k\}_1^\infty$ удовлетворяет обоим условиям теоремы I.

Если $\varphi(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m\lambda^m\in\mathcal{F}_{h_k}$, то $|c_m|\leqslant(\rho^* e h_k m^{-1})^{\frac{m}{\rho^*}}\|\varphi\|_{h_k}$ и

$$\Big\|\sum_{m=0}^{\infty} c_m\lambda^m\Big\|_{h_{k+1}}\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|\,\|\lambda^m\|_{h_{k+1}}\leqslant\|\varphi\|_{h_k}\sum_{m=0}^{\infty}\Big(\frac{h_k}{h_{k+1}}\Big)^{\frac{m}{\rho^*}}.$$

Значит, система степеней $\{\lambda^m\}_1^\infty$ образует базис в пространстве $\mathcal{F}_{\rho^*}(\sigma^*)$. Как и в п. °I сопоставим функционалу $f\in\mathcal{E}_{\rho^*}(\sigma^*)$ функцию $\hat f(z)$ с помощью ряда (2). Теперь имеем

$$|\langle f,\lambda^m\rangle|\leqslant\|f\|_{h_k}\|\lambda^m\|_{h_k}=\|f\|_{h_k}(\rho^* e h_k m^{-1})^{-\frac{m}{\rho^*}}.$$

Поэтому

$$\varlimsup_{m\to\infty}\frac{m\ln m}{\ln\left|\frac{1}{a_m}\right|}=\varlimsup_{m\to\infty}\frac{m\ln m}{\ln m!-\ln|\langle f,\lambda^m\rangle|}\leqslant\rho$$

и

$$\varlimsup_{m\to\infty} m^{\frac{1}{\rho}}|a_m|^{\frac{1}{m}}\leqslant\varlimsup_{m\to\infty} m^{\frac{1}{\rho}}\frac{(\rho^* e h_k m^{-1})^{-\frac{1}{\rho^*}}}{m!^{\frac{1}{m}}}=e^{\frac{1}{\rho}}(\rho^* h_k)^{-\frac{1}{\rho^*}}.$$

Это значит, что $\hat f(z)$ – функция нормального типа при порядке ρ и что ее тип σ_f удовлетворяет условию $(\sigma_f e\rho)^{\frac{1}{\rho}}\leqslant e^{\frac{1}{\rho}}(\rho^* h_k)^{-\frac{1}{\rho^*}}$. Отсюда $\sigma_f\leqslant\rho^{-1}(\rho^* h_k)^{-\frac{\rho}{\rho^*}}=\sigma+k^{-1}$, и, стало быть, $\hat f(z)\in\mathcal{E}[\rho,\sigma]$. Кроме того,

$$\|\hat f(z)\|_n\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}|a_m|\,\|z^m\|_n\leqslant\|f\|_{h_k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\|\lambda^m\|_{h_k}\|z^m\|_n\leqslant$$

$$\leqslant\|f\|_{h_k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(me^{-1})^m(\rho^* h_k)^{-\frac{m}{\rho^*}}(\rho(\sigma+n^{-1})^*)^{-\frac{m}{\rho}}=\|f\|_{h_k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(e^{-1}m)^m(\sigma+k^{-1})^{\frac{m}{\rho}}}{m!\,(\sigma+n^{-1})^{\frac{m}{\rho}}}.$$

Если здесь выбрать $k>n$, то окажется, что $\|\hat f\|_n\leqslant C_{k,n}\|f\|_{h_k}$ $(C_{k,n}<\infty)$. Обратно, если $\hat f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m\in\mathcal{E}[\rho,\sigma]$, то равенством (4) определяется линейный функционал f на $\mathcal{F}_{\rho^*}(\sigma^*)$. Если $\varphi(\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\lambda^m\in\mathcal{F}_{h_k}$, то взяв $n>k$, находим

$$|\langle f,\varphi\rangle|\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}m!\,|a_m c_m|\leqslant$$

$$\leqslant\|\hat f\|_n\sum_{m=0}^{\infty}(m^{-1}e)^m m!\,(\rho(\sigma+n^{-1}))^{\frac{m}{\rho}}(\rho^* h_k)^{\frac{m}{\rho^*}}\leqslant\|\hat f\|_n\sum_{m=0}^{\infty}(m^{-1}e)^m m!\left(\frac{\sigma+n^{-1}}{\sigma+k^{-1}}\right)^{\frac{m}{\rho}}.$$

Таким образом, $f\in\mathcal{E}_{\rho^*}(\sigma^*)$, $\|f\|_k\leqslant\|\hat f\|_n C_{n,k}$ и вместе с полученной выше оценкой для $\|\hat f(z)\|_h$ это показывает, что пространства $\mathcal{E}[\rho,\sigma]$ и $\mathcal{E}_{\rho^*}(\sigma^*)$ изоморфны. Как и в п. °I можно проверить, что $D=\frac{d}{dz}$.

4. Пространство $\mathcal{E}[\rho,h(\theta)]$ целых функций $\hat f(z)$ нормального типа при порядке $\rho>1$ с топологией проективного предела, которая определяется системой норм

$$\|\hat f(z)\|_\varepsilon=\sup_{r,\theta}|\hat f(re^{i\theta})|\exp[-(h(\theta)+\varepsilon)r^\rho],\quad(\varepsilon>0),$$

где $h(\theta)$ – положительная ограниченная ρ – тригонометрически выпуклая функция.

Положим при $z=x_1+ix_2\in C^1(\mathrm{Im}\,x_1=\mathrm{Im}\,x_2=0)$ и $\varepsilon\geqslant 0$

$$H^*_\varepsilon(\lambda)=\sup_z\{\mathrm{Re}\,\lambda z-|z|^\rho h_\varepsilon(\arg z)\}\quad(h_\varepsilon=h+\varepsilon).$$

Если $\rho^* = \rho(\rho-1)^{-1}$, то при фиксированном значении $\lambda \neq 0$ имеем

$$|\lambda|^{\rho^*} H_\varepsilon^*(\lambda|\lambda|^{-1}) = \sup_z \left\{ \operatorname{Re} \lambda |\lambda|^{\rho^*-1} z - |\lambda|^{\rho^*} |z|^\rho h_\varepsilon(\arg z) \right\} =$$

$$= \sup_\zeta \left\{ \operatorname{Re} \lambda\zeta - |\zeta|^\rho h_\varepsilon(\arg\zeta) \right\} = H_\varepsilon^*(\lambda).$$

Следовательно, $H_\varepsilon^*(re^{i\theta}) = r^{\rho^*} H_\varepsilon^*(e^{i\theta})$. Поскольку $\rho^* > 1$ и $H_\varepsilon^*(\lambda)$ – выпуклая функция, то $h_\varepsilon^*(\theta) = H_\varepsilon^*(e^{i\theta})$ является ρ^*-тригонометрически выпуклой функцией от θ. Мы покажем, что пространство $\mathcal{E}[\rho, h(\theta)]$ изоморфно пространству $\mathcal{E}_{\rho^*}(h_\circ^*(\theta))$ и что соответствующий изоморфизм реализует оператор D в виде дифференцирования $\frac{d}{dz}$.

Очевидно, последовательность $\{h_k^*(\theta)\}_1^\infty$ удовлетворяет при $H = h_\circ^*$ условиям I) и 2) теоремы I. Каждому функционалу $f \in \mathcal{E}_{\rho^*}(h_\circ^*)$ сопоставим целую функцию

$$f \longrightarrow \hat{f}(z) = \langle f, \exp \lambda z \rangle. \tag{7}$$

Поскольку функция $H_\varepsilon(\lambda) = |\lambda|^\rho h_\varepsilon(\arg\lambda)$ – выпуклая, то используя известные соотношения двойственности [4], имеем

$$\ln \| \exp \lambda z \|_{h_\varepsilon^*} = \sup_\lambda \left\{ \operatorname{Re} \lambda z - |\lambda|^{\rho^*} h_\varepsilon^*(\arg\lambda) \right\} = H_\varepsilon(z).$$

Таким образом, $\hat{f}(z) \in \mathcal{E}[\rho, h(\theta)]$. Проверим, что и обратно, всякая функция $\hat{f}(z) \in \mathcal{E}[\rho, h(\theta)]$ допускает представление (7). Излагаемая ниже конструкция такого представления следует схеме Хермандера, описанной в [5] для случая $\rho = 1$.

Прежде всего, введем семейство плюрисубгармонических функций $\hat{H}_\varepsilon(\zeta_1, \zeta_2)$ двух комплексных переменных ζ_1 и ζ_2 с помощью равенства

$$\hat{H}_\varepsilon(\zeta_1, \zeta_2) = \sup_{x = x_1 + ix_2} \left\{ x_1 \operatorname{Im} \zeta_1 + x_2 \operatorname{Im} \zeta_2 - |x|^{\rho^*} h_\varepsilon^*(\arg x) \right\}.$$

Пусть $\Sigma \subset \mathbf{C}^2$ – линейное подпростанство точек вида $(i\zeta, -\zeta)$. Очевидно, на Σ выполняется равенство $\hat{H}_\varepsilon(i\zeta, -\zeta) = |\zeta|^\rho h_\varepsilon(\arg\zeta)$. На подпространстве Σ определена функция $\hat{F}: (i\zeta, -\zeta) \to \hat{f}(\zeta)$, допускающая, по предположению, при любом $\varepsilon > 0$ оценку $|\hat{F}| \leqslant C_\varepsilon e^{H_\varepsilon}$. Следовательно [2],

$$\int_\Sigma |\hat{F}(\zeta_1, \zeta_2)|^2 e^{-2\hat{H}_\varepsilon(\zeta_1, \zeta_2)} \, dm < \infty$$

при любом $\varepsilon > 0$. Положим для кратности $\xi = (\zeta_1, \zeta_2)$, $\operatorname{Im} \xi = (\operatorname{Im} \zeta_1 + i \operatorname{Im} \zeta_2)$ и примем $\|\xi\| = (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2)^{\frac{1}{2}}$. Тогда $\hat{H}_\varepsilon(\xi) \equiv \hat{H}_\varepsilon(\zeta_1, \zeta_2) = |\operatorname{Im} \xi|^\rho h_\varepsilon(-\arg \operatorname{Im} \xi)$ и из неравенства

$$|\hat{H}_\varepsilon(\xi) - \hat{H}_\varepsilon(\xi')| \leqslant |\operatorname{Im} \xi|^\rho |h_\varepsilon(-\arg \operatorname{Im} \xi) - h_\varepsilon(-\arg \operatorname{Im} \xi')| +$$

$$+ |h_\varepsilon(-\arg \operatorname{Im} \xi')| \, \big| |\operatorname{Im} \xi|^\rho - |\operatorname{Im} \xi'|^\rho \big|$$

следует существование такой постоянной γ_ε, что при $\|\xi - \xi'\| \leqslant 1$ будет

$$|\hat{H}_\varepsilon(\xi) - \hat{H}_\varepsilon(\xi')| \leqslant \varepsilon \|\xi\|^\rho + \gamma_\varepsilon.$$

Аналогично утверждению теоремы 4.4.3 монографии [6] отсюда следует, что функцию $\hat{F}$ можно продолжить с подпространства Σ до целой функции на $\mathbf{C}^2$, которая удовлетворяет оценке

---

2) dm – мера Лебега на Σ.

$$|\hat{F}(\xi)| \leqslant C_\varepsilon e^{\hat{H}_{2\varepsilon}(\xi)} (\|\xi\|+1)^{-4}. \tag{8}$$

Пусть

$$\hat{\Phi}(x_1, x_2) = \int_{R^2} \hat{F}(t_1, t_2) e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dt_1 dt_2 \tag{9}$$

– преобразование Фурье функции $\hat{F}$ по вещественной плоскости. Тогда по формуле обращения при вещественных t_1 и t_2 имеем

$$\hat{F}(t_1, t_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \hat{\Phi}(x_1, x_2) e^{-i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dx_1 dx_2. \tag{10}$$

Заменив в (9) t_1 и t_2 на t_1+is_1 и t_2+is_2 соответственно, получим

$$\hat{\Phi}(x_1, x_2) = e^{-(s_1 x_1 + s_2 x_2)} \int_{R^2} \hat{F}(t_1+is_1, t_2+is_2) e^{i(t_1 x_1 + t_2 x_2)} dt_1 dt_2$$

Из оценки (8) следует, что выполняется неравенство

$$|\hat{\Phi}(x_1, x_2)| \leqslant C_\varepsilon e^{-(s_1 x_1 + s_2 x_2) + H_{2\varepsilon}(is_1, is_2)}.$$

Минимизируя правую часть этой оценки по s_1 и s_2, находим

$$|\hat{\Phi}(x_1, x_2)| \leqslant C_\varepsilon e^{-|x|^{\rho^*} h^*_{2\varepsilon}(\arg x)}.$$

Следовательно, интегральное представление (10) функции $\hat{F}(t_1, t_2)$ продолжается на комплексные значения t_1 и t_2, а выражение

$$\langle \hat{\Phi}, \varphi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \hat{\Phi}(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

определяет непрерывный линейный функционал на пространстве $\mathcal{E}_{\rho^*}[h^*(\theta)]$. Остается заметить, что согласно формуле обращения (10), имеем

$$\hat{f}(\zeta) = \hat{F}(i\zeta, -\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \hat{\Phi}(x_1, x_2) e^{-i(i\zeta x_1 - \zeta x_2)} dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \hat{\Phi}(x_1, x_2) e^{z(x_1 + ix_2)} dx_1 dx_2$$

или $\hat{f}(z) = \langle \hat{\Phi}, \exp zx \rangle$. Таким образом, (7) задает (взаимно однозначное и непрерывное)[3] отображение пространства $\mathcal{E}_{\rho^*}(h^*_0)$ на $\mathcal{E}[\rho, h(\theta)]$. Очевидно, $\langle f, \lambda \exp \lambda z \rangle = \frac{d}{dz} \langle f, \exp \lambda z \rangle = \hat{f}'(z)$, так что $D = \frac{d}{dz}$.

Каждое из пространств аналитических функционалов, которые рассматриваются в п^0. п.^{0} 5-8, при $\rho > 1$ изоморфно одному из пространств п^{0}п^0. 1-4. Однако реализуются они таким образом, что оператор D оказывается не классическим, а обобщенным дифференцированием Гельфонда-Леонтьева.

5. Пусть $H(\theta) \equiv \sigma R^\rho$ при $\sigma > 0$, $R \geqslant 0$ и пусть $F(\lambda) = \sum a_m \lambda^m$ – такая целая функция, что $F(0) = 1$, $a_m \neq 0\ (\forall m)$ и $\lim\limits_{m \to \infty} m^{\frac{1}{\rho}} |a_m|^{\frac{1}{m}} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}$. Обобщенным преобразованием Бореля $\mathcal{B}_F$ по функции $F(\lambda)$ называется оператор, который каждой функции $\varphi(\lambda) = \sum\limits_0^\infty c_m \lambda^m \in \mathcal{F}_\rho(\sigma R^\rho)$ сопоставляет функцию $\hat{\varphi}(z)$ по правилу

[3] На проверке этих утверждений мы не останавливаемся.

$$\hat{\varphi}(z) = (\mathcal{B}_F \varphi)(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{a_m z^{m+1}} \quad . \tag{II}$$

Пусть $h_k(\Theta) = h_k = \sigma R^{\rho}(1-k^{-1})$ $(k \geqslant 1)$ и $\varphi \in \mathcal{F}_{h_k}$. Тогда из неравенств Коши получаем

$$|c_m| \leqslant \|\varphi\|_{h_k} \inf_x \{x^{-m} e^{h_k x^{\rho}}\} = \|\varphi\|_{h_k} (h_k e \rho)^{\frac{m}{\rho}} m^{-\frac{m}{\rho}}.$$

Отсюда $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} |c_m a_m^{-1}|^{\frac{1}{m}} \leqslant (h_k \sigma^{-1})^{\frac{1}{\rho}} < R$ и, следовательно, оператор $\mathcal{B}_F$ отображает пространство $\mathcal{F}_{\rho}(\sigma R^{\rho})$ в пространство $\mathcal{H}_R^*$ функций, голоморфных на дополнении круга $C_R = \{z : |z| < R\}$ и равных нулю на бесконечности. Наделим это пространство топологией индуктивного передела, отвечающего системе норм

$$\|\hat{\varphi}\|_r = \max_{\theta} |\hat{\varphi}(re^{i\theta})|.$$

Если $\hat{\varphi} = \mathcal{B}_F \varphi, \|\varphi\|_{h_{k-1}} \leqslant 1$ и $r = R(1-k^{-1})^{\frac{1}{\rho}}$, то

$$\|\hat{\varphi}\|_r \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{c_m}{a_m r^{m+1}} \right| \leqslant A_k,$$

где

$$A_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(h_{k-1} e \rho)^{\frac{m}{\rho}} m^{-\frac{m}{\rho}}}{|a_m| R^m (1-k^{-1})^{\frac{m}{\rho}}} < \infty.$$

Следовательно, $\mathcal{B}_F : \mathcal{F}_{\rho}(\sigma R^{\rho}) \to \mathcal{H}_R^*$. Как известно, сопряженное к $\mathcal{H}_R^*$ пространство $\mathcal{H}_R$ есть пространство функций, голоморфных в круге C_R с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах. При этом, если $\hat{f}(z) \in \mathcal{H}_R$, $\hat{\varphi}(z) \in \mathcal{H}_R^*$, то при некотором r $(0 < r < R)$ будет

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} f(z) \hat{\varphi}(z)\, dz.$$

Оператор $\mathcal{B}_F^{-1}$ определяется формулой

$$\varphi(\lambda) = (\mathcal{B}_F^{-1} \hat{\varphi})(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m a_m \lambda^m,$$

где $\hat{\varphi}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^{-(m+1)} \in \mathcal{H}_R^*$. Если $\|\hat{\varphi}\|_r < \infty$, то $|c_m| \leqslant r^m \|\hat{\varphi}\|_r$ и при $\sigma R^{\rho} > h_k > \sigma r^{\rho}$ получаем

$$\|\varphi\|_{h_k} \leqslant \|\hat{\varphi}\|_r \sum_{m=0}^{\infty} r^m |a_m| \, \|\lambda^m\|_{h_k} \leqslant$$

$$\leqslant \|\hat{\varphi}\|_r \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| m^{\frac{m}{\rho}} (e h_k \rho)^{-\frac{m}{\rho}} r^m \leqslant C_{k,r} \|\hat{\varphi}\|_r.$$

Значит, $\mathcal{B}_F^{-1} : \mathcal{H}_R^* \to \mathcal{F}_{\rho}(\sigma R^{\rho})$ и $\mathcal{B}_F$ является топологическим изоморфизмом пространства $\mathcal{F}_{\rho}(\sigma R^{\rho})$ и $\mathcal{H}_R^*$. Но тогда оператор $(\mathcal{B}_F^*)^{-1}$ изоморфно отображает $\mathcal{E}_{\rho}(\sigma R^{\rho})$ на $\mathcal{H}_R$.

Пусть $(\mathcal{B}_F^*)^{-1} f = \hat{f}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m \in \mathcal{H}_R$ и $\hat{\varphi} = \mathcal{B}_F \varphi$ имеет вид (II). Тогда

$$\langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m c_m}{a_m} = \langle f, \varphi \rangle.$$

Если $\hat{D} = (\mathcal{B}_F^*)^{-1} D \mathcal{B}_F^*$, то $\hat{D} : \mathcal{H}_R \to \mathcal{H}_R$ и

$$\langle \hat D \hat f, \hat\varphi \rangle = \langle (\mathcal{B}^*_F)^{-1} D\mathcal{B}^*_F \hat f,\ \mathcal{B}_F\varphi \rangle = \langle \mathcal{B}^*_F \hat f, {}^t D\varphi \rangle =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d_m c_{m-1}}{a_m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{a_m} \frac{d_{m+1}}{a_{m+1}} a_m .$$

Следовательно, $(\hat D \hat f)(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{d_{m+1}}{a_{m+1}} a_m z^m$ и $\hat D$ совпадает с оператором обобщенного дифференцирования Гельфонда-Леонтьева по функции F, введенным в работе [6].

6. То же самое пространство $\mathcal{E}_\rho(\sigma R^\rho)$ допускает изоморфную реализацию в виде некоторого пространства целых функций. Принимая для простоты записи $R=1$, возьмем такую целую функцию $F(\lambda)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m\lambda^m$, что $F(0)=1$, $a_m \neq 0$ $(\forall m \geqslant 0)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} m^{\frac{1}{\rho_1}} |a_m|^{\frac{1}{m}} = (\sigma_1 e \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}$ при $\rho > \rho_1$. Положим теперь

$$\hat\varphi(\lambda) = (\mathcal{B}_F \varphi)(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c_m}{a_m} \lambda^m ,$$

где $\varphi(\lambda) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m\lambda^m \in \mathcal{F}_\rho(\sigma)$. Аналогично предыдущему проверяется, что оператор $\mathcal{B}^*_F$ реализует изоморфизм пространства $\mathcal{E}_\rho(\sigma)$ и пространства $\mathcal{E}[\rho_2,\sigma_2]$ целых функций типа не выше σ_2 при порядке ρ_2, где числа σ_2, ρ_2 определяются из соотношений

$$\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_1}, \quad (\sigma_1 e \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}} (\sigma_2 e \rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} .$$

Топология пространства $\mathcal{E}[\rho_2,\sigma_2]$ задается системой норм

$$\| f \|_k = \sup_{r,\theta} |f(re^{i\theta})| \exp[-(\sigma_2 + k^{-1}) r^{\rho_2}] .$$

Оператор D снова реализуется в виде оператора Гельфонда-Леонтьева [6] по функции F.

7. При $H(\theta)>0$ пространство $\mathcal{E}_\rho(H)$ допускает реализацию в виде пространства $G_\rho(\Omega)$ функций, аналитических внутри ρ - выпуклой области Ω, ρ - опорная функция которой равна $H(-\theta)$ (см. (8)) с топологией равномерной сходимости на внутренних компактах. Эта реализация основана на теории обобщенного преобразования Бореля $\mathcal{B}_E$ по функции Миттаг-Леффлера $E_\rho(\lambda;1)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\lambda^m\Gamma^{-1}(\frac{m}{\rho}+1)$, которая построена в монографии [8].

По определению оператор $\mathcal{B}_E$ задается формулой

$$\hat\varphi(z) = (\mathcal{B}_E\varphi)(z) = \rho(e^{-i\theta}z)^{\rho} z^{-1} \int_0^{\infty} \varphi(te^{-i\theta}) e^{-t^\rho (e^{-i\theta}z)^\rho} t^{\rho-1} dt, \qquad (12)$$

в которой $\varphi \in \mathcal{F}_\rho(H)$, и определяет функцию, голоморфную на замыкании дополнения области Ω и на бесконечности. Обратное преобразование имеет вид

$$\varphi(\lambda) = (\mathcal{B}_E^{-1}\hat\varphi)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\ell} E_\rho(\lambda z;1)\hat\varphi(z)\,dz, \qquad (13)$$

где ℓ - замкнутый контур, охватывающий все особенности функции $\hat\varphi$. Формула (12) превращается в (11) при $a_m=\Gamma^{-1}(\frac{m}{\rho}+1)$ для всех достаточно больших значений $|z|$.

Из (12) и (13) следует, что оператор $(\mathcal{B}^*_E)^{-1}$ является топологическим изоморфизмом пространств $\mathcal{E}_\rho(H)$ и $G_\rho(\Omega)$. Аналогично п.°5 этот изоморфизм реализует D в виде оператора дифференцирования Гельфонда- Леонтьева по функции $E_\rho(\lambda;1)$. При $\rho=1$ мы снова получаем рассмотренное в п.°2 пространство $G(\Omega)$.

8. В качестве последнего примера рассмотрим одно функциональное пространство, введенное в работе [9].

Пусть задана последовательность $\{\mathcal{P}_k(z)\}_0^\infty$ функций, определенных на фиксированном множестве $\mathcal{M}$ комплексной плоскости, которое расположено в кольце $r<|z|<R<\infty$, и пусть выполняется условие

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{1}{\rho}} |\mathcal{P}_k(z)|^{\frac{1}{k}} = (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}} |z| \tag{I4}$$

равномерно на каждом множестве $\mathcal{M}_{p,q} = \mathcal{M} \cap \{z : p \leqslant |z| \leqslant q\}$ при $r < p < q < R$. Предположим, что $\sup_{z\in\mathcal{M}} |z| = R$.

Пространство функций на $\mathcal{M}$, каждая из которых допускает единственное представление в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \mathcal{P}_k(z), \tag{I5}$$

наделенное системой норм

$$\|f\|_{p,q} = \sup_{z\in\mathcal{M}_{p,q}} \sum_{k=0}^{\infty} |d_k \mathcal{P}_k(z)|, \tag{I6}$$

мы обозначим через $\mathcal{L}_{r,R}$.

Пусть $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ – такая целая функция, что $a_k \neq 0$ и $\lim k^{\frac{1}{\rho}} |a_k|^{\frac{1}{k}} = (\sigma_1 e\rho)^{\frac{1}{\rho}}$. Введем оператор T_g равенством

$$(T_g f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k a_k z^k, \tag{I7}$$

в котором функция $f(z)$ определена рядом (I5), и покажем, что T_g изоморфно отображает пространство $\mathcal{L}_{r,R}$ на пространство $\mathcal{H}_L$ при $L = R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^{\frac{1}{\rho}}$.

Действительно, из сходимости ряда (I6) и условия (I4) следует $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|d_k|}\, k^{-\frac{1}{\rho}} < (\sigma e\rho)^{-\frac{1}{\rho}} R^{-1}$. Поэтому ряд (I7) определяет функцию, голоморфную в круге $|z| < R\left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} = L$. По всякому положительному числу $\ell < L$ можно найти такое число $z \in \mathcal{M}$, что $R > |z| > \ell\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}}$. Тогда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \frac{a_k \ell^k}{\mathcal{P}_k(z)} \right|^{\frac{1}{k}} \leqslant \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}} \frac{\ell}{|z|} < 1$$

и, значит, конечна величина $C_\ell = \sup_k \left| \frac{a_k \ell^k}{\mathcal{P}_k(z)} \right|$. Отсюда

$$\|T_g f\|_\ell = \max_\theta |(T_g f)(\ell e^{i\theta})| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |d_k a_k| \ell^k \leqslant C_\ell \sum_{k=0}^{\infty} |d_k \mathcal{P}_k(z)| \leqslant C_\ell \|f\|_{p,q},$$

если только $|z| \leqslant q < R$. Значит, оператор T_g непрерывен.

Обратный оператор T_g^{-1} каждой функции $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k \in \mathcal{H}_L$ сопоставляет функцию

$$(T_g^{-1} F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k a_k^{-1} \mathcal{P}_k(z). \tag{I8}$$

Поскольку при любом $\ell < L$ будет $|F_k| \leqslant \|F\|_\ell \ell^{-k}$, то имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} |F_k a_k^{-1} \mathcal{P}_k(z)|^{\frac{1}{k}} < \ell^{-1} \left(\frac{\sigma}{\sigma_1}\right)^{\frac{1}{\rho}} |z|,$$

откуда следует, что ряд (I8) определяет элемент пространства $\mathcal{L}_{r,R}$. Кроме того,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |F_k a_k^{-1} \mathcal{P}_k(z)| \leqslant \|F\|_\ell \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{-1} \mathcal{P}_k(z)| \ell^{-k} \leqslant C_{p,q} \|F\|_\ell,$$

где $C_{p,q} = \sup_{z\in\mathcal{M}_{p,q}} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{-1} \mathcal{P}_k(z)| \ell^{-k}$ – конечная величина, всякий раз, когда $p \leqslant |z| \leqslant q < \ell\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}}$. Тем самым доказана непрерывность оператора T_g^{-1}.

Таким образом, оператор T_g реализует изоморфизм пространства $\mathcal{L}_{r,R}$ и $\mathcal{H}_L$. Как легко проверить, при этом изоморфизме оператор сдвига

$$\hat{D}\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k \mathcal{P}_k(z)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} d_{k+1} \mathcal{P}_k(z)$$

переходит в оператор Гельфонда-Леонтьева

$$D\left(\sum_{k=0}^{\infty} F_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{a_{k+1}} F_{k+1} z^k.$$

В заключение отметим, что исследованию спектральных свойств оператора D в пространствах аналитических функционалов посвящены наши заметки [9-II].

ЛИТЕРАТУРА

I. Б.Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., I956.

2. А. Робертсон, В. Робертсон. Топологические векторные пространства, М., I967.

3. J.Sebastiao e Silva, Sur certe classi di spazi localmente convessi importanti per les applicazioni, Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni, Roma(5) I4, 388-4I0, I955 (Математика I: I, 60-77, I957).

4. Р. Рокафеллер. Выпуклый анализ, М., I973.

5. Л. Хермандер. Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных, М., I968.

6. А.О. Гельфонд, А.Ф. Леонтьев. Об одном обобщении ряда Фурье, Математ.сборник, 29, 7I, № 3, 477-500, I95I.

7. М.М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости, М., I966.

8. А.Ф. Леонтьев. К вопросу о представлении произвольных функций некоторыми общими рядами. Математ. заметки, I, № 6, 689-698, I967.

9. В.А. Ткаченко. О спектральных разложениях в пространствах аналитических функционалов, ДАН СССР, 2I7, № 5, I0I7-I020, I974.

I0. В.А. Ткаченко. Об операторах типа свертки в пространствах аналитических функционалов. ДАН СССР, 2I9, № 3, 555-557, I974.

II. В.А. Ткаченко. О спектральном синтезе в пространствах аналитических функционалов, ДАН СССР (в печати).

SOME SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

V.A.Tkachenko

Let $H(\theta)$ be the indicator of order ρ and $\mathcal{F}$ be the space of entire function with inductive topology defined by the set of norms $\sup_{r,\theta}|\varphi(re^{i\theta})|\exp[-h(\theta)r^{\rho}]$, where $h(\theta) < H(\theta)$. Let $\mathcal{E}$ be the dual space. The simpliest properties of spaces $\mathcal{F}$ and $\mathcal{E}$ are described. Some realizations of $\mathcal{E}$ are given for the special choices of $H(\theta)$.

ЗАМЕЧАНИЕ О ДЕФЕКТАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В.П. Петренко, А.В. Крытов

§ I. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Рассмотрим мероморфную при $z \neq \infty$ функцию нижнего порядка $\lambda < 1$. Пусть $m(r,a,f)$, $N(r,a,f)$, $T(r,f)$, $\delta(a,f)$ - стандартные обозначения теории распределения значений мероморфных функций ([1], [2], [3]). Рассмотрим те значения a, для которых

$$\delta(a,f) > 0. \tag{I.I}$$

Предположим, что элементы последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

занумерованы таким образом, что

$$\delta(a_1) \geqslant \delta(a_2) \geqslant \delta(a_3) \geqslant \ldots > 0. \tag{I.2}$$

Известно, что величины дефектов мероморфной функции $f(z)$, если их число не меньше двух и они удовлетворяют условию (I.I), убывают с убыванием λ. При этом получены точные соотношения для скорости убывания двух величин дефектов $f(z)$ ([4], [5]). В данной работе решается аналогичная задача для трех величин дефектов $f(z)$.

Относительно суммы дефектов мероморфной функции известен такой результат.

Т е о р е м а А ([6]). Если мероморфная функция $f(z)$ нижнего порядка $\lambda \leqslant 0,5$ обладает не менее, чем двумя дефектными значениями, то

$$\sum_{(a)} \delta(a,f) \leqslant 1 - \cos \pi\lambda. \tag{I.3}$$

Из (I.3) сразу следует, что мероморфная функция нулевого нижнего порядка может иметь самое большее I дефектное значение.

С л е д с т в и е. Если мероморфная функция $f(z)$ нижнего порядка $\lambda < 0,5$ обладает не менее, чем тремя дефектными значениями, то справедливо неравенство

$$\delta(a_3) \leqslant \frac{1}{3}(1 - \cos \pi\lambda). \tag{I.4}$$

Основным результатом данной работы является

Т е о р е м а I. Пусть $f(z)$ - мероморфная функция нижнего порядка $0 \leqslant \lambda < 1$ и величины ее дефектов удовлетворяют условию (I.2). Тогда

$$\delta(a_3, f) \leqslant 1 - \frac{2\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\pi\lambda}. \tag{I.5}$$

Легко заметить, что при малых λ наша оценка (I.5) точнее оценки (I.4).

Ниже приведено доказательство теоремы I методами теории целых кривых. При $\lambda = 0$ $\delta(a_3, f) = 0$, поэтому доказательство теоремы I будем проводить при $\lambda > 0$.

Известно, что с точки зрения теории распределения значений и теории роста мероморфную функцию $f(z)=\frac{g_1(z)}{g_2(z)}$ ($g_1(z)$ и $g_2(z)$ - целые функции) можно рассматривать как двумерную целую кривую

$$\vec{G}(z) = \left\{ g_1(z),\ g_2(z) \right\}; \tag{I.6}$$

a - точкам $f(z)$ соответствуют $\vec{a}$-векторы ($\vec{a}$ = (I, a)) целой кривой $\vec{G}(z)$.

В связи с этим напомним определение целой кривой ([7] , [8]).

Вектор-функция p-мерного комплексного унитарного пространства

$$\vec{G}(z) = \left\{ g_1(z),\ g_2(z),\ \ldots,\ g_p(z) \right\} \ (p > 1),$$

где $\left\{ g_n(z) \right\}_{n=1}^{p}$ - линейно независимые целые функции, имеющие самое большее конечное число общих корней, называется целой кривой p измерений.

Неванлинновской характеристикой $\vec{G}(z)$ называется

$$T(r, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta - u(0), \tag{I.7}$$

где

$$u(z) = \max_{1 \le k \le p} \ln |g_k(z)|.$$

Дефект целой кривой $\vec{G}(z)$ в смысле P. Неванлинны относительно вектора $\vec{a}$ определяется так ([7] , [8]):

$$\delta(\vec{a}, \vec{G}) = 1 - \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})}, \tag{I.8}$$

где $N(r, \vec{a}, \vec{G})$ - функция числа корней скалярного произведения $(\vec{G}(z) \cdot \vec{a}) = g_1(z) \cdot \bar{a}_1 + \ldots + g_p(z) \cdot \bar{a}_p$.

Нижним порядком целой кривой $\vec{G}(z)$ называется величина

$$\lambda = \underline{\lim_{r \to \infty}} \frac{\ln T(r, \vec{G})}{\ln r}.$$

Доказательство теоремы I приведено в § 3; в § 2 сформулированы необходимые для доказательства теоремы I вспомогательные утверждения.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Для дальнейших рассуждений понадобится следующее

О п р е д е л е н и е ([7] , стр. 293). Система векторов A p-мерного комплексного унитарного пространства C_p называется допустимой, если любые p различных векторов из системы A линейно независимы.

Пусть целая кривая $\vec{G}(z)$ размерности p ($p > I$) имеет нерегулярный рост, т.е. $0 \le \lambda[\vec{G}] < \rho[\vec{G}] \le \infty$. Обозначим (k = I,2,..., q , $q > p$)

$$F_k(z) = (\vec{G}(z) \cdot \vec{a}_k) = \sum_{n=1}^{p} g_n(z) \cdot a_{kn},$$

где

$$\vec{a}_k = \left\{ \bar{a}_{k1},\ \bar{a}_{k2},\ \ldots,\ \bar{a}_{kp} \right\} \in A.$$

Пусть [I] $\{a_n(k)\}$ - нули функции $F_k(z)$, γ_k - кратность корня $F_k(z)$ в нуле. Функция

$$g_R(z) = \frac{F_1(z)}{C_1 \cdot z^{\gamma_1} \cdot \prod\limits_{|a_n(1)| \leqslant R} \left(1 - \frac{z}{a_n(1)}\right)} \tag{2.I}$$

аналитическая и не имеет нулей при $|z| \leqslant R$ (R - фиксировано).

Рассмотрим аналитическую кривую

$$\vec{G}_R(z) = \left\{ \frac{g_1(z)}{g_R(z)}, \ldots, \frac{g_p(z)}{g_R(z)} \right\}, \tag{2.2}$$

где функция $g_R(z)$ определена соотношением (2.I). При $|z| = r \leqslant R$ справедливы соотношения (см. [9])

$$m(r, \vec{a}, \vec{G}_R) = m(r, \vec{a}, \vec{G}),\ T(r, \vec{G}_R) = T(r, \vec{G}).$$

Пусть теперь целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет регулярный рост, т.е. $0 \leqslant \lambda[\vec{G}] = \rho[\vec{G}] \leqslant \infty$. Рассмотрим функцию

$$D_k(z) = z^{\gamma_k} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n(k)}\right). \tag{2.3}$$

Функция

$$S_1(z) = \frac{F_1(z)}{D_1(z)}$$

является целой без корней (см. [9]) и, значит,

$$S_1(z) = \exp g(z),$$

где $g(z)$ - целая функция.

Введем в рассмотрение целую кривую

$$\vec{G}_0(z) = \left\{ \frac{g_1(z)}{S_1(z)}, \ldots, \frac{g_p(z)}{S_1(z)} \right\}. \tag{2.4}$$

Легко проверить справедливость следующих соотношений ($\vec{a} \in A$)

$$m(r, \vec{a}, \vec{G}_0) = m(r, \vec{a}, \vec{G}),\ T(r, \vec{G}_0) = T(r, \vec{G}),$$
$$N(r, \vec{a}, \vec{G}_0) = N(r, \vec{a}, \vec{G}),\ \ \delta(\vec{a}, \vec{G}_0) = \delta(\vec{a}, \vec{G}).$$

В дальнейшем, исследуя величины дефектов целой кривой $\vec{G}(z)$ нерегулярного роста, будем использовать при $|z| \leqslant R$ соответствующие соотношения для аналитической кривой $\vec{G}_R(z)$, определенной (2.2), а при исследовании величин дефектов целой кривой $\vec{G}(z)$ регулярного роста будем использовать соответствующие соотношения для целой кривой $\vec{G}_0(z)$, определенной (2.4). При этом будем обозначать

$$\Phi_k(z) = (\vec{G}_0(z) \cdot \vec{a}_k),$$

если $\lambda = \rho$, и при $|z| \leq R$

I) Здесь и в дальнейшем буквой C будем обозначать, вообще говоря, различные положительные постоянные, зависящие лишь от рассматриваемой функции.

$$\Phi_k(z) = (\vec{G}_R(z)\cdot \vec{a}_k),$$

если $\lambda < \rho$.

Рассмотрим теперь двумерную целую кривую (I.6) и обозначим при фиксированном $z\ (z = re^{i\varphi})$

$$\max\{|g_1(z)|,\ |g_2(z)|\} = |g_{\nu(z)}(z)|,$$
$$\max\{|g_1(-z)|, |g_2(-z)|\} = |g_{\nu_1(z)}(-z)|,$$
$$u(z) = \ln|g_\nu(z)|,\quad u(-z) = \ln|g_{\nu_1}(-z)|,$$
$$\Phi_k(z) = g_1(z) + \bar{a}_k\cdot g_2(z) \quad (k = 1, 2, 3), \tag{2.5}$$

$$|\Phi_{\mu(z)}(z)\,\Phi_{\mu(z)}(-z)| = \max_{1\le k\le 3} |\Phi_k(z)\Phi_k(-z)|. \tag{2.6}$$

Л е м м а I. Справедливо неравенство

$$u(z) + u(-z) \le \ln|\Phi_\mu(z)\,\Phi_\mu(-z)| + C. \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.5) имеем (k = I, 2, 3)

$$\Phi_k(z)\,\Phi_k(-z) = g_1(z)g_1(-z) + \bar{a}_k S(z) + \bar{a}_k^2 g_2(z) g_2(-z), \tag{2.8}$$

где

$$S(z) = g_1(z)\,g_2(-z) + g_1(-z)\,g_2(z). \tag{2.9}$$

Рассмотрим три соотношения, определяемые (2.8), как три уравнения с тремя неизвестными, считая известными выражения в левой части (2.8) и коэффициенты $\bar{a}_k$.

Определитель системы уравнений отличен от нуля и, следовательно, система имеет единственное решение.

Решая систему, получим (n = I,2)

$$g_n(z)\,g_n(-z) = \sum_{k=1}^{3} A_k^{(n)}\Phi_k(z)\,\Phi_k(-z) \tag{2.10}$$

и

$$S(z) = \sum_{k=1}^{3} B_k \Phi_k(z)\,\Phi_k(-z). \tag{2.11}$$

В случае $\nu = \nu_1$ оценка (2.7) следует из формулы (2.I0). Если $\nu \ne \nu_1$, то для доказательства оценки (2.7) достаточно рассмотреть случай

$$|g_\nu(z)| = |g_1(z)|,\quad |g_{\nu_1}(-z)| = |g_2(-z)|.$$

Если

$$|g_1(-z)\,g_2(z)| \le \frac{1}{2}|g_1(z)\,g_2(-z)|,$$

то из (2.9) находим

$$|S(z)| \ge |g_1(z)g_2(-z)| - |g_1(-z)g_2(z)| \ge \frac{1}{2}|g_1(z)\,g_2(-z)|$$

и формула (2.II) приводит к требуемому неравенству (2.7). Если же

$$|g_1(-z)\,g_2(z)| \ge \frac{1}{2}|g_1(z)\,g_2(-z)|,$$

то, выполняя несложные преобразования, получим

$$|g_1(-z)| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{g_1(z)}{g_2(z)}\right| \cdot |g_2(-z)| \geq \frac{1}{2} e^{u(-z)}. \tag{2.12}$$

Так как в рассматриваемом случае

$$e^{u(z)} = |g_1(z)|,$$

то, используя формулы (2.12) и (2.10), находим

$$e^{u(z)+u(-z)} \leq 2|g_1(z)g_1(-z)| \leq e^{\ln|\Phi_m(z)\Phi_m(-z)|+C},$$

что и доказывает соотношение (2.7).

Лемма доказана.

Для представления $\ln M(r,f)$, где $f(z)$ – мероморфная функция нижнего порядка $\lambda \leq \infty$, в области

$$D_{\alpha,R} = \{z : 0 < |z| < R,\ |\arg z| < \alpha\}, \tag{2.13}$$

$0 < \alpha < \pi$, $R > 1$, понадобится следующая

Лемма 2 ([10], стр. 427). Для любой мероморфной функции $f(z)$ справедливо неравенство ($1 \leq r < R$)[2]:

$$\ln M(r,f) \leq (4x)^2 \int_0^R \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \ln|f(te^{i\theta})|\,d\theta}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, t^{2x-1}\,dt -$$

$$-\sum_{|a_k|\leq 2R} \ln\left|\frac{r^{2x}+|a_k|^{2x}}{r^{2x}-|a_k|^{2x}}\right| + \sum_{|b_k|\leq 2R} \ln\left|\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{r^{2x}-|b_k|^{2x}}\right| + \tag{2.14}$$

$$+K\left(\frac{r}{R}\right)^{2x}\{T(4R,f)+T_1(4R,f)\}+C,$$

где a_k и b_k – нули и полюсы функции $f(z)$,

$$x = \frac{\pi}{2\alpha} \tag{2.15}$$

и

$$T_1(R) = \int_1^R \frac{T(s)}{s}\,ds. \tag{2.16}$$

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I

Пусть $f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$ – мероморфная функция, удовлетворяющая условиям теоремы I, и $\vec{G}(z) = \{g_1(z), g_2(z)\}$ – соответствующая ей двумерная целая кривая.

---

2) Буквой K будем обозначать, вообще говоря, различные положительные абсолютные постоянные.

Выберем три различных комплексных числа a_1, a_2, a_3 и обозначим через $\vec{a}_k=(1, a_k)$ (k = I,2,3) соответствующие им двумерные векторы.

Обозначим при фиксированном z

$$|g(\zeta)| = |\Phi_{\mathcal{M}(z)}(\zeta)\,\Phi_{\mathcal{M}(z)}(-\zeta)|,$$

где правая часть определена формулой (2.6), и

$$M(r, g) = \max_{|\zeta| = r} |g(\zeta)|.$$

Выберем в (2.I3)

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда, используя (2.I5) и формулу (2.I4) для целой функции $g(\zeta)$, получим (z -фиксировано):

$$\ln M(r,g) \leqslant 4r^2 \int_0^R \frac{\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln|\Phi_{\mathcal{M}}(te^{i\theta})|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln|\Phi_{\mathcal{M}}(-te^{i\theta})|\,d\theta}{(t^2+r^2)^2}\, t\,dt +$$
$$+ K\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left\{T(4R, \Phi_{\mathcal{M}}) + T_1(4R, \Phi_{\mathcal{M}})\right\} + C. \tag{3.I}$$

Заметим, что (см. [7] , стр. 294)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln|\Phi_{\mathcal{M}}(te^{i\theta})|\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln|\Phi_{\mathcal{M}}(te^{i(\theta+\pi)})|\,d\theta =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|\Phi_{\mathcal{M}}(te^{i\theta})|\,d\theta = N(t, 0, \Phi_{\mathcal{M}}) + \ln|\Phi_{\mathcal{M}}(0)| \tag{3.2}$$

и (см. (I.8)) при $t > t_0$

$$N(t, 0, \Phi_{\mathcal{M}}) \leqslant (1+\varepsilon - \delta(\vec{a}_{\mathcal{M}}, \vec{G}))\, T(t, \vec{G}) \leqslant$$
$$\leqslant (1+\varepsilon - \delta(\vec{a}_3, \vec{G}))\cdot T(t, \vec{G}) \qquad (\varepsilon > 0). \tag{3.3}$$

Из (2.7), (3.I), (3.2) и (3.3) имеем

$$u(z) + u(-z) \leqslant 4r^2(1+\varepsilon - \delta(\vec{a}_3, \vec{G})) \int_{t_0}^R \frac{T(t, \vec{G})}{(t^2+r^2)^2}\, t\,dt +$$
$$+ K\left(\frac{r}{R}\right)^2 \cdot \left\{T(4R, \Phi_{\mathcal{M}}) + T_1(4R, \Phi_{\mathcal{M}})\right\} + C. \tag{3.4}$$

Интегрируя обе части неравенства (3.4) по θ от 0 до 2π и пользуясь соотношением (I.7), получим

$$2T(r, \vec{G}) \leqslant 4r^2(1+\varepsilon - \delta(\vec{a}_3, \vec{G})) \int_{t_0}^R \frac{T(t, \vec{G})}{(t^2+r^2)^2}\, t\,dt +$$
$$+ K\left(\frac{r}{R}\right)^2 \left\{T(4R, \Phi_{\mathcal{M}}) + T_1(4R, \Phi_{\mathcal{M}})\right\} + C. \tag{3.5}$$

Пусть $(\varepsilon_1 > 0)$

$$\gamma(r)=\begin{cases}\lambda+\varepsilon_1<\rho, & \text{если } f(z) \text{ нерегулярного роста } (\lambda<\rho),\\ \rho(r), & \text{если } f(z) \text{ регулярного роста } (\lambda=\rho),\end{cases}$$

где $\rho(r)$ - уточнённый порядок функции $T(r,\vec{G})+T_1(r,\vec{G})$.

Проведем далее доказательство теоремы I в случае, когда целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет нерегулярный рост.

Деля неравенство (3.5) на $r^{\gamma+1}$, интегрируя его по r от r_0 до $0{,}5R$ ($r_0<0{,}5R$) и меняя порядок интегрирования в первом слагаемом справа, что возможно в силу теоремы Фубини, получаем

$$\int_{r_0}^{0,5R}\frac{T(r,\vec{G})}{r^{\gamma+1}}dr\leqslant 2(1+\varepsilon-\delta(\vec{a}_3,\vec{G}))\int_{t_0}^{R}\frac{T(t,\vec{G})}{t^{\gamma+1}}\times$$
$$\times\left[\int_0^{\infty}\left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma+1}\frac{r^2t}{(t^2+r^2)^2}dr\right]dt+K\cdot B(R,\Phi_\mu)+C, \tag{3.6}$$

где

$$B(R,\Phi_\mu)=\frac{T(4R,\Phi_\mu)+T_1(4R,\Phi_\mu)}{R^{\gamma}}. \tag{3.7}$$

Исследуем рост величины $B(R,\Phi_\mu)$ при неограниченно возрастающем R.

Л е м м а 3. Если целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет нерегулярный рост, то существует последовательность $\{R_n\}\uparrow\infty$ такая, что

$$B(R_n,\Phi_\mu)\to 0. \tag{3.8}$$

Для целой кривой $\vec{G}(z)$ регулярного роста при $R\to\infty$ справедливо соотношение

$$B(R,\Phi_\mu)=O(1). \tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вначале целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет нерегулярный рост. В силу (2.I) и (2.2) при $|\zeta|\leqslant 4R$ ($\mu=\mu(z)$, z - фиксировано)

$$\Phi_\mu(\zeta)=\frac{g_1(\zeta)}{g_{4R}(\zeta)}+a_\mu\frac{g_2(\zeta)}{g_{4R}(\zeta)}=$$
$$=\frac{F_\mu(\zeta)}{F_1(\zeta)}C_1\cdot z^{\gamma_1}\cdot\prod_{|a_n(1)|\leqslant 4R}\left(1-\frac{\zeta}{a_n(1)}\right)=\frac{F_\mu(\zeta)}{F_1(\zeta)}\cdot A_R(\zeta). \tag{3.I0}$$

Поэтому при $\mu\neq 1$ и $|\zeta|=r\leq 4R$ (см. [7], стр. 294)

$$T(r,\Phi_\mu)\leqslant T\left(r,\frac{F_\mu}{F_1}\right)+T(r,A_R)\leqslant$$
$$\leqslant C\cdot T(r,\vec{G})+T(r,A_R)\leq T(r,f)+T(r,A_R). \tag{3.II}$$

Далее (см. [II], стр. 54, 24)

$$T(r,A_R)\leqslant \ln M(r,A_R)\leqslant\sum_{|a_n(1)|\leqslant 4R}\ln\left(1+\frac{r}{|a_n(1)|}\right)+C\cdot\ln r\leqslant$$
$$\leqslant N(r,A_R)+K\cdot n(4R,A_R)+C\cdot\ln r\leqslant$$
$$\leqslant K\cdot N(8R,F_1)+C\cdot\ln R\leqslant \tag{3.I2}$$
$$\leqslant K\cdot T(8R,\vec{G})+C\cdot\ln R\leqslant K\cdot T(8R,f)+C\cdot\ln R.$$

Итак, согласно (3.II) и (3.I2), при фиксированном z и любом $r \le 4R$

$$T(r, \Phi_\mu) \le KT(8R, f) + C \cdot \ln R.$$

Легко доказать, пользуясь определением величины $T_1(r, \vec{G})$ (см. (2.I6)), что

$$T_1(4R, \Phi_\mu) \le KT_1(8R, \vec{G}) \le KT_1(8R, f).$$

Значит, ($R \ge R_0$)

$$B(R, \Phi_\mu) \le \frac{K}{R^\gamma}\left\{T(8R, f) + T_1(8R, f)\right\}. \tag{3.I3}$$

Из определения нижнего порядка λ функции $f(z)$ следует, что для любого числа $\varepsilon_1 > 0$ существует последовательность $\{R_n\} \uparrow \infty$ такая, что

$$\frac{T(8R_n, \vec{G})}{R_n^{\lambda+\varepsilon_1}} \to 0. \tag{3.I4}$$

Замечая, что $T(r, f)$ и $T_1(r, f)$ имеют одинаковый нижний порядок при $r > 0$ и принимая во внимание (3.I3) и (3.I4), убеждаемся в справедливости соотношения (3.8).

Пусть теперь целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет регулярный рост. В силу (2.3) в соотношении (3.I0) вместо $A_R(\zeta)$ стоит $D_1(\zeta)$. Поэтому ($\mu \ne 1$)

$$\begin{aligned} T(r, \Phi_\mu) &\le T\left(r, \frac{F_\mu}{F_1}\right) + T(r, D_1) \le \\ &\le CT(r, \vec{G}) + T(r, D_1). \end{aligned} \tag{3.I5}$$

Положим ($|\zeta| = r \le 4R$)

$$D_1(\zeta) = \zeta^{\gamma_1} \widetilde{D}_1(\zeta).$$

Имеем (см. [II], стр. 78):

$$\begin{aligned} &T(r, D_1) \le \ln M(r, D_1) \le \ln M(r, \widetilde{D}_1) + C \cdot \ln r \le \\ &\le K\left\{\int_0^r \frac{n(t, 0, \widetilde{D}_1)}{t} dt + r\int_r^\infty \frac{n(t, 0, \widetilde{D}_1)}{t^2} dt\right\} + C \cdot \ln r \le \\ &\le K\left\{N(r, 0, \widetilde{D}_1) + r\int_r^\infty \frac{dN(t, 0, \widetilde{D}_1)}{t} dt\right\} + C \cdot \ln R \le \\ &\le K\left\{N(r, 0, \widetilde{D}_1) - N(r, 0, \widetilde{D}_1) + r\int_r^\infty \frac{N(t, 0, \widetilde{D}_1)}{t^2} dt\right\} + \\ &+ C \ln R \le Kr\int_r^\infty \frac{T(t, \vec{G})}{t^2} dt + C \ln R. \end{aligned} \tag{3.I6}$$

По определению уточненного порядка $\rho(t)$

$$\varlimsup_{t \to \infty} \frac{T(t, \vec{G})}{t^{\rho(t)}} = 1. \tag{3.I7}$$

Из (3.I6) и (3.I7) имеем (см. [I0])

$$\begin{aligned} &T(r, D_1) \le Kr\int_r^\infty t^{\rho(t)-2} dt + C \cdot \ln R \le \\ &\le KR\,\frac{1+o(1)}{1-\rho} R^{\rho(R)-1} + C \cdot \ln R \le K \cdot R^{\rho(R)}, \end{aligned}$$

поэтому соотношение (3.I5) принимает вид ($R \geq R_0$)

$$T(r, \Phi_m) \leq K \cdot R^{\rho(R)}. \qquad (3.I8)$$

Аналогично находим ($R \geq R_0$):

$$T_1(r, \Phi_m) \leq K \cdot R^{\rho(R)}. \qquad (3.I9)$$

Складывая неравенства (3.I8) и (3.I9), приходим к требуемому соотношению (3.9). Лемма доказана.

Приступим теперь к завершению доказательства теоремы I.

Вычислим внутренний интеграл в первом слагаемом правой части неравенства (3.6). Производя два раза замену переменных $\frac{r}{t} = s$ и $s^2 = u$, получаем с помощью теории вычетов

$$\int_0^\infty \left(\frac{t}{r}\right)^{\gamma+1} \frac{r^2 t}{(t^2+r^2)^2} dr = \int_0^\infty \frac{1}{s^\gamma} \frac{s\,ds}{(1+s^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{du}{u^{\gamma/2}(1+u)^2} = \frac{\pi\gamma}{4\sin\frac{\pi\gamma}{2}}. \qquad (3.20)$$

Принимая во внимание (3.20), запишем неравенство (3.6) в виде

$$\int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,\vec{G})}{r^{\gamma+1}} dr \leq (1+\varepsilon-\delta(\vec{a}_3,\vec{G}))\frac{\pi\gamma}{2\sin\frac{\pi\gamma}{2}} \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,\vec{G})}{r^{\gamma+1}} dr + KB(R,\Phi_m) + C. \qquad (3.21)$$

Заметим, что при неограниченно возрастающем R интеграл

$$I(R) = \int_{r_0}^{0,5R} \frac{T(r,\vec{G})}{r^{\gamma+1}} dr \qquad (3.22)$$

расходится (см. [I2], стр. I33I).

Разделим обе части неравенства (3.21) на интеграл I (R). Устремим ε и ε_1 к 0, а R - к ∞ по последовательности $\{R_n\}$, которая была выбрана в (3.I4).

Учитывая при этом формулу (3.8), приходим к доказываемому соотношению (I.5). Теорема I в случае, когда целая кривая $\vec{G}(z)$ имеет нерегулярный рост, доказана.

В случае регулярного роста целой кривой $\vec{G}(z)$ доказательство теоремы I проводится аналогично, с использованием в качестве величины γ уточненного порядка $\rho(r)$ функции $T(r,\vec{G}) + T_1(r,\vec{G})$. Для оценки величины $B(R,\Phi_m)$ в данном случае следует воспользоваться соотношением (3.9); расходимость интеграла I (R), определенного формулой (3.22), доказана в работе [I0] (стр. 429). Теорема I доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

I. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции. Гостехиздат, М.-Л., I94I.

2. У.К. Хейман. Мероморфные функции, М., "Мир", I966.

3. R.Nevanlinna.Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions meromorphes.Paris,1929.

4. A.Edrei.Duke mathematical journal,3I,N°I,I,I964.

5. A.Edrei,W.H.J.Fuchs.Duke mathematical journal,27,N°2,233,I960.

6. A.Edrei.Journal de analyse mathématique,XIV,79,I965.

7. А.А. Гольдберг. Некоторые вопросы теории распределения значений, дополнение к книге Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. Физматгиз, М., I960.

8. H. Cartan. Mathematica, 7, 5, 1933.

9. В.П. Петренко, М. Хуссайн. Сб. "Теория функций, функциональный анализ и их приложения", изд. ХГУ (в печати).

10. В.П. Петренко. Известия АН СССР, сер.матем. 33, № 2, 414, 1969.

11. А.А. Гольдберг, И.В. Островский. Распределение значений мероморфных функций, "Наука", М., 1970.

12. В.П. Петренко. Сибирский математический журнал, УП, № 6, 1319, 1966.

A NOTE ON THE DEFICIENCIES OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

V. P. Petrenko, A. V. Kritov

Let $f(z)$ be a meromorphic function of lower order $\lambda < 1$ and let a_1, a_2, a_3 be the exceptional values of $f(z)$ in a sense of R. Nevanlinna. Using the methods of entire curves in article had obtained the following inequality for $\delta(a_3) = \min_{1 \le k \le 3} \delta(a_k, f)$, namely, take place the assertion: if meromorphic function $f(z)$ has the lower order $\lambda < 1$, then

$$\delta(a_3) \leq 1 - \frac{2 \sin \frac{\pi\lambda}{2}}{\pi\lambda}.$$

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ

Н.И. Яковлева

В в е д е н и е. Обозначим через $\varphi(t;F)$ целую характеристическую функцию (х.ф.) т.е. функцию, представимую в виде

$$\varphi(t;F)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dF(x), \tag{I}$$

где $F(x)$ – вероятностный закон (функция распределения) такой, что для любого $r>0$

$$1-F(x)+F(-x+0)=O(e^{-rx}), \quad x\to+\infty.$$

Это условие обеспечивает сходимость интеграла в (I) абсолютно и равномерно в любой ограниченной области в C^1.

Напомним, что порядком роста целой функции $f(z)$ называется величина

$$\rho_f=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r},$$

а нижним порядком – величина

$$\lambda_f=\underline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r},$$

где $M(r,f)=\max\limits_{|z|=r}|f(z)|$.

Вопрос, каким может быть порядок роста целой х.ф., и как он связан с поведением соответствующего закона, рассматривался Рамачандраном ([2] , см. также [I] , стр. 54). Вопрос же о том, каким может быть, и как связан с поведением соответствующего закона нижний порядок роста целой х.ф. до сих пор, насколько нам известно, не рассматривался. Часть I настоящей работы посвящена изучению этого вопроса.

Известно ([3] , см. также [I] , стр. 45), что если $\varphi(t)\neq 1$ – целая х.ф., то существует конечный или бесконечный положительный предел

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,\varphi)}{r}.$$

Этот результат показывает, что порядок и нижний порядок роста любой целой х.ф. $\varphi(t)\neq 1$ не меньше I. Оказывается, что на нижний порядок никаких других ограничений нет. В настоящей работе показано, что, каковы бы ни были два числа λ и ρ, $1\leq\lambda\leq\rho\leq\infty$, существует целая х.ф., порядок которой равен ρ, а нижний порядок равен λ.

Для описания связи роста целой х.ф. $\varphi(t;F)$ с поведением закона $F(x)$ используем функцию

$$W_F(x)=1-F(x)+F(-x+0), \quad x>0.$$

В части I настоящей работы доказываются следующие теоремы:

Т е о р е м а I. Если целая х.ф. $\varphi(t;F)$ вероятностного закона $F(x)$ имеет порядок роста $\rho_\varphi=1+\frac{1}{\alpha}$, $0<\alpha<\infty$, и для некоторого γ, $\alpha<\gamma\leq\infty$, выполняется условие

$$\underline{\lim_{\substack{x\in U\\ x\to\infty}}}\ \frac{\ln\ln\frac{1}{W_F(x)}}{\ln x} \geq 1+\gamma, \tag{2}$$

где $U = \bigcup_j (a_{2j}, a_{2j+1})$, $a_n \uparrow \infty$,

$$\underline{\lim_{j\to\infty}}\ \frac{\ln a_{2j+1}}{\ln a_{2j}} \geq \frac{\gamma}{\alpha}, \tag{3}$$

то нижний порядок роста $\varphi(t; F)$ допускает оценку $\lambda_\varphi \leq 1+\frac{1}{\gamma}$.

Т е о р е м а 2. Если вероятностный закон $F(x)$, имеющий целую х.ф., удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{\ln\ln\frac{1}{W_F(x)}}{\ln x} \leq 1+\gamma, \tag{4}$$

то нижний порядок роста его х.ф. $\varphi(t; F)$ допускает оценку $\lambda_\varphi \geq 1+\frac{1}{\gamma}$.

Из теорем I и 2 непосредственно вытекает

С л е д с т в и е. Пусть для вероятностного закона $F(x)$, имеющего целую х.ф. порядка $\rho_\varphi = 1+\frac{1}{\alpha}$, $0<\alpha<\infty$, существует предел

$$\lim_{\substack{x\in U\\ x\to\infty}} \frac{\ln\ln\frac{1}{W_F(x)}}{\ln x} = \overline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{\ln\ln\frac{1}{W_F(x)}}{\ln x} = 1+\gamma,\quad \alpha<\gamma\leq\infty,$$

где множество U определяется так же, как в теореме 1. Тогда нижний порядок роста $\varphi(t;F)$ равен $\lambda_\varphi = 1+\frac{1}{\gamma}$.

В работе приводится пример, показывающий, что в условии (3) величину $\frac{\gamma}{\alpha}$ нельзя заменить меньшей.

Рамачандран ([2] , см. также [I] , стр. 54) нашел необходимые и достаточные условия для того, чтобы х.ф. имела заданные порядок и тип роста. Результаты Рамачандрана о порядке роста были обобщены в заметке автора [5] . Напомним основной результат [5]. Будем говорить, следуя [4] , что функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $0<x<\infty$, принадлежат соответственно классам Λ, L°, если они положительны, непрерывны, монотонно возрастают и удовлетворяют соответственно условиям

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\alpha(cx)}{\alpha(x)} = 1$$

для любого $c>0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\beta[(1+\mu(x))x]}{\beta(x)} = 1, \tag{5}$$

где $\mu(x)$ – любая монотонно стремящаяся к 0 функция.

Т е о р е м а [5] . Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – функции, принадлежащие соответственно классам Λ, L°. Для того, чтобы закон $F(x)$ имел целую х.ф. $\varphi(t; F)$ такую, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\ \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta(\ln r)} = \gamma,\quad \gamma>0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\underline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{\beta\left[\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)\right]}{\alpha(x)} = \frac{1}{\gamma}.$$

В части II этой работы доказывается теорема несколько более сильная, а именно

Т е о р е м а 3. Пусть функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принадлежат соответственно классам Λ и L°. Для того, чтобы

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln \mathcal{M}(r,\varphi)\right)}{\beta(r)} = \gamma, \quad \gamma > 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\beta\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right]}{\alpha(x)} = \frac{1}{\gamma}.$$

При $\beta(x) = \beta_1(\ln x)$, где $\beta_1(x)$ - функция из класса L°, получаем приведенную выше теорему из [5].

Из теоремы [5], при $\alpha(x) = \ln_{k+2} x$, $k \geq 0$, $\beta(x) = x$, следует такое соотношение

$$\rho_1 = \frac{1}{\varkappa_1},$$

где

$$\rho_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{k+3}\mathcal{M}(r,\varphi)}{\ln r},$$

$$\varkappa_1 = \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right)}{\ln_{k+2} x}.$$

Выбирая в теореме 3 $\alpha(x) = \ln_{k+1} x$, $\beta(x) = x^{\rho_1}$, получаем следующий результат

С л е д с т в и е. Положим

$$\sigma_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln_{k+2} \mathcal{M}(r,\varphi)}{r^{\rho_1}}, \qquad \theta_1 = \underline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right]^{\rho_1}}{\ln_{k+1} x}.$$

Справедливо соотношение

$$\sigma_1 = \frac{1}{\theta_1}.$$

II. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы I. Пусть выполнено условие (2). Тогда для любого $\bar{\gamma} < \gamma$ выполняется[I)] при $x \in U$

$$W_F(x) \leq \exp\{-x^{1+\bar{\gamma}}\}, \quad x \to +\infty. \tag{6}$$

Из теоремы о порядке роста целой х.ф. ([2], также [I], стр. 54) следует, что для любого $\bar{\alpha}, 0<\bar{\alpha}<\alpha$, выполняется

$$W_F(x) \leq \exp\{-x^{1+\bar{\alpha}}\}, \quad x \to +\infty. \tag{7}$$

Будем выбирать $\bar{\alpha}$ и $\bar{\gamma}$ так, чтобы выполнялись неравенства $\frac{\gamma}{\alpha} > \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}}$, $0<\bar{\alpha}<\alpha<\bar{\gamma}<\gamma$.

Как известно ([I], стр. 46),

$$\mathcal{M}(r,\varphi) = \max\{\varphi(-ir;F), \varphi(ir;F)\}.$$

Имеем

I) Здесь и в дальнейшем, записывая „$f(x) \leq g(x), x \to +\infty$", подразумеваем, что неравенство $f(x) \leq g(x)$ выполняется при всех достаточно больших x.

$$\varphi(-ir, F)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\, dF(x)=\int_{-\infty}^{a_\ell}+\int_{a_\ell}^{\infty} = I_1 + I_2 ,$$

где a_ℓ выбрано таким, чтобы при $x \geqslant a_\ell$ выполнялись неравенства (6) и (7). Оценивая I_1 и I_2, получаем

$$\varphi(-ir; F) \leqslant r\int_{a_\ell}^{\infty} e^{rx}\, W_F(x)\,dx + O(e^{ra_\ell}), \quad r \to +\infty.$$

Такая же оценка получается для $\varphi(ir; F)$ и, таким образом,

$$\mathcal{M}(r,\varphi) \leqslant r\int_{a_\ell}^{\infty} e^{rx}\, W_F(x)\,dx + O(e^{ra_\ell}), \quad r \to +\infty. \tag{8}$$

Из оценки (7) следует, что

$$r\int_{a_\ell}^{\infty} e^{rx}\, W_F(x)\,dx \leqslant r\int_{a_\ell}^{[(1+\delta)r]^{\frac{1}{\bar\alpha}}} e^{rx}\, W_F(x)\,dx + r\int_{[(1+\delta)r]^{\frac{1}{\bar\alpha}}}^{\infty} e^{rx - x^{1+\bar\alpha}}\,dx, \quad \delta > 0. \tag{9}$$

Так как при $x \geqslant [(1+\delta)r]^{\frac{1}{\bar\alpha}}$ выполняется $rx - x^{1+\bar\alpha} \leqslant -\delta r x$, то имеем

$$r\int_{[(1+\delta)r]^{\frac{1}{\bar\alpha}}}^{\infty} e^{rx - x^{1+\bar\alpha}}\,dx = o(1), \quad r \to \infty. \tag{10}$$

Остается оценить

$$I(r) = r\int_{a_\ell}^{[(1+\delta)r]^{\frac{1}{\bar\alpha}}} e^{rx}\, W_F(x)\,dx.$$

Для последовательности r_j таких, что

$$r_j = \frac{a_{2j+1}^{\bar\alpha}}{1+\delta}, \quad \delta > 0,$$

используя оценки (6) и (7), запишем

$$I(r_j) \leqslant r_j\,(I_{2j} + I_{2j+1}), \tag{11}$$

где

$$I_{2j} = \int_{a_\ell}^{a_{2j}} \exp\{r_j x - x^{1+\bar\alpha}\}\,dx,$$

$$I_{2j+1} = \int_{a_{2j}}^{a_{2j+1}} \exp\{r_j x - x^{1+\bar\gamma}\}\,dx.$$

Легко видеть, что функция $\exp\{r_j x - x^{1+\bar\gamma}\}$ достигает максимума в точке $x_{\bar\gamma}(r_j) = \left(\frac{r_j}{1+\bar\gamma}\right)^{\frac{1}{\bar\gamma}}$. Поэтому

$$I_{2j+1} \leqslant \exp\{r_j x_{\bar\gamma}(r_j) - [x_{\bar\gamma}(r_j)]^{1+\bar\gamma}\} \cdot (a_{2j+1} - a_{2j}) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{1}{(1+\bar\gamma)^{\frac{1}{\bar\gamma}}}\, r_j^{1+\frac{1}{\bar\gamma}}\right\} [(1+\delta) r_j]^{\frac{1}{\bar\alpha}}.$$

Оценим теперь I_{2j}. Из условия (3) и выбора $\bar\alpha$ и $\bar\gamma$ следует существование такого $\bar j$, что при $j \geqslant \bar j$ выполняется

$$a_{2j}^{\bar{\gamma}} \leqslant a_{2j+1}^{\alpha}$$

и, в силу выбора r_j,

$$a_{2j} \leqslant [(1+\delta) r_j]^{\frac{1}{\bar{\gamma}}}.$$

Понятно, что

$$I_{2j} \leqslant \int_{a_\ell}^{a_{2j}} \exp\{r_j x\}\, dx \leqslant \exp\{r_j a_{2j}\} \cdot (a_{2j} - a_\ell) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\{(1+\delta)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} r_j^{1+\frac{1}{\bar{\gamma}}}\} [(1+\delta) r_j]^{\frac{1}{\bar{\gamma}}}.$$

Подставляя в (8) неравенства (9), (I0), (II) и используя оценки интегралов I_{2j} и I_{2j+1}, получаем для $\mathcal{M}(r_j, \varphi)$ следующую оценку

$$\mathcal{M}(r_j, \varphi) \leqslant r_j \exp\{(1+\delta)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} r_j^{1+\frac{1}{\bar{\gamma}}}\} [(1+\delta) r_j]^{\frac{1}{\alpha}} (1 + o(1)), \quad j \to \infty.$$

Отсюда, как нетрудно видеть, следует, что

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln \ln \mathcal{M}(r, \varphi)}{\ln r} \leqslant 1 + \frac{1}{\bar{\gamma}}.$$

Устремляя $\bar{\gamma}$ к γ, получаем $\lambda_\varphi \leqslant 1 + \frac{1}{\gamma}$. Теорема I доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть выполнено (4). Тогда для любого $\bar{\gamma} > \gamma$ найдется такое $x_{\bar{\gamma}}$, что при $x \geqslant x_{\bar{\gamma}}$

$$\frac{\ln \ln \frac{1}{W_F(x)}}{\ln x} \leqslant 1 + \bar{\gamma},$$

то есть,

$$W_F(x) \geqslant \exp\{-x^{1+\bar{\gamma}}\}. \tag{I2}$$

Выберем $x(r) = (Ar)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}}$, $0 < A < 1$. Поскольку

$$\mathcal{M}(r, \varphi) = \max[\varphi(-ir; F), \varphi(ir; F)] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{2}[\varphi(-ir; F) + \varphi(ir; F)],$$

нетрудно убедиться, что

$$\mathcal{M}(r, \varphi) \geqslant -\frac{1}{2} \int_{x(r)}^{\infty} e^{rx}\, dW_F(x).$$

Интегрирование по частям дает нам

$$\mathcal{M}(r, \varphi) \geqslant -\frac{1}{2} e^{rx} W_F(x) \Big|_{x(r)}^{\infty} + \frac{r}{2} \int_{x(r)}^{\infty} e^{rx} W_F(x)\, dx,$$

отсюда, используя (I2), получим

$$\mathcal{M}(r, \varphi) \geqslant \frac{1}{2} \exp\{A^{\frac{1}{\bar{\gamma}}} (1 - A) r^{1+\frac{1}{\bar{\gamma}}}\}.$$

Следовательно, как легко видеть,

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,\varphi)}{\ln r} \geqslant 1+\frac{1}{\bar\gamma} .$$

Устремляя $\bar\gamma$ к γ, получаем $\lambda_\varphi \geqslant 1+\frac{1}{\gamma}$. Теорема 2 доказана.

Примеры. I). Рассмотрим вероятностный закон вида

$$F(x)=c\int_{-\infty}^{x} p_{\alpha,\gamma}(x)\,dx, \qquad 0<\alpha<\gamma<\infty,$$

где

$$p_{\alpha,\gamma}(x)=\begin{cases} 0, & x\leqslant 0,\\ \exp\{-x^{1+\gamma}\}, & a_{2j}<x\leqslant a_{2j+1},\\ \exp\{-x^{1+\alpha}\}, & a_{2j+1}<x\leqslant a_{2j+2},\end{cases}$$

а последовательность $\{a_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln a_{2j+1}}{\ln a_{2j}} = B\geqslant 1, \tag{I3}$$

c – нормирующая постоянная. Имеем

$$W_F(x)=c\int_x^\infty p_{\alpha,\gamma}(x)\,dx.$$

Нетрудно проверить, что для любых α', α'', $0<\alpha'<\alpha<\alpha''$, найдутся такие постоянные c_1 и c_2, чтобы выполнялись неравенства

$$W_F(x)\leqslant c_1\exp\{-x^{1+\alpha'}\}, \quad x\to+\infty,$$
$$W_F(a_{2j+1})\geqslant c_2\exp\{-a_{2j+1}^{1+\alpha''}\}, \quad j\to\infty.$$

Из этих оценок следует, что

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{\ln\ln \frac{1}{W_F(x)}}{\ln x} = 1+\alpha,$$

и, значит, порядок роста х.ф. $\varphi(t;F)$ равен $\rho_\varphi = 1+\frac{1}{\alpha}$.

Оценим теперь $W_F(x)$ на системе интервалов $U=\bigcup_{j=0}^{\infty}(a_{2j}, a_{2j+1})$. Пусть $x\in(a_{2j}, a_{2j+1})$. Обозначим $\left(\frac{a_{2j+1}}{1+\delta}\right)^\alpha = r$, $\delta>0$. Рассмотрим

$$e^{rx}W_F(x)=c\int_x^\infty e^{rx}p_{\alpha,\gamma}(u)\,du\leqslant c\int_x^\infty e^{ru}p_{\alpha,\gamma}(u)\,du.$$

Отсюда

$$e^{rx}W_F(x)\leqslant c\int_x^{a_{2j+1}} \exp\{ru-u^{1+\gamma}\}\,du + c\int_{a_{2j+1}}^\infty \exp\{ru-u^{1+\alpha}\}\,du.$$

Поскольку $a_{2j+1}=r^{\frac{1}{\alpha}}(1+\delta)$, получаем

$$e^{rx}W_F(x)\leqslant c\int_x^{a_{2j+1}} \exp\{ru-u^{1+\gamma}\}\,du + o(1), \quad j\to\infty.$$

Если $x\geqslant x_\gamma(r)=\left(\frac{r}{1+\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, то

$$e^{rx}W_F(x)\leqslant c e^{rx-x^{1+\gamma}}\cdot(a_{2j+1}-x)+o(1), \quad j\to\infty,$$

то есть

$$W_F(x)\leqslant c\exp\{-x^{1+\gamma}\}\cdot(a_{2j+1}-x)+o(1), \quad j\to\infty.$$

Если $x < x_\gamma(r)$, то тем самым $x^\gamma < a_{2j+1}^\alpha$ и, следовательно,

$$W_F(x) \leqslant 2c\exp\{-x^{1+\gamma}\}\cdot(a_{2j+1}-x).$$

Таким образом,

$$\varliminf_{\substack{x\in U\\ x\to\infty}} \frac{\ln\ln\frac{1}{W_F(x)}}{\ln x} \geqslant 1+\gamma.$$

Поскольку, как нетрудно убедиться,

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\ln\ln\frac{1}{W_F(x)}}{\ln x} \leqslant 1+\gamma,$$

при $B \geqslant \frac{\gamma}{\alpha}$ из следствия теорем I и 2 вытекает, что нижний порядок х.ф. $\varphi(t;F)$ равен $\lambda_\varphi = 1+\frac{1}{\gamma}$.

Итак, мы построили закон с целой х.ф. порядка $\rho_\varphi = 1+\frac{1}{\alpha}$ и нижнего порядка $\lambda_\varphi = 1+\frac{1}{\gamma}$, где α и γ – произвольные положительные числа, $0<\alpha<\gamma<\infty$.

2. Рассмотрим теперь закон того же вида, что и в примере I, при $B<\frac{\gamma}{\alpha}$. Запишем $B=\frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha<\beta<\gamma$. Для нашего закона, как легко видеть,

$$\mathcal{M}(r,\varphi) = \varphi(-ir;F) = c\int_0^\infty e^{rx} p_{\alpha,\gamma}(x)\,dx.$$

Очевидно, достаточно оценить $\mathcal{M}(r,\varphi)$ на полуинтервале $[a_{2j-1}(1+\alpha)]^\alpha \leqslant r < [a_{2j+1}(1+\alpha)]^\alpha$ для произвольного j. Запишем

$$\mathcal{M}(r,\varphi) \geqslant c\int_{a_{2j-1}}^{a_{2j}} \exp\{rx - x^{1+\alpha}\}\,dx = cI_{2j-1}(r). \tag{I4}$$

Пусть сначала $[a_{2j-1}(1+\alpha)]^\alpha \leqslant r \leqslant [a_{2j}(1+\alpha)]^\alpha$, то есть $a_{2j-1} \leqslant x_\alpha(r) \leqslant a_{2j}$, где $x_\alpha(r) = \left(\frac{r}{1+\alpha}\right.$ -точка максимума функции $\exp\{rx - x^{1+\alpha}\}$. Тогда мы можем записать либо

$$I_{2j-1}(r) \geqslant \int_{x_\alpha(r)}^{x_\alpha(r)+\varepsilon} \exp\{rx - x^{1+\alpha}\}\,dx, \quad \varepsilon>0,$$

либо

$$I_{2j-1}(r) \geqslant \int_{x_\alpha(r)-\varepsilon}^{x_\alpha(r)} \exp\{rx - x^{1+\alpha}\}\,dx.$$

Следовательно,

$$I_{2j-1}(r) \geqslant \exp\{r[x_\alpha(r)\pm\varepsilon] - [x_\alpha(r)\pm\varepsilon]^{1+\alpha}\}\varepsilon.$$

Отсюда

$$I_{2j-1}(r) \geqslant \exp\left\{\frac{\alpha r^{1+\frac{1}{\alpha}}}{(1+\alpha)^{1+\frac{1}{\alpha}}}(1-o(1))\right\}, \quad j\to\infty.$$

Пусть теперь $a_{2j} < x_\alpha(r) < a_{2j+1}$. Из условия (I3) следует, что для любого $\delta>0$ найдется такое j_δ, что при $j \geqslant j_\delta$

$$a_{2j+1} \leqslant a_{2j}^{\frac{\beta}{\alpha}+\delta},$$

то есть

$$a_{2j} \geqslant \left(\frac{r}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta+\delta\alpha}}.$$

Запишем
$$I_{2j-1}(r) \geqslant \int\limits_{a_{2j}-\varepsilon}^{a_{2j}} \exp\left\{rx - x^{1+\alpha}\right\} dx, \quad \varepsilon > 0.$$

Отсюда
$$I_{2j-1}(r) \geqslant \exp\left\{r(a_{2j}-\varepsilon) - (a_{2j}-\varepsilon)^{1+\alpha}\right\}\varepsilon.$$

Нетрудно видеть, что замена a_{2j} на $\left(\frac{r}{1+\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta+\delta\alpha}}$ только усилит неравенство. Поэтому имеем

$$I_{2j-1}(r) \geqslant \exp\left\{\left(\frac{r}{1+\alpha}\right)^{1+\frac{1}{\beta+\delta\alpha}}(1-o(1))\right\}, \quad j \to \infty. \tag{16}$$

Воспользовавшись неравенствами (14), (15) и (16), получим для $M(r,\varphi)$ такую оценку:

$$M(r,\varphi) \geqslant c \exp\left\{\left(\frac{r}{1+\alpha}\right)^{1+\frac{1}{\beta+\delta\alpha}}(1-o(1))\right\}, \quad r \to \infty.$$

Следовательно, как легко видеть,

$$\underline{\lim}_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r,\varphi)}{\ln r} \geqslant 1 + \frac{1}{\beta+\delta\alpha}.$$

Устремляя δ к 0, получим $\lambda_\varphi \geqslant 1 + \frac{1}{\beta}$.

Этот пример показывает, что величина $\frac{\gamma}{\alpha}$ в условии (3) теоремы 1 не может быть заменена меньшей.

3. Рассмотрим вероятностный закон

$$F(x) = c\int\limits_{-\infty}^{x} p(x)\,dx,$$

где
$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \exp\{-x^{1+\gamma}\}, & a_{2j} < x \leqslant a_{2j+1}, \\ \exp\{-x\ln x\}, & a_{2j+1} < x \leqslant a_{2j+2}, \end{cases}$$

а последовательность $\{a_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln a_{2j+1}}{a_{2j}^{\gamma}} = 1.$$

С помощью выкладок, близких к проведенным в доказательствах теорем 1 и 2, проверяется, что х.ф. этого закона имеет порядок роста $\rho_\varphi = \infty$ и нижний порядок $\lambda_\varphi = 1 + \frac{1}{\gamma}$.

4. Рассмотрим закон $F(x)$ с плотностью

$$p(x) = c \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \exp\{-xe^{x}\}, & a_{2j} < x \leqslant a_{2j+1}, \\ \exp\{-x^{1+\alpha}\}, & a_{2j+1} < x \leqslant a_{2j+2}, \end{cases}$$

где последовательность $\{a_n\}_0^\infty$ удовлетворяет условию

$$\lim_{j\to\infty} \frac{\ln a_{2j+1}}{a_{2j}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Можно показать, что х.ф. этого закона имеет порядок роста $\rho_\varphi = 1+\frac{1}{\alpha}$ и нижний порядок $\lambda_\varphi = 1$.

5. Наконец, х.ф. закона с плотностью

$$p(x)=c\begin{cases} 0, & x\leqslant 0,\\ \exp\{-xe^{x}\}, & a_{2j}<x\leqslant a_{2j+1},\\ \exp\{-x\ln x\}, & a_{2j+1}<x\leqslant a_{2j+2},\end{cases}$$

где последовательность $\{a_n\}_0^\infty$ выбрана так, что выполняется

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\ln\ln a_{2j+1}}{a_{2j}}=1,$$

имеет порядок $\rho_\varphi = \infty$ и нижний порядок $\lambda_\varphi = 1$.

III. Для доказательства теоремы 3 нам потребуется следующая

Л е м м а. Для того, чтобы монотонно возрастающая функция удовлетворяла условию

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(cx)}{\alpha(x)}=1,\quad \forall c>0, \tag{17}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала непрерывная монотонно возрастающая к бесконечности функция $\psi(x)$ такая, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha\left(\frac{x}{\psi(x)}\right)}{\alpha(x)}=1. \tag{18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Необходимость. Пусть выполнено условие (17). Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое x_1 , что при $x>x_1$

$$\frac{\alpha\left(\frac{1}{2}x\right)}{\alpha(x)}>1-\varepsilon,$$

найдется такое $x_2>x_1$, что при $x>x_2$

$$\frac{\alpha\left(\frac{1}{4}x\right)}{\alpha(x)}>1-\frac{\varepsilon}{2},$$

и так далее.

Построим функцию

$$\psi_1(x)=2^n,\qquad x_n<x\leqslant x_{n+1},\quad x_0=0.$$

Очевидно

$$\frac{\alpha\left(\frac{x}{\psi_1(x)}\right)}{\alpha(x)}\to 1,\quad x\to\infty.$$

Построим теперь произвольную непрерывную монотонно возрастающую функцию $\psi(x)$ такую, что $\psi(x_{n+1})=2^n$. Легко видеть, что $\frac{1}{2}\leqslant\psi(x)\leqslant\psi_1(x)$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha\left(\frac{x}{\psi(x)}\right)}{\alpha(x)}=1.$$

Достаточность очевидна.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Разобъем доказательство на две части: в части I покажем, что из

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta(r)}\leqslant\gamma \tag{19}$$

следует, что

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\beta\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right]}{\alpha(x)} \geqslant \frac{1}{\gamma}, \tag{20}$$

а в части 2 – что из

$$\underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\beta\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right]}{\alpha(x)} > \frac{1}{\gamma} \tag{21}$$

следует, что

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta(r)} < \gamma. \tag{22}$$

I. Пусть выполнено (I9). Тогда для любого $\bar\gamma > \gamma$ найдется такое $r_{\bar\gamma}$, что при $r \geqslant r_{\bar\gamma}$

$$\frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln M(r,\varphi)\right)}{\beta(r)} \leqslant \bar\gamma.$$

Отсюда

$$M(r,\varphi) \leqslant \exp\left\{r\alpha^{-1}\left[\bar\gamma\beta(r)\right]\right\}.$$

Как известно ([I] , стр. 55),

$$M(r,\varphi) \geqslant \frac{1}{2}e^{rx}W_F(x).$$

Следовательно,

$$W_F(x) \leqslant 2\exp\left\{r\alpha^{-1}\left[\bar\gamma\beta(r)\right] - rx\right\}. \tag{23}$$

Выберем r следующим образом

$$r = \beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar\gamma}\alpha\left(\frac{x}{\psi(x)}\right)\right], \tag{24}$$

где β^{-1} обозначает обратную функцию, а $\psi(x)$ – непрерывная монотонно возрастающая функция такая, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha\left(\frac{x}{\psi(x)}\right)}{\alpha(x)} = 1.$$

Существование $\psi(x)$ следует из леммы. Очевидно, при достаточно больших x $r \geqslant r_{\bar\gamma}$. Подставляя (24) в (23), получаем

$$W_F(x) \leqslant 2\exp\left\{-\left(1-\frac{1}{\psi(x)}\right)x\beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar\gamma}\alpha\left(\frac{x}{\psi(x)}\right)\right]\right\}.$$

Отсюда

$$\frac{\beta\left[\frac{1}{x}\ln\frac{2}{W_F(x)}\right]}{\alpha(x)} \geqslant \frac{\beta\left\{\left(1-\frac{1}{\psi(x)}\right)\beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar\gamma}\alpha\left(\frac{x}{\psi(x)}\right)\right]\right\}}{\alpha(x)}.$$

Используя свойства (I8) и (5) функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, находим

$$\underline{\lim}_{x\to\infty}\frac{\beta\left[\frac{1}{x}\ln\frac{1}{W_F(x)}\right]}{\alpha(x)} \geqslant \frac{1}{\bar\gamma},$$

откуда, устремляя $\bar\gamma$ к γ, получаем (20).

2. Пусть теперь выполнено (21). Тогда для некоторого $\bar{\gamma} < \gamma$ найдется такое $x_{\bar{\gamma}}$, что при $x \geqslant x_{\bar{\gamma}}$

$$\frac{\beta\left[\frac{1}{x} \ln \frac{1}{W_F(x)}\right]}{\alpha(x)} > \frac{1}{\bar{\gamma}} .$$

Отсюда

$$W_F(x) < \exp\left\{-x\beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar{\gamma}}\alpha(x)\right]\right\}. \tag{25}$$

Оценивая $\mathcal{M}(r,\varphi)$ так же, как в теореме I, получаем

$$\mathcal{M}(r,\varphi) \leqslant e^{rx} + r\int_x^\infty e^{ru} W_F(u)\, du.$$

Положим

$$x = x(r) = \alpha^{-1}\left\{\bar{\gamma}\beta\left[r\left(1+\frac{1}{\ln r}\right)\right]\right\}. \tag{26}$$

Легко видеть, что при $r \geqslant \beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar{\gamma}}\alpha(x_{\bar{\gamma}})\right]$ имеет место (25), следовательно

$$\mathcal{M}(r,\varphi) \leqslant e^{rx(r)} + r\int_{x(r)}^\infty \exp\left\{ru - u\beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar{\gamma}}\alpha(u)\right]\right\} du.$$

Очевидно

$$I(r) = r\int_{x(r)}^\infty \exp\left\{ru - u\beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar{\gamma}}\alpha(u)\right]\right\} du \leqslant$$

$$\leqslant r\int_{x(r)}^\infty \exp\left\{ru - u\beta^{-1}\left[\frac{1}{\bar{\gamma}}\alpha(x(r))\right]\right\} du.$$

Используя (26), получаем

$$I(r) \leqslant r\int_{x(r)}^\infty \exp\left\{ru - r\left(1+\frac{1}{\ln r}\right)u\right\} du =$$

$$= r\int_{x(r)}^\infty \exp\left\{-\frac{r}{\ln r}u\right\} du < \ln r.$$

Таким образом,

$$\mathcal{M}(r,\varphi) \leqslant e^{rx(r)} + \ln r \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{2r\alpha^{-1}\left[\bar{\gamma}\beta\left(r\left(1+\frac{1}{\ln r}\right)\right)\right]\right\}$$

при всех достаточно больших r. Из последнего неравенства следует оценка

$$\frac{\alpha\left(\frac{1}{2r}\ln \mathcal{M}(r,\varphi)\right)}{\beta\left[r\left(1+\frac{1}{\ln r}\right)\right]} \leqslant \bar{\gamma}.$$

Используя свойства (17) и (5) функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, получаем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\alpha\left(\frac{1}{r}\ln \mathcal{M}(r,\varphi)\right)}{\beta(r)} \leqslant \bar{\gamma}.$$

Поскольку $\bar{\gamma} < \gamma$, отсюда следует, что (22) выполнено. Тем самым теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность И.В. Островскому и А.Е. Фрынтову за полезные обсуждения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Ю.В. Линник, И.В. Островский. Разложении случайных величин и векторов. Изд-во "Наука". Главная редакция физико-математической литературы, М., I972.

2. B.Ramachandran. On the order and the tipe of entire characteristic functions. The Annales of Mathematical Statistics, 33, №4, I238-I255, I962.

3. G.Pólya. Remarks on characteristic functions. Proceedings of the Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, II5-I23, I949.

4. М.Н. Шеремета. О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения. Известия вузов, № 2, I00-I08, I967.

5. Н.И. Яковлева. О росте целых характеристических функций вероятностных законов. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, I5, 43-49, I97I.

ON THE GROWTH OF ENTIRE CHARACTERISTIC FUNCTIONS

N. I. Yakovleva

The paper considers the connection between the growth of an entire characteristic function and the behaviour of the corresponding probability law. When the law satisfies some additional conditions the formulas for the lower order are obtained. It is shown that for every λ and ρ such that $1 \leq \lambda \leq \rho \leq \infty$ an entire characteristic function of the order ρ and the lower order λ can be constructed.

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА, ЕЕ СВОЙСТВА И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В.Я. Голодец

В этой статье исследуются спектральные свойства модулярных операторов алгебр фон Неймана в связи с асимптотической абелевостью в этих алгебрах. Для неймановской алгебры M с точным нормальным (т.н.) состоянием ρ каноническим способом строится вспомогательная неймановская алгебра C_M^U, где U - ультрафильтр на множестве $\mathbb{N}$, элементами которой являются ограниченные по норме последовательности операторов из M, асимптотически коммутирующие в некоторой топологии с каждым элементом m из M. Состояние ρ на M определяет т.н. состояние $\bar\rho$ на C_M^U. Более того, группа модулярных автоморфизмов (ГМА) σ_t^ρ $(t\in\mathbb{R})$ алгебры M, отвечающая состоянию ρ, определяет ГМА $\bar\sigma_t^{\bar\rho}$ $(t\in\mathbb{R})$ алгебры C_M^U. Алгебра C_M^U была впервые введена в нашей работе[1] для изучения множества асимптотических отношений фактора M [2] с помощью модулярных операторов и их спектральных свойств. Поскольку алгебра C_M^U сконцентрировала в себе, как это будет видно, асимптотические свойства алгебры M, то C_M^U естественно назвать асимптотической алгеброй для M.

В настоящей статье изучаются свойства алгебры C_M^U и рассматриваются их применения. В р.I мы покажем, что C_M^U - алгебраический инвариант M, а т.н. состояние $\bar\rho$ на C_M^U, которое строится по т.н. состоянию ρ на M, не зависит от выбора ρ на M. Так как $\bar\rho$ - т.н. состояние на C_M^U, то $\bar\rho$ отвечает модулярный оператор (МО) $\bar\Delta_{\bar\rho}$, который согласно[1] индуцируется МО Δ_ρ фактора M. Мы докажем (см. п. I.5), что положительные точки спектра $\bar\Delta_{\bar\rho}$ составляют группу по умножению, причем $Sp\,\bar\Delta_\rho \subseteq \bigcap_\mu Sp\,\Delta_\mu$, где μ пробегает все т.н. состояния на M, а Δ_μ - МО, отвечающий μ. Отсюда, в частности, следует, что алгебры типа I_∞, II_∞ не могут входить в разложение C_M^U в качестве прямых слагаемых. А поскольку C_M^U не содержит абелевых проекторов, если она не коммутативна, то конечные алгебры типа I также не входят в разложение C_M^U. Наконец, соображения, приведенные в п. I.4 и п. I.5 показывают, что C_M^U не может быть прямой суммой алгебр различных типов, если M - фактор. Поэтому для C_M^U, в предположении, что M - фактор, остаются следующие возможности: после комплексных чисел $\mathbb{C}$, коммутативная алгебра без минимальных проекторов, алгебры типа II_1 и типа III, причем из конструкции легко следует, что случай алгебры типа III_0 также исключен.

Отметим следующее важное свойство оператора $\bar\Delta_{\bar\rho}$. Если число λ $(\lambda\neq 0,1)$ есть собственное значение $\bar\Delta_{\bar\rho}$, то λ принадлежит множеству асимптотических отношений $A(M)$ фактора M. Число $1\in A(M)$ тогда и только тогда, когда алгебра $(C_M^U)_\rho$, фиксированная относительно $\bar\sigma_t^{\bar\rho}$ $(t\in\mathbb{R})$, некоммутативна т.е. имеет тип II_1. Это свойство позволяет указать простой способ вычисления $A(M)$ для фактора M (см. теор. II.I.2), который оказывается полезным (см. теор. II.I.3 и II.3.I).

В р. II рассматриваются некоторые применения развитой в р. I теории. Пусть A - C^*-алгебра, G - группа автоморфизмов A, относительно которой A является асимптотически абелевой, а ρ - G - инвариантное КМШ[1] - состояние на A. (В модельных задачах из статистической физики ρ - предельное состояние Гиббса). Если π_ρ - представление A, построенное по ρ согласно конструкции Гельфанда-Наймарка-Сигала (ГНС), то неймановская алгебра $M=\pi_\rho(A)''$ $*$ - изоморфна $\bar\sigma_t^{\bar\rho}$ - инвариантной подалгебре C_M^U. Но тогда согласно р. I $Sp\,\Delta_\rho = Sp\,\bar\Delta_{\bar\rho}$ и точки $Sp\,\Delta_\rho$ составляют группу по умножению (см. теор. II.2.I). (Любопытно отметить, что

---

1) КМШ - Кубо, Мартин, Швингер

если ρ интерпретировать как предельное состояние Гиббса на $\mathfrak{A}$, то $\ln \Delta_\rho$ – перенормированный гамильтониан бесконечной системы). Далее, поскольку $M = \pi_\rho(A)''$ в этой ситуации $*$-изоморфна подалгебре C_M^U для произвольного ультрафильтра U на $\mathbb{N}$, то M оказывается асимптотически абелевой относительно G (см. теор. II.2.6). Этот факт может представить интерес для теории решетчатых квантовых моделей. Он также позволяет доказать существование асимптотически абелевых алгебр типа III. Подобный вопрос был поднят в [3] и до сих пор, насколько нам известно, оставался открытым. В частности, отсюда следует, что факторы Пауэрса являются асимптотически абелевыми (см. следствие II.2.8).

Итак, в рассмотренной ситуации $C_M^U \neq \mathbb{C}$. Следует ли отсюда, что $A(M) \neq \emptyset$ (или 0)? Оказывается, что если ρ допускает сколь угодно точную аппроксимацию по норме почти-периодическими состояниями на M, то ответ на этот вопрос положительный (см. теор. II.3.I). В II.5 мы использовали эту теорему для изучения $A(M)$ в случае, когда M строится как бесконечное тензорное произведение факторов типа III_λ $(0 \le \lambda < 1)$, факторов, построенных по динамическим системам. В II.4 сформулированы основные нерешенные вопросы рассматриваемой теории.

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ И ЕЕ СВОЙСТВА

I. I. Пусть M – неймановская алгебра (фактор) в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Вектор ξ называется циклическим отделяющим вектором для M, если $[M\xi] = [M'\xi] = H$, где $[M\xi]$ – замыкание линейного многообразия $M\xi$ по норме H, а M' – коммутант M в H. Если ξ – циклический отделяющий вектор, то $\rho(x) = (x\xi, \xi)$ – т.н. состояние на M. Известно, что всякий фактор (алгебра) типа III в сепарабельном гильбертовом пространстве обладает таким вектором.

На линейном многообразии $M\xi$ рассмотрим оператор инволюции $S: Sx\xi = x^*\xi$, а на $M'\xi$ – оператор $F: Fx'\xi = x'^*\xi$ $(x' \in M')$. В [4] доказано, что $\Delta_\rho = FS$ является самосопряженным положительно определенным обратимым оператором, действующим в H, причем имеют место полярные разложения

$$S = j_\rho \Delta_\rho^{\frac{1}{2}} = \Delta_\rho^{-\frac{1}{2}} j_\rho, \quad F = j_\rho \Delta_\rho^{-\frac{1}{2}} = \Delta_\rho^{\frac{1}{2}} j_\rho, \tag{I.I.I}$$

где j_ρ – антиунитарный оператор в H со свойствами: $j_\rho^2 = I$, $j_\rho M j_\rho = M'$, $j_\rho \Delta_\rho j_\rho = \Delta_\rho^{-1}$. Очевидно, $\Delta_\rho \xi = \xi$, $j_\rho \xi = \xi$. Оператор Δ_ρ называется модулярным оператором (МО), он определяет сильно непрерывную однопараметрическую группу σ_t^ρ $(t \in \mathbb{R})$ автоморфизмов M [4]

$$\sigma_t^\rho(x) = \Delta_\rho^{it} x \Delta_\rho^{-it} \qquad (x \in M), \tag{I.I.2}$$

называемую группой модулярных автоморфизмов (ГМА) фактора (алгебры) M. Оказывается, что σ_t^ρ $(t \in \mathbb{R})$ является единственной группой автоморфизмов M относительно которой т.н. состояние ρ удовлетворяет условию Кубо-Мартина-Швингера (КМШ) [4]:

(i) ρ инвариантно относительно σ_t^ρ $(t \in \mathbb{R})$;

(ii) для любых $x, y \in M$ существует функция $F(z)$, голоморфная в полосе $0 < \mathrm{Im}\, z < 1$ и непрерывная на границе с граничными условиями:

$$F(t) = \rho(\sigma_t(x) y) \quad \text{и} \quad F(t+i) = \rho(y \sigma_t(x)). \tag{I.I.3}$$

I.2. Напомним некоторые результаты работы [I], которые будут в дальнейшем использованы. Пусть M – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с циклическим отделяющим вектором ξ. Через $\overline{M}$ обозначим C^* – алгебру, элементами которой служат всевозможные ограниченные по норме последовательности $\bar{x} = (x_n)$, где $x_n \in M$, а через $\overline{M}_d$ – C^* – подалгебру $\overline{M}$, содержащую все последовательности вида $\bar{x} = (x_k)$, где $x_1 = x_2 = \ldots$. Аналогично определим C^* – алгебры $\overline{M}'$ и $\overline{M}'_d$.

Зададим теперь позитивный ограниченный функционал $\bar{\rho}$ на $\overline{M}$. Пусть ℓ^∞-пространство ограниченных числовых последовательностей, тогда если $\bar{x} = (x_n)$, то $(\rho(x_n)) \in \ell^{\infty}$, где $\rho(x_n) = (x_n \xi, \xi)$. Положим

$$\bar{\rho}(\bar{x}) = \lim_{n \in U} \rho(x_n), \tag{I.2.I}$$

где U -свободный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ (см. [5], стр. 42), причем предел по ультрафильтру U понимается следующим образом. Для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует подмножество $U_\varepsilon \in U$ такое, что для всех $n \in U_\varepsilon$ выполнено неравенство $|\bar{\rho}(\bar{x}) - \rho(x_n)| < \varepsilon$. Из определения ультрафильтра легко следует, что предел в (I.2.I) существует и является единственным. Понятно, что $\bar{\rho}$ -позитивный функционал на $\bar{M}$, $|\bar{\rho}(\bar{x})| \leq \|\bar{x}\|$, где $\|\bar{x}\| = \sup_n \|x_n\|$. Поэтому согласно конструкции Гельфанда, Наймарка, Сигала (ГНС) с помощью $\bar{\rho}$ можно построить представление Π_ρ алгебры $\bar{M}$ в гильбертовом пространстве $\bar{H}$. Тогда $\bar{\rho}(\bar{x}) = \langle \Pi_\rho(\bar{x})\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ -скалярное произведение в $\bar{H}$, а $\bar{\xi}$ - единичный вектор, циклический для $\Pi_\rho(\bar{M})$, т.е. $\bar{H} = [\Pi_\rho(\bar{M})\bar{\xi}]$.

При исследовании Π оказывается полезной следующая очевидная

Лемма I.2.I. Пусть D - C^*- подалгебра $\bar{M}$, содержащая счетное плотное в D множество. Тогда

$$\bar{\rho}(\bar{x}) = \lim_{k \to \infty} \rho(x_{i_k}) \qquad (\bar{x} = (x_i) \in D) \tag{I.2.2}$$

для некоторой фиксированной последовательности индексов (i_k) и всех $\bar{x} = (x_i) \in D$.

С помощью теоремы Капланского о плотности, используя свойства ультрафильтра, можно доказать следующий результат

Лемма I.2.2. Пусть $A^{\#} \in \Pi_\rho(\bar{M})''$, где символ $\#$ здесь и в дальнейшем означает наличие или отсутствие знака сопряжения $*$. Тогда существует последовательность $\bar{z} = (z_n) \in \bar{M}$ такая, что $A^{\#}\bar{\xi} = \Pi_\rho(\bar{z}^{\#})\bar{\xi}$.

Обозначим теперь через E_ρ - проектор на $[\Pi_\rho(\bar{M})'\bar{\xi}]$ и рассмотрим неймановскую алгебру $R = (\Pi_\rho(\bar{M})'')_{E_\rho}$ в пространстве $\tilde{H} = E_\rho \bar{H}$, порожденную операторами $E_\rho A E_\rho$, где $A \in \Pi_\rho(\bar{M})''$. Из леммы I.2.2 легко вытекает следующая лемма.

Лемма I.2.3. Пусть $\bar{N}$ -множество элементов $\bar{x} \in \bar{M}$, для которых $\Pi_\rho(\bar{x}^{\#})E_\rho \in R$. Тогда $\bar{N}$ - C^* - подалгебра $\bar{M}$ и $\Pi_\rho(\bar{N})E_\rho = R$. Кроме того,

$$I = \{\bar{x} = (x_n) \in \bar{N} : \lim_{n \in U} \rho(x_n^* x_n) = 0\}$$

-двусторонний идеал в $\bar{N}$ и $\bar{N}/I = \Pi(\bar{N})E_\rho = R$ [2].

Так как $[R\bar{\xi}] = [R'\bar{\xi}] = \tilde{H}$ [3], то по $\bar{\xi}$ для R можно определить МО $\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$ и ГМА $\bar{\sigma}_t^{\bar{\rho}}$ $(t \in \mathbb{R})$:

$$\bar{\sigma}_t^{\bar{\rho}}(\Pi_\rho(\bar{x})E_\rho) = \bar{\Delta}_\rho^{it}\, \Pi_\rho(\bar{x})E_\rho \bar{\Delta}_\rho^{-it} \qquad (x \in \bar{N}).$$

Лемма I.2.4. ГМА $\bar{\sigma}_t^{\bar{\rho}}$ $(t \in \mathbb{R})$ алгебры $\bar{N}/I = R$ индуцируется σ_t^ρ $(t \in \mathbb{R})$, ГМА фактора M, причем

$$\bar{\sigma}_t^{\bar{\rho}}(\Pi_\rho(\bar{x})E_\rho) = \Pi_\rho(\sigma_t(\bar{x}))E_\rho, \tag{I.2.3}$$

где $\bar{x} = (x_n)$, а $\sigma_t(\bar{x}) = (\sigma_t^\rho(\bar{x}))$.

Докажем включение $\bar{M}_d \subseteq \bar{N}$. Заметим, что элементу $\bar{b}' = (b'_n)$ из $\bar{M}'_+$ можно поставить в соответствие ограниченный позитивный функционал $\bar{\rho}_{\bar{b}'}(\bar{x}) = \bar{\rho}(\bar{b}'\bar{x}) = \lim_{n \in U} \rho(b'_n x_n)$ на $\bar{M}$. Так как $|\bar{\rho}_{\bar{b}'}(\bar{x}^*\bar{x})| \leq \|\bar{b}'\| \bar{\rho}(\bar{x}^*\bar{x})$, где $\|\bar{b}'\| = \sup_n \|b'_n\|$, то $\bar{\rho}_{\bar{b}'}$ подчинен $\bar{\rho}$. Тогда согласно [6] всякому $\bar{b}' \in \bar{M}'$ отвечает ограниченный оператор $\Pi_\rho(\bar{b}')$ из $\Pi_\rho(\bar{M})'$. Поскольку $[M\xi] = [M'\xi] = H$, то из построения $\bar{\rho}$ и Π_ρ следует,

---

2) Можно показать, что если M' - фактор, то $\Pi_\rho(\bar{M})''$ и R - также факторы.

3) $E_\rho \bar{\xi} = \bar{\xi}$, так как $\bar{\xi} \in [\Pi_\rho(\bar{M})'\bar{\xi}]$.

что $[\Pi_\rho(\bar{M}_d)\bar{\xi}]=[\Pi_\rho(\bar{M}'_d)\bar{\xi}]$. Обозначим через F -проектор на $[\Pi(\bar{M}_d)\bar{\xi}]$ в $\tilde{H}$. Поскольку $\bar{M}'_d\subset\bar{M}'$, то $F<E_\rho$ и F коммутирует с $\Pi_\rho(\bar{x})$, где $\bar{x}\in\bar{M}_d$ или $\bar{x}\in\bar{M}'_d$. Следовательно, если $\bar{x}\in M_d$, то $E_\rho\Pi_\rho(\bar{x}^{*})\bar{\xi}=E_\rho\Pi_\rho(\bar{x}^{*})F\bar{\xi}=E_\rho F\Pi_\rho(\bar{x}^{*})\bar{\xi}=F\Pi_\rho(\bar{x}^{*})\bar{\xi}=\Pi_\rho(\bar{x}^{*})\bar{\xi}$, т.е. $E_\rho\Pi_\rho(\bar{x}^{*})E_\rho=\Pi_\rho(\bar{x}^{*})E_\rho$, а значит $\bar{M}_d\subset\bar{N}$.

Понятно, что $\Pi_\rho(\bar{M}_d)$ $*$-изоморфно M, а в силу леммы I.2.3 $\sigma_t^{\bar{\rho}}(t\in\mathbb{R})$ действует на $\Pi_\rho(\bar{M}_d)$ так же, как $\sigma_t^{\rho}(t\in\mathbb{R})$ на M. Поэтому $\Pi_\rho(\bar{M}_d)$ – $\sigma_t^{\bar{\rho}}$ - инвариантна, где $t\in\mathbb{R}$. Но тогда алгебра $C^U_{M,\rho}=R\cap\Pi_\rho(\bar{M}_d)'$ также инвариантна относительно $\sigma_t^{\bar{\rho}}$ $(t\in\mathbb{R})$. Более того, поскольку состояние $\bar{\rho}$, суженое на $C^U_{M,\bar{\rho}}$, удовлетворяет относительно $\sigma_t^{\bar{\rho}}$ $(t\in\mathbb{R})$ условию КМШ, то $\sigma_t^{\bar{\rho}}$ $(t\in\mathbb{R})$ -ГМА для $C^U_{M,\rho}$. Алгебру $C^U_{M,\rho}$ естественно назвать асимптотической алгеброй для M.

I.3. Докажем, что алгебра $C^U_{M,\rho}$ является алгебраическим инвариантом M.

Т е о р е м а I.3.I. Пусть M – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ρ и μ - т.н. состояния на M. Тогда $C^U_{M,\rho}\sim C^U_{M,\mu}$. Далее, если $\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}$, то $\Pi_\rho(\bar{x})E_\rho\in C^U_{M,\rho}$ тогда и только тогда, когда $\Pi_\mu(\bar{x})E_\mu\in C^U_{M,\mu}$ и, более того, $\bar{\rho}(\bar{x})=\bar{\mu}(\bar{x})$. Таким образом, C^U_M и $\bar{\rho}/C^U_M$ не зависят от выбора т.н. состояния ρ на M и являются инвариантами фактора M.

Доказательство теоремы представим в виде доказательств нескольких лемм.

Л е м м а I.3.2. Если выполнены предположения теоремы, то $C^U_{M,\rho}\sim C^U_{M,\mu}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\rho(x)=(x\xi,\xi)$ и $\mu(x)=(x\eta,\eta)$, где $x\in M$, а ξ и η - циклические отделяющие векторы для M в H. Поскольку $[M\xi]=H$, то существуют операторы $k^s\in M$ такие, что

$$\|\eta-k^s\xi\|<\frac{1}{2^s}\ ,\qquad \|k^s\xi\|=1, \tag{I.3.I}$$

а поскольку $[M\eta]=H$, то и операторы ℓ^s из M такие, что

$$\|\xi-\ell^s\eta\|<\frac{1}{2^s}\ ,\quad \|\ell^s\eta\|=1. \tag{I.3.2}$$

Пусть Π_ρ и Π_μ – представления C^* - алгебры $\bar{M}$, построенные с помощью $\bar{\rho}$ и $\bar{\mu}$ соответственно, а $\bar{H}_\rho$ и $\bar{H}_\mu$ – пространства представлении. В силу (I.3.I) векторы $\Pi_\rho(\bar{k}^s)\bar{\xi}$ (S = I,2,...), где $\bar{k}^s=(k^s,k^s,\dots)$, образуют фундаментальное множество векторов в $\bar{H}_\rho$ и сходятся к некоторому вектору $\bar{\eta}\in[\Pi_\rho(\bar{M}_d)\bar{\xi}]\subset\bar{H}_\rho$, причем

$$\begin{aligned}\langle\!\langle\bar{\eta}-\Pi_\rho(\bar{k}^s)\bar{\xi}\rangle\!\rangle_{\bar{\rho}}&=\lim_{n\to\infty}\langle\!\langle(\Pi_\rho(\bar{k}^n)-\Pi_\rho(\bar{k}^s))\bar{\xi}\rangle\!\rangle_{\bar{\rho}}=\\&=\lim_{n\to\infty}\lim_{U}\|(k^n-k^s)\xi\|=\lim_{n\to\infty}\|(k^n-k^s)\xi\|=\|\eta-k^s\xi\|<\frac{1}{2^s}\ .\end{aligned} \tag{I.3.3}$$

Из аналогичных соображений, учитывая (I.3.2) и (I.3.I), получим следующее неравенство

$$\langle\!\langle\bar{\xi}-\Pi_\rho(\ell^s)\bar{\eta}\rangle\!\rangle_{\bar{\rho}}\leqslant\frac{1}{2^s}\ . \tag{I.3.4}$$

Докажем теперь, что $[\Pi_\rho(\bar{M})\bar{\eta}]=\bar{H}_\rho$. Из (I.3.4) следует включение $\bar{\xi}\in[\Pi_\rho(\bar{M}_d)\bar{\eta}]\subset[\Pi_\rho(\bar{M})\bar{\eta}]$. Поскольку $\bar{\xi}$ -циклический вектор для $\Pi_\rho(\bar{M})$, а $[\Pi_\rho(\bar{M})\bar{\eta}]$ инвариантно относительно операторов $\Pi_\rho(\bar{x})$, где $\bar{x}\in\bar{M}$, то $[\Pi_\rho(\bar{M})\bar{\eta}]=\bar{H}_\rho$. Проводя аналогичные рассуждения и принимая во внимание соотношения $[M'\xi]=[M'\eta]=H$, можно доказать, что $[\Pi_\rho(\bar{M})'\bar{\eta}]=[\Pi_\rho(\bar{M})'\bar{\xi}]=E_\rho\bar{H}_\rho=\tilde{H}_\rho$. Далее, из (I.3.3) находим, что если $\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}$, то

$$|\langle\Pi_\rho(\bar{x})\bar{\eta},\bar{\eta}\rangle_\rho-\langle\Pi_\rho(\bar{x})\Pi_\rho(\bar{k}^s)\bar{\xi},\ \Pi_\rho(\bar{k}^s)\bar{\xi}\rangle_\rho|<\frac{\|\bar{x}\|}{2^{s-1}} \tag{I.3.5}$$
$$(\|\bar{x}\|=\sup_n\|x_n\|).$$

С другой стороны, поскольку

$$|(x_n\eta,\eta)-(x_nk^s\xi\ ,\ k^s\xi)|\leqslant\frac{\|\bar{x}\|}{2^{s-1}}\ ,$$

то

$$\left|\lim_{n\in U}(x_n\eta,\eta)-\lim_{n\in U}(x_n k^s\xi,k^s\xi)\right|<\frac{\|\bar{x}\|}{2^{s-1}}\ . \tag{I.3.6}$$

Но $\lim\limits_{n\in U}(x_n k^s\xi\ ,k^s\xi)=\langle\Pi_\rho(\bar{x})\Pi_\rho(\bar{k}^s)\bar{\xi},\Pi_\rho(\bar{k}^s)\bar{\xi}\rangle_\rho$, поэтому из (I.3.6) и (I.3.5) выводим равенство

$$\bar{\mu}(\bar{x})=\lim_{n\in U}(x_n\eta,\eta)=\langle\Pi_\rho(\bar{x})\bar{\eta},\bar{\eta}\rangle_\rho\quad(\bar{x}=(x_n)\in\bar{M}),$$

справедливое для любых $x=(x_n)\in\bar{M}$. Следовательно, можно построить представление Π_μ алгебры $\bar{M}$ в пространстве $\bar{H}_\rho$ согласно конструкции ГНС с циклическим вектором $\bar{\eta}\in\bar{H}_\rho$, положив $\Pi_\mu(\bar{x})=\Pi_\rho(\bar{x})$ для $\bar{x}\in\bar{M}$. Учитывая теперь соотношение $[\Pi_\rho(\bar{M})'\bar{\xi}]=$ $=[\Pi_\rho(\bar{M})'\bar{\eta}]=E_\rho\bar{H}_\rho=\bar{H}_\rho$ из определения асимптотической алгебры, получим, что $C^U_{M,\mu}=$ $=C^U_{M,\rho}=(\Pi_\rho(\bar{M})'')_{E_\rho}\cap\Pi_\rho(\bar{M}_d)'$. Лемма доказана.

Л е м м а I.3.3. Пусть (a_n) - ограниченная по норме последовательность операторов из M такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\|[a_n,b]\xi\|=0 \tag{I.3.7}$$

для b из счетного сильно плотного подмножества S в M , причем, если $b\in S$, то и $b^*\in S$. Тогда для всякого $x\in M$

$$\lim_{n\to\infty}|(a_n x\xi,\xi)-(a_n\xi,\xi)(x\xi,\xi)|=0. \tag{I.3.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, тогда для некоторого числа $\varepsilon>0$ и некоторого x из M существует последовательность индексов n_k такая, что

$$|(a_{n_k}x\xi,\xi)-(a_{n_k}\xi,\xi)(x\xi,\xi)|\geqslant\varepsilon. \tag{I.3.9}$$

Но $\sup\limits_k\|a_{n_k}\|\leqslant\sup\limits_n\|a_n\|<\infty$, поэтому (a_{n_k}) содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому оператору z из M . Чтобы не усложнять обозначений, будем предполагать, что $z=W-\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}$. Из (I.3.7) тогда следует, что $[z,b]=0$ для всякого $b\in S$, но S сильно плотно в M , поэтому $[z,b]=0$ для всякого $b\in M$. Так как M -фактор, то $z=\lambda I$, где λ -число, а I-единица в M . Но это противоречит (I.3.9), следовательно, (I.3.8) имеет место. Лемма доказана.

Л е м м а I.3.4. Пусть выполнены предположения теоремы I.3.I. Если $\bar{a}=(a_n)\in\bar{M}$, то $\Pi_\rho(\bar{a})E_\rho\in C^U_{M,\rho}$ тогда и только тогда, когда $\Pi_\mu(\bar{a})E_\mu\in C^U_{M,\mu}$, более того $\bar{\rho}(\bar{a})=\bar{\mu}(\bar{a})$, т.е. $\bar{\rho}/C^U_{M,\rho}=\bar{\mu}/C^U_{M,\mu}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно доказательству леммы I.3.3 можно предполагать, что $C^U_{M,\rho}=C^U_{M,\mu}=C^U_M$. Выделим далее в M счетное сильно плотное подмножество S_0 , причем включим в S_0 операторы k^s $(s=1,2,\ldots)$, удовлетворяющие (I.3.I) и рассмотрим C^*-подалгебру D алгебры $\bar{M}$, порожденную последовательностями $\bar{a}^\#$, $\bar{I}$, $\bar{b}^\#$, где $\bar{b}^\#=(b^\#,b^\#,\ldots)$, $b\in S^0$. Ясно, что D обладает счетным подмножеством S_1 , плотным в D относительно нормы. Пусть T - счетное подмножество элементов ℓ^∞ вида $(\rho(x_n))$ и $(\mu(x_n))$, где $\bar{x}=(x_n)\in S_1$. Тогда существует счетная последовательность индексов (i_t) , для которой

$$\bar{\rho}(\bar{x})=\lim_{n\in U}\rho(x_n)=\lim_{t\to\infty}\rho(x_{i_t}), \tag{I.3.10}$$

$$\bar{\mu}(\bar{x})=\lim_{n\in U}\mu(x_n)=\lim_{t\to\infty}\mu(x_{i_t}) \tag{I.3.11}$$

для всех $\bar{x}\in S_1$, а следовательно и для всех $\bar{x}\in D$, поскольку линейные непрерывные функционалы $\bar{\rho}(\bar{x})$ и $\bar{\mu}(\bar{x})$ на D являются тогда слабыми пределами функционалов $\tau^\rho_{i_t}(\bar{x})=\rho(x_{i_t})$ и $\tau^\mu_{i_t}(\bar{x})=\mu(x_{i_t})$ на D . Из (I.3.I) легко следует, что

$$|(a_{i_t}\eta,\eta)-(a_{i_t}k^s\xi,k^s\xi)|<\frac{C}{2^{s-1}}\qquad (C=\sup_n\|a_n\|).\tag{I.3.I2}$$

Поскольку $\Pi(\bar a)E\in C_M^U$, а $\bar k^s\in\bar M_d$, то $\Pi([\bar a,\bar k^s])E=[\Pi(\bar a),\Pi(\bar k^s)]E=0$, а так как $\bar a,\bar k^s\in D$, то согласно (I.3.I0) для достаточно больших t

$$|(a_{i_t}k^s\xi,k^s\xi)-(a_{i_t}(k^s)^2\xi,\xi)|<\frac{C}{2^{s-1}}.\tag{I.3.I3}$$

Далее, ввиду того, что $\Pi(\bar a)E\in C_M^U$, то $\Pi([\bar a,\bar b])E=0$ для всякого $\bar b\in\bar M_d$ и, в частности, для $b\in S_0$. Следовательно, согласно (I.3.I0) для $b\in S_0$ ($\bar b\in D$)

$$\lim_{t\to\infty}\|[a_{i_t},b]\xi\|^2=\lim_{t\to\infty}([a_{i_t},b]^*[a_{i_t},b]\xi,\xi)=\langle\!\langle[\Pi(\bar a),\Pi(\bar b)]\xi\rangle\!\rangle_\rho^2=0.$$

Таким образом, последовательность (a_{i_t}) удовлетворяет условиям леммы I.3.3 и поэтому для достаточно больших t имеет место оценка

$$|(a_{i_t}(k^s)^2\xi,\xi)-(a_{i_t}\xi,\xi)|<\frac{C}{2^{s-1}},\tag{I.3.I4}$$

поскольку $\|k^s\xi\|=1$ (см. I.3.I). Из оценок (I.3.I2)-(I.3.I4) вытекает, что $\lim\limits_{t\to\infty}\mu(a_{i_t})=\lim\limits_{t\to\infty}\rho(a_{i_t})$. Или в силу (I.3.I0) и (I.3.II), поскольку $\bar a\in D$, то $\bar\mu(\bar a)=\bar\rho(\bar a)$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы I.3.I закончено.

I.4. Продолжим исследовать свойства алгебры C_M^U.

Т е о р е м а I.4.I. (i) Если алгебра C_M^U -некоммутативна, то C_M^U не содержит абелевых проекторов. (ii) Пусть $(C_M^U)_\rho$ -подалгебра C_M^U, содержащая все операторы A из C_M^U, для которых $\sigma_t^{\bar\rho}(A)=A$ $(t\in\mathbb{R})$ (см. лемму I.2.4). Если $(C_M^U)_\rho$ -некоммутативна, то $(C_M^U)_\rho$ не содержит абелевых проекторов. (iii) Если C_M^U -коммутативна и нетривиальна, то C_M^U не содержит минимальных проекторов. Аналогичное утверждение справедливо и для $(C_M^U)_\rho$.

Прежде, чем перейти к доказательству теоремы, приведем следующее

З а м е ч а н и е I.4.2. Вектор-функция $f(\alpha)$ со значениями в гильбертовом пространстве H, где α изменяется в некоторой области комплексной плоскости, называется аналитической, если аналитической является функция $(f(\alpha),g)$ для любого $g\in H$. Пусть M - фактор(алгебра) в пространстве H, ξ - циклический отделяющий вектор для M в H, σ_t $(t\in\mathbb{R})$ -ГМА фактора M, построенная по ξ. Тогда в M существует $*$- подалгебра M_0 "аналитических элементов" из M, сильно плотная в M, причем, если $x\in M_0$, то вектор-функция $t\to\sigma_t(x)\xi$ $(t\in\mathbb{R})$ имеет единственное продолжение до аналитической функции $\alpha\to\sigma_\alpha(x)\xi$ из $\mathbb{C}$ (комплексной плоскости) в $M\xi$ [4].

Заметим, что если $a^\#\in M_0\subset M$, то в M' существует аналитический элемент $\pi'_\xi(a)$ такой, что $a\xi=\pi'_\xi(a)\xi$. Действительно, поскольку $a\in M_0$, то $\sigma_{-i/2}(a^*)\in M_0\subset M$. Поэтому $j\sigma_{-i/2}(a^*)j\in M'$. Следовательно, $a\xi=Sa^*\xi=j\sigma_{-i/2}(a^*)j\xi=\pi'_\xi(a)\xi$, где $\pi'_\xi(a)=j\sigma_{-i/2}(a^*)j$. Ясно, что $\pi'_\xi(a^*)=j\sigma_{-i/2}(a)j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы I.4.I. Ограничимся доказательством (i), остальные утверждения доказываются аналогично. Пусть P - произвольный проектор из C_M^U. Тогда $P=\Pi(\bar p)E$, где $\bar p=(p_n)\in\bar N$, p_n - проекторы, причем можно предполагать, что $\rho(p_n)=\bar\rho(P)=\lambda$ (см. [I]). Так как C_M^U - некоммутативна, то существуют аналитические операторы $A,B\in(C_M^U)_0$ (см. замеч. I.4.2) такие, что

$$\langle\!\langle[A,B]\xi\rangle\!\rangle>\alpha>0,\tag{I.4.I}$$

где $\langle\!\langle A\xi\rangle\!\rangle=\langle\!\langle B\xi\rangle\!\rangle=1$. Положим $A=\Pi(\bar x)E$, $B=\Pi(\bar y)E$, где $\bar x=(x_n)$, $\bar y=(y_n)\in\bar N$, и $\pi'_\xi(A)=\Pi(\bar x')$, $\pi'_\xi(A^*)=\Pi(\bar u')$, а также $\pi'_\xi(B)=\Pi(\bar y')$, $\pi'_\xi(B^*)=\Pi(\bar v')$, где $\bar x'=(x'_n)$, $\bar u'=(u'_n)$, $\bar y'=(y'_n)$ и $\bar v'=(v'_n)\in\bar M'$. Тогда имеют место следующие соотношения

$$\lim_U \|(x_n - x'_n)\xi\| = \langle\!\langle (\Pi(\bar{x}) - \Pi(\bar{x}'))\bar{\xi} \rangle\!\rangle = 0, \quad \lim_U \|x_n \xi\| = 1;$$

$$\lim_U \|(x_n^* - u'_n)\xi\| = 0;$$

$$\lim_U \|(y_n - y'_n)\xi\| = 0, \quad \lim_U \|(y_n^* - v'_n)\xi\| = 0, \quad \lim_U \|y_n \xi\| = 1;$$

$$\lim_U \|[x_n, y_n]\xi\| \geqslant \alpha > 0.$$

Отсюда и из определения ультрафильтра, воспользовавшись аргументами доказательства леммы I.3.4, можно заключить, что существует последовательность индексов (n_t), для которой

$$\lim_{t\to\infty} \|[z, x^{\#}_{n_t}]\xi\| = \lim_{t\to\infty} \|[z, y^{\#}_{n_t}]\xi\| = 0 \tag{I.4.2}$$

для любого $z \in S_0$, где S_0 - счетное сильно плотное подмножество операторов из M. Более того

$$\lim_{t\to\infty} \|(x_{n_t} - x'_{n_t})\xi\| = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \|x_{n_t}\xi\| = 1; \tag{I.4.3}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|(x^*_{n_t} - u'_{n_t})\xi\| = 0; \tag{I.4.4}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|(y_{n_t} - y'_{n_t})\xi\| = \lim_{t\to\infty} \|(y^*_{n_t} - v'_{n_t})\xi\| = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \|y_{n_t}\xi\| = 1; \tag{I.4.5}$$

$$\lim_{t\to\infty} \|[x_{n_t}, y_{n_t}]\xi\| \geqslant \alpha > 0. \tag{I.4.6}$$

Напомним (см. [I]), что ограниченная по норме последовательность (d_n) из M называется центральной последовательностью (ЦП), если для любого $x \in M$ и любого $\eta \in H$ $\lim_{n\to\infty} \|[x, d_n]\eta\| = 0$. Положим

$$a_t = x_{n_t}, \quad b_t = y_{n_t} \qquad \text{и} \qquad a'_t = x'_{n_t}, \quad b'_t = y'_{n_t}.$$

Так как ξ - циклический отделяющий вектор для M в H, то из (I.4.2) и (I.4.3) можно заключить, что (a_t) - ЦП в M (см. [I]). Из аналогичных соображений следует, что (a_t^*) и $(b_t^{\#})$ - также ЦП в M. Отсюда легко вывести, что $(a_t^* a_t), (b_t^* b_t), (a_t b_t)$ и $([a_t, b_t]^{\#})$ являются ЦП в M, причем $\lim_{t\to\infty} \|a_t \xi\| = \lim_{t\to\infty} \|b_t \xi\| = 1$.

Теперь так как $(a_t^{\#})$ и $(a_t^* a_t)$ - ЦП в M, то можно выбрать номера t_n таким образом, чтобы

$$|(p_n a^*_{t_n} p_n a_{t_n} p_n \xi, \xi) - (a^*_{t_n} a_{t_n} p_n \xi, \xi)| < \frac{1}{2n},$$

где $P = \Pi(\bar{p})E$, $\bar{p} = (p_n)$ и (см. лемму I.3.3)

$$|(a^*_{t_n} a_{t_n} p_n \xi, \xi) - \lambda \|a_{t_n}\xi\|^2| < \frac{1}{2n} \quad (\rho(p_n) = (p_n \xi, \xi) = \lambda),$$

т.е. можно выбрать t_n таким образом, чтобы

$$|\|p_n a_{t_n} p_n \xi\|^2 - \lambda \|a_{t_n}\xi\|^2| < \frac{1}{n}. \tag{I.4.7}$$

Исходя из аналогичных соображений, можно предполагать выполненным неравенство

$$|\|p_n b_{t_n} p_n \xi\|^2 - \lambda \|b_{t_n}\xi\|^2| < \frac{1}{n}. \tag{I.4.8}$$

Далее можно считать, что t_n выбрано так, что

$$\left| \| [p_n a_{t_n} p_n,\ p_n b_{t_n} p_n] \xi \|^2 - \| [a_{t_n}, b_{t_n}] p_n \xi \|^2 \right| < \frac{1}{3n} ,$$

$$\left| \| [a_{t_n}, b_{t_n}] p_n \xi \|^2 - ([a_{t_n}, b_{t_n}]^* [a_{t_n}, b_{t_n}] p_n \xi, \xi) \right| < \frac{1}{3n} ,$$

$$\left| ([a_{t_n}, b_{t_n}]^* [a_{t_n}, b_{t_n}] p_n \xi, \xi) - \lambda \| [a_{t_n}, b_{t_n}] \xi \|^2 \right| < \frac{1}{3n} ,$$

т.е.

$$\left| \| [p_n a_{t_n} p_n,\ p_n b_{t_n} p_n] \xi \|^2 - \lambda \| [a_{t_n}, b_{t_n}] \xi \|^2 \right| < \frac{1}{n} . \tag{I.4.9}$$

Итак, можно предполагать, что последовательность (t_n) выбрана таким образом, чтобы было выполнено (I.4.7)-(I.4.9). Положим $\bar{a} = (a_{t_n})$ и $\bar{b} = (b_{t_n})$. Докажем, что $\Pi(\bar{a})E$, $\Pi(\bar{b})E \in C^U_M$. Пусть $\bar{a}' = (a'_{t_n})$, $\bar{u}' = (u'_{t_n})$. Тогда из (I.4.3) и (I.4.4) следует, что $\Pi(\bar{a})\bar{\xi} = \Pi(\bar{a}')\bar{\xi}$ и $\Pi(\bar{a}^*)\bar{\xi} = \Pi(\bar{u}')\bar{\xi}$, где $\Pi(\bar{a}'), \Pi(\bar{u}') \in \Pi(\bar{M})'$. Таким образом, $E\Pi(\bar{a})\bar{\xi} = E\Pi(\bar{a}')\bar{\xi} = \Pi(\bar{a}')\bar{\xi} = \Pi(\bar{a})\bar{\xi}$ и $E\Pi(\bar{a}^*)\bar{\xi} = \Pi(\bar{a}^*)\bar{\xi}$. Поэтому согласно лемме I.2.3 $\Pi(\bar{a}^{\#})E \in R = \Pi(\bar{N})E$, а $\bar{a}^{\#} \in \bar{N}$. Теперь в силу (I.4.2) $\Pi(\bar{a})E \in C^U_M$. Аналогично доказывается, что $\Pi(\bar{b})E \in C^U_M$. Далее, так как $\langle\!\langle \Pi(\bar{p}\bar{a}\bar{p})\bar{\xi} \rangle\!\rangle = \lim \| p_n a_{t_n} p_n \xi \| = \lambda^{1/2}$ и $\langle\!\langle \Pi(\bar{p}\bar{b}\bar{p})\bar{\xi} \rangle\!\rangle = \lambda^{1/2}$ (см. (I.4.7) и (I.4.8)), то $P\Pi(\bar{a})P = \Pi(\bar{p}\bar{a}\bar{p}) \neq 0$ и $P\Pi(\bar{b})P \neq 0$. Более того, из (I.4.9) и (I.4.6) можно заключить, что $[P\Pi(\bar{a})P,\ P\Pi(\bar{b})P] \neq 0$, поскольку $\langle\!\langle [P\Pi(\bar{a})P,\ P\Pi(\bar{b})P]\bar{\xi} \rangle\!\rangle \geqslant \lambda^{1/2}\alpha$, но это и означает, что проектор P в C^U_M не является абелевым. Доказательство теоремы закончено.

I.5. Исследуем спектральные свойства МО $\bar{\Delta}$ алгебры C^U_M .

Л е м м а I.5.I. Пусть $\bar{\Delta}$ - МО алгебры C^U_M , построенный по состоянию $\bar{\rho}$ (см. п.I.2). Тогда $Sp\bar{\Delta}$ - алгебраический инвариант M и $Sp\bar{\Delta} \subseteq S(M) = \bigcap_{\rho \in I} Sp\Delta_\rho$, где Δ_ρ -МО фактора M , отвечающий т.н. состоянию ρ на M , а I - множество всех таких состояний.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda \in Sp\bar{\Delta}$ $(\lambda > 0)$, тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует оператор $A = \Pi(\bar{x})E \in C^U_M$, где $\bar{x} = (x_n) \in \bar{N}$, для которого

$$\langle\!\langle (\bar{\Delta}^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}}) \Pi(\bar{x})\bar{\xi} \rangle\!\rangle < \varepsilon , \qquad \langle\!\langle \Pi(\bar{x})\bar{\xi} \rangle\!\rangle = 1,$$

но согласно лемме 2.3.5 [I]

$$\langle\!\langle (\bar{\Delta}^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}}) \Pi(\bar{x})\bar{\xi} \rangle\!\rangle = \lim_{n \in U} \| (\Delta_\rho^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}}) x_n \xi \| .$$

Следовательно, существует такой номер n , что

$$\| (\Delta_\rho^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}}) x_n \xi \| < \varepsilon \qquad \text{и} \qquad \| x_n \xi \| \sim 1 .$$

Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ можно заключить, что $\lambda \in Sp\Delta_\rho$ для фиксированного т.н. состояния ρ на M , т.е. $Sp\bar{\Delta} \subseteq Sp\,\Delta_\rho$. Остальные утверждения леммы теперь вытекают из теоремы I.3.I.

Л е м м а I.5.2. Положительные элементы $Sp\bar{\Delta}$ составляют замкнутую подгруппу мультипликативной группы вещественных чисел.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lambda, \mu \in Sp\bar{\Delta}$ $(\lambda, \mu > 0)$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существуют такие последовательности $\bar{x} = (x_n)$, $\bar{y} = (y_n) \in \bar{N}$, что $A = \Pi(\bar{x})E$, $B = \Pi(\bar{y})E \in C^U_M$ и

$$\langle\!\langle (\bar{\Delta}^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}}) A\bar{\xi} \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \bar{J} A^* \bar{\xi} - \lambda^{\frac{1}{2}} A\bar{\xi} \rangle\!\rangle < \varepsilon_1 , \tag{I.5.I}$$

$$\langle\!\langle \bar{J} B^* \bar{\xi} - \mu^{\frac{1}{2}} B\bar{\xi} \rangle\!\rangle < \varepsilon_1 , \tag{I.5.2}$$

причем

$$\langle\langle A\bar{\xi}\rangle\rangle = \langle\langle B\bar{\xi}\rangle\rangle = 1, \quad \|A\|, \ \|B\| < C_0 < \infty, \tag{I.5.3}$$

где число $\varepsilon_1 > 0$ зависит от ε и будет выбрано позднее.

Будем предполагать, что A является аналитическим элементом C_M^U (см. замечание I.4.2). Такое предположение возможно, поскольку множество аналитических элементов плотно в C_M^U. Из доказательства теоремы I.4.I тогда следует, что существует подпоследовательность (x_{n_t}) последовательности $\bar{x} = (x_n)$, обладающая свойствами: (i) $(x^{\#}_{n_t})$ -ЦП в M; (ii) для $(x^{\#}_{n_t})$ выполнены соотношения (I.4.3) и (I.4.4); (iii)

$$\|(jx^*_{n_t} - \lambda^{\frac{1}{2}} x_{n_t})\xi\| < \varepsilon_1 \qquad (t \in \mathbb{N}); \tag{I.5.4}$$

(iv) имеют место следующие оценки

$$|\rho(x^*_{n_t} y^*_t y_t x_{n_t}) - \rho(y^*_t y_t x^*_{n_t} x_{n_t})| < \frac{1}{t}, \tag{I.5.5}$$

$$|\rho(x^*_{n_t} x_{n_t} y^*_t y_t) - \rho(x^*_{n_t} x_{n_t})\rho(y^*_t y_t)| < \frac{1}{t}. \tag{I.5.6}$$

Положим $a_t = x_{n_t}$, тогда $\bar{a} = (a_t) \in \bar{M}$. Так как согласно (I.4.3)

$$\langle\langle \Pi(\bar{a})\bar{\xi}\rangle\rangle = \lim_{t\to\infty} \|a_t \xi\| = 1, \tag{I.5.7}$$

то $\Pi(\bar{a}) \neq 0$. Далее, из (I.4.3) и (I.4.4) точно также как и при доказательстве теоремы I.4.I выводим, что $\Pi(\bar{a})^{\#} E \in R = \Pi(\bar{N})E$, следовательно, $\Pi(\bar{a})^{\#} E \in C_M^U$, поскольку $\bar{a}^{\#} = (a^{\#}_n)$ -ЦП в M. В силу (I.5.4) $\Pi(\bar{a})E$ удовлетворяет соотношению

$$\langle\langle (\bar{j}\,\Pi(\bar{a})^* - \lambda^{\frac{1}{2}}\,\Pi(\bar{a}))\bar{\xi}\rangle\rangle < \varepsilon_1. \tag{I.5.8}$$

Наконец, из (I.5.5) и (I.5.6) с учетом (I.5.3) и (I.5.7) можно заключить, что

$$\langle\langle B\Pi(\bar{a})\bar{\xi}\rangle\rangle = 1 \quad \text{и} \quad B\Pi(\bar{a})E \neq 0 \quad (B\Pi(\bar{a})E \in C_M^U). \tag{I.5.9}$$

Теперь принимая во внимание (I.5.2), (I.5.8), мы получим следующую оценку

$$\langle\langle \bar{j}(B\Pi(\bar{a}))^*\bar{\xi} - \lambda^{\frac{1}{2}}\mu^{\frac{1}{2}} B\Pi(\bar{a})\bar{\xi}\rangle\rangle$$
$$\leq \|\Pi(\bar{a})\|\,\langle\langle(\bar{j}B^* - \mu^{\frac{1}{2}}B)\bar{\xi}\rangle\rangle + \mu^{\frac{1}{2}}\|B\|\,\langle\langle(\bar{j}\Pi(\bar{a})^* - \lambda^{\frac{1}{2}}\Pi(\bar{a}))\bar{\xi}\rangle\rangle \leq C_0\varepsilon_1(1+\mu^{\frac{1}{2}}). \tag{I.5.10}$$

Положим $C_0\varepsilon_1(1+\mu^{\frac{1}{2}}) < \varepsilon$, тогда из (I.5.10) и (I.5.9) следует, что $\lambda\mu \in Sp\,\bar{\Delta}$.

Чтобы закончить доказательство леммы осталось показать, что из $\lambda \in Sp\,\bar{\Delta}$ следует $\lambda^{-1} \in Sp\,\bar{\Delta}$. Но этот факт вытекает из (I.5.I) и неравенств, которые мы сейчас приведем

$$\langle\langle \bar{\Delta}^{\frac{1}{2}} A^*\bar{\xi} - \lambda^{-\frac{1}{2}} A^*\bar{\xi}\rangle\rangle = \langle\langle \bar{j}A\bar{\xi} - \lambda^{-\frac{1}{2}} A^*\bar{\xi}\rangle\rangle = \lambda^{-\frac{1}{2}}\langle\langle \bar{j}A^*\bar{\xi} - \lambda^{\frac{1}{2}}A\bar{\xi}\rangle\rangle \leq \lambda^{\frac{1}{2}}\varepsilon_1,$$

$$|\langle\langle A^*\bar{\xi}\rangle\rangle - \lambda^{\frac{1}{2}}| = |\langle\langle A^*\bar{\xi}\rangle\rangle - \lambda^{\frac{1}{2}}\langle\langle A\bar{\xi}\rangle\rangle| \leq \langle\langle \bar{j}A^*\bar{\xi} - \lambda^{\frac{1}{2}}A\bar{\xi}\rangle\rangle < \varepsilon_1.$$

Лемма доказана.

Подведем итог исследованиям $Sp\,\bar{\Delta}$ в [I] и в настоящем пункте.

Т е о р е м а I.5.3. Пусть M – фактор с т.н. состоянием ρ, C_M^U отвечающая ему асимптотическая алгебра с т.н. состоянием $\bar{\rho}$, которое каноническим способом строится по ρ (см. п.I.2), а $\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$ -МО алгебры C_M^U, отвечающий состоянию $\bar{\rho}$. Тогда $Sp\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$ обладает свойствами:

(i) $Sp\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$ – алгебраический инвариант M.

(ii) $Sp\bar{\Delta}_{\bar{\rho}} = \bigcap_{\rho\in I} Sp\Delta_\rho$, где Δ_ρ -МО для M, отвечающий т.н. состоянию ρ на M, а I-множество всех таких состояний.

(iii) Положительные точки $Sp\bar{\Delta}_{\rho}$ составляют группу по умножению.

(iv) Если число λ ($\lambda \neq 0,1$) является собственным значением $\bar{\Delta}_{\rho}$, то $\lambda \in A(M)$, где через $A(M)$ мы обозначили множество асимптотических отношений M [2]. Справедливо обратное. Число $1 \in A(M)$ тогда и только тогда, когда подалгебра $(C_M^U)_{\bar{\rho}}$, порожденная операторами $A \in C_M^U$, удовлетворяющими условию $\sigma_t^{\bar{\rho}}(A) = A (t \in \mathbb{R})$, где $\sigma_t^{\bar{\rho}}$ - модулярная группа алгебры C_M^U - некоммутативна (т.е. имеет тип II_1).

Условие (iv) было доказано в нашей работе [1] только для случая $\lambda \neq 1$. Благодаря теореме I.4.I в предположении некоммутативности $(C_M^U)_{\rho}$, случай $\lambda = 1$ рассматривается аналогично.

С л е д с т в и е 1.5.4 (i) C_M^U не может содержать в качестве прямой компоненты алгебр типа I и типа II_{∞}. (ii) $S(C_M^U) = Sp\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$. (iii) C_M^U не содержит в качестве прямой компоненты алгебр типа III_0.

Действительно, (i) является следствием теорем I.4.I и I.5.3 (iii) Для доказательства (ii) рассмотрим проектор $P \in (C_M^U)_{\bar{\rho}}$ и через $(C_M^U)_P$ обозначим неймановскую алгебру в пространстве $P\tilde{H}$, порожденную операторами PAP, где $A \in C_M^U$. Через $\bar{\Delta}_P$ обозначим сужение $\bar{\Delta}_{\rho}$ на $\bar{j}P\bar{j}P\tilde{H}$. Предположим, что P принадлежит центру $\tilde{Z}$ алгебры $(C_M^U)_{\rho}$. Тогда $\bar{\Delta}_P$ -МО для $(C_M^U)_P$ в $\bar{j}P\bar{j}P\tilde{H}$. Повторяя аргументы доказательства теорем I.4.I и I.5.3 можно доказать, что $Sp\bar{\Delta}_P = Sp\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$. Но тогда согласно 3.2.5 B) [7] $S(C_M^U) = Sp\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$. Пусть теперь C_M^U имеет тип III_0, тогда согласно определению $S(C_M^U) = \{0,1\}$ (см. [7]), но поскольку $S(C_M^U) = Sp\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$, то $Sp\bar{\Delta}_{\rho} = \{0,1\}$. Последнее исключено. Таким образом алгебра C_M^U не может иметь тип III_0.

Т е о р е м а I.5.5. Если M - фактор, то алгебру C_M^U нельзя представить в виде прямой суммы алгебр разных типов. Ввиду следствия I.5.4 C_M^U может быть либо алгеброй (фактором) типа II_1 и $\mathrm{III}_{\lambda} (0 < \lambda \leq 1)$, либо коммутативной алгеброй без минимальных проекторов, либо $C_M^U = \mathbb{C}$.

Для доказательства нужно использовать те же соображения, что и при доказательстве (ii) следствия I.5.4.

II НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

II.I. Напомним, что асимптотическая алгебра была сконструирована в [1] для доказательства следующей теоремы

Т е о р е м а II.I.I. Пусть M - фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с т.н. состоянием ρ вида $\rho(x) = (x\xi,\xi)$, где $x \in M$, а ξ - циклический отделяющий вектор для M в H. Для того, чтобы число λ ($\lambda \neq 0,1$) принадлежало $A(M)$ (множеству асимптотических отношений фактора M [2]) необходимо и достаточно, чтобы существовала центральная последовательность (ЦП) операторов (a_n) в M, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_{\rho}^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}}) a_n \xi\| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|a_n\xi\| = 1,$$

где Δ_{ρ} - МО для M, отвечающий состоянию ρ, а ЦП определена в [1] (и при доказательстве теоремы I.4.I).

Теория, развитая в [1] и р.I, позволяет также сформулировать следующий результат, который будет использован при доказательстве теоремы II.3.I.

Т е о р е м а II.I.2. Пусть M, H, ξ, ρ и Δ_{ρ} - те же, что и в теореме II.I.I. Для того, чтобы число λ $(\lambda > 0)$ принадлежало $A(M)$ необходимо и достаточно существование в M ЦП частично изометрических операторов (v_n), обладающих следующими свойствами: (i) $v_n v_n^* + v_n^* v_n = I, v_n v_n = 0$; (ii) $\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_{\rho}^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}}) v_n \xi\| = 0$.

Применяя эту теорему к изучению факторов, построенных по динамическим системам, получаем такое утверждение

Т е о р е м а II.I.3. Пусть A - коммутативная неймановская алгебра с т.н. и конечным следом ρ, G -аппроксимативно конечная эргодическая группа автоморфизмов A, действующих свободно. Если фактор M есть скрещенное произведение A на G, то $A(M)=S(M)$ (см. теор. I.5.3).

Доказательство теоремы П.I.3 и ее обобщение на случай, когда A -некоммутативна, несколько громоздко и будет приведено в отдельной статье.

П.2. Рассмотрим теперь представления асимптотически абелевых C^*-алгебр. Пусть A – C^*-алгебра, G -группа $*$-автоморфизмов A, относительно которой A является асимптотически абелевой, т.е. в G существует последовательность элементов $\{\gamma_n\}$ такая, что для любых $x, y\in A$

$$\lim_{n\to\infty}\|[\gamma_n(x),y]\|=0, \quad [x,y]=xy-yx. \tag{П.2.I}$$

При рассмотрении квантовых спиновых систем C^*-алгебра A возникает как алгебра квазилокальных наблюдаемых, G как группа пространственных трансляций [8]. В этой ситуации, когда ρ – G-инвариантное состояние на A, а Γ -однопараметрическая группа $*$-автоморфизмов A, относительно которой ρ удовлетворяет условиям КМШ (см. п.I.I), Γ является группой временной эволюции квантовой спиновой системы. Из результатов [4] следует, что если π_ρ - представление A, построенное с помощью ρ согласно конструкции ГНС, то Γ расширяется до модулярной группы неймановской алгебры $\pi_\rho(A)''$.

Представляет интерес изучение спектральных свойств модулярного оператора Δ_ρ и структуры алгебры $M=\pi_\rho(A)''$. Прежде всего покажем, что $M=\pi_\rho(A)''$ в этой ситуации имеет нетривиальную асимптотическую алгебру.

Т е о р е м а П.2.I. Пусть A – C^*- алгебра, G - группа $*$-автоморфизмов A, относительно которой A -асимптотически абелева, ρ – G-инвариантное фактор - состояние на A. Предположим, что π_ρ - представление A, построенное с помощью ρ согласно конструкции ГНС и что ρ продолжается до т.н. состояния на $M=\pi_\rho(A)''$ (т.е. ρ - КМШ - состояние на M).

Тогда M $*$ - изоморфна подалгебре асимптотической алгебры C_M^U, инвариантной относительно $\bar\sigma_t^{\bar\rho}$ $(t\in\mathbb{R})$, где $\bar\sigma_t^{\bar\rho}$ $(t\in\mathbb{R})$ - ГМА алгебры C_M^U, отвечающая состоянию $\bar\rho$.

С л е д с т в и е П.2.2. Пусть выполнены предположения теоремы, тогда (i) $Sp\Delta_\rho=Sp\bar\Delta_{\bar\rho}=S(M)$, где Δ_ρ и $\bar\Delta_\rho$ -МО для M и C_M^U соответственно; (ii) точки $Sp\Delta_\rho$ - составляют группу по умножению (ср. с [9], [10]); (iii) M не может быть фактором типа III_0, II_∞ или типа I. Более того, если число λ $(\lambda\neq 0,1)$ является собственным значением Δ_ρ, то $\lambda\in A(M)$, т.е. $M\otimes R_\lambda\sim M$, где R_λ -фактор Пауэрса.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я. Согласно (ii) теоремы I.5.3 $Sp\bar\Delta_{\bar\rho}\subseteq S(M)\subseteq Sp\Delta_\rho$, а поскольку M $*$ -изоморфна $\bar\sigma_t^{\bar\rho}$ -инвариантной подалгебре C_M^U, то $Sp\Delta_\rho\subseteq Sp\bar\Delta_{\bar\rho}\subseteq S(M)$. Таким образом, (i) имеет место; (ii) вытекает из (i) и леммы I.5.2; (iii) следует из (i),(iii) следствия I.5.4. Наконец последнее утверждение выводится из (i) настоящего следствия и теоремы I.5.3(iv). Следствие доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы П.2.I. Пусть H -гильбертово пространство, в котором действуют операторы из $M=\pi_\rho(A)''$. Согласно конструкции ГНС $\rho(x)=(x\xi,\xi)$, где $x\in M$, а ξ - циклический вектор для M в H, который в силу предположений теоремы является и отделяющим, т.е. $[M\xi]=[M'\xi]=H$, где M' - коммутант M в H. Важно отметить, что согласно конструкции ГНС в H существует унитарное представление группы G : $g\to U_g$, для которого $\pi_\rho(g\cdot a)=U_g\pi_\rho(a)U_g^*$ $(g\in G)$ при $a\in A$ и $U_g\xi=\xi$, причем из результатов [11] вытекает, что $[U_g,\Delta_\rho^{it}]=0$ $(g\in G,\ t\in\mathbb{R})$.

Поскольку $\pi_\rho(g\cdot a)=U_g\pi_\rho(a)U_g^*$, где $a\in A$, то g можно расширить до $*$-автоморфизма $M=\pi_\rho(A)''$. Пусть $\bar M_G$ -алгебра ограниченных по норме последовательностей вида $\bar x=(\gamma_n(x))$, где $x\in M$, $\gamma_n\in G$ (см. (п.2.I)). Тогда $\bar M_G$ – C^* -подалгебра $\bar M$. Если $x'\in M'$, то $g\cdot x'=U_g x' U_g^*$ определяет, очевидно, $*$ -автоморфизм M'. Через $\overline{M}'_G$ обозначим C^*-алгебру последовательностей $(\gamma_n(x'))$, где $x' \in M'$, тогда $\overline{M}'_G \subset \overline{M}'$. Ясно, что $\overline{M}_G \sim M$ и $\overline{M}'_G \sim M'$. Пусть $\overline{x} = (\gamma_n(x)) \in \overline{M}_G$, так как $\rho(\gamma_n(x)) = \rho(x)$ в силу G-инвариантности ρ, то (см. (I.2.I))

$$\langle \Pi(\overline{x})\xi, \xi \rangle = \overline{\rho}(\overline{x}) = \lim_{n \in U} \rho(\gamma_n(x)) = \rho(x). \tag{II.2.2}$$

Следовательно, поскольку ρ - т.н. состояние на M, то $\overline{\rho}$ - т.н. состояние на $\overline{M}_G$, а алгебры фон Неймана M и $\Pi(\overline{M}_G)$-*-изоморфны. Более того, ξ является циклическим отделяющим вектором для $\Pi(\overline{M}_G)$ в $[\Pi(\overline{M}_G)\xi]$. Аналогичные утверждения справедливы и для $\Pi(\overline{M}'_G)$.

Докажем соотношение $[\Pi(\overline{M}_G)\xi] = [\Pi(\overline{M}'_G)\xi]$. Так как $[M\xi] = [M'\xi] = H$, то для $x \in M$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует $x' \in M'$ такой, что $\|(x - x')\xi\| < \varepsilon$. Следовательно, $\|(\gamma_n(x) - \gamma_n(x'))\xi\| = \|U_{\gamma_n}(x - x')\xi\| = \|(x - x')\xi\| < \varepsilon$, поэтому

$$\langle\langle (\Pi(\overline{x}) - \Pi(\overline{x}'))\xi \rangle\rangle \le \lim_{n \in U} \|(\gamma_n(x) - \gamma_n(x'))\xi\| < \varepsilon,$$

где $\overline{x} = (\gamma_n(x))$ и $\overline{x}' = (\gamma_n(x'))$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует, что $\Pi(\overline{M}_G)\xi \subseteq [\Pi(\overline{M}'_G)\xi]$. Аналогично доказывается обратное включение. Таким образом, $[\Pi(\overline{M}_G)\xi] = [\Pi(\overline{M}'_G)\xi]$.

Докажем включение $\overline{M}_G \subseteq \overline{N}$ (см. лемму I.2.3). Пусть F - ортогональный проектор на $[\Pi(\overline{M}_G)\xi]$ в пространстве $\overline{H}$. Так как $\Pi(\overline{M}'_G) \subseteq \Pi(\overline{M})'$, то $F \le E$, а так как $[\Pi(\overline{M}_G)\xi] = F\overline{H}$, то операторы $\Pi(\overline{x})$, где $\overline{x} \in \overline{M}_G$, коммутируют с F. Повторяя теперь соображения, приведенные в конце п.I.2, находим, что $\overline{M}_G \subseteq \overline{N}$. Далее, поскольку ξ - циклический отделяющий вектор для $R = \Pi(\overline{N})E$ и $\Pi(\overline{M}_d)E \subset R$, то из (II.2.I) следует включение $\Pi(\overline{M}_G)E \subseteq C^U_M$. Наконец, лемма I.2.4 позволяет сделать вывод о том, что $\Pi(\overline{M}_G)E$ - σ^ρ_t - инвариантная подалгебра C^U_M. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е II.2.3. Предположение о том, что ρ - фактор-состояние на A излишне. Из доказательства теоремы видно, что это предположение не используется.

Т е о р е м а II.2.4. Пусть выполнены все предположения теоремы II.2.I, кроме предположения о том, что ρ - фактор-состояние на A. Предположим, что ρ можно расширить до т.н. состояния на неймановской алгебре $M = \pi_\rho(A)''$, которое мы по-прежнему будем обозначать через ρ. Если μ - произвольное т.н. состояние на M, для которого $\mu|Z = \rho|Z$, где Z - центр M, то для всякого $a \in A$ имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \mu(\gamma_n(a)) = \rho(a). \tag{II.2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ограниченную по норме последовательность операторов $\{\pi_\rho(\gamma_n(a))\}$, где $a \in A$. В силу (II.2.I) всякая предельная точка z этой последовательности относительно слабой топологии принадлежит Z, причем $\mu(z) = \rho(z)$, а $\rho(z) = \rho(a)$ в силу G - инвариантности ρ. Принимая во внимание это замечание, рассуждением от противного доказываем (II.2.3). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е II.2.5. Пусть R - фактор типа III, представимый в виде бесконечного тензорного произведения факторов типа I, у которого $S(R) = \mathbb{R}_+$. Можно показать, что спектр МО $\overline{\Delta}$ алгебры C^U_R содержит как непрерывную так и дискретную части.

Из теоремы II.2.I можно извлечь весьма любопытное следствие

О п р е д е л е н и е II.2.5. Алгебра фон Неймана M называется асимптотически абелевой относительно своей группы G автоморфизмов, если G содержит такую последовательность $\{\gamma_n\}$ автоморфизмов, что для любых $x, y \in M$ $s\text{-}\lim_{n \to \infty} [\gamma_n(x), y] = 0$.

Т е о р е м а II.2.6. Пусть выполнены предположения теоремы II.2.I. Через G обозначим группу автоморфизмов $M = \pi_\rho(A)''$, которая является расширением группы G автоморфизмов A (см. начало доказательства теор. II.2.I). Тогда M -асимптотически абелева относительно G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сохраним обозначения, которые мы использовали при доказательстве теоремы II.2.I. Нам нужно доказать, что для любых $x, y \in M$ и любого $\eta \in H$ $\lim\limits_{n\to\infty} \| [\gamma_n(x), y]\eta \| = 0$. Так как ξ – циклический отделяющий вектор для M в H, то достаточно доказать лишь соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \| [\gamma_n(x), y]\xi \| = 0 \tag{II.2.4}$$

(см. лемму I.3.I [I]).

Предположим, что для некоторых $x, y \in M$ соотношение (II.2.4) не выполнено. Тогда существует $\varepsilon > 0$ и последовательность индексов $\upsilon = \{n_k\}$ такие, что

$$\| [\gamma_{n_k}(x), y]\xi \| > \varepsilon. \tag{II.2.5}$$

Теперь построим свободный фильтр V' на $\mathbb{N}$, содержащий $\{n_k\}$, например, V' состоит из последовательностей $\{n_p, n_{p+1}, \dots\}$, где $p \in \mathbb{N}$. Согласно [5] всякий фильтр V' на $\mathbb{N}$ мажорируется ультрафильтром V, причем V будет содержать $\upsilon = \{n_k\}$. Теперь согласно теореме II.2.I

$$\lim_{n\in V} \| [\gamma_n(x), y]\xi \| = 0.$$

Это означает, что для $\varepsilon > 0$ существует $\upsilon_\varepsilon \in V$ такое, что

$$\| [\gamma_n(x), y]\xi \| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \in \upsilon_\varepsilon. \tag{II.2.6}$$

В частности, II.2.6 выполнено и для $n \in \upsilon_\varepsilon \cap \upsilon$. Так как согласно свойствам фильтра $\upsilon_\varepsilon \cap \upsilon \neq \phi$, то (II.2.6) при $n \in \upsilon_\varepsilon \cap \upsilon$ противоречит II.2.5. Теорема доказана.

Теорема II.2.6 позволяет доказать существование асимптотически абелевых алгебр типа III, этот вопрос до сих пор считался открытым (см. [3]).

С л е д с т в и е II.2.7. Существуют асимптотически абелевые факторы типа III.

Действительно, факторы типа III, построенные в [I2], удовлетворяют всем условиям теорем II.2.I и II.2.6.

Приведем еще одну конструкцию асимптотически абелевых алгебр.

С л е д с т в и е II.2.8. Пусть $\mathcal{N}$ – алгебра фон Неймана с т.н. состоянием μ, а $M = \bigotimes\limits_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{N}_i$ – бесконечное тензорное произведение алгебр $\mathcal{N}_i$, где $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}$, с т.н. состоянием ρ, где $\rho = \prod\limits_{i=-\infty}^{\infty} \mu_i$ и $\mu_i = \mu$. Тогда $M = \bigotimes\limits_i \mathcal{N}_i$ – асимптотически абелева относительно группы $\{\gamma^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, где γ – автоморфизм M, отображающий элемент $I_i(x)$ в $I_{i+1}(x)$, где I_i – отображение $\mathcal{N}$ на $\dots \otimes 1 \otimes \mathcal{N}_i \otimes 1 \otimes \dots$.

Доказательство очевидно. В частности, отсюда следует, что факторы Пауэрса (см. например, [I]) являются асимптотически абелевыми.

II.3. Пусть M – фактор типа III, удовлетворяющий условиям теоремы II.2.I. Возникает естественный вопрос: каково множество асимптотических отношений $A(M)$ фактора M? Если $S(M) = (\lambda^n, n \in \mathbb{Z})^-$, где $0 < \lambda < 1$, то из теоремы II.2.I, точнее из следствия II.2.2, следует, что в этом случае $A(M) = S(M) \cup 0$. Есть основания предполагать, что $A(M) = S(M)$ и в случае, когда $S(R) = \mathbb{R}_+$. Нам удалось обосновать эту гипотезу лишь при дополнительных ограничениях на состояние ρ на A.

Прежде чем сформулировать наш результат, напомним, что т.н. состояние μ на неймановской алгебре M называется почти периодическим, если спектр МО Δ_μ, отвечающего состоянию μ, – чисто точечный, т.е. $\Delta_\mu = \sum\limits_k \lambda_k P_k$, где $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$, а P_k – попарно ортогональные проекторы, сумма которых равна единичному оператору.

Т е о р е м а II.3.I. Пусть выполнены предположения теоремы II.2.I и пусть т.н. состояние ρ на $M = \pi_\rho(A)''$ (см. теор. II.2.I) допускает сколь угодно точную аппроксимацию почти периодическим состоянием на M. Тогда $A(M) = S(M)^-$.

Докажем сначала три вспомогательные леммы.

Л е м м а II.3.2. Пусть M – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H,

μ -почти - периодическое состояние на M вида $\mu(x)=(x\eta,\eta)$, где $x\in M$, а η - циклический отделяющий вектор. Тогда для всякого $\lambda\in S(M)$ $(\lambda\neq 0,1)$ и любого числа $\varepsilon>0$ существует частично изометрический оператор $v_\varepsilon\in M$, обладающий свойствами

$$v_\varepsilon^* v_\varepsilon + v_\varepsilon v_\varepsilon^* = I, \quad v_\varepsilon v_\varepsilon = 0, \tag{II.3.1}$$

$$\|(\Delta_\mu^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}}) v_\varepsilon \eta \| < \varepsilon, \tag{II.3.2}$$

где Δ_μ - МО для M, отвечающий состоянию μ.

Доказательство. Пусть $\sigma_t^\mu (t\in\mathbb{R})$ - ГМА алгебры M, M_μ - подалгебра M, содержащая все элементы $x\in M$, для которых $\sigma_t^\mu(x)=x$ $(t\in\mathbb{R})$. Сужение μ на M_μ есть т.н. след на M_μ, удовлетворяющий условию $\mu(I)=1$.

Если λ_0 - собственное значение Δ_μ, то нетрудно проверить, что в M существует частичная изометрия u_0, для которой

$$\Delta_\mu^{\frac{1}{2}} u_0\eta = \lambda_0^{\frac{1}{2}} u_0\eta, \quad \Delta^{\frac{1}{2}} u_0^*\eta = \lambda_0^{-\frac{1}{2}} u_0^*\eta, \tag{II.3.3}$$

причем $P_0=u_0^*u_0$, $Q_0=u_0u_0^*\in M_\mu$. Пусть $\lambda_0\neq 1$, тогда $(P_0\eta,\eta)=\|u_0\eta\|^2=\lambda_0^{-1}\|j_\mu\Delta_\mu^{\frac{1}{2}}u_0\eta\|^2=$ $=\lambda_0^{-1}\|u_0^*\eta\|^2=\lambda_0^{-1}(Q_0\eta,\eta)$. Следовательно, поскольку M_μ - алгебра с конечным следом, то в этом случае u_0 в (II.3.3) можно подобрать таким образом, чтобы P_0 и Q_0 были ортогональны.

Так как $\lambda\in S(M)$ согласно предположению леммы, то существует собственное значение λ_1 оператора Δ_μ, удовлетворяющее условию

$$|\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda_1^{\frac{1}{2}}| < \varepsilon.$$

Более того, существует частичная изометрия u_1 в M со свойствами

$$\Delta_\mu^{\frac{1}{2}} u_1\eta = \lambda_1^{\frac{1}{2}} u_1\eta,\ P_1=u_1^*u_1,\ Q_1=u_1u_1^*\in M_\mu,\ P_1Q_1=0,\ (P_1,Q_1\neq 0).$$

Положим $R_1=P_1+Q_1$, $R_1'=I-R_1$. Тогда $R_1'\in M_\mu$, и в пространстве $R_1'H$ можно рассмотреть неймановскую алгебру $M_{R_1'}$, порожденную операторами $R_1'xR_1'$ где $x\in M$. Так как пространство $[M_{R_1'}\eta]=R_1'j_\eta R_1'j_\eta H$ $(R_1'\eta=j_\eta R_1'\eta)$ инвариантно относительно $M_{R_1'}$, то можно рассмотреть сужение $M_{R_1'}$ на $[M_{R_1'}\eta]$. Легко проверить, что $R_1'\eta$ является циклическим отделяющим вектором для $M_{R_1'}$ в $[M_{R_1'}\eta]$. Далее ясно, что $j_\eta[M_{R_1'}\eta]=$ $=[M_{R_1'}\eta]$. Наконец, поскольку $R_1'\in M_\mu$, то проекторы R_1' и $j_\eta R_1' j_\eta$ коммутируют с Δ_μ и можно рассмотреть сужение Δ_μ на $[M_{R_1'}\eta]$. Понятно, что сужение Δ_μ на $[M_{R_1'}\eta]$ совпадает с МО для $M_{R_1'}$ в $[M_{R_1'}\eta]$, построенным по вектору $R_1'\eta$. Теперь так как $M\sim M_{R_1'}$, то $S(M)=S(M_{R_1'})$, и существует число λ_2 и частичная изометрия $u_2\in M_{R_1'}$ такие, что

$$|\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda_2^{\frac{1}{2}}| < \varepsilon,$$

$$\Delta_\mu^{\frac{1}{2}} u_2\eta = \lambda^{\frac{1}{2}} u_2\eta, \quad P_2=u_2^*u_2, \quad Q_2=u_2u_2^*\in (M_{R_1'})_\mu\subset M_\mu, \quad P_2Q_2=0.$$

Продолжая аналогичные построения, получим последовательность $(\lambda_i, u_i, P_i, Q_i)$, где λ_i - число, для которого

$$|\lambda^{\frac{1}{2}} - \lambda_i^{\frac{1}{2}}| < \varepsilon, \tag{II.3.4}$$

u_i - частичная изометрия из M такая, что

$$\Delta_\mu^{\frac{1}{2}} u_i\eta = \lambda_i^{\frac{1}{2}} u_i\eta, \tag{II.3.5}$$

$$u_i^*u_i=P_i, \quad u_iu_i^*=Q_i, \quad P_iQ_i=0, \ P_i, \ Q_i\in M_\mu. \tag{II.3.6}$$

Более того, если

$$R_i = P_i + Q_i\ , \text{ то } \quad R_i R_j = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{и} \tag{II.3.7}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} R_i = I. \tag{II.3.8}$$

Положим теперь $\vartheta_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$. Учитывая (II.3.6)-(II.3.8), можно убедиться в справедливости (II.3.I), а из (II.3.4) и (II.3.5) следует (II.3.2). Лемма доказана.

Лемма II.3.3. Пусть выполнены предположения теоремы II.3.I. Тогда для всякого $\lambda \in S(M)$ $(\lambda \neq 0,1)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует частичная изометрия $\vartheta_\varepsilon \in M$, удовлетворяющая (II.3.I) и

$$\|(\Delta_\rho^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}})\vartheta_\varepsilon \xi\| < \varepsilon, \tag{II.3.9}$$

где Δ_ρ - МО для M, отвечающий ρ, а ξ - циклический отделяющий вектор для M, причем $\rho(x) = (x\xi, \xi)$.

Доказательство. Согласно предположению теоремы II.3.I существует такое почти периодическое состояние μ на M, что

$$\|\rho - \mu\| < \varepsilon^2. \tag{II.3.10}$$

Пусть $V_\xi^{\frac{1}{4}} = \Delta_\rho^{\frac{1}{4}} M_+ \xi$, где M_+ - позитивные элементы M. Согласно § 6 [13] в $V_\xi^{\frac{1}{4}}$ существует единственный вектор η, для которого $\mu(x) = (x\eta, \eta)$, где $x \in M$, причем

$$\|\xi - \eta\|^2 \leq \|\rho - \mu\| < \varepsilon^2 \tag{II.3.11}$$

и

$$j_\xi = j_\eta. \tag{II.3.12}$$

Так как $\lambda \in S(M)$, то согласно лемме II.3.2 существует частичная изометрия $\vartheta_\varepsilon \in M$, удовлетворяющая (II.3.I) и (II.3.2). Но в силу (II.3.11) $\|\vartheta_\varepsilon \xi - \vartheta_\varepsilon \eta\| \leq \|\xi - \eta\| < \varepsilon$, а так как $\Delta_\rho^{\frac{1}{2}} \vartheta_\varepsilon \xi = j_\xi \vartheta_\varepsilon^* \xi$, $\Delta_\mu^{\frac{1}{2}} \vartheta_\varepsilon \eta = j_\xi \vartheta_\varepsilon^* \eta$ (см. (II.3.12)), то $\|\Delta_\rho^{\frac{1}{2}} \vartheta_\varepsilon \xi - \Delta_\eta^{\frac{1}{2}} \vartheta_\varepsilon \eta\| = \|j_\xi(\vartheta^*(\xi - \eta))\| \leq \|\xi - \eta\| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\|(\Delta_\rho^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}})\vartheta_\varepsilon \xi\| \leq \|\Delta_\rho^{\frac{1}{2}} \vartheta_\varepsilon \xi - \Delta_\mu^{\frac{1}{2}} \vartheta_\varepsilon \eta\| + \|(\Delta_\mu^{\frac{1}{2}} - \lambda^{\frac{1}{2}})\vartheta_\varepsilon \eta\| + \|\lambda^{\frac{1}{2}} \vartheta_\varepsilon (\eta - \xi)\| \leq (2 + \lambda^{\frac{1}{2}})\varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма II.3.4. Пусть M - фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, ξ - циклический отделяющий вектор. Пусть далее (ϑ_n) - ограниченная по норме последовательность операторов в M, а (ϑ_n') - в M', причем

$$\lim_{n \to \infty} \|(\vartheta_n - \vartheta_n')\xi\| = 0.$$

Если

$$\lim_{n \to \infty} \|[\vartheta_n, x]\xi\| = 0 \tag{II.3.13}$$

для x из сильно плотного в M подмножества операторов, то (II.3.13) имеет место для любого $x \in M$, т.е. (ϑ_n) - ЦП в M.

Лемма может быть доказана с помощью стандартных оценок (см. [1]).

Доказательство теоремы II.3.I. Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{2}n$ и для каждого ε_n согласно лемме II.3.3 построим частичную изометрию ϑ_n из M, удовлетворяющую (II.3.I) и (II.3.9). Пусть $S = \{a_k^{\#}\}$ - счетное подмножество M, плотное в M относительно сильной топологии. Так как для любого $x \in M$

$$\lim_{t \in U} \|[x, \gamma_t(\vartheta_n)]\xi\| = 0$$

(см. теорему II.2.I), то из $(\gamma_t(\vartheta_n))_{t=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $(\gamma_{t_s}(\vartheta_n))$ такую,

что
$$\lim_{s\to\infty} \|[a_k^\#, \gamma_{t_s}(v_n)]\xi\| = 0, \quad (k, n \in \mathbb{Z}).$$

Через u_1 обозначим оператор вида $\gamma_{t_{s_1}}(v_1)$, для которого
$$\|[\gamma_{t_{s_1}}(v_1), a_1^\#]\xi\| < 1.$$

Предположим, что мы выделили операторы $u_1, \ldots, u_{n-1}$, где $u_i = \gamma_{t_{s_i}}(v_i)$. Через u_n обозначим оператор $\gamma_{t_s}(v_n)$, для которого
$$\|[\gamma_{t_{s_n}}(v_n), a_i^\#]\xi\| < \frac{1}{2^n} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{II.3.I4}$$

Тогда (u_n) - последовательность частично изометрических операторов из M, обладающая следующими свойствами
$$u_n u_n^* + u_n^* u_n = 1, \; u_n u_n = 0 \qquad \text{(в силу (II.3.I))}; \tag{II.3.I5}$$
$$\lim_{n\to\infty} \|[a, u_n]\xi\| = 0, \; a \in S \qquad \text{(в силу (II.3.I4))}; \tag{II.3.I6}$$
$$\|(\Delta_\rho^{\frac12} - \lambda^{\frac12})u_n\xi\| = \|(\Delta_\rho^{\frac12} - \lambda^{\frac12})U_{\gamma_{t_{s_n}}} v_n\xi\| = \|U_{\gamma_{t_{s_n}}}(\Delta_\rho^{\frac12} - \lambda^{\frac12})v_n\xi\| = \|(\Delta_\rho^{\frac12} - \lambda^{\frac12})v_n\xi\| < \frac{1}{2^n} \tag{II.3.I7}$$

(см. II.3.9). Так как $\Delta_\rho^{\frac12} u_n\xi = j_\rho u_n^*\xi$, то благодаря последней оценке можно утверждать, что
$$\lim_{n\to\infty} \|(u_n - \lambda^{-\frac12} j_\rho u_n^* j_\rho)\xi\| = 0. \tag{II.3.I8}$$

В силу (II.3.I6) и (II.3.I8) из леммы II.3.4 заключаем, что (u_n) - ЦП в M. Но тогда в виду (II.3.I5) и (II.3.I7) для (u_n) выполнены условия теоремы II.I.2. Следовательно, $\lambda \in A(M)$, т.е. $S(M) \subseteq A(M)$. Поскольку всегда $A(M) \subseteq S(M) \cup 0$, то $A(M) = S(M)^-$ и теорема доказана.

II.4. Сформулируем несколько нерешенных вопросов в этой теории, решение которых позволит понять связь между асимптотической алгеброй C_M^U и множеством асимптотических отношений $A(M)$ для фактора M.

I. Пусть M - фактор типа III_1, т.е. $S(M) = \mathbb{R}_+$, ρ - т.н. состояние на M, а $\bar\Delta$ -МО для C_M^U. Предположим, что $Sp\bar\Delta = \mathbb{R}_+$. а) Следует ли отсюда, что $A(M) \neq \phi$, или в силу (iv) теоремы I.5.3, что спектр $\bar\Delta$ содержит дискретную часть? б) Следует ли отсюда, по крайней мере, что $(C_M^U)_\rho \neq \mathbb{C}$?

Понятно, что для всякого фактора вида $M = \bigotimes_{i=1}^\infty N_i$, где $N_i = N$, с т.н. состоянием $\rho = \prod_{i=1}^\infty \mu_i$, где $\mu_i = \mu$ - т.н. состояние на N, $C_M^U \neq \mathbb{C}$. В случае, когда N имеет тип III_λ $(0 \leqslant \lambda < 1)$ из теоремы II.3.I и результатов [7] (см. лемму 3.7.8) следует, что $A(M) = S(M) \cup 0$. Если же N имеет тип III_1, то ответы на вопросы а) и б) в общем случае не известны. Однако, если N, например, построен по динамической системе и имеет тип III_1, причем т.н. состояние μ на N индуцируется вероятностной мерой динамической системы, то $A(M) = S(M) \cup 0$. (Для доказательства нужно воспользоваться теоремой 3.3.I [7] и повторяя соображения леммы II.3.2 доказать существование в N частично изометрического оператора $v_\varepsilon \in N$, удовлетворяющего (II.3.I) и (II.3.2) для $\lambda \in S(N)$, а затем применить теор. II.I.2).

2. Представляется очень вероятным, что $(C_M^U)_P \sim C_M^U$, где P - проектор из центра C_M^U, а $(C_M^U)_P$ - неймановская алгебра в пространстве $P\tilde H$, порожденная операторами PAP, где $A \in C_M^U$. По-видимому, более того, все факторы, входящие в разложение C_M^U попарно изоморфны между, а алгебра C_M^U - изоморфна прямому произведению некоторого фактора на ее центр.

3. Пусть теперь N - двойственная алгебра для M [I4]. Всегда ли верно, что $(C_M^U)_\rho \sim C_N^U$, если M имеет тип III_λ $(0 < \lambda \leqslant 1)$?

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. В.Я. Голодец. Спектральные свойства модулярных операторов и множество асимптотических отношений, Изв. АН СССР, сер. мат. 39, № 9, 635-656, I975.

2. H.Araki,E.J.Woods.Aclassifications of factors,Publ.RIMS,Kyoto Univ.,ser;A, 3,5I-I30,I968.

3. M.S.Glaser.Asymptotic abelianess of infinite factors,Trans.Amer.Math.Soc., I78,I47-I63,I973.

4. M.Takesaki.Tomita's theory of modular hilbert algebras and its applications, Lecture Notes in Math.,I28,I970.

5. Н. Дэнфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы, т. I, М., ИЛ, I962.

6. М.А. Наймарк. Нормированные кольца, М., "Наука", I969.

7. A.Connes.Une classification des facteur de type III,Ann.Sc.Norm.,Sup.,4^{e}ser., 6;I33-252,I973.

8. D.W.Robinson.Statistical mechanics of quantum spin systems I,Comm.math.Phys., 6,I5I-I60,I967; II Comm.math.phys.,7,337-348,I968.

9. H.Araki.Remarks on spectra of modular operator of von Neumann algebras, Comm.math.phys.,28,267-277,I972.

IO. E.Stormer.Spectra of states and asymptotically abelian C -algebras Comm. phys.,28,279-294,I972.

II. R.H.Herman,M.Takesaki.States and automorphism groups of operator algebras, Comm.math.phys.,I9,I42-I60,I970.

I2. H.Araki.Gibbs states of one dimensional quantum lattice,Comm.math.phys., I4,I20-I57,I969.

I3. H.Araki.Positive cone,Radon-Nikodym theorems relative hamiltonian and the Gibbs condition in statistical machanics,Preprint RIMS-I5I,I973.

I4. M.Takesaki.Duality for crossed products and the structure of von Neumann algebras of type III.Acta Math.,I3I,249-3I0,I973.

ASYMPTOTIC ALGEBRA,ITS PROPERTIES AND SOME APPLICATIONS

V.Ya.Golodets

The spectral properties for modular operators in connection with asymptotic commutation on von Neumann's algebras are studied.Let M be factor,U- free ultrafilter on N.The Neumann's algebra C_M^U,absorbing the asymptotic properties of M,is canonically constructed.The C_M^U properties and structure are studied.The applications to quasi-local observation algebra are given.

ОБ ИТЕРАЦИЯХ ФОРМАЛЬНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Г.Р. Белицкий

Как известно, каждый линейный оператор $\Lambda \;:\; R^p \to R^p$, действующий в эвклидовом пространстве, степени которого растут не очень быстро

$$\Lambda^n = o\,(|n|) \qquad (n \to \pm\infty),$$

сопряжен с унитарным оператором. Аналогичный результат справедлив и для элементов группы обратимых формальных рядов.

Обозначим через $\mathcal{J}(p)$ пространство p -компонентных формальных степенных рядов от p переменных без свободного члена, с вещественными коэффициентами. Это пространство естественным образом раскладывается в прямую сумму

$$\mathcal{J}(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}^{(k)}(p),$$

где $\mathcal{J}^{(k)}(p)$ - подпространство однородных степени k полиномиальных отображений f : $R^p \to R^p$. В частности, подпространство $\mathcal{J}^{(1)}(p)$ совпадает с пространством всех линейных операторов $\Lambda : R^p \to R^p$. Если $F \in \mathcal{J}(p)$, то через $F^{(k)}$ будет обозначаться проекция ряда F на подпространство $\mathcal{J}^{(k)}(p)$.

Пространство $\mathcal{J}(p)$ является полугруппой (умножение-подстановка ряда в ряд). Каждый элемент $F \in \mathcal{J}(p)$ можно записать в виде

$$F(x) = \Lambda x + f(x), \quad f \in \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{J}^{(k)}(p),$$

где $\Lambda = F^{(1)} \in \mathcal{J}^{(1)}(p)$. Линейный оператор Λ называется линейным приближением ряда F . Подмножество $\mathcal{Y}(p) \subset \mathcal{J}(p)$ формальных рядов с невырожденным (обратимым) линейным приближением образует подгруппу. Полная линейная группа $GL(p) = \mathcal{J}^{(1)}(p) \cap \mathcal{Y}(p)$ является подгруппой группы $\mathcal{Y}(p)$.

Пусть $H_n \in \mathcal{J}(p)$ - какая-нибудь последовательность формальных рядов, а λ_n - последовательность вещественных чисел. Равенство

$$H_n = O(\lambda_n) \qquad (n \to \infty)$$

по определению означает, что

$$H_n^{(k)} = O(\lambda_n) \qquad (n \to \infty), \quad k = 1, 2, \dots .$$

Т е о р е м а I. Пусть степени формального ряда $F \in \mathcal{Y}(p)$ удовлетворяют условию

$$F^n = o(|n|^{\alpha}) \qquad (n \to \pm\infty)$$

при любом $\alpha > 0$. Тогда ряд F сопряжен (в группе $\mathcal{Y}(p)$) с линейным унитарным оператором $U \in GL(p)$.

Следствие. Каждый элемент порядка s группы $\mathcal{G}(p)$ имеет вид

$$F = \Phi \cdot U \cdot \Phi^{-1} \qquad (\Phi \in \mathcal{G}(p)),$$

где $U : R^p \to R^p$ элемент порядка s полной линейной группы $GL(p)$.

Это утверждение может быть получено и из "леммы об извлечении корня" (см. [I], стр. 42), которая, в свою очередь, допускает следующее обобщение:

Теорема 2. Пусть

$$F(x) = \Lambda x + f(x), \quad G(x) = \Lambda x + g(x), \quad f, g \in \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{J}^{(k)}(p)$$

–формальные ряды с одинаковым линейным приближением Λ, причем разность $f-g$ коммутирует с сопряженным оператором Λ^*. Если $F^n = G^n$ при некотором $n \geqslant 1$, то $F = G$.

Согласно [2] каждый формальный ряд $F \in \mathcal{J}(p)$ с линейным приближением Λ некоторым обратимым преобразованием $\Phi \in \mathcal{J}(p)$ может быть приведен к нормальной форме

$$\Phi \circ F \circ \Phi^{-1} = \Lambda x + f(x), \qquad f \in \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{J}^{(k)}(p),$$

где ряд f коммутирует с сопряженным оператором Λ^*. Из теоремы 2 вытекает

Следствие. Пусть F, G – формальные ряды с одинаковым линейным приближением, приведенные к нормальной форме. Если $F^n = G^n$ при некотором $n \geqslant 1$, то $F = G$.

Доказательство теоремы I. Так как условие "слабого роста степеней" инвариантно относительно сопряжения в группе $\mathcal{G}(p)$, то можно считать, что ряд F приведен к нормальной форме

$$F(x) = \Lambda x + f(x),$$

где ряд $f \in \sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{J}^{(k)}(p)$ коммутирует с оператором Λ^*. Из условия теоремы вытекает, в частности, что

$$\Lambda^n = o(|n|) \qquad (n \to \pm\infty),$$

поэтому оператор Λ можно считать унитарным: $\Lambda^* = \Lambda^{-1}$. Так как f коммутирует с Λ^*, то он, следовательно, коммутирует и с оператором $\Lambda = (\Lambda^*)^{-1}$. Далее

$$F^n x = \Lambda^n x + \Lambda^{n-1} f(x) + \Lambda^{n-2} f(Fx) + \ldots + f(F^{n-1} x).$$

Положим $F^n(x) = \Lambda^n x + f_n(x)$. Тогда

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \Lambda^{n-1-i} f(F^i x)$$

или

$$-f_n(x) + n\Lambda^{n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [\Lambda^{n-1} f(x) - \Lambda^{n-1-i} f(F^i x)].$$

Используя перестановочность f и Λ, получаем:

$$-f_n(x) + n\Lambda^{n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} [f(\Lambda^{n-1} x) - f(\Lambda^{n-1} x + \Lambda^{n-1-i} f_i(x))]$$

или

$$f(x)=\frac{\Lambda^{-n+1}}{n}f_n(x)+\frac{\Lambda^{-n+1}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(\Lambda^{n-1}x)-f(\Lambda^{n-1}x+\Lambda^{n-1-i}f_i(x))\right].$$

С помощью формулы для производной от сложной функции получаем

$$\|f^{(\kappa)}\|\leqslant\frac{1}{n}\|f_n^{(\kappa)}\|+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum\|f^{(\ell)}\|\cdot\|(\Lambda^{n-i-1}F^i)^{(j_1)}\|\cdots\|(\Lambda^{n-i-1}F^i)^{(j_\ell)}\|,$$

где внутренняя сумма берется по всем $\ell\leqslant\kappa-1$ и всем мультииндексам $j=(j_1,\dots,j_\ell)$, таким, что $j_1+\dots+j_\ell=\kappa$. Положим

$$a_{\kappa,n}=\max_{\substack{j\leqslant\kappa\\ \nu\leqslant n}}\|f_\nu^{(j)}\|,\quad a_{\kappa,0}=a_\kappa.$$

Тогда из предыдущего получаем рекуррентное неравенство

$$a_\kappa\leqslant\frac{1}{n}a_{\kappa,n}+a_{\kappa-1}\cdot a_{\kappa,n}^\kappa\cdot c_\kappa,\qquad \kappa,n=0,1,2,\dots,$$

где c_κ - некоторые константы. Положив

$$b_{\kappa,n}=\max(a_{\kappa,n};\,a_{\kappa,n}^\kappa\cdot c_\kappa),$$

это неравенство можно переписать в виде

$$a_\kappa\leqslant\frac{1}{n}b_{\kappa,n}+b_{\kappa,n}\cdot a_{\kappa-1}.$$

Отсюда, учитывая, что $a_0=a_1=0$, получаем

$$a_\kappa\leqslant\frac{1}{n}b_{\kappa,n}+\frac{1}{n}b_{\kappa,n}\cdot b_{\kappa-1,n}+\dots+\frac{1}{n}b_{\kappa,n}\cdot b_{\kappa-1,n}\dots b_{2,n}.$$

Пусть теперь $\alpha>0$ таково, что $\alpha\cdot\kappa<1$. Тогда в силу условия теоремы

$$b_{\kappa,n}\leqslant d_\kappa\cdot n^\alpha$$

при некоторых $d_\kappa>0$. Поэтому

$$a_\kappa\leqslant\frac{1}{n^{1-\kappa\alpha}}\theta_\kappa,\qquad \kappa,n=0,1,2,\dots$$

при некоторых $\theta_\kappa>0$. Отсюда

$$a_\kappa=0,\quad \kappa=1,2,\dots,$$

то есть $f=0$ и $F(x)=\Lambda(x)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Так как

$$F^nx=\Lambda^nx+\sum_{i=0}^{n-1}\Lambda^{n-1-i}f(F^ix),\quad G^nx=\Lambda^nx+\sum_{i=0}^{n-1}\Lambda^{n-1-i}g(G^ix)$$

и $F^n=G^n$, то

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Lambda^{n-1-i}\left[f(F^ix)-g(G^ix)\right]=0. \tag{1}$$

Докажем по индукции, что $f^{(\kappa)}=g^{(\kappa)}$, $\kappa=0,1,2\dots$ Это равенство очевидно при $\kappa=0,1$, так как $f(0)=f'(0)=g(0)=g'(0)=0$. Допустим, что оно уже доказано при всех $\kappa\leqslant\ell-1$. Тогда из (1) получаем

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Lambda^{n-1-i}\left[f^{(\ell)}(\Lambda^i)^{\otimes\ell}-g^{(\ell)}(\Lambda^i)^{\otimes\ell}\right]=0. \tag{2}$$

Положим $z = f^{(\ell)} - g^{(\ell)} \in \mathcal{J}^{(\ell)}(p)$ и обозначим через $A_\ell : \mathcal{J}^{(\ell)}(p) \to \mathcal{J}^{(\ell)}(p)$ линейный оператор, фигурирующий в (2). Тогда равенство (2) можно записать в виде

$$A_\ell z = 0.$$

По условию разность $f - g$ коммутирует с оператором Λ^*, откуда вытекает равенство

$$A_\ell^* z = z.$$

Так как $\operatorname{Im} A_\ell \cap \operatorname{Ker} A_\ell^* = \{0\}$, то, следовательно, $z = 0$, то есть $f^{(\ell)} = g^{(\ell)}$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ю. Мозер. Лекции о гамильтоновых системах, М., I974.

2. Г.Р. Белицкий. О нормальных формах локальных отображений, УМН, № I, I975.

ON ITERATIONS OF FORMAL POWER SERIES

G.R. Belitskii

Generalizations of two theorems on the iterations of formal power series are given. One of them is theorem of linearization of series with the bounded (in weak topology) sequence of iterations and another one is the so-called "lemma of evaluation of square root".

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

П.А. Мышкис

Пусть A – эллиптический псевдодифференциальный оператор в замкнутой ограниченной области. Известно (см. [1], [2]), что если индекс факторизации $\varkappa$ символа оператора отрицателен, то для фредгольмовости краевой задачи следует задавать $|\varkappa|$ потенциалов.

Пусть теперь Ω – $(n+1)$-мерная ограниченная область в R^{n+1} с гладкой границей Γ, разбитой гладким $(n-1)$-мерным многообразием ω на две части Γ_1 и Γ_2, $\omega = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$. Мы будем рассматривать следующую задачу с разрывными потенциалами

$$A(x, D_x)u(x) + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{|\varkappa|} G_{ij}(x, D_x)(\rho_{ij}(x')\delta(\Gamma)) = f(x), \tag{0.I}$$

где $x \in \Omega$, $x' \in \Gamma$, ρ_{ij} ищутся на Γ_i, $\delta(\Gamma)$ -дельта-функция, сосредоточенная на Γ.

Случай, когда A -оператор ньютоновского потенциала ($\varkappa$ = -I), изучался в работе [3]. Нами будет получена фредгольмовость задачи (0.I) для общего случая. При $\varkappa < -1$ мы накладываем дополнительное условие (2.3).

В § I вводятся функциональные пространства и классы операторов. Мы приводим необходимые определения и формулировки результатов работ [1], [2]. В § 2 исследуется задача в полупространстве для операторов с постоянными символами. В § 3 строятся регуляризаторы для задачи (0.I), откуда следуют априорная оценка и фредгольмовость.

§ I. ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

Через $H_{s,r}(R^{n+1})$ обозначается пространство Соболева-Слободецкого функций (обобщенных при $s < 0$) с нормой

$$\|f\|^2_{s,r} = \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|)^{2s} (1+|\xi'|)^{2r} |\tilde{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) = (\xi', \xi_{n+1}),$$

где $\tilde{f}(\xi) = Ff(x)$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, $x \in R^{n+1}$. Пространство функций $\tilde{f}(\xi)$ таких, что $f(x) \in H_{s,r}$ обозначается через $\tilde{H}_{s,r}$. Пусть $R^{n+1}_+ (R^{n+1}_-)$ -полупространство $x_{n+1} > 0$ $(x_{n+1} < 0)$. Через $\overset{\circ}{H}{}^+_{s,r}$ ($\overset{\circ}{H}{}^-_{s,r}$)обозначается подпространство функций $f(x) \in H_{s,r}$, имеющих носитель в $\overline{R}^{n+1}_+$ $(\overline{R}^{n+1}_-)$. Если $\theta(x_{n+1})$ – функция, равная I для $x_{n+1} > 0$ и 0 для $x_{n+1} < 0$, то разложению функции $f(x) \in H_{0,r}$ $f(x) = \theta(x) f(x) + (1-\theta(x))f(x)$ соответствует разложение в $\tilde{H}_{0,r}$ $\tilde{f}(\xi) = \Pi^+ \tilde{f} + \Pi^- \tilde{f}$. Оператор Π^+ ограничен в пространствах $\tilde{H}_{\delta,r}$ при $|\delta| < \frac{1}{2}$, причем $\Pi^+ \tilde{H}_{\delta,r} = \tilde{\overset{\circ}{H}}{}^+_{\delta,r}$.

Пространство $H_{s,r}(R^{n+1}_+)$ состоит из функций, заданных в R^{n+1}_+, с нормой $\|f\|^+_{s,r} = \inf \|\ell f\|_{s,r}$, где нижняя грань берется по всем продолжениям ℓf функции $f(x)$. Эквивалентная норма может быть задана по формуле

$$\|f\|^+_{s,r} = \|\Pi^+ (\xi_{n+1} - i|\xi'| - i)^s \, \widetilde{\ell f}(\xi)\|_{0,r}.$$

Пусть P^+ – оператор сужения функции $f(x)\in H_{s,r}$ на R_+^{n+1}. Пространство $H_{s,r}^+$ при $s<\frac{1}{2}$ совпадает с $\overset{\circ}{H}{}_{s,r}^+$, а при $s\geqslant\frac{1}{2}$ состоит из функций $f_+(x)$, равных нулю при $x_{n+1}<0$, для которых $P^+f_+(x)\in H_{s,r}(R_+^{n+1})$.

Если через γ обозначить оператор сужения на R^n ($x_{n+1}=0$), то Π' – образ Фурье оператора γ. Для достаточно гладких функций $f(x)$ оператор Π' задается формулой

$$\Pi'\tilde{f}(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\xi',\xi_{n+1})\,d\xi_{n+1}.$$

Операторы Π^+ и Π' связаны соотношением

$$\Pi^+=\sum_{j=1}^{m}i\,\hat{\xi}_+^{-j}\,\Pi'\,\hat{\xi}_+^{j-1}+\hat{\xi}_+^{-m}\,\Pi^+\hat{\xi}_+^{m}, \tag{I.1}$$

где $\xi_+=\xi_{n+1}+i\,|\xi'|$. Здесь также использовано обозначение

$$\hat{A}(x,\xi)=A\Big(x,\frac{1+|\xi''|}{|\xi''|}\xi'',\xi_n,\xi_{n+1}\Big),\qquad \xi=(\xi'',\xi_n,\xi_{n+1}). \tag{I.2}$$

Через $H_s'(R^n)$ обозначается пространство функций с нормой

$$\|f(x')\|_s'^2=\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi'|)^{2s}\,|\tilde{f}(\xi')|^2\,d\xi',$$

и через $\overset{\circ}{H}{}_s'^{+}$ $(\overset{\circ}{H}{}_s'^{-})$ обозначается подпространство функций $f(x')\in H_s'$, имеющих носитель в $\bar{R}_+^n$ $(\bar{R}_-^n)$. Оператор Π_n', действующий на функциях $\tilde{f}(\xi')\in\tilde{H}_0'$, определяется аналогично Π'. Так определенный оператор Π_n' действует ограниченно из $\tilde{H}_\delta'$ в $\overset{\circ}{H}{}_\delta'^{+}$ при $|\delta|<\frac{1}{2}$.

Класс символов $D_\alpha^{(0)}$ состоит, вообще говоря, из матриц $A(x,\xi)$, зависящих от $x\in R^{n+1}$ и $\xi\in R^{n+1}$ и обладающих следующими свойствами:

1) $A(x,\xi)$ – однородная матрица по ξ при $|\xi|\geqslant 1$ порядка $\alpha+i\beta$, $(\alpha,\beta)\in R^1\times R^1$;

2) $A(x,\xi)\in C^\infty$ по $(x,\xi)\in R^{n+1}\times R^{n+1}$;

3) для любого $k=(k_1,\dots,k_n)$ и любого элемента $a_{ij}(x,\xi)$ матрицы $A(x,\xi)$

$$\frac{\partial^k}{\partial\xi'^k}a_{ij}(x,0,-1)=(-1)^{|k|}e^{-(\alpha+i\beta)\pi i}\frac{\partial^k}{\partial\xi'^k}a_{ij}(x,0,+1).$$

Пусть A – оператор, естественно построенный по символу $A(x,\xi)\in D_\alpha^{(0)}$, и оператор $\hat{A}$ строится по $\hat{A}(x,\xi)$ (см. (I.2)). Тогда оператор $P^+\hat{A}$ – ограничен

$$\|P^+\hat{A}u_+\|_{s-\alpha,r}^+\leqslant C_{s,r}\|u_+\|_{s,r}^+,\quad \forall s,r. \tag{I.3}$$

Оператор типа потенциала тоже ограничен

$$\|P^+\hat{A}(\rho(x')\delta(x_{n+1}))\|_{s-\alpha,r}^+\leqslant C_{s,r}\|\rho\|_{s+r+\frac{1}{2}}',\quad \forall s,r. \tag{I.4}$$

Наконец, для оператора сужения на границу

$$\|\gamma\hat{A}u_+\|_{s-\alpha+r-\frac{1}{2}}'\leqslant C_{s,r}\|u_+\|_{s,r}^+,\quad \forall r,\quad \forall s>\alpha+\tfrac{1}{2}. \tag{I.5}$$

Если $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C_0^\infty(R^{n+1})$, то выполнена оценка

$$\|P^+\psi(A-\hat{A})\varphi u_+\|_{s-\alpha+\varepsilon,r}^+\leqslant C_{s,r}\|u_+\|_{s,r}^+,\quad \forall s,r,\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{I.6}$$

Если $\psi(x')=0$ при $|x'-x_0'|>\delta$, $|\psi(x')|<k$, где k не зависит от δ и оператор $\hat{A}_0$ в R^n строится по символу $\hat{A}(x_0',\xi')$, а оператор $\hat{A}$ по символу

$\hat{A}(x', \xi')$, то

$$\|\psi(\hat{A}-\hat{A}_0)\rho(x')\|'_{s-\alpha} \leqslant C_s\delta\|\rho\|'_s + C_{s,\delta}\|\rho\|'_{s+1}. \qquad (1.7)$$

Напомним определение эллиптичности. Класс $\mathcal{E}_\alpha$ состоит, в общем случае, из матриц $A(x,\xi)$, обладающих следующими свойствами:

1) $A(x,\xi)$ - однородная матрица по ξ при $|\xi|\geqslant 1$ порядка $\alpha+i\beta$, $(\alpha,\beta)\in R^1\times R^1$;

2) $A(x,\xi)\in C^\infty$ по x и удовлетворяет на сфере $|\xi|=1$ условию Липшица по ξ ;

3) $\det A(x,\xi)\neq 0$ при $|\xi|=1$.

Далее для простоты будем считать $\beta=0$. Порядок однородности символа $A(x,\xi)$ будем обозначать через $ord\, A(x,\xi)$.

Очевидно, что если $A(x,\xi)\in D^{(0)}_\alpha$, $A(x,\xi)\in\mathcal{E}_\alpha$, то $\hat{A}^{-1}(x,\xi)\in D^{(0)}_{-\alpha}$.

§ 2. ЗАДАЧА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $A(\xi)=A_+(\xi)A_-(\xi)$ - факторизация символа $A(\xi)\in\mathcal{E}_\alpha$ по переменной ξ_{n+1} (см. [1]) и $\varkappa$ - индекс факторизации, т.е. $\varkappa = ord\, A_+(\xi)$. Напомним, что в данной работе рассматривается случай $\varkappa<0$. Как показано в [1], если $A(\xi)\in D^{(0)}_\alpha$, то $ord\, A_+(\xi)$ - число целое.

Будем решать следующую з а д а ч у 2.1

$$P^+F^{-1}(\hat{A}(\xi)\tilde{u}_+(\xi)+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|\varkappa|}\hat{G}_{ij}(\xi)\tilde{\rho}_{ij}(\xi'))=f(x),\ x\in R^{n+1}_+, \qquad (2.1)$$

где скалярная функция $A(\xi)\in\mathcal{E}_\alpha$, $A(\xi)\in D^{(0)}_\alpha$, $G_{ij}(\xi)\in D^{(0)}_{\alpha_{ij}}$.

Мы потребуем выполнения естественного условия типа Шапиро-Лопатинского:

$$\det B_i(\xi')\neq 0 \ \text{ при } \ |\xi'|=1, \quad i=1,2, \qquad (2.2)$$

где $B_i=\|b_{ikj}\|^{|\varkappa|}_{k,j=1}$, $b_{ikj}(\xi')=\Pi'\xi_+^{k-1}A_-^{-1}(\xi)G_{ij}(\xi)$. Можно показать, что $ord\, b_{ikj}=\alpha_{ij}-\alpha-|\varkappa|+k$.

Обозначим $B(\xi')=B_2^{-1}B_1$, $B=\|b_{kj}\|$. Легко видеть, что $ord\, b_{kj}=\alpha_{1j}-\alpha_{2k}$, и, следовательно,

$$B(\xi')=N_-B_0(\xi')N_+,$$

где $N_-=\|(\xi'_-)^{-\alpha_{2j}}\delta_{kj}\|^{|\varkappa|}_{k,j=1}$, $N_+=\|(\xi'_+)^{\alpha_{1j}}\delta_{kj}\|^{|\varkappa|}_{k,j=1}$, $\xi'_\pm=\xi_n\pm i|\xi''|, B_0(\xi')\in\mathcal{E}_0$.

Мы видим, что выполнены условия факторизации матрицы $B_0(\xi')$ (см. [2]).

Наложим дополнительно условие на частные индексы $\varkappa_j$ матрицы $B_0(\xi')$:

$$\varkappa_j=n+\gamma_j, \quad -\frac{1}{2}<Re\,\gamma_j\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (2.3)$$

Тогда существует локально непрерывная по ξ'' факторизация матрицы B_0 по переменной ξ_n

$$B_0=B_-(\xi')M_-M_+B_+(\xi'),$$

где $M_+=\|(\xi'_+)^n\delta_{kj}\|$, $M_-=\|(\xi'_-)^{-n}\delta_{kj}\|$.

Пусть $\bar{\varkappa}: |\bar{\varkappa}-Re\,\varkappa_j|<\frac{1}{2}$, $\forall j$.

Задачу (2.1) мы будем называть э л л и п т и ч е с к о й, если выполнены условия (2.2) и (2.3). Докажем теорему.

Т е о р е м а 2.1. Эллиптическая задача 2.1 имеет единственное решение $u_+\in H^+_{s,r}(R^{n+1})$, $\rho_{1j}\in\mathring{H}'^{+}_{\bar{\varkappa}+\alpha_{1j}}$, $\rho_{2j}\in\mathring{H}'^{-}_{\bar{\varkappa}+\alpha_{2j}}$, если $f(x)\in H_{s-\alpha,r}(R^{n+1}_+)$, $s\geqslant 0$, $r=\bar{\varkappa}+\alpha-s-\frac{1}{2}$.

Доказательство. Из (2.I) следует

$$\hat{A}_+(\xi)\tilde{u}_+(\xi)+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|æ|}\hat{A}_-^{-1}(\xi)\hat{G}_{ij}(\xi)\tilde{\rho}_{ij}(\xi')=\hat{A}_-^{-1}\widetilde{\ell f}(\xi)+\tilde{u}_-(\xi),$$

где $\ell f\in H_{s-\alpha,r}$, $u_-\in\mathring{H}^-_{s-æ,r}$. $\Pi^+\tilde{u}_-=0$, так как $s-æ>0$. Тогда

$$\tilde{u}_+(\xi)=\hat{A}_+^{-1}\Pi^+\hat{A}_-^{-1}\widetilde{\ell f}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|æ|}\hat{A}_+^{-1}\Pi^+\hat{A}_-^{-1}\hat{G}_{ij}\tilde{\rho}_{ij}(\xi').$$

Воспользуемся формулой (I.I)

$$\tilde{u}_+=\sum_{k=1}^{|æ|}\hat{A}_+^{-1}\hat{\xi}_+^{-k}(\Pi'\hat{\xi}_+^{k-1}\hat{A}_-^{-1}\widetilde{\ell f}-\tilde{\rho}_{ij}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|æ|}\Pi'\hat{\xi}_+^{k-1}\hat{A}_-^{-1}\hat{G}_{ij})+$$
$$+\hat{A}_+^{-1}\hat{\xi}_+^{æ}(\Pi^+\hat{\xi}_+^{|æ|}\hat{A}_-^{-1}\widetilde{\ell f}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|æ|}\Pi^+\hat{\xi}_+^{|æ|}\hat{A}_-^{-1}\hat{G}_{ij}\tilde{\rho}_{ij}). \tag{2.4}$$

Обозначим $\mathcal{F}_k(\xi')=\Pi'\hat{\xi}_+^{k-1}\hat{A}_-^{-1}\widetilde{\ell f}$, $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_{|æ|})$, $\tilde{\rho}_i=(\tilde{\rho}_{i1},\ldots,\tilde{\rho}_{i|æ|})$, $i=$ I, 2. В силу (I.5) $\mathcal{F}_k\in H'_{s+|æ|+r-k+\frac{1}{2}}$. Тогда первая сумма в (2.4) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{|æ|}\hat{A}_+^{-1}\hat{\xi}_+^{-k}(\mathcal{F}_k-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|æ|}\hat{b}_{ikj}(\xi')\tilde{\rho}_{ij}(\xi')). \tag{2.5}$$

Будем искать ρ_{ij} так, чтобы в (2.5) обращались в ноль все слагаемые внешней суммы. Получаем систему парных уравнений

$$\hat{B}_1\tilde{\rho}_1+\hat{B}_2\tilde{\rho}_2=\mathcal{F}.$$

Ее решение (см. [2]) имеет вид

$$\tilde{\rho}_1(\xi')=\hat{N}_+^{-1}\hat{B}_+^{-1}\hat{M}_+^{-1}\Pi_n^+\hat{M}_-^{-1}\hat{B}_-^{-1}\hat{N}_-^{-1}\hat{B}_2^{-1}\mathcal{F}, \tag{2.6}$$

$$\tilde{\rho}_2(\xi')=\hat{N}_-\hat{B}_-\hat{M}_-\Pi_n^-\hat{M}_-^{-1}\hat{B}_-^{-1}\hat{N}_-^{-1}\hat{B}_2^{-1}\mathcal{F}. \tag{2.6'}$$

Все операторы в (2.6) и (2.6') действуют ограниченно (см. (I.3), (I.4), (I.5)) в соответствующих пространствах. Легко видеть, что $\hat{M}_-^{-1}\hat{N}_-^{-1}\hat{B}_2^{-1}\mathcal{F}\in H'_{s+r-\alpha-æ+\frac{1}{2}}-H'_{æ-n}$ и по лемме 4.4 из [2] $\rho_{1j}\in\mathring{H}'^{+}_{æ+\alpha_{1j}}$, $\rho_{2j}\in\mathring{H}'^{-}_{æ+\alpha_{2j}}$ и их нормы оцениваются через $\|f\|^+_{s-\alpha,r}$.

Итак

$$\tilde{u}_+(\xi)=\hat{A}_+^{-1}\hat{\xi}_+^{æ}(\Pi^+\hat{\xi}_+^{|æ|}\hat{A}_-^{-1}\widetilde{\ell f}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|æ|}\Pi^+\hat{\xi}_+^{|æ|}\hat{A}_-^{-1}\hat{G}_{ij}\tilde{\rho}_{ij}). \tag{2.7}$$

Априорная оценка

$$\|u_+\|^+_{s,r}\leqslant C\,\|f\|^+_{s-\alpha,r}$$

следует из оценок норм ρ_{ij} и неравенств (I.3), (I.4) и (I.5).

§ 3. ЗАДАЧА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Определение эллиптичности из § 2 для краевой задачи в полупространстве стандартным образом ([2]) переносится на задачу (0.I) в ограниченной области. В этом параграфе мы построим регуляризаторы к эллиптической задаче (0.I) в ограниченной области. Построение этих регуляризаторов путем разбиения единицы ([2]) сводится к построению регуляризаторов для операторов в полупространстве со слабо меняющимися коэффициентами. Итак, пусть (0.I) - эллиптическое уравнение в полупространстве со слабо меняющимися коэффициентами. Неравенство (I.6) показывает, что от операторов с символами $A(x,\xi)$, $G_{ij}(x,\xi)$.

можно при построении регуляризаторов перейти к операторам с символами $\hat{A}(x,\xi)$, $\hat{G}_{ij}(x,\xi)$, что мы и сделаем.

Сначала по формулам, аналогичным (2.6), (2.6′) и (2.7), мы построим регуляризатор с точностью до оператора, норму которого можно сделать достаточно малой.

Начиная с этого места для сокращения записи действия оператора $FA(x,D_x)F^{-1}$, где F – преобразование Фурье, будем писать просто множитель $A(x,\xi)$.

Определим $\tilde{u}'_+(\xi)$ по формуле

$$\tilde{u}'_+(\xi)=\hat{A}_+^{-1}(x,\xi)\hat{\xi}_+^{\varkappa}\left(\Pi^+\hat{\xi}_+^{|\varkappa|}\hat{A}_-^{-1}(x,\xi)\widetilde{\ell f}-\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|\varkappa|}\Pi^+\hat{\xi}_+^{|\varkappa|}\hat{G}_{ij}(x,\xi)\tilde{\rho}'_{ij}\right), \qquad (3.1)$$

аналогичной (2.7). Точно также положим

$$\tilde{\rho}'_1(\xi')=\hat{N}_+^{-1}\hat{B}_+^{-1}(x'_0,\xi')\hat{M}_+^{-1}\Pi_n^+\hat{M}_-^{-1}\hat{B}_-^{-1}(x'_0,\xi')\hat{N}_-^{-1}\hat{B}_2^{-1}(x';\xi')\mathcal{F}, \qquad (3.2)$$

$$\tilde{\rho}'_2(\xi')=\hat{N}_-\hat{B}_-(x'_0,\xi')\hat{M}_-\Pi_n^-\hat{M}_-^{-1}\hat{B}_-^{-1}(x'_0,\xi')\hat{N}_-^{-1}\hat{B}_2^{-1}(x',\xi')\mathcal{F}, \qquad (3.2')$$

где $\mathcal{F}=(\mathcal{F}_1,\dots,\mathcal{F}_{|\varkappa|})$,

$$\mathcal{F}_k(\xi')=\Pi'\hat{\xi}_+^{k-1}\hat{A}_-^{-1}(x,\xi)\widetilde{\ell f}(\xi),\quad k=1,\dots,|\varkappa|.$$

Обозначим $(\tilde{U}'_+,\tilde{\rho}'_1,\tilde{\rho}'_2)$ через $\tilde{U}'_+$. Тогда уравнения (3.1), (3.2), (3.2′) можно записать, как $\tilde{U}'_+=\mathcal{R}'\widetilde{\ell f}$.

Уравнение (0.1)

$$\hat{A}(x,\xi)\tilde{u}_+(\xi)+\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|\varkappa|}\hat{G}_{ij}(x,\xi)\tilde{\rho}_{ij}(\xi')=\widetilde{\ell f}+\tilde{u}_- \qquad (3.3)$$

запишем в виде $\mathfrak{A}U_+=\widetilde{\ell f}+\tilde{u}_-$.

Покажем, что

$$\mathcal{R}'\hat{\mathfrak{A}}\tilde{U}_+=\tilde{U}_++T_1\tilde{U}_++T_2\tilde{U}_++\tilde{U}_-, \qquad (3.4)$$

$$\hat{\mathfrak{A}}\mathcal{R}'\widetilde{\ell f}=\tilde{f}_++T'_1\widetilde{\ell f}+T'_2\widetilde{\ell f}+\tilde{f}_-, \qquad (3.4')$$

где $U_-=(u_-,0,0)$, $u_-(x)=0$ при $x_{n+1}>0$, $f_-(x)=0$ при $x_{n+1}>0$. T_1 и T'_1 – операторы с малой нормой, T_2 и T'_2 – сглаживающие операторы.

Проверим, например, формулу (3.4). Пусть для простоты $\varkappa=-1$. Выпишем у $\mathcal{R}'\hat{\mathfrak{A}}\tilde{U}_+$ сначала вторую строку, т.е. подставим (3.3) в (3.2)

$$\tilde{\rho}'_1(\xi')=\hat{N}_+^{-1}\hat{B}_+^{-1}(x'_0,\xi')\hat{M}_+^{-1}\Pi_n^+\hat{M}_-^{-1}\hat{B}_-^{-1}(x'_0,\xi')\hat{N}_-^{-1}\hat{B}_2^{-1}(x',\xi')\times$$
$$\times(\Pi'\hat{A}_-^{-1}(x,\xi)(\hat{A}(x,\xi)\tilde{u}_+(\xi)+\hat{G}_1(x,\xi)\tilde{\rho}_1(\xi')+\hat{G}_2(x,\xi)\tilde{\rho}_2(\xi')).$$

Умножая оператор $\hat{A}_-^{-1}(x,\xi)$ на $\hat{A}(x,\xi)$, $\hat{G}_1(x,\xi)$ и $\hat{G}_2(x,\xi)$, получим по лемме о коммутации ([1])

$$\tilde{\rho}'_1(\xi')=\hat{N}_+^{-1}\hat{B}_+^{-1}(x'_0,\xi')\hat{M}_+^{-1}\Pi_n^+\hat{M}_-^{-1}\hat{B}_-^{-1}(x'_0,\xi')\hat{N}_-^{-1}\hat{B}_2(x',\xi')\times$$
$$\times(\Pi'\hat{A}_+(x,\xi)\tilde{u}_++\hat{B}_1(x',\xi')\tilde{\rho}_1+\hat{B}_2(x',\xi')\tilde{\rho}_2)+T\tilde{u}_++T'\tilde{\rho}_1+T''\tilde{\rho}_2,$$

где T, T', T'' – сглаживающие операторы.

Заметим, что $\hat{A}_+(x,\xi)\tilde{u}_+\in\overset{\circ}{H}{}^+_{1,r_A}$ $(s>0)$. Следовательно, $\Pi'\hat{A}_+(x,\xi)\tilde{u}_+=0$. Умножая оператор $\hat{B}_1^{-1}(x',\xi')$ на $\hat{B}_1(x',\xi')$ и $\hat{B}_2(x',\xi')$, получим

$$\tilde{\rho}'_1(\xi')=\hat{N}_+^{-1}\hat{B}_+^{-1}(x'_0,\xi')\hat{M}_+^{-1}\Pi_n^+\hat{M}_-^{-1}\hat{B}_-^{-1}(x'_0,\xi')\hat{N}_-^{-1}[\hat{B}(x',\xi')\tilde{\rho}_1+\tilde{\rho}_2]+$$
$$+T\tilde{u}_++T'\tilde{\rho}_1+T''\tilde{\rho}_2,$$

где T, T', T'' – сглаживающие операторы.

Заменим $\hat{B}(x', \xi')$ на $\hat{B}(x'_0, \xi')$ и по (I.7)

$$\tilde{\rho}'_1(\xi') = \hat{N}_+^{-1} \hat{B}_+^{-1}(x'_0, \xi') \hat{M}_+^{-1} \Pi_n^+ \hat{M}_-^{-1} \hat{B}_-^{-1}(x'_0, \xi') \hat{N}_-^{-1} [\hat{B}(x'_0, \xi') \tilde{\rho}_1 + T_1 \tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2] + $$
$$+ T\tilde{u}_+ + T'\tilde{\rho}_1 + T''\tilde{\rho}_2 ,$$

где T_1 - оператор с малой нормой.

Учитывая, что для символов выполнено соотношение (см. § 2)

$$\hat{B}(x'_0, \xi') = \hat{N}_- \hat{B}_-(x'_0, \xi') \hat{M}_- \hat{M}_+ \hat{B}_+(x'_0, \xi') \hat{N}_+ ,$$

получим:

$$\tilde{\rho}'_1(\xi') = \hat{N}_+^{-1} \hat{B}_+^{-1}(x'_0, \xi') \hat{M}_+^{-1} \Pi_n^+ [\hat{M}_+ \hat{B}_+(x'_0, \xi') \hat{N}_+ \tilde{\rho}_1 + \hat{M}_-^{-1} \hat{B}_-^{-1}(x'_0, \xi') N_-^{-1} \tilde{\rho}_2] +$$
$$+ T'_1 \tilde{\rho}_1 + T\tilde{u}_+ + T'\tilde{\rho}_1 + T''\tilde{\rho}_2 .$$

Но $\Pi_n^+ \hat{M}_+ \hat{B}_+(x'_0, \xi') \hat{N}_+ \tilde{\rho}_1 = \hat{M}_+ \hat{B}_+(x'_0, \xi') \hat{N}_+ \hat{\rho}_1$ и $\Pi_n^+ \hat{M}_-^{-1} \hat{B}_-^{-1}(x'_0, \xi') \hat{N}_-^{-1} \tilde{\rho}_2 = 0$.

Следовательно,

$$\tilde{\rho}'_1(\xi') = \tilde{\rho}_1(\xi') + T'_1 \tilde{\rho}_1 + T\tilde{u}_+ + T'\tilde{\rho}_1 + T''\tilde{\rho}_2 , \tag{3.5}$$

где норма T'_1 может быть сделана достаточно малой, T , T' , T'' - сглаживающие операторы, т.е.

$$\| T\tilde{u}_+ \|'_{\bar{æ} + \alpha_{11} + \varepsilon} \leqslant C \| u_+ \|^+_{s,r} , \quad \| T'\tilde{\rho}_1 \|'_{\bar{æ} + \alpha_{11} + \delta} \leqslant C \| \rho_1 \|'_{\bar{æ} + \alpha_{11}} ,$$
$$\| T''\tilde{\rho}_2 \|'_{\bar{æ} + \alpha_{11} + \gamma} \leqslant C \| \rho_2 \|'_{\bar{æ} + \alpha_{21}} ,$$

где $|\bar{æ} - \operatorname{Re} æ_j| < \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, $\gamma > 0$.

Точно также доказывается аналогичная формула

$$\tilde{\rho}'_2(\xi') = \tilde{\rho}_2(\xi') + T_1 \tilde{\rho}_2 + T\tilde{u}_+ + T'\tilde{\rho}_1 + T''\tilde{\rho}_2 . \tag{3.5'}$$

Проверим теперь первую строчку в формуле (3.4), подставляя (3.3) в (3.I)

$$\tilde{u}'_+(\xi) = \hat{A}_+^{-1}(x, \xi) \hat{\xi}_+^{æ} \{ \Pi^+ \hat{\xi}_+^{|æ|} \hat{A}_-^{-1}(x, \xi) [\hat{A}(x, \xi) \tilde{u}_+ + \sum_{i=1}^{2} \hat{G}_i(x, \xi) \tilde{\rho}_i] -$$
$$- \sum_{i=1}^{2} \Pi^+ \hat{\xi}_+^{|æ|} \hat{A}_-^{-1}(x, \xi) \hat{G}_i(x, \xi) \tilde{\rho}'_i \} . \tag{3.6}$$

Выделим из (3.6) первое слагаемое и преобразуем его

$$\tilde{u}''_+(\xi) = \hat{A}_+^{-1}(x, \xi) \hat{\xi}_+^{æ} \Pi^+ \hat{\xi}_+^{|æ|} \hat{A}_-^{-1}(x, \xi) \hat{A}(x, \xi) \tilde{u}_+(\xi) =$$
$$= \hat{A}_+^{-1}(x, \xi) \hat{\xi}_+^{æ} \Pi^+ \hat{\xi}_+^{|æ|} [\hat{A}_+(x, \xi) \tilde{u}_+(\xi) + T\tilde{u}_+] ,$$

где

$$\| T\tilde{u}_+ \|^+_{s - æ + \varepsilon, r} \leqslant C \| u_+ \|^+_{s,r} , \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1 \tag{3.7}$$

по лемме о коммутации из [I] .

Если бы, как в [2] , в операторе $\mathcal{R}'$ вместо $\hat{A}_-^{-1}(x, \xi)$ был взят оператор с символом $\hat{A}_-^{-1}(x_0, \xi)$, то оператор T был равен следующей сумме

$$T\tilde{u}_+ = [(\hat{A}_-^{-1}(x_0, \xi) - \hat{A}_-^{-1}(x, \xi)) \hat{A}(x, \xi)] \tilde{u}_+ + [\hat{A}_-^{-1}(x, \xi) \hat{A}(x, \xi) - \hat{A}_+(x, \xi)] \tilde{u}_+ = T_1 \tilde{u}_+ + T_2 \tilde{u}_+ .$$

Здесь для T_2 выполнена оценка (3.7), а для T_1 (см. [2])

$$\| T_1 \tilde{u}_+ \|^+_{s - æ, r + \varepsilon} \leqslant C \| u_+ \|^+_{s,r} , \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1 .$$

Это не дает возможности вполне доказать непрерывность T_1.

Таким образом, "замораживание" коэффициентов всех символов не дает регуляризатора задачи (0.I). В работе [2] авторам удалось для $\varkappa > 0$ получить нужный результат, используя искусственные построения. Наша конструкция оператора $\mathcal{R}'$ позволяет избежать этих осложнений.

Вернемся к доказательству формулы (3.4). Так как $F^{-1}\hat{\xi}^{|\varkappa|}\hat{A}_+(x,\xi)\tilde{u}_+ \in \overset{\circ}{H}{}^+_{0,r}$, то $\Pi^+\hat{\xi}_+^{|\varkappa|}\hat{A}_+(x,\xi)\tilde{u}_+ = \hat{\xi}_+^{|\varkappa|}\hat{A}_+(x,\xi)\tilde{u}_+$.
Следовательно,

$$\tilde{u}''_+ = \hat{A}_+^{-1}(x,\xi)\hat{\xi}_+^{\varkappa}\hat{\xi}_+^{-\varkappa}\hat{A}_+(x,\xi)\tilde{u}_+ + T'\tilde{u}_+ = \tilde{u}_+ + T''\tilde{u}_+,$$

где $\|T''\tilde{u}_+\|^+_{s+\varepsilon,r} \leqslant C\|u_+\|^+_{s,r}$, $\varepsilon > 0$.

Это вместе с (3.5) и (3.5′) дает первую строку формулы (3.4), (3.4′) доказывается аналогично.

Путем измельчения разбиения единицы можно сделать нормы T_1 и T' в формулах (3.4) и (3.4′) меньше I. Это дает возможность построить к эллиптической задаче (0.I) в ограниченной области левый и правый регуляризаторы и получить априорную оценку для ее решения.

Введем, как и в [2], пространство $H_{(s),(r)}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{(s),(r)} = \sum_{\ell}\|S_{\ell}^{-1}\varphi_{\ell}u\|^+_{s_{\ell},r_{\ell}},$$

где $\{\varphi_{\ell}, V_{\ell}\}$ – разбиение единицы, S_{ℓ}^{-1} – оператор перехода из исходной системы координат в локальную (выпрямляющую границу). Аналогично определим $\overset{\circ}{H}_{(s)}(\Gamma_1)$ и $\overset{\circ}{H}_{(s)}(\Gamma_2)$.

Поскольку мы построили регуляризаторы к эллиптической задаче (0.I), у которой символы операторов $A(x,\xi) \in \mathcal{D}^{(0)}_{\alpha}$, $G_{ij}(x,\xi) \in \mathcal{D}^{(0)}_{\alpha_{ij}}$ в локальных системах координат, нами доказана следующая теорема:

Т е о р е м а 3.I. Пусть оператор A эллиптичен внутри области Ω, вблизи границы Γ в каждой локальной системе координат выполнено условие (2.2) и вблизи $\omega = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$ выполнено при $\varkappa < _{|\varkappa|}1_0$ условие (2.4). Тогда уравнение (0.I) определяет – оператор из $H_{(s),(r)}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{|\varkappa|}\overset{\circ}{H}_{(\bar\varkappa)+\alpha_{1j}}(\Gamma_1) \times \prod_{j=1}^{|\varkappa|}\overset{\circ}{H}_{(\bar\varkappa)+\alpha_{2j}}(\Gamma_2)$ в $H_{(s)-\alpha,(r)}(\Omega)$. Имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{(s),(r)} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|\varkappa|}\|\rho_{ij}\|'_{(\bar\varkappa)+\alpha_{ij}} \leqslant$$
$$\leqslant C(\|f\|_{(s)-\alpha,(r)} + \|u\|_{(s)-\delta,(r)} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|\varkappa|}\|\rho_{ij}\|'_{(\bar\varkappa)+\alpha_{ij}-\delta_{ij}}),$$

где $\delta > 0$, $\delta_{ij} > 0$, $s > 0$, $\bar\varkappa(x)$ – такая кусочно-постоянная функция, что

$$|\bar\varkappa(x) - \mathrm{Re}\,\varkappa_j(x)| < \tfrac{1}{2},\ j = 1,\dots,|\varkappa|,\ x \in V_{\ell},\ V_{\ell} \cap \omega \neq \phi,$$
$$r(x) = \bar\varkappa(x) + \alpha - s - \tfrac{1}{2}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. М.И. Вишик, Г.И. Эскин. Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, 20, вып. 3 (I23), I965, 89-I52.

2. М.И. Вишик, Г.И. Эскин. Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения, УМН, 22, вып.I (I33), I967, I5-76.

3. Р.Л. Шахбагян. Уравнения в свертках в полупространстве. Математический сборник, 70, № 2, I966, 266-296.

BOUNDARY PROBLEM FOR ELLIPTIC PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS POTENTIALS

P.A.Mishkis

The left and the right regularizators are created in the paper; whence an a priori estimation and fredholmity take place for the problem,mentioned in the headline,in the limited closed domain in Sobolev-Slobodetskii's spaces of functions.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ГИДРОМЕХАНИКЕ НЕВЕСОМОСТИ *)

В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский, А.Д. Мышкис, Л.А. Слобожанин, А.Д.Тюпцов

В работе дается краткий обзор исследований по приближенным и численным методам в механике капиллярной жидкости, выполненных в последние годы в отделе прикладной математики Физико-технического института низких температур АН УССР. Рассматриваются как традиционные вопросы гидростатики и малых колебаний, так и новые задачи: ветвление и запас устойчивости равновесных состояний жидкости в сосуде, колебания вращающейся жидкости, термокапиллярная конвекция и др.

I. Предмет гидромеханики невесомости. В связи с развитием космической техники появился ряд новых задач о поведении жидкости в условиях невесомости или близких к ним. Отличительной чертой таких задач является то, что в них важную роль играют поверхностные (капиллярные) силы, которые приводят к появлению характерных особенностей как в поведении жидкости, так и в его математическом описании.

Жидкость находится в условиях невесомости или близких к ним, когда действующие на нее объемные силы настолько ослабевают, что становятся сравнимыми с силами поверхностного натяжения (частичная невесомость), либо пренебрежимо малыми (полная невесомость). Такие условия могут иметь место, если рассматриваемое тело с жидкостью находится вдали от тяготеющих масс, в состоянии свободного падения или имеет весьма малые размеры. Жидкость, на поведении которой существенно сказываются силы поверхностного натяжения, будем называть капиллярной.

Задачи механики капиллярной жидкости восходят еще к Плато, Рэлею и Кирхгофу, однако лишь в недавнее время было начато их широкое исследование, в частности, в направлении расчета равновесных форм поверхности жидкости в сосуде, их устойчивости и запаса устойчивости, резонансных частот колебаний капиллярной жидкости, возникновения и развития термокапиллярной конвекции. Подобная ориентация научных работ связана с практической важностью сведений о том, где располагается жидкость в сосуде, не обрушится ли она на внутренние устройства, потеряв устойчивость под действием внешних возмущений; для проектирования систем управления космических аппаратов необходимы сведения о собственных частотах и формах колебаний жидкости, частично заполняющей полости этих аппаратов; работа систем хранения топлива определяется правильностью и точностью расчета процессов теплообмена в жидкости в условиях невесомости.

Решение этих задач возможно лишь с применением всех средств современной вычислительной математики и ЭВМ. Многие другие важные задачи, например, о движениях с большой амплитудой капиллярной жидкости или пузырей в сосуде, пока слишком сложны даже для мощных ЭВМ.

Мы остановимся подробнее на наиболее интересном с практической точки зрения случае, когда сосуд и равновесное положение жидкости в нем осесимметричны, а действующие на жидкость массовые силы являются силами инерции, которые возникают при вращении и при движении сосуда с ускорением в направлении оси симметрии. Последний случай эквивалентен наличию гравитационного поля соответствующей интенсивности. Влияние поверхностно-активных веществ, а также электрических и магнитных полей на статику и динамику капиллярной жид-

*) Статья представляет собой полный текст доклада, представленного на Украинскую республиканскую конференцию "Вычислительная математика в современном научно-техническом прогрессе" (Канев, сентябрь, 1974 г.).

кости не рассматривается.

2. Равновесные поверхности жидкости. Задача о равновесии капиллярной жидкости в сосуде состоит в нахождении ее свободной поверхности Γ, которая описывается уравнением вида

$$\sigma 2H = \Pi(\vec{x}) + c\,, \quad \vec{x} \in \Gamma, \tag{I}$$

где H - средняя кривизна искомой поверхности, σ - коэффициент поверхностного натяжения, $\Pi(\vec{x})$ - объемная плотность потенциала массовых сил, c - неизвестная постоянная, которую нужно выбрать так, чтобы занимаемая жидкостью область имела заданный объем v

$$\int\limits_{\Omega} d\Omega = v\,. \tag{2}$$

Со стенкой сосуда свободная поверхность должна пересекаться под определенным углом, равным углу смачивания ϑ (см. рис. I):

$$\cos\vartheta = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma}\,, \quad \vec{x} \in \gamma, \tag{3}$$

где σ_2 и σ_1 - коэффициенты поверхностного натяжения на границе твердое тело - жидкость и твердое тело - газ,соответственно; γ - неизвестный (!) контур смачивания.

Задача о равновесии является существенно нелинейной и, за редким исключением, ее эффективное практическое решение возможно только с применением вычислительной техники и для конкретных условий: при заданных $\Pi(\vec{x})$, ϑ, v, σ и заданной форме сосуда.

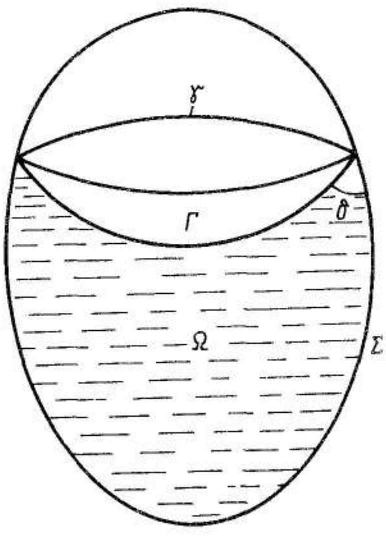


Рис. I.

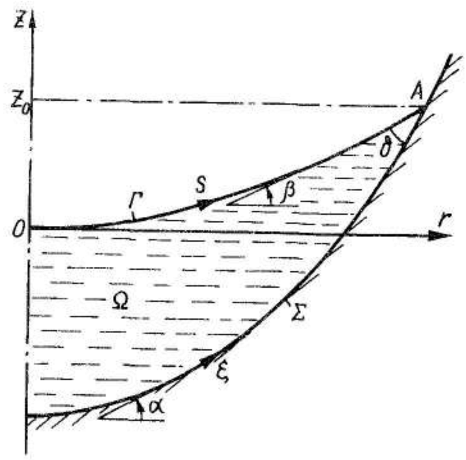


Рис. 2.

В случае осевой симметрии (рис. 2) весь процесс решения задачи о равновесии удается разбить на два этапа. Первый из них не зависит от формы сосуда, v, ϑ и интенсивности поля массовых сил. На этом этапе производится построение некоторых универсальных номограмм: семейств интегральных кривых уравнения равновесия для различных c, а также соответствующих зависимостей $\beta(c,R)$ и $v_1(c,R)$(R - радиус сосуда на высоте z_0, а $v_1(c,R)$ - объем,ограниченный плоскостью $z = z_0$ и построенной свободной поверхностью). В качестве иллюстрации соответствующие номограммы для случая отрицательных перегрузок гравитационного поля приведены на рис. 3,4,5. На них все величины безразмерные; в качестве характерного линейного размера принята капиллярная постоянная $[\sigma/|n|g\rho]^{1/2}$, где ρ - плотность жидкости, g = 98I см/сек^2, n - коэффициент перегрузки.

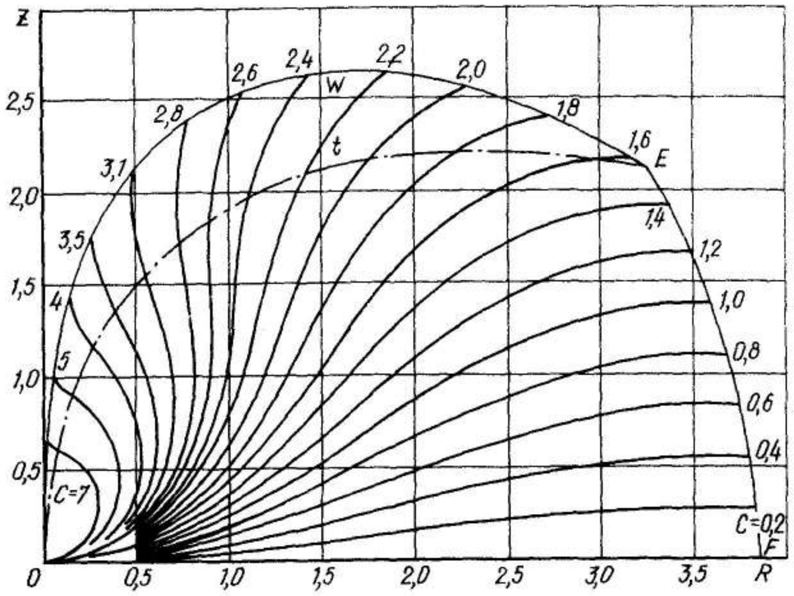


Рис. 3

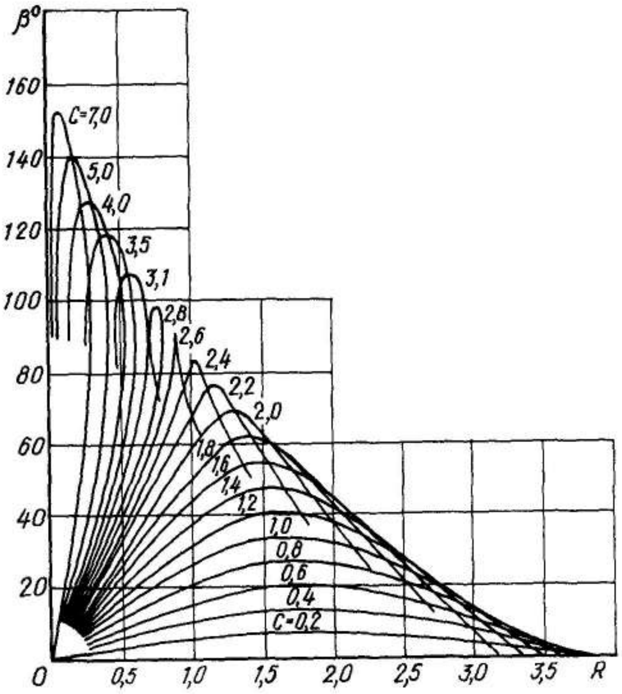


Рис. 4

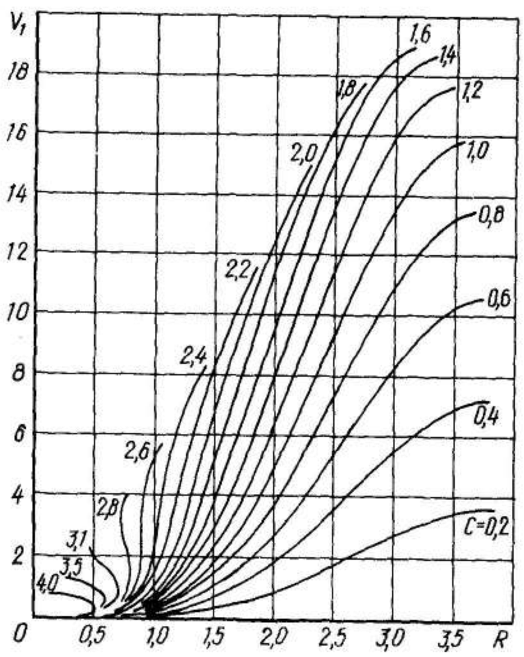


Рис. 5

Второй этап состоит в нахождении формы равновесной поверхности в заданном сосуде при заданных значениях физических параметров. Для этого численно строится зависимость $\vartheta_2(R)$, где ϑ_2 – объем, ограниченный стенкой сосуда и плоскостью $z=z_0(R)$, и $\alpha(R)$. Затем графически определяются функции $c_1(R)$ из уравнения

$$\vartheta_2-\vartheta_1=\vartheta \tag{4}$$

и $c_2(R)$ из уравнения

$$\alpha-\beta=\delta. \tag{5}$$

Из пересечения кривых $c_1(R)$ и $c_2(R)$ находится искомая постоянная c, по которой определяется интегральная кривая - образующая свободной поверхности - и точка A ее пересечения со стенкой сосуда.

В случае больших значений параметров $N_B = \rho n g \ell^2/\sigma$ (число Бонда) или $N_P = \rho \varepsilon^2 \ell^3/\sigma$ (ℓ - характерный размер системы, ε - угловая скорость вращения сосуда) эффективным оказывается применение метода пограничного слоя. При отыскании свободной поверхности малой крутизны, мало отличающейся от плоской, достаточную точность обеспечивают линеаризованные уравнения статики, часто приводящие к простым формулам. Эти уравнения могут быть использованы также при численном построении поверхности, близкой к заданной.

Все сказанное выше относится и к плоской задаче равновесия.

3. Устойчивость равновесных состояний. Вид "далеко" рассчитанных интегральных кривых при $N_B < 0$ (перевернутая жидкость) и физическая интуиция подсказывают, что не все участки этих интегральных кривых описывают физически реализуемые равновесные состояния. Эти состояния могут оказаться неустойчивыми.

Устойчивость исследуется на основе принципа минимума потенциальной энергии (второй метод Ляпунова). Для рассматриваемой системы выражение для потенциальной энергии имеет вид

$$U = \int_{\Gamma} \sigma d\Gamma + \sum_{j=1}^{2} \int_{S_j} \sigma_j dS_j + \int_{\Omega} \Pi(\bar{x}) d\Omega, \tag{6}$$

где S_1 и S_2 - несмоченная и смоченная части поверхности Σ сосуда.

В равновесии $U = U_0$, а первая вариация $\delta U = 0$. Вторая вариация потенциальной энергии равна некоторой квадратичной форме

$$\delta^2 U = (BN, N)_{\Gamma}, \tag{7}$$

где N - отклонение свободной поверхности от равновесной по нормали, а B - линейный дифференциальный оператор второго порядка. Вопрос об устойчивости сводится к определению знака наименьшего собственного значения λ^* краевой задачи

$$BN = \lambda N \quad (\text{на } \Gamma), \quad \frac{\partial N}{\partial n_\gamma} + \chi N = 0 \quad (\text{на } \gamma), \tag{8}$$

где

$$\chi = (k_\Gamma \cos\delta - k_\Sigma)/\sin\delta \tag{9}$$

- характеристический параметр устойчивости, а k_Γ и k_Σ - кривизны свободной поверхности и стенки сосуда, соответственно.

Остановимся на осесимметричном случае (рис. 2). После разложения функции $N(s,\theta)$ в ряд Фурье получаем последовательность задач

$$B_m u_m = \lambda_m u_m \quad (0 \le s \le s_1), \quad \left(\frac{du_m}{ds} + \chi u_m\right)_{s=s_1} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{10}$$

Можно доказать, что

$$\lambda^* = \min(\lambda_{01}, \lambda_{11}). \tag{11}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$B_m u_m = \nu_m u_m \quad (0 \le s \le s_1), \quad u_m(s_1) = 0. \tag{12}$$

Как известно, $\lambda_{mp} < \nu_{mp}$. Назовем <u>максимальным участком устойчивости</u> тот участок интегральной кривой, на правом конце которого

$$\vartheta^* = \min(\vartheta_{01}, \vartheta_{11}) = 0. \qquad (13)$$

Внутри максимального участка устойчивости для каждой точки найдется такое χ^*, что $\lambda^*(\chi^*) = 0$, причем если для рассматриваемого сосуда и угла смачивания $\chi > \chi^*$, то жидкость в сосуде устойчива, а если $\chi < \chi^*$ – неустойчива. Предложен эффективный метод определения χ^*. Соответствующие номограммы для $N_B < 0$ $(N_P = 0)$ представлены на рис. 6. Аналогичные номограммы построены для $N_B = N_P = 0$; $N_B > 0, N_P = 0$; $N_B = 0, N_P > 0$.

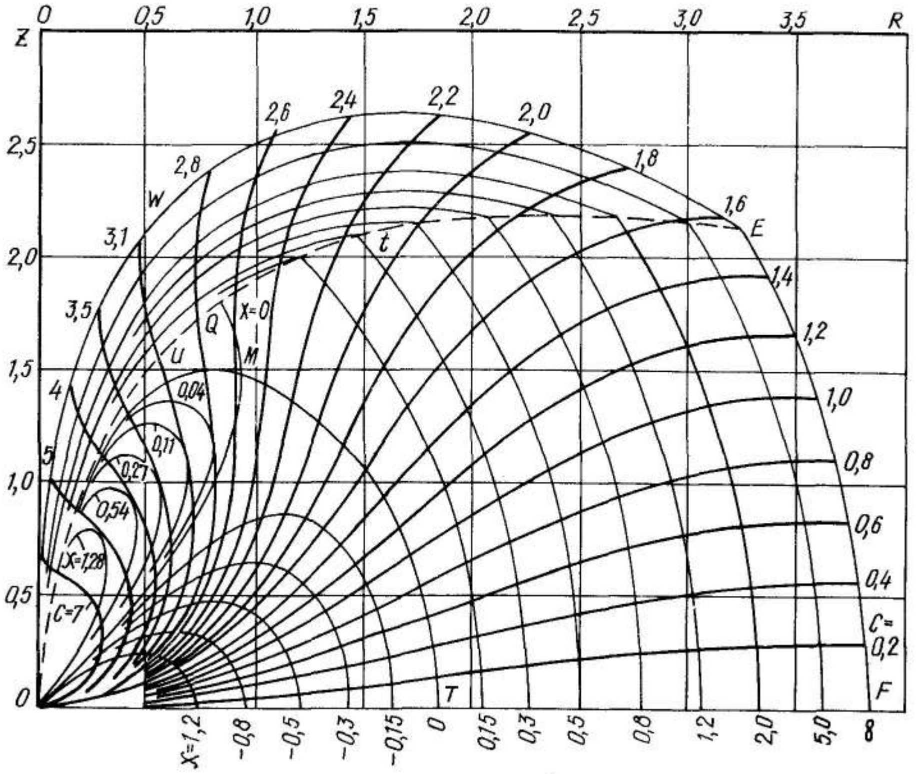
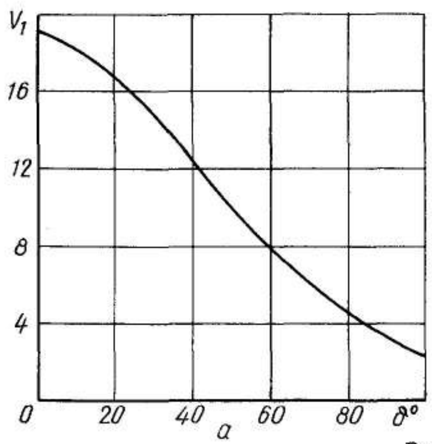


Рис. 6.

Весьма наглядный результат получается при выяснении устойчивости капли, висящей на горизонтальной стенке. Здесь можно вычислить безразмерный критический объем капли в зависимости от угла смачивания (рис. 7а,б).



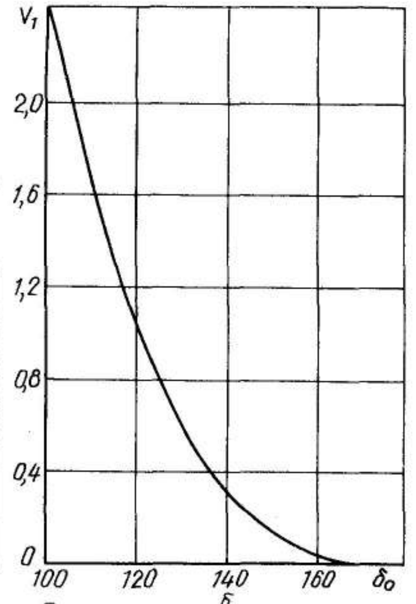


Рис. 7

Численное исследование устойчивости равновесных состояний капиллярной жидкости позволило решить несколько классических задач об устойчивости вращающейся невесомой жидкости. Так для случая односвязных осесимметричных замкнутых форм уточнен результат П. Аппеля о безразмерном критическом объеме вращающейся капли, который оказался равным не 9,52, а 5,24. Кольцевые же формы вращающейся невесомой жидкости оказались неустойчивыми относительно неосесимметричных возмущений, что опровергло утверждение А. Шаррюо. Подчеркнем, что эти теоретические результаты были получены с помощью ЭВМ.

4. Ветвление и запас устойчивости равновесных состояний. Уравнение равновесия (I) содержит несколько физических параметров. Изучение зависимости решений этого уравнения от параметров приводит к задаче о ветвлении решений, непосредственно связанной с задачей об устойчивости. Критические равновесные состояния, как правило, являются точками ветвления. Изучение ветвления решений позволяет оценить запас устойчивости (глубину минимума потенциальной энергии) для докритических равновесных состояний, близких к критическим, а также выяснить характер изменения равновесной поверхности жидкости при переходе в закритическую область; последнее дает возможность ответить на вопрос, каким образом жидкость теряет устойчивость.

Поясним рассматриваемую ситуацию на примере одномерного случая (рис. 8). Пусть потенциальная энергия системы $U(x, N_B)$ зависит от координаты x и параметра N_B, устойчивая точка минимума имеет координаты (x_o, N_B)

$$U'_x(x_o, N_B) = 0. \qquad (14)$$

В точке потери устойчивости (x^*_o, N^*_B) имеют место равенства

$$U'_x(x^*_o, N^*_B) = U''_x(x^*_o, N^*_B) = 0. \qquad (15)$$

Если (x_1, N_B) – ближайший к (x_o, N_B) перевал функции $U(x, N_B)$, то запасом устойчивости называется величина

$$\Delta U = U[x_1(N_B), N_B] - U[x_o(N_B), N_B]. \qquad (16)$$

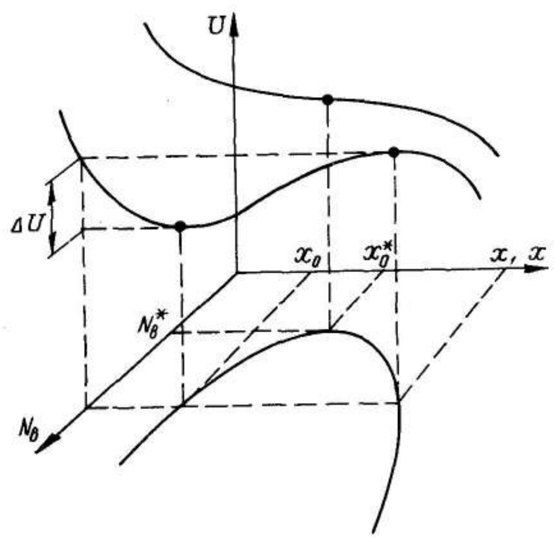


Рис. 8.

Поскольку точка (x^*_o, N^*_B) – точка ветвления, из нее можно прийти в точки (x_o, N_B) и (x_1, N_B), находя соответствующие ветви решений. С этой целью для малых $|N_B - N^*_B|$ применяется метод Ляпунова-Шмидта, который позволяет выяснить число и форму ответвляющихся решений, а также построить эти решения в виде рядов по целым или дробным степеням $|N_B - N^*_B|$.

Понятие запаса устойчивости в связи с задачами о ветвлении равновесных форм естественно распространяется на системы с любым числом степеней свободы. Различные методы вычисления запаса устойчивости были разработаны М.А. Беляевой как для конечномерного случая, так и в рассматриваемых здесь задачах гидромеханики невесомости. Так при изучении запаса устойчивости жидкости в цилиндрическом сосуде при отрицательных перегрузках ответвляющиеся решения строятся в виде рядов по степеням $|N_B - N^*_B|^{1/2}$, причем к минимуму ведет ветвь осесимметричных решений, а к перевалу – антисимметричных решений. При этом главная часть запаса устойчивости имеет вид

$$\Delta U = K(\delta)\,(N_B - N^*_B). \qquad (17)$$

Для капли, висящей на горизонтальной плоскости, вычисление главной части запаса устойчивости приводит к результату

$$\Delta U = L(\vartheta)\,(N_B - N_B^*)^{3/2} . \qquad (18)$$

Используя отрезки рядов Ляпунова-Шмидта в качестве начального приближения, можно (например, по методу Ньютона-Канторовича) вычислить запас устойчивости равновесных состояний для немалых $(N_B - N_B^*)$.

5. Малые колебания жидкости в сосуде. Задача о колебаниях "тяжелой" жидкости исследована достаточно полно. Однако учет сил поверхностного натяжения в общей постановке, т.е. рассмотрение капиллярной жидкости, создает значительные теоретические и вычислительные трудности: в граничном условии на равновесной поверхности Γ появляется дифференциальный оператор, порядок которого больше (идеальная жидкость) или равен (вязкая жидкость) порядку дифференциального оператора внутри области Ω, занятой жидкостью.

Рассмотрим осесимметричный сосуд, вращающийся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ε (рис. I). При $\varepsilon = 0$ задача о нормальных (свободных) колебаниях капиллярной жидкости, т.е. о решениях, зависящих от времени по закону $exp(i\omega t)$, имеет вид

$$Bu = \lambda A u, \quad \lambda = \rho\omega^2 \ell^3/\sigma, \qquad (19)$$

где B и A – так называемые операторы потенциальной и кинетической энергии, соответственно. Уравнение (19) следует из условия на свободной поверхности Γ, функция u связана со следующей краевой задачей

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Sigma = 0, \quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_\Gamma = u . \qquad (20)$$

Для задачи (19) можно доказать полноту собственных форм колебаний жидкости и различные свойства спектра частот, на которых основаны вариационные методы приближенного вычисления частот и форм колебаний.

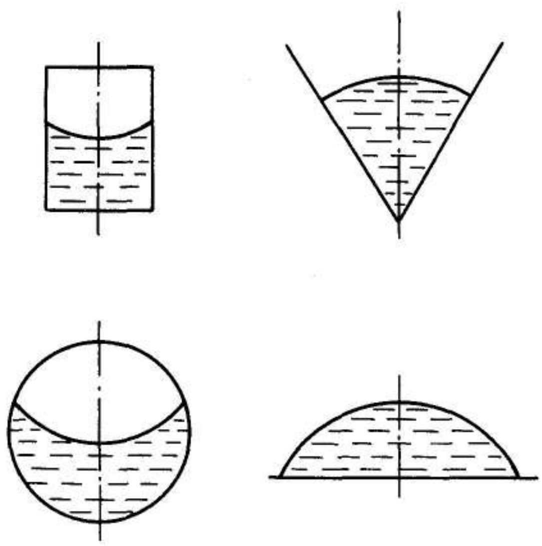


Рис. 9.

Для сосудов различных форм (рис.9) построены и применены различные численные методы расчета частот колебаний идеальной капиллярной жидкости. В частности, Л.А. Темкин разработал метод, связанный с приближенным решением системы одномерных интегральных уравнений, эквивалентных задаче о колебаниях жидкости в осесимметричном или плоском сосуде при действии однородного гравитационного поля различной интенсивности. Были использованы также различные варианты метода Ритца. Расчеты показали, в частности, что при больших значениях параметра N_B первая частота колебаний линейно зависит от N_B

$$\lambda_1 = \lambda_1^\circ N_B + const, \quad N_B \gg 1 . \qquad (21)$$

Зависимость частот от угла смачивания для плоской капли, лежащей на горизонтальной стенке, иллюстрирует рис. I0.

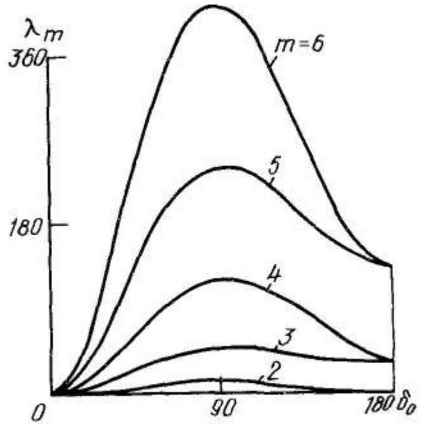


Рис. IO.

Для малых заполнений сосуда жидкостью эффективным оказывается асимптотический метод узких полос (теория мелкой воды).

В случае идеально вращающейся жидкости ($\varepsilon \neq 0$, $N_B \neq 0$) можно ввести так называемую функцию состояния С.Л. Соболева $\Phi = \varphi(r,z)\exp(-im\theta)$, краевая задача для которой имеет вид

$$\Delta_m \varphi - \frac{4\varepsilon^2}{\omega^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad (\text{в } \bar{\Omega}),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{4\varepsilon^2}{\omega^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\widehat{\vec{n},z}) + \frac{2\varepsilon}{\omega}\frac{m}{r}\cos(\widehat{\vec{n},r}) + \begin{cases} 0 & (\text{на } \Sigma), \\ (\omega^2 - 4\varepsilon^2) B_m^{-1}\varphi & (\text{на } \Gamma), \end{cases} \qquad (22)$$

где Δ_m - оператор Лапласа после отделения угловой переменной θ, B_m^{-1} - некоторый интегральный оператор, а чертой сверху обозначены осевые сечения полуплоскостью $\theta = const$. Задача (22) подробно исследована для вращающегося столба невесомой жидкости, заключенного между двумя горизонтальными плоскостями. Показано, что существуют так называемые внутренние волны, спектр которых плотно заполняет отрезок $|\omega| < 2\varepsilon$, и поверхностные волны, у которых спектр дискретен и расположен вне этого отрезка. Для определения поверхностных волн ($|\omega| > 2\varepsilon$) может быть применен метод Ритца, причем функционал Ритца имеет вид

$$J_\varepsilon[\varphi] = \int_{\bar{\Omega}} (\nabla_m \varphi)^2 d\bar{\Omega} - \frac{4\varepsilon^2}{\omega^2}\int_{\bar{\Omega}} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 d\bar{\Omega} - \qquad (23)$$
$$- \frac{2\varepsilon}{\omega} m \int_{\bar{\Gamma}+\bar{\Sigma}} \varphi^2 \cos(\widehat{\vec{n},r})\, ds - (\omega^2 - 4\varepsilon^2)\, \| B_m^{-1/2}\varphi \|^2_{\bar{\Gamma}} ;$$

при $\varepsilon = 0$ (23) переходит в функционал Ритца для потенциальных колебаний.

В случае капиллярной вязкости жидкости на нескольких задачах, допускающих разделение переменных (вязкий шар и соответствующая плоская задача), показано, что спектр нормальных колебаний (решений с множителем $exp(-\lambda t)$) состоит из счетного множества вещественных λ и не более конечного числа (зависящего от вязкости ν) комплексных собственных чисел, которые при $\nu \to 0$ переходят в чисто мнимые частоты колебаний идеальной жидкости. Для малых ν применяется метод пограничного слоя. Например, в задаче о колебаниях сферического пузыря радиуса R, расположенного в сферическом сосуде радиуса q, этот метод дает (для собственных чисел в верхней полуплоскости)

$$\lambda_\ell = i\lambda_{nq}^{1/2} + \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}\mu_\ell \nu^{1/2} + \underset{\sim}{O}(\nu), \quad \ell = 2, 3, \ldots, \qquad (24)$$

где $\lambda_{nq}(\ell, q/R)$ - известное решение для идеальной жидкости (см. (I9)), $\mu_\ell(\ell, q/R)$ - положительная функция, а ν - отношение кинематической вязкости жидкости и какой-либо характерной вязкости.

6. Т е р м о к а п и л л я р н а я к о н в е к ц и я . Естественная тепловая конвекция в земных условиях вызывается обычно архимедовыми силами, действующими в неравномерно нагретой жидкости. В условиях невесомости или близких к ним роль "двигателя" конвекции могут взять на себя силы иного происхождения, связанные с градиентами температуры в жидкости. Это, прежде всего, термокапиллярные силы на поверхности раздела жидкость-газ, возникающие, когда поверхность раздела неизотермична. Они пропорциональны градиенту поверхностного натяжения на этой поверхности.

Для случая, когда состояние равновесия возможно (градиент температуры в жидкости направлен по нормали к свободной поверхности), строится граница устойчивости. Например, если жидкость частично заполняет прямоугольный канал (рис. II), нагреваемый снизу, эта граница определяется в результате решения краевой задачи для функции тока ψ и температуры T малых возмущений

$$\Delta^2\psi = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_\Sigma - \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_\Sigma = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)_\Gamma = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -N_M \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{на } \Gamma),$$

$$\Delta T = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (\text{в } \Omega), \quad (T)_\Sigma = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial z} + N_{Bi}\, T\right)_\Gamma = 0.$$

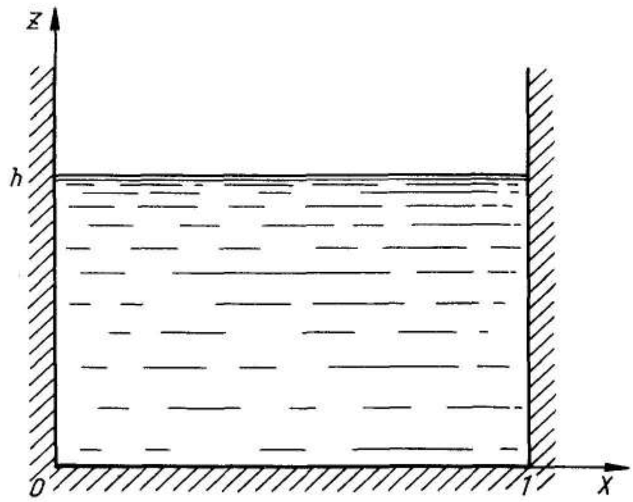


Рис. II.

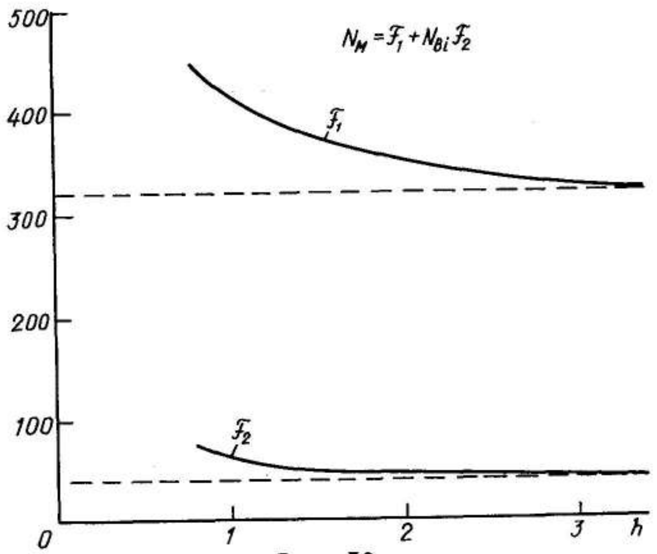


Рис. I2.

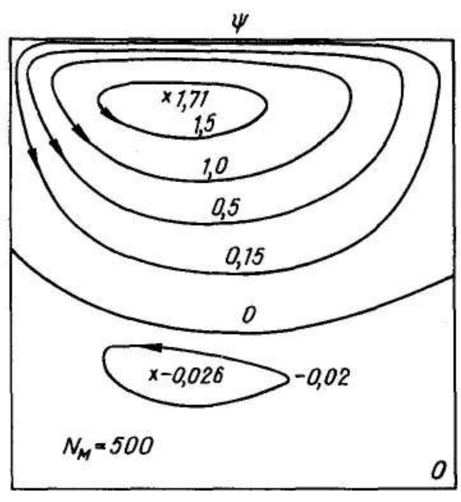


Рис. I3.

Здесь N_{Bi} – число Био, $N_M = \dfrac{\left(\frac{\partial T_0}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial \sigma}{\partial T}\right) L^2}{\rho \nu \chi}$ – число Марангони (L – ширина канала, χ –температуропроводность жидкости).

Граница устойчивости в этой задаче $N_M = F_1(h) + N_{Bi}\, F_2(h)$ (h – относительная высота канала) найдена с помощью метода Галеркина и имеет вид, представленный на рис. I2.

Для шарового слоя со свободной поверхностью с учетом собственно капиллярных сил граница устойчивости находится в явном виде и позволяет проследить за "дроблением" слоя на все большее число ячеек при уменьшении отношения радиусов пузыря и стенки.

Решение нелинейных уравнений термокапиллярной конвекции в произвольном сосуде возможно только с применением мощных ЭВМ. Вычисления, проведенные для прямоугольного канала с боковым нагревом с помощью метода Ньютона-Канторовича, показали, что наиболее интенсивное движение сосредоточено у свободной поверхности жидкости (рис. I3). При разных значениях отношения длины канала к его высоте наблюдается дробление потока на два и более вихрей, интенсивность которых быстро убывает с ростом глубины.

THE APPROXIMATED METHODS IN HYDROMECHANICS OF WEIGHTLESSNESS

V.G.Babskii, N.D.Kopachevskii, A.D.Mishkis, L.A.Slobotzanin, A.D.Tyuptsov

The article offers a short review on approximated and numerical methods in mechanics of capillary liquid, realized in the department of applied mathematics of the Physico-Technical Institute of Low Temperatures of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR the last years.

The traditional problems of hydrostatics and small oscillations, some modern problems are considered: branching and safety against buckling of equilibrium state of liquid in container, oscillations of rotating liquid, thermo-capillary convection and so on.

ДВЕ ЗАДАЧИ О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ ИЗ МАЛОВЯЗКИХ КАПИЛЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Н.Д. Копачевский, Н.К. Радякин

ВВЕДЕНИЕ

В работе [I] дана постановка и операторная формулировка задачи о собственных колебаниях системы из идеальных капиллярных жидкостей, заполняющих произвольный сосуд; случай тяжелой идеальной жидкости разобран также в [2]. В [3] рассматривается аналогичная задача для системы вращающихся капиллярных жидкостей.

Настоящая работа посвящена задаче о нормальных (свободных) колебаниях системы из маловязких капиллярных жидкостей в двух простых случаях. В § I рассматриваются плоские колебания двух либо трех жидкостей, вращающихся в условиях невесомости в цилиндрическом сосуде; в § 2 при отсутствии вращения рассматриваетcя аналогичная задача для системы сферически симметрично расположенных жидкостей, находящихся в сферическом сосуде.

При построении приближенных решений обеих задач применяется метод пограничного слоя. Установлены некоторые общие свойства спектра и получены асимптотические формулы для частот колебаний в различных частных и предельных случаях.

§ I. ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ

I. Постановка задачи. Пусть бесконечный цилиндрический сосуд радиуса R_0 заполнен тремя несжимаемыми жидкостями разной плотности и равномерно вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω_0. Тогда в состоянии равновесия жидкости расположатся таким образом, что жидкость наибольшей плотности ρ_1 будет находиться у твердой стенки Γ_0, занимая область $R_1 \leq R \leq R_0$; вторая жидкость плотности $\rho_2 < \rho_1$ займет область $R_2 \leq R \leq R_1$, а наименее плотная $(\rho_3 < \rho_2)$ расположится у оси вращения $0 = R_3 \leq R \leq R_2$.

Будем считать, что система находится в состоянии невесомости и на нее действуют центробежные, капиллярные и вязкие силы. Тогда равновесное давление $p_j^0(R)$ в каждой из жидкостей равно

$$p_j^0(R) = \frac{1}{2}\rho_j \omega_0^2 R^2 + c_j, \quad R_j \leq R \leq R_{j-1}, \quad j = 1,2,3,$$

где постоянные c_j определяют капиллярный скачок давлений на границах Γ_j $(j = 1,2)$ раздела j-ой и $(j+1)$-ой жидкостей.

Рассмотрим плоскую задачу о свободных (нормальных) колебаниях системы относительно равномерного вращения. Предварительно перейдем к безразмерным переменным. В качестве характерного размера выберем радиус R_1 границы раздела первой и второй жидкостей, а для характерных времени и плотности - величины

$$t_* = \omega_0^{-1}, \quad \rho_* = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)_{разм.} . \tag{I.I}$$

Введем далее размерные величины $\nu_* = (\nu_1+\nu_2+\nu_3)_{разм}$, $\sigma_* = (\sigma_1+\sigma_2)_{разм}$ и обозначим $\nu_j = (\nu_j)_{разм}/\nu_*$, $\sigma_j = (\sigma_j)_{разм.}/\sigma_*$. Другие размерные величины отнесем к их естественным размерным комбинациям из выбранных трех характерных, и после этого все величины будем считать безразмерными. Кроме того, считаем, что вязкие силы по сравнению с центробежными достаточно малы, в то время как центробежные и капиллярные силы одного порядка

$$\nu_*(\omega_0 R_1^2)^{-1} = \varepsilon^2 \ll 1, \quad \bar{\sigma} = \sigma_*(\rho_* \omega_0^2 R_1^3)^{-1} = O(1) \qquad (I.2)$$

Оба предположения (I.2) оправданы, например, для воды, если $R_1 \sim 100$ см, $\omega_0 \sim 1$ мин$^{-1}$.

Выпишем линеаризованные уравнения задачи о плоских нормальных колебаниях и о решениях, зависящих от времени по закону $exp(\lambda t)$, в полярной системе координат (r, θ), вращающейся вместе с ситемой с безразмерной угловой скоростью $\omega_0 = 1$. Мы придем, аналогично [I,3,4], к следующей краевой задаче для определении собственных чисел λ, полей скоростей $\vec{u}_j(r,\theta)$ и давлений $p_j(r,\theta)$

$$\lambda \vec{u}_j + 2\vec{k}\times\vec{u}_j = -\frac{1}{\rho_j}\vec{\nabla} p_j + \varepsilon^2 \nu_j \Delta \vec{u}_j, \qquad (I.3)$$
$$div\, \vec{u}_j = 0, \quad r_j \le r \le r_{j-1}, \; j=1,2,3;$$

$$\rho_j \nu_j \left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_{jr}}{\partial\theta} + \frac{\partial u_{j\theta}}{\partial r} - \frac{u_{j\theta}}{r}\right) = \rho_{j+1}\nu_{j+1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_{j+1,r}}{\partial\theta} + \frac{\partial u_{j+1,\theta}}{\partial r} - \right. \qquad (I.4)$$
$$\left. - \frac{u_{j+1,\theta}}{r}\right), \quad r = r_j, \; j=1,2;$$

$$u_{jr} = u_{j+1,r}, \quad u_{j\theta} = u_{j+1,\theta}, \quad r = r_j, \; j=1,2; \qquad (I.5)$$

$$u_{1r} = 0, \qquad u_{1\theta} = 0, \qquad r = r_0; \qquad (I.6)$$

$$\lambda(p_{j+1} - p_j) - 2\lambda\varepsilon^2\left(\nu_{j+1}\rho_{j+1}\frac{\partial u_{j+1,r}}{\partial r} - \nu_j\rho_j\frac{\partial u_{j,r}}{\partial r}\right) +$$
$$+ \frac{\sigma_j \bar{\sigma}}{r_j^2}\left(1 + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)u_{jr} + (\rho_{i+1} - \rho_i) r_j u_{jr} = 0, \quad r = r_j, \; j=1,2. \qquad (I.7)$$

Здесь $u_{jr}, u_{j\theta}$ - компоненты вектора скорости $\vec{u}_j(r,\theta)$, ε^2 определено в (I.2), $r_0 = R_0/R_1 > 1$, $r_1 = 1$, $r_2 = R_2/R_1 < 1$, $r_3 = 0$, k-орт оси вращения z, все величины в (I.3-I.7) безразмерные.

2. Колебания идеальных жидкостей. Будем считать сначала, что жидкости идеальны, и найдем решение задачи (I.3-I.7) при $\nu_j = 0$, $j = 1,2,3$. При этом касательные условия (1.4), вторые условия в (I.5) и (I.6) отпадают.

Преобразуем, следуя [4], полученную систему уравнений к более удобному виду. Прежде всего заметим, что в силу равенства $rot(\vec{k}\times\vec{u}_j) = \vec{k}\, div\, \vec{u}_j = 0$, все слагаемые в первом уравнении (I.3) (при $\nu_j = 0$) - потенциальные векторы. Поэтому, вводя потенциал скорости Φ_j, $\vec{u}_j = \vec{\nabla}\Phi_j$, $\Delta\Phi_j = 0$, получаем, что $\vec{k}\times\vec{\nabla}\Phi_j = \vec{\nabla}\Psi_j$, где Ψ_j - функция тока, связанная с Φ_j условиями Коши-Римана. Интегрируя затем первое уравнение (I.3), приходим к интегралу Бернулли

$$\lambda\Phi_j + 2\Psi_j + p_j/\rho_j = 0, \quad j=1,2,3, \qquad (I.8)$$

в области Ω_j, занятой j-ой жидкостью.

Теперь в (I.3)-(I.7) с помощью (I.8) можно исключить давления $p_j(r,\theta)$ и придти к следующей краевой задаче:

$$\Delta\Phi_j = 0, \quad r_j \le r \le r_{j-1}, \; j=1,2,3;$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right|_{r=r_0}=0\ ; \quad \frac{\partial\Phi_j}{\partial r}=\frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial r}\ , \quad r=r_j\ , \quad j=1,2\ ;\\
&\lambda^2\left(\rho_{j+1}\Phi_{j+1}-\rho_j\Phi_j\right)+2\lambda\left(\rho_{j+1}\Psi_{j+1}-\rho_j\Psi_j\right)-\\
&-\left[\left(\rho_{j+1}-\rho_j\right)r_j+\frac{\sigma_j\bar{\sigma}}{r_j^2}\left(1+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right]\frac{\partial\Phi_j}{\partial r}=0\ , \quad r=r_j\ ; \quad j=1,2
\end{aligned}\right\} \qquad (I.9)
$$

Будем искать решения задачи (I.9), зависящие от θ по закону $exp\,(in\theta)$. Тогда решения уравнения Лапласа для Φ_j и Ψ_j, удовлетворяющие граничному условию при $r=r_0$ и условию ограниченности при $r=0$, имеют вид

$$
\left.\begin{aligned}
&\Phi_1=a_1(r^n+q^{2n}r^{-n})\exp(in\theta),\ \Psi_1=-ia_1(r^n-q^{2n}r^{-n})\exp(in\theta),\\
&\Phi_2=(b_1r^n+b_2r^{-n})\exp(in\theta),\ \Psi_2=-i(b_1r^n-b_2r^{-n})\exp(in\theta),\\
&\Phi_3=c_1r^n\exp(in\theta),\quad \Psi_3=-ic_1r^n\exp(in\theta),\quad n=1,2,\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (I.10)
$$

Здесь $q=r_0>1$ – радиус твердой стенки, а числа n выбраны положительными, так как отрицательные n дают комплексно сопряженные решения.

Для определения постоянных a_1, b_1, b_2 и c_1 воспользуемся последними четырьмя граничными условиями (I.9). Подставляя в них решения (I.10) и приравнивая нулю определитель полученной системы линейных алгебраических уравнений, после замены $\lambda=-i\omega$ будем иметь характеристическое уравнение

$$
P_1(\omega)P_2(\omega)-p^{2n}\left[P_1(\omega)-2\rho_2\omega^2\right]\left[P_2(\omega)-2\rho_2\omega^2\right]=0, \qquad (I.11)
$$

где $P_k(\omega)$ – квадратные трехчлены,

$$
\begin{aligned}
&P_1(\omega)=\omega^2\left(\rho_1\varkappa_n^2+\rho_2\right)-2\omega\left(\rho_1-\rho_2\right)-\alpha_{12}^2\ ,\\
&P_2(\omega)=\omega^2\left(\rho_2+\rho_3\right)-2\omega\left(\rho_2-\rho_3\right)-\alpha_{23}^2\ ,
\end{aligned} \qquad (I.12)
$$

$$
\varkappa_n^2=\frac{1+q^{-2n}}{1-q^{-2n}}>1;\ \ \alpha_{12}^2=n(\rho_1-\rho_2)+\sigma_1\bar{\sigma}n(n^2-1);\ \alpha_{23}^2=n(\rho_2-\rho_3)+\frac{\sigma_2\bar{\sigma}_n}{p^3}n(n^2-1);\ p=r_2<1\,.
$$

Выясним смысл функций $P_k(\omega)$. Будем считать сначала, что плотности второй и третьей жидкостей совпадают, а $\sigma_2=0$. Тогда мы получим задачу о колебании двух жидкостей в цилиндрическом сосуде: первая в положении равновесия занимает область $1\le r\le q$, а вторая – $0\le r\le 1$. В этом случае $P_2(\omega)-2\rho_2\omega^2\equiv 0$, и из (I.11) следует, что нули $P_1(\omega)$ дают частоты колебаний этой задачи

$$
(\omega_{12}^{\pm})_n=\left\{(\rho_1-\rho_2)\pm\left[(\rho_1-\rho_2)^2+\alpha_{12}^2(\rho_1\varkappa_n^2+\rho_2)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\Big/(\rho_1\varkappa_n^2+\rho_2)\,. \qquad (I.13)
$$

Пусть теперь $\rho_1=\rho_2$, $\sigma_1=0$, $q=\infty$. Мы придем к задаче о плоских колебаниях столба жидкости радиуса p и плотности ρ_3 в безграничной жидкости плотности $\rho_2>\rho_3$. При этом $P_1(\omega)-2\rho_2\omega^2\equiv 0$ и из уравнения $P_2(\omega)=0$ получаем, что частоты колебаний равны

$$
(\omega_{23}^{\pm})_n=\left\{(\rho_2-\rho_3)\pm\left[(\rho_2-\rho_3)^2+\alpha_{23}^2(\rho_2+\rho_3)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}\Big/(\rho_2+\rho_3)\,. \qquad (I.14)
$$

В общем случае, когда рассматриваются три жидкости и действует уравнение (I.II), можно было бы выписать решение алгебраического уравнения четвертой степени. Однако проще получить асимптотическое решение, считая при малом p либо большом n малым параметром величину p^{2n}. Разлагая решение уравнения (I.II) по этому параметру и ограничиваясь линейными членами, будем иметь

$$\omega_n^{\pm} = \begin{cases} (\omega_{12}^{\pm})_n + p^{2n}\rho_2(\omega_{12}^{\pm})_n^2 \dfrac{2\rho_2(\omega_{12}^{\pm})_n^2 - P_2[(\omega_{12}^{\pm})_n]}{a_1 P_2[(\omega_{12}^{\pm})_n]} + \underset{\sim}{O}(p^{4n}) \\ (\omega_{23}^{\pm})_n + p^{2n}\rho_2(\omega_{23}^{\pm})_n^2 \dfrac{2\rho_2(\omega_{23}^{\pm})_n^2 - P_1[(\omega_{23}^{\pm})_n]}{a_2 P_1[(\omega_{23}^{\pm})_n]} + \underset{\sim}{O}(p^{4n}) \end{cases}, \qquad (I.I5)$$

$$a_1 = (\omega_{12}^{\pm})_n(\rho_1 \varkappa_n^2 + \rho_2) - (\rho_1 - \rho_2) \neq 0,$$

$$a_2 = (\omega_{23}^{\pm})_n(\rho_2 + \rho_3) - (\rho_2 - \rho_3) \neq 0.$$

Сформулируем общие выводы, которые следуют из рассмотрения формул (I.I3)-(I.I5).

а) Если выполнены условия

$$\rho_1 > \rho_2 > \rho_3, \qquad (I.I6)$$

то задача (I.9) имеет чисто мнимые собственные числа $\lambda_n^{\pm} = -i\omega_n^{\pm}$; в этом случае рассматриваемая система устойчива по отношению к малым возмущениям.

б) Спектр задачи (I.9) распадается на два множества, каждое из которых в нулевом приближении (по параметру p^{2n}) соответствует колебаниям двух соседних жидкостей с данной границей раздела. Для первого множества колебания происходят таким образом, если бы сосуд был полностью заполнен только двумя жидкостями плотностей ρ_1 и ρ_2 с границей раздела $r = 1$ (см. (I.I3)); влияние второй границы раздела сказывается лишь в первом приближении. Соответственно второе множество отвечает колебаниям столба жидкости радиуса $r = p$ и плотности ρ_3 во вращающейся безграничной жидкости плотности $\rho_2 > \rho_3$ (см. (I.I4)).

в) Поверхностные силы не оказывают влияния на первые (главные) частоты колебаний $\omega_1^{\pm}$, так как им отвечают перемещения границ раздела в виде круговых цилиндров (без изменения формы поверхности), при этом не происходит изменения поверхностей энергии.

г) Остальные частоты колебаний зависят от капиллярных сил, причем для $\sigma > 0$, k =I,2 характер асимптотического поведения $\omega_n^{\pm}$ при $n \to \infty$ существенно отличается от случая $\sigma_k = 0$.

д) Каждой частоте колебаний $\omega_n^{\pm}$ соответствует возмущение поверхности раздела (бегущая волна), пропорциональное функции $exp[i(n\theta - \omega_n^{\pm} t)]$, $n = 1,2...$; величина угловой скорости распространения волны равна $\omega_n^{\pm}/n$. Знаку плюс в (I.I3-I.I5) отвечает волна, бегущая вперед, т.е. в сторону вращения сосуда с жидкостями, а знаку минус - обратная волна. При $\sigma_k = 0$, k = I,2, обратная волна имеет угловую скорость, меньшую единицы при всех n ; следовательно, суммарное вращение частиц жидкости в абсолютном движении происходит вперед. Для капиллярных жидкостей, когда $\sigma_k > 0$, при больших n будет $\omega_n^- / n = \underset{\sim}{O}(n^{\frac{1}{2}})$, и потому этим частотам соответствуют волны, бегущие назад в абсолютном движении.

3. О свойствах решений. Рассмотрим теперь задачу (I.3)-(I.7) при произвольном значении вязкости ε^2 и отметим некоторые простые свойства ее решений.

В работе [5] при отсутствии вращения $(\omega_0 = 0)$ исследована задача о нормальных колебаниях жидкого самогравитирующего шара и аналогичная плоская задача (цилиндрический столб жидкости). Было выяснено, что при любом $\varepsilon^2 > 0$ спектр задачи дискретный и при $\sigma > 0$ (капиллярная жидкость) имеет единственную предельную точку $\lambda = -\infty$. Все собственные числа λ, кроме, быть может, конечного числа, зависящего от вязкости, вещественные. В плоской задаче после отделения переменной θ, как в п. 2, для нахождения чисел $\lambda_{np}(\varepsilon)$, $p=1,2,\dots$, для каждого $n = 2,3,\dots$ получалось трансцендентное уравнение, из которого следовало, что при $\varepsilon^2\to 0$ два первых корня этого уравнения выходят на мнимую ось, переходя в собственные числа задачи о колебании идеальной жидкости. Остальные собственные значения λ_{np}, $p=3,4,\dots$ при $\varepsilon^2\to 0$ остаются на вещественной оси. Можно убедиться, что аналогичная ситуация имеет место и для задачи о плоских колебаниях столба вращающейся капиллярной жидкости: несмотря на то, что в этой задаче при $n=2,3,\dots$ собственные числа $\lambda_{np}(\varepsilon_2)$ невещественные, можно доказать, что первые два из них при $\varepsilon^2\to 0$ выходят на мнимую ось, а остальные расположены в левой комплексной полуплоскости, причем для фиксированного $\varepsilon^2>0$ числа $\lambda_{np}(\varepsilon)$ приближаются к вещественной оси при $p\to\infty$.

Мы сейчас увидим, что и в задаче (I.3)-(I.7) при выполнении условия (I.I6) все собственные числа λ расположены в левой комплексной полуплоскости. Для этого воспользуемся формулой Грина, справедливой для достаточно гладких соленоидальных вектор-функций $\vec{u}$ и $\vec{v}$, определенных в произвольной области Ω с границей Γ

$$\int\limits_{\Omega}\left(-\frac{\vec{\nabla}p}{\rho}+\Delta\vec{u}\right)\vec{v}^{*}d\Omega=-\nu E(\vec{u},\vec{v})+\int\limits_{\Gamma}\Big[\nu(u_{13}+u_{31})v^{1*}+\nu(u_{23}+u_{32})v^{2*}+$$

$$+\left(-\frac{p}{\rho}+2\nu u_{33}\right)v^{3*}\Big]d\Gamma,\quad E(\vec{u},\vec{v})=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j}+\frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)^{*}d\Omega. \tag{I.I7}$$

Здесь звездочкой обозначена комплексно-сопряженная величина, а поверхностные интегралы записаны в ортогональной криволинейной системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3, причем координата ξ^3 направлена по внешней нормали. Примем $\xi^1=\theta$, $\xi^2=z$, $\xi^3=r$, где r, θ, z – цилиндрическая система координат, а затем скалярно умножим j-ое уравнение (I.3) на $\vec{u}_j^{*}$ и проинтегрируем по Ω_j. Сложим теперь все полученные уравнения, воспользуемся формулой Грина (I.I7) и граничными условиями плоской задачи (I.3)-(I.7). Мы придем к тождеству

$$\lambda\sum_{j=1}^{3}\rho_j\int\limits_{\Omega_j}|\vec{u}_j|^2d\Omega_j+2\sum_{j=1}^{3}\rho_j\int\limits_{\Omega_j}(\vec{k}\times\vec{u}_j)\,\vec{u}_j^{*}d\Omega_j+$$
$$+\varepsilon^2\sum_{j=1}^{3}\rho_j\nu_j E(\vec{u}_j,\vec{u}_j)+\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_i}(B_i u_{ir})u_{ir}^{*}d\Gamma_i=0, \tag{I.I8}$$

$$B_i=-\frac{\bar{\sigma}\sigma_i}{r_i^2}\left(1+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)+(\rho_i-\rho_{i+1})r_i\,,$$

справедливому для любого (гладкого) решения задачи (I.3)-(I.7). Возьмем от левой и правой частей (I.I8) вещественную часть и учтем, что $Re(\vec{k}\times\vec{u}_j)\vec{u}_j^{*}=0$. Получим равенство

$$Re\lambda\left\{\sum_{j=1}^{3}\rho_j\int\limits_{\Omega_j}|\vec{u}_j|^2d\Omega_j+\frac{1}{|\lambda|^2}\sum_{i=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_i}(B_i u_{ir})u_{ir}^{*}d\Gamma_i\right\}+$$
$$+\varepsilon^2\sum_{j=1}^{3}\rho_j\nu_j E(\vec{u}_j,\vec{u}_j)=0,$$

из которого следует наше утверждение, так как в силу условий (I.I6) операторы B_i из (I.I8) положительно определены в $L_2(\Gamma_i)$ на функциях, удовлетворяющих следствиям условий несжимаемости

$$\int\limits_{\Gamma_i}u_{ir}\,d\Gamma_i=0\,,\qquad i=1,2.$$

Рассуждая по аналогии с задачей о нормальных колебаниях цилиндрического столба жидкости [5], можно утверждать, что задача (I.3)-(I.7) также имеет дискретный спектр $\{\lambda_{np}(\varepsilon)\}$ $n,p=1,2,\ldots$ с единственной предельной точкой на бесконечности, а при $\varepsilon^2 \to 0$ для всякого n первые два числа λ_{n1} и λ_{n2} переходят на мнимую ось и совпадают в пределе с собственными значениями задачи (I.9) о колебаниях идеальной жидкости. Именно эти собственные числа задачи (I.3)-(I.7) могут быть найдены асимптотическим методом, описанным в п. 4.

4. Метод пограничного слоя. Будем считать, что рассматриваемая система состоит из маловязких жидкостей, т.е. параметр ε^2 из (I.2) мал. Тогда для решения задачи (I.3)-(I.7) можно применить метод пограничного слоя, развитый Н.Н. Моисеевым [6], а впоследствии Ф.Л. Черноусько [7] для исследования малых движений (а также колебаний) жидкости в сосуде; будем придерживаться общей схемы работ [6,4].

Представим пространственную часть поля скорости $\vec{u}_j$ из (I.3) в виде

$$\vec{u}_j=\vec{\nabla}\Phi_j+\vec{\nabla}^*\varphi_j\,,\quad \vec{\nabla}^*\varphi=\vec{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\vec{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,,\quad j=1,2,3. \qquad (I.19)$$

Тогда из уравнения неразрывности (I.3) следует, что Φ_j - гармоническая в Ω_j функция, и первое уравнение (I.3) с учетом равенства $\vec{k}\times\vec{\nabla}^*\varphi_j=\vec{\nabla}\varphi_j$ можно записать в виде

$$\vec{\nabla}\left\{\lambda\Phi_j+P_j/\rho_j+2\varphi_j+2\Psi_j\right\}+\vec{\nabla}^*\left\{-\varepsilon^2\nu_j\Delta\varphi_j+\lambda\varphi_j\right\}=0,\ j=1,2,3,$$

где Ψ_j - функция тока (см.п.2). Потребуем, чтобы в этом равенстве каждая скобка обращалась в нуль. Мы получим, исключая давления в (I.3), (I.7), следующие уравнения и граничные условия

$$\varepsilon^2\nu_j\Delta\varphi_j=\lambda\varphi_j\,,\quad \Delta\Phi_j=0,\ r_j\le r\le r_{j-1}\,,\quad j=1,2,3, \qquad (I.20)$$

$$\lambda^2(\rho_{j+1}\Phi_{j+1}-\rho_j\Phi_j)+2\lambda(\rho_{j+1}\Psi_{j+1}-\rho_j\Psi_j)+2\lambda(\rho_{j+1}\varphi_{j+1}-\rho_j\varphi_i)+$$
$$+2\lambda\varepsilon^2\left(\nu_{j+1}\rho_{j+1}\frac{\partial u_{j+1r}}{\partial r}-\nu_j\rho_j\frac{\partial u_{jr}}{\partial r}\right)-$$
$$-\left[(\rho_{j+1}-\rho_j)r_j+\frac{\sigma_j\bar{\sigma}}{r^2}\left(1+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right]u_{jr}=0,\quad r=r_j\,,\quad j=1,2. \qquad (I.21)$$

Таким образом, задача о нормальных колебаниях системы вязких жидкостей сводится к нахождению решений уравнений (I.20) и граничных условий (I.21), (I.4 - I.6); функции Φ_j и φ_j связаны соотношениями (I.19), а Φ_j и Ψ_j - условиями Коши-Римана.

В представлении (I.19) функции Φ_j и φ_j играют различную роль: при $\varepsilon\to 0$ $\Phi_j(r,\theta,\varepsilon)$ переходит в потенциал скорости (п.2), а $\varphi_j(r,\theta,\varepsilon)$ имеет характер пограничного слоя, т.е. она практически отлична от нуля лишь в малых окрестностях поверхностей Γ_k, ограничивающих область Ω_j. Функции $\varphi_j(r,\theta,\varepsilon)$ компенсируют невязку в граничных условиях задачи (I.20-I.21, I.4-I.6) по сравнению с вырожденной при $\varepsilon=0$ задачей (I.9).

Будем искать, как и в п. 2, решения задачи, зависящие от θ по закону $exp(in\theta)$, $n=1,2,\ldots$. Тогда функции Φ_2 и Φ_3 будут иметь вид (I.10), где коэффициенты b_k и c_1, $k=1,2$, уже нужно считать зависящими от ε и имеющими порядок $\underset{\sim}{O}(1)$ при $\varepsilon\to 0$. Для функций Φ_1 и Ψ_1 будем иметь представление

$$\Phi_1=(a_1r^n+a_2r^{-n})\exp(in\theta),\ \Psi_1=-i\,(a_1r^n-a_2r^{-n})\exp(in\theta), \qquad (I.22)$$

где коэффициенты $a_k=a_k(\varepsilon)$ также порядка единицы. В силу однородности задачи (I.20-I.21, I.4-I.6) можно считать, что a_1 не зависит от ε, и все остальные коэффициенты выражать через него.

При построении приближенного решения ограничимся рассмотрением членов вплоть до второго порядка по ε, отбрасывая величины $\underset{\sim}{O}(\varepsilon^3)$. Используем также тот факт, что, как следует из (I.4) и (I.6), функции $\varphi_j(r,\theta,\varepsilon)$ имеют в окрестности Γ_0 порядок $\underset{\sim}{O}(\varepsilon)$, а в окрестности Γ_k, $k=1,2$ – порядок $\underset{\sim}{O}(\varepsilon^2)$. Не приводя подробных выкладок (см. [4]), выпишем пять погранслойных решений φ_{jk} задачи (I.20–I.2I, I.4–I.6) (φ_{jk} затухает вглубь j-ой жидкости)

$$\varphi_{10}(r,\theta,\varepsilon) = -in\exp\left[in\theta+\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1}x\right]a_{10}(\varepsilon)\left[\frac{2\mu_1}{q\sqrt{\lambda}}+\frac{2n-1}{q^2\lambda}\mu_1^2\varepsilon\right]\times$$
$$\times\left\{1+\frac{\varepsilon}{2q}x\right\}+\underset{\sim}{O}(\varepsilon^3),\qquad x=(q-r)/\varepsilon,\quad \mathrm{Re}\sqrt{\lambda}<0; \tag{I.23}$$

$$\varphi_{jk}(r,\theta,\varepsilon) = a_{jk}(\varepsilon)\exp\left[in\theta+\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_j}x_{jk}\right]+\underset{\sim}{O}(\varepsilon^3),\quad j=1,\ k=1;\ j=2,\ k=1,2;\ j=3;\ k=2;$$

$$x_{11}=(r-1)/\varepsilon,\quad x_{21}=(1-r)/\varepsilon,\quad x_{22}=(r-p)/\varepsilon,\quad x_{32}=(p-r)/\varepsilon,\quad \mu_k=\sqrt{\nu_k},\quad k=1,2,3.$$

Для коэффициента $a_2(\varepsilon)$ из (I.22) условия (I.6) приводят к формуле

$$a_2 = a_1 q^{2n}\left[1+\frac{2n\mu_1}{q\sqrt{\lambda}}\varepsilon+\frac{n(2n-1)\mu_1^2}{q^2\lambda}\varepsilon^2\right]+\underset{\sim}{O}(\varepsilon^3) \tag{I.24}$$

(выражение для a_{10} нам не понадобится).

Для определения коэффициентов

$$a_k(\varepsilon),\ b_k(\varepsilon),\ k=1,2 \quad \text{и} \quad c_1(\varepsilon)$$

из (I.IO), (I.22) и $a_{jk}(\varepsilon)$ из (I.23) подставим решения (I.IO), (I.22), (I.23) в граничные условия (I.4), (I.5), (I.2I). Мы придем к однородной системе восьми линейных алгебраических уравнений с восемью неизвестными (с точностью до отброшенных членов $\underset{\sim}{O}(\varepsilon^3)$)

$$a_1-a_2-b_1+b_2+ia_{11}-ia_{21}=0,$$
$$b_1p^{2n}-b_2-c_1p^{2n}+ia_{22}-ia_{32}=0,$$
$$a_1\left\{\lambda^2\rho_1-2\lambda i\rho_1-\alpha_{12}^2+2\lambda\varepsilon^2\nu_1\rho_1 n(n-1)\right\}+a_2\rho_1\left\{\lambda^2+2\lambda i+\alpha_{12}^2\rho_1^{-1}+\right.$$
$$\left.+2\lambda\varepsilon^2\mu_1^2 n(n+1)\right\}-\rho_2 b_1\left\{\lambda^2-2\lambda i+2\lambda\varepsilon^2\mu_2^2 n(n-1)\right\}-b_2\rho_2\left\{\lambda^2+2\lambda i+\right.$$
$$\left.+2\lambda\varepsilon^2\mu_2^2 n(n+1)\right\}+a_{11}\left\{2\lambda\rho_1-i\alpha_{12}^2\right\}-2\lambda\rho_2 a_{21}=0,$$
$$b_1p^{2n}\rho_2\left\{\lambda^2-2i\lambda+2\lambda\varepsilon^2\mu_2^2\frac{n(n-1)}{p^2}\right\}+b_2\rho_2\left\{\lambda^2+2\lambda i+2\lambda\varepsilon^2\mu_2^2\frac{n(n+1)}{p^2}\right\}-$$
$$-c_1p^{2n}\left\{\lambda^2\rho_3-2\lambda i\rho_3+\alpha_{23}^2+2\lambda\varepsilon^2\mu_3\rho_3\frac{n(n-1)}{p^2}\right\}+2\lambda\rho_2 p^n a_{22}-$$
$$-p^n a_{32}\left\{2\lambda\rho_3+i\alpha_{23}^2\right\}=0, \tag{I.25}$$
$$\frac{1}{\mu_1}a_{11}+\frac{1}{\mu_2}a_{21}-\frac{in\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}(a_1+a_2)+\frac{in\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}(b_1+b_2)=0,$$
$$\rho_1a_{11}-\rho_2a_{21}-\frac{2in\varepsilon^2}{\lambda}\rho_1\mu_1^2\left[(n-1)a_1-(n+1)a_2\right]+\frac{2in\varepsilon^2}{\lambda}\rho_2\mu_2^2\left[(n-1)b_1-(n+1)b_2\right]=0,$$
$$\frac{1}{\mu_2}a_{22}+\frac{1}{\mu_3}a_{32}-\frac{in\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}(b_1p^n+b_2p^{-n})+\frac{in\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}c_1p^n=0,$$
$$\rho_2a_{22}-\rho_3a_{32}-\frac{2in\varepsilon^2}{\lambda}\frac{\rho_2\mu_2^2}{p^{n+2}}\left[(n-1)p^{2n}b_1-(n+1)b_2\right]+\frac{2in\varepsilon^2}{\lambda}\rho_3\mu_3^2p^{n-2}(n-1)c_1=0,$$

где α_{12}^2 и α_{23}^2 определены в (I.I2), а $a_2(\varepsilon)$ – в (I.24).

Приравнивая нулю определитель системы (I.25), получим, с точностью до отбрасываемых членов порядка $\underset{\sim}{O}(\varepsilon^3)$, характеристическое уравнение для определения собственных чисел $\lambda_n(\varepsilon)$. Будем искать приближенно $\lambda_n(\varepsilon)$ в виде

$$\lambda_n(\varepsilon) = \lambda_{0n} + \varepsilon\lambda_{1n} + \varepsilon^2\lambda_{2n} + \underset{\sim}{O}(\varepsilon^3). \tag{I.26}$$

Из последних четырех уравнений (I.25) видно, что при $\varepsilon=0$ будет $a_{11}=a_{21}=a_{22}=a_{32}=0$. Тогда, приравнивая нулю (с учетом этих равенств) определитель системы первых четырех уравнений (I.25), придем после замены $\lambda_{0n}=-i\omega_n$ к уравнению (I.II) для определения частот колебаний системы идеальных жидкостей, которое уже исследовано в п. 2. Вычисляя далее поправку к частоте в первом приближении, получаем

$$\lambda_{1n} = \frac{(-1\pm i)}{4}\,\frac{\sqrt{2}}{|\omega_n^{\pm}|^{1/2}}\,\frac{F_2(\omega_n^{\pm})}{F_1(\omega_n^{\pm})}, \tag{I.27}$$

$$\begin{aligned}
F_1(\omega) &= P_1(\omega)\left\{\rho_2\left[(\omega-1)+(\omega+1)p^{2n}\right]+\rho_3(\omega+1)(1-p^{2n})\right\}+\\
&\quad +P_2(\omega)\left\{\rho_1(\omega\varkappa_n^2-1)(1-p^{2n})+\rho_2\left[(\omega+1)+p^{2n}(\omega-1)\right]\right\}-\\
&\quad -2\rho_2\omega^2\left\{2\rho_2\omega-\rho_3(\omega+1)+\rho_1(1-\omega\varkappa_n^2)\right\}p^{2n};\\
F_2(\omega) &= n\left[P_2(\omega)P_1(\omega)\tilde\gamma_{12}+P_2(\omega)\tilde\gamma_2+P_1(\omega)\tilde\gamma_1+2\rho_2\omega^2\tilde\gamma_0\right],\\
\tilde\gamma_{12} &= (\rho_1\beta_{12}+\rho_3\frac{1}{p}\beta_{23})(1+p^{2n})+\rho_2(1-p^{2n})(\varkappa_n^2\beta_{12}+\frac{1}{p}\beta_{23}),\\
\tilde\gamma_2 &= \rho_2\omega^2\left\{\frac{4\mu_1}{q(1-q^{-2n})}-\rho_1\beta_{12}(1+\varkappa_n^2)\left[\varkappa_n^2(1-p^{2n})+(1+p^{2n})\right]+\right.\\
&\quad \left.+\frac{2}{p}(\rho_2-\rho_3)\beta_{23}p^{2n}\right\}-4\omega\rho_2\beta_{12}\varkappa_n^2(\rho_1-\rho_2)p^{2n},\\
\tilde\gamma_1 &= 2\rho_2\omega^2\left\{\frac{2\mu_1}{q(1-q^{2n})}-\frac{2}{p}\beta_{23}\left[\rho_3-\frac{1}{2}(\rho_2-\rho_3)p^{2n}\right]-\beta_{12}p^{2n}(\rho_1-\rho_2\varkappa_n^2)\right\},\\
\tilde\gamma_0 &= -\rho_2\omega^2\left[\rho_1\beta_{12}(1+\varkappa_n^2)^2p^{2n}-\frac{2}{p}(\rho_2-\rho_3)\beta_{23}p^{2n}\right]-\\
&\quad -4\omega\rho_2\beta_{12}\varkappa_n^2(\rho_1-\rho_2)p^{2n}-\frac{2\mu_1\omega^2}{q(1-q^{-2n})}\left[\rho_1(\varkappa_n^2-1)+2\rho_2\right];\quad \beta_{ik}=\mu_i\mu_k/(\rho_i\mu_i+\rho_k\mu_k).
\end{aligned} \tag{I.28}$$

Второе приближение находится аналогично и приводит к простым, но довольно громоздким выкладкам.

Из (I.27) видно, что при колебаниях системы трех маловязких жидкостей, как и для одной жидкости (см. [7]), уменьшение частоты за счет вязкости равно декременту затухания и пропорционально $\varepsilon=\left[\nu_*/(\omega_0R_1^2)\right]^{1/2}$. Более подробно влияние вязких и капиллярных сил рассмотрено в примерах п.5.

5. Частные и предельные случаи. Из общей задачи пп.2-4 о колебаниях системы трех жидкостей можно в качестве частных (предельных) случаев получить более простые задачи о колебаниях двух либо одной жидкости в цилиндрическом сосуде или безграничной вращающейся жидкости.

а) Колебания одной жидкости в цилиндрическом сосуде $(\rho_2=\rho_3=\nu_2=\nu_3=\sigma_2=0, \nu_1=\rho_1=1)$

$$\lambda_{on}^{\pm}=-i\omega_n^{\pm},\quad \omega_n^{\pm}=(1\pm\sqrt{1+\alpha_n^2\varkappa_n^2})/\varkappa_n^2,\ \alpha_n^2=n+\bar{\sigma}\sigma_1 n(n^2-1),$$

$$\lambda_{1n}^{\pm}=(-1\pm i)\mu_n|\omega_n^{\pm}|^{3/2},\quad \mu_n=\frac{n(\varkappa_n^2-1)}{(1+q^{-2n})q\sqrt{2}\ \sqrt{1+\alpha_n^2\varkappa_n^2}}>0, \tag{I.29}$$

$$\lambda_{2n}^{\pm}=\frac{\varkappa_n^2}{\sqrt{1+\alpha_n^2\varkappa_n^2}}\Big\{-|\omega_n^{\pm}|\Big[\mu_n^2(\omega_n^{\pm})^2+2n^2+n\left(\varkappa_n^2+\varkappa_n^{-2}\right)\Big]-$$
$$-\frac{\sqrt{2}\cdot n}{q(1+q^{-2n})}\mu_n^2|\omega_n^{\pm}|^{3/2}\left(|\omega_n^{\pm}|\mp 1\right)(1\pm i)+n\,(2n-1)\frac{(\varkappa_n^2-1)}{2q^2(1+q^{-2n})}\Big\}.$$

При $n\to\infty$ величина $\mu_n\to 0$ со скоростью экспоненты, так что в первом приближении влияние твердой стенки $r=q$ на высокие тона колебаний пренебрежимо мало. Эта задача ранее была разобрана в [4].

б) Колебания цилиндрического пузыря в безграничной жидкости. Решение получается из (I.29) при $q\to\infty$ $(\varkappa_n^2=1)$

$$\lambda_{on}^{\pm}=-i\omega_n^{\pm}=-i\left[1\pm\sqrt{1+\alpha_n^2}\right],\quad \lambda_{1n}^{\pm}=0,$$
$$\lambda_{2n}^{\pm}=-\frac{2n(n+1)}{\sqrt{1+\alpha_n^2}}|\omega_n^{\pm}|<0. \tag{I.30}$$

Здесь в отсутствие твердой стенки $\lambda_{1n}^{\pm}=0$, а второе приближение дает только декремент затуханий, не изменяя частоту колебаний. Этот факт уже отмечался ранее [6,8]. Из (I.30) также видно, что учет капиллярных сил $(\sigma_1>0)$ приводит к увеличению частот колебаний и асимптотически не меняет (при $n\to\infty$) декремент затухания.

в) Колебания цилиндрического столба $(\rho_1=\rho_2=\sigma_1=0\ ,\ \rho_3=\nu_3=p=1)$. Эта задача имеет смысл, если вместо (I.16) выполнено условие устойчивости для вязкой жидкости [9,I0]

$$\min_{n\geqslant 2}\beta_n^2=\min_{n\geqslant 2}\left[\sigma_2\bar{\sigma}(n^2-1)n-n\right]>0,\ \text{т.е.}\ 3\bar{\sigma}\sigma_2>1, \tag{I.31}$$

а также исключены из рассмотрения сдвиговые возмущения, отвечающие $n=1$. Тогда

$$\lambda_{on}^{\pm}=-i\omega_n^{\pm}=-i\left(-1\pm\sqrt{1+\beta_n^2}\right),\quad n=2,3,\dots,\ \lambda_{1n}^{\pm}=0,$$
$$\lambda_{2n}^{\pm}=-2n(n-1)|\omega_n^{\pm}|\left(1+\beta_n^2\right)^{-1/2}<0. \tag{I.32}$$

Из первой формулы (I.32) видно, что в рамках идеальной жидкости критерий устойчивости вместо (I.31) имеет вид

$$1+\beta_2^2>0,\ \text{т.е.}\ 6\bar{\sigma}\sigma_2>1. \tag{I.33}$$

Этот факт уже отмечался ранее [9,I0]. Он является ярким примером гироскопической стабилизации для задач гидромеханики идеальной жидкости. Заметим также, что для решения (I.32) справедливы выводы из б).

г) Колебания жидкого столба в безграничной более плотной жидкости $(\rho_2=\rho_3,\ \sigma_2=0,\ q=\infty)$. Эта задача получается объединением двух предыдущих случаев б) и в). Условие устойчивости для такой системы очевидно: $\rho_1>\rho_2$. Ответ задачи имеет вид

$$\lambda_{on}^{\pm} = -i\omega_n^{\pm} = -i\left\{(\rho_1-\rho_2) \pm \sqrt{(\rho_1-\rho_2)^2+\alpha_{12}^2}\right\}, \quad n=1,2,\dots, \tag{I.34}$$
$$\lambda_{1n}^{\pm} = (-1\pm i)\sqrt{2}\, n\rho_1\rho_2\beta_{12}\,|\omega_n^{\pm}|^{3/2}\left[(\rho_1-\rho_2)^2+\alpha_{12}^2\right]^{-1/2},$$

где α_{12} и β_{12} определены в (I.I2) и (I.28).

Как видно из (I.34), несмотря на отсутствие твердой стенки $(q=\infty)$, решение, в отличие от б) и в), уже в первом приближении не равно нулю; в этом сказывается влияние двух жидкостей на процесс совместных колебаний.

д) Колебания двух жидкостей в цилиндрическом сосуде $(\rho_2=\rho_3,\ \sigma_2=0,\ q\neq\infty)$. Снова будем считать, что $\rho_1>\rho_2$. В нулевом приближении имеем $\lambda_{on}^{\pm}=-i\omega_n^{\pm}$, где $\omega_n^{\pm}$ находится по формуле (I.I3). В первом приближении будем иметь

$$\lambda_{1n}^{\pm} = (-1\pm i)\frac{\sqrt{2}\,n\,|\omega_n^{\pm}|^{3/2}\rho_1\,(\rho_2\beta_{12}+q^{-2n-1}\mu_1)}{(1-q^{-2n})\left[(\rho_1-\rho_2)^2+\alpha_{12}^2(\rho_1\varkappa_n^2+\rho_2)\right]^{1/2}}. \tag{I.35}$$

При $q\to\infty$ из (I.35) получаем (I.34).

е) Колебания цилиндрического слоя жидкости с двумя свободными поверхностями $(\rho_1=\rho_3=\nu_1=\nu_3=0,\ \rho_2=\nu_2=1)$. Считая, как и в п.2, малым параметром величину p^{2n}, будем иметь

$$\lambda_{on}^{\pm\,\mathrm{I},\mathrm{II}} = \begin{cases} -i\left[\omega_{\mathrm{I}n}^{\pm} - p^{2n}\dfrac{(\omega_{\mathrm{I}n}^{\pm})^2}{(1-\omega_{\mathrm{I}n}^{\pm})}\dfrac{\left[\sigma_1 n(n^2-1)-\sigma_2\frac{1}{p^3}n(n^2-1)\right]\bar\sigma}{2(\omega_{\mathrm{I}n}^{\pm})^2+n(n^2-1)(\sigma_1+\frac{\sigma_2}{p^3})\bar\sigma} + \underset{\sim}{O}(p^{4n})\right], \\ -i\left[\omega_{\mathrm{II}n}^{\pm} - p^{2n}\dfrac{(\omega_{\mathrm{II}n}^{\pm})^2}{(1-\omega_{\mathrm{II}n}^{\pm})}\dfrac{\bar\sigma(\sigma_1+\frac{\sigma_2}{p^3})(n^2-1)n}{\bar\sigma n(n^2-1)(\sigma_1+\frac{\sigma_2}{p^3})-2(\omega_{\mathrm{II}}^{\pm})^2} + \underset{\sim}{O}(p^{4n})\right], \end{cases}$$

$$\lambda_{1n}^{\pm}=0,\ \lambda_{2n}^{\pm\,\mathrm{I},\mathrm{II}} = \begin{cases} -\dfrac{2n(n+1)}{p^2|\omega_{\mathrm{I}n}^{\pm}-1|}\cdot|\omega_{\mathrm{I}n}^{\pm}| + \underset{\sim}{O}(p^{2n}) \\ -\dfrac{2n(n-1)}{|1+\omega_{\mathrm{II}n}^{\pm}|}\cdot|\omega_{\mathrm{I}n}^{\pm}| + \underset{\sim}{O}(p^{2n}) \end{cases},$$

$$\omega_{\mathrm{I}n}^{\pm} = 1\pm\sqrt{1+n+\sigma_2\frac{1}{p^3}n(n^2-1)\bar\sigma}\,; \quad \omega_{\mathrm{II}n}^{\pm} = -1\pm\sqrt{1-n+\sigma_1(n^2-1)n\bar\sigma},\ n=2,3,\dots .$$

Здесь, как и в случае в), критерием устойчивости для идеальной жидкости является условие (I.33).

§ 2. КОЛЕБАНИЯ МАЛОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ В СФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

I. Постановка задачи. Рассмотрим теперь пространственную задачу о колебаниях трех вязких жидкостей в сферическом сосуде. Будем считать, что жидкости находятся в условиях полной невесомости (вращение отсутствует) и в состоянии равновесия расположены сферически симметрично по отношению к центру сосуда. Мы сохраним все обозначения из § I и при переходе к безразмерным переменным в качестве характерных снова выберем величины (I.I), где примем $\omega_0=\sigma_*/(\rho_* R_1)$. Жидкости будем считать маловязкими, т.е. полагаем безразмерный параметр $\varepsilon^2=\nu_*\rho_*/(\sigma_* R_1)\ll 1$.

В сферической системе координат (r,θ,φ) линеаризованные уравнения и граничные условия задачи о нормальных колебаниях примут вид

$$\lambda\vec{u}_j=-\frac{1}{\rho_j}\nabla p_j+\varepsilon^2\nu_j\Delta\vec{u}_j,\ \operatorname{div}\vec{u}_j=0,\ r_j\leq r\leq r_{j-1},\ j=1,2,3; \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\rho_k\nu_k\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_{kr}}{\partial\theta}+\frac{\partial u_{k\theta}}{\partial r}-\frac{u_{k\theta}}{r}\right)=\rho_{k+1}\nu_{k+1}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_{k+1,r}}{\partial\theta}+\frac{\partial u_{k+1,\theta}}{\partial r}-\frac{u_{k+1,\theta}}{r}\right),\\&\rho_k\nu_k\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_{kr}}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_{k,\varphi}}{\partial r}-\frac{u_{k\varphi}}{r}\right)=\rho_{k+1}\nu_{k+1}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_{k+1,r}}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_{k+1,\varphi}}{\partial r}-\frac{u_{k+1,\varphi}}{r}\right),\end{aligned}\right\}$$
$$r=r_k,\quad k=1,2; \tag{2.2}$$

$$\vec{u}_1=0,\ r=r_0,\quad \vec{u}_k=\vec{u}_{k+1},\ r=r_k,\ k=1,2; \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}&\lambda(p_{k+1}-p_k)-2\lambda\varepsilon^2\left(\nu_{k+1}\rho_{k+1}\frac{\partial u_{k+1,r}}{\partial r}-\nu_k\rho_k\frac{\partial u_{kr}}{\partial r}\right)+\\&+\frac{\bar{\sigma}\sigma_k}{r_k^2}(2+\Delta_{\theta\varphi})u_{kr}=0,\quad r=r_k,\quad k=1,2.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $\Delta_{\theta\varphi}$ – оператор Лапласа-Бельтрами на единичной сфере.

2. Колебания идеальных жидкостей. Будем считать сначала $\varepsilon^2=0$ и рассмотрим задачу о колебаниях системы идеальных жидкостей. В этом случае, как видно из (2.I), существуют потенциалы скоростей Φ_j , являющиеся гармоническими функциями в Ω_j . Разделяя переменные в уравнении Лапласа $\Delta\Phi_j=0$ и выписывая только одну сферическую гармонику, будем иметь с учетом равенства нулю нормальной компоненты u_{1r} при $r=r_0=q>1$ и условия ограниченности u_3 при $r=0$

$$\begin{aligned}&\Phi_1=a_1\left(r^\ell+\frac{\ell}{\ell+1}q^{2\ell+1}r^{-\ell-1}\right)Y_\ell^n(\theta,\varphi),\quad 1\leq r\leq r_0=q;\\&\Phi_2=(b_1r^\ell+b_2r^{-\ell-1})Y_\ell^n(\theta,\varphi),\qquad r_2=p\leq r\leq r_1=1;\\&\Phi_3=c_1r^\ell Y_\ell^n(\theta,\varphi),\quad 0\leq r\leq p;\\&p_j=-\lambda\rho_j\Phi_j,\qquad j=1,2,3.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Для определения постоянных a_1,b_1,b_2 и c_1 подставим решения (2.5) в граничные условия (2.4) и нормальные условия второй группы равенств (2.3). Мы придем к однородной системе четырех линейных алгебраических уравнений и, приравняв нулю ее определитель, получим характеристическое уравнение для нахождения собственных чисел

$$\begin{aligned}&(\lambda^2+\omega_{12\ell}^2)(\lambda^2+\omega_{23\ell}^2)-p^{2\ell+1}(\lambda^2\varkappa_{12}+\omega_{12\ell}^2)(\lambda^2\varkappa_{23}+\omega_{23\ell}^2)=0,\\&\varkappa_{12}=\left[\rho_{12}-\frac{2\ell+1}{\ell+1}\rho_2\right]/\rho_{12},\quad \varkappa_{23}=(\rho_3-\rho_2)/\rho_{23},\\&\rho_{12}=\rho_2+\rho_1\left(\frac{\ell}{\ell+1}+q^{-2\ell-1}\right)/\left(1-q^{-2\ell-1}\right),\quad \rho_{23}=\frac{\ell}{\ell+1}\rho_2+\rho_3,\\&\omega_{12\ell}^2=\bar{\sigma}\sigma_2\ell(\ell-1)(\ell+2)\rho_{12}^{-1},\quad \omega_{23\ell}^2=\frac{\sigma_2\bar{\sigma}}{p^3}\ell(\ell-1)(\ell+2)\rho_{23}^{-1},\ \ell=1,2,\ldots.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь, как и в п. I.2, числа $\omega_{12\ell}$ и $\omega_{23\ell}$ имеют простой физический смысл: величины $\omega_{12\ell}$, $\ell=2,3,\ldots$ равны частотам колебаний двух жидкостей плотностей ρ_1 и ρ_2 с границей раздела $r=1$ в сферическом сосуде радиуса q , а $\omega_{23\ell}$ – частотам колебаний шаровой капли плотности ρ_3 и радиуса p в безграничной жидкости плотности ρ_2.

Так как в (2.6) $1-\varkappa_{12}>0$, $1-\varkappa_{23}>0$ и $p<1$, то это биквадратное уравнение имеет при каждом $\ell=2,3,\ldots$ два отрицательных корня $(\lambda_\ell^{(1,2)})^2=-(\omega_\ell^{(1,2)})^2$, и потому $\lambda_\ell^{(1,2)}=\pm i\omega_\ell^{(1,2)}$, $\omega_\ell^{(1,2)}>0$. Если параметр $p^{2\ell+1}$ мал (так будет при малом p либо большом ℓ), то в нерезонансном случае $(\omega_{12}^2\neq\omega_{23}^2)$ имеем

$$\omega_\ell^{(1,2)}=\gamma_\ell^{(1,2)}+p^{2\ell+1}\eta_\ell^{(1,2)}+\underset{\sim}{O}[(p^{2\ell+1})^2],$$

$$\gamma_\ell^{(1,2)}=\begin{cases}\omega_{12\ell}\\ \omega_{23\ell},\end{cases}\quad \eta_\ell^{(1,2)}=\begin{cases}\omega_{12\ell}^2(1-\varkappa_{12})(\omega_{23\ell}^2-\varkappa_{23}\omega_{12}^2)/(\omega_{23\ell}^2-\omega_{12\ell}^2),\\ \omega_{23\ell}^2(1-\varkappa_{23})(\omega_{12\ell}^2-\varkappa_{12}\omega_{23\ell}^2)/(\omega_{12\ell}^2-\omega_{23\ell}^2).\end{cases}\tag{2.7}$$

Первому верхнему индексу в (2.7) отвечают колебания, сосредоточенные у границы раздела Γ_1 первой и второй жидкостей, а второму - у поверхности Γ_2 (при $r=p$).

При $\ell=1$ из (2.6) получаем $\lambda=0$; этому вырожденному случаю отвечают несколько простых классов движений системы с шестью степенями свободы. В самом деле, из условий (2.3) (остальные условия в (2.I)-(2.4) выполнены) находим, что коэффициенты из (2.5) связаны соотношениями

$$b_2=\frac{1}{2}p^3(b_1-c_1),\quad a_1=\frac{1}{(q^3-1)}\left[c_1+(1-p^3)(b_1-c_1)\right].$$

Отсюда и из (2.5) видно, что при $c_1=1, a_1=0$ имеем равномерное движение третьей жидкости вдоль трех декартовых осей при неподвижной первой жидкости; при $b_1=c_1=1$ третья и вторая жидкости движутся равномерно как единое целое в первой, при $c_1=0$, $a_1=q^{-3}$ граница раздела Γ_1 первой и второй жидкости движется с единичной скоростью вдоль осей x либо y, а третья жидкость неподвижна, и т.д.

3. Представление решения в виде полоидального поля. Прежде чем решать задачу (2.I-2.4) о колебаниях системы маловязких жидкостей в сферическом сосуде, отметим некоторые особенности ее решений при произвольном значении вязкости ε.

В [5] для задачи о колебаниях жидкого самогравитирующего шара было замечено, что ее решения разбиваются на два класса, описывающие качественно разные собственные колебания жидкости. Первому классу отвечают движения, не связанные с отклонением свободной поверхности, для которых $u_r\equiv 0$, а собственные числа λ вещественны при любой вязкости ε^2 и не зависят от капиллярных сил. Этот класс колебаний описывается тороидальным векторным полем [II] $\vec{v}=\vec\nabla\times\left[\frac{\vec r}{r}\tau(r)Y_\ell^n(\theta,\varphi)\right]$, имеющим в сферической системе координат компоненты

$$v_r=0,\quad v_\theta=\frac{1}{r\sin\theta}\tau(r)\frac{\partial Y_\ell^n}{\partial\varphi},\quad v_\varphi=-\frac{1}{r}\tau(r)\frac{\partial Y_\ell^n}{\partial\theta},\tag{2.8}$$

где $\tau(r)$ - произвольная функция.

Для второго класса движений характерно отклонение свободной поверхности жидкости от равновесной формы, и потому соответствующие значения λ зависят не только от вязкости, но и от капиллярных сил. Движения этого класса выражаются через полоидальные векторные поля [II] вида $\vec u=\vec\nabla\times\vec\nabla\times\left[\frac{\vec r}{r}f(r)Y_\ell^n\right]$ с компонентами

$$u_r=\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}f(r)Y_\ell^n,\quad u_\theta=\frac{1}{r}\frac{df}{dr}\frac{\partial Y_\ell^n}{\partial\theta},\quad u_\varphi=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{df}{dr}\frac{\partial Y_\ell^n}{\partial\varphi},\tag{2.9}$$

при произвольной $f=f(r)$. При $\varepsilon^2\to 0$ некоторое счетное подмножество второй совокупности чисел λ переходит на мнимую ось (сравни с п.I.3), т.е. в частоты колебаний идеальной жидкости, а остальные значения λ остаются вещественными.

Аналогичная картина имеет место и в задаче (2.I-2.4). Мы сейчас убедимся, что здесь также существуют тороидальные колебания всей системы, которым отвечают вещественные λ при любом ε^2. Для доказательства этого факта введем вместо v_{jr}, $v_{j\theta}$, $v_{j\varphi}$ компоненты

$$v_{0j} = v_{rj}, \quad v_j^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_{j\varphi} + i v_{j\theta}\right), \quad v_j^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(v_{j\varphi} - i v_{j\theta}\right), \quad j = 1,2,3 \tag{2.I0}$$

и будем искать их в виде рядов по обобщенным сферическим функциям $T^{\ell}_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ (см. [I2])

$$\begin{aligned} v_{0j} &= \sum_{\ell=1}^{\infty} f^{\circ}_{\ell j}(r) \sum_{n=-\ell}^{\ell} \alpha_{\ell n} T^{\ell}_{0n}(\pi/2 - \varphi, \theta, 0), \\ v_j^+ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} f^{+}_{\ell j}(r) \sum_{n=-\ell}^{\ell} \beta_{\ell n} T^{\ell}_{1n}(\pi/2 - \varphi, \theta, 0), \\ v_j^- &= \sum_{\ell=1}^{\infty} f^{-}_{\ell i}(r) \sum_{n=-\ell}^{\ell} \gamma_{\ell n} T^{\ell}_{-1n}(\pi/2 - \varphi, \theta, 0). \end{aligned} \tag{2.II}$$

Тогда, как показано в [I2], переменные в (2.I) разделятся, и из (2.I)-(2.4) мы получим, что для нетривиальных решений либо

$$f^{\circ}_{\ell j}(r) \equiv 0, \quad f^{+}_{\ell j}(r) + f^{-}_{\ell j}(r) \equiv 0, \qquad j = 1,2,3, \quad \ell = 1,2,\dots, \tag{2.I2}$$

а функции $\psi_{\ell j}(r) \equiv f^{+}_{\ell j}(r) - f^{-}_{\ell j}(r)$ являются решениями следующей краевой задачи

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\psi_{\ell j}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi_{\ell j}}{dr} - \left[\frac{\lambda}{\varepsilon^2 \nu_j} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right]\psi_{\ell j} = 0, \quad r_j \le r \le r_{j-1}, \ j = 1,2,3; \\ &\psi_{e1}(r_0) = 0; \ \psi_{e1} = \psi_{e2}, \ r = r_1 = 1; \ \psi_{e2} = \psi_{e3}, \ r = r_2 = p; \ |\psi_{e3}(0)| < \infty; \\ &\rho_{k+1}\nu_{k+1}\left(\frac{d\psi_{k+1,e}}{dr} - \frac{1}{r}\psi_{k+1,e}\right) = \rho_k \nu_k \left(\frac{d\psi_{ke}}{dr} - \frac{1}{r}\psi_{ke}\right), \quad r = r_k, \ k = 1,2, \end{aligned}\right\} \tag{2.I3}$$

(первый случай), либо $\psi_{\ell j}(r) \equiv 0$ (второй случай).

В первом случае для исследования спектра произведем в (2.I3) замены

$$\psi_{\ell j}(r) = r^{-1}\eta_j(r), \quad j = 1,2,3 \tag{2.I4}$$

и перейдем к задаче определения функций $\eta_{\ell j}(r)$. Коротко ее можно записать в виде операторного уравнения

$$\varepsilon^2 A\eta + \lambda C\eta = 0 \tag{2.I5}$$

в гильбертовом пространстве $H \equiv L_2[0, r_0] = L_2[0, r_2] \oplus L_2[r_2, r_1] \oplus L_2[r_1, r_0]$. В (2.I5) $\eta(r)$ - вектор столбец с компонентами $\eta_{\ell j}(r)$, $r_j \le r \le r_{j-1}$, $j = 1,2,3$, матрица - оператор A имеет элементы $A_{jk} = A_j \delta_{jk}$, где δ_{jk} - символ Кронекера, а

$$A_j u = \rho_j \nu_j \left[-u'' + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}u\right], \quad r_j \le r \le r_{j-1}, \quad j = 1,2,3;$$

соответственно $C_{jk} = \rho_j I_j \delta_{jk}$, где I_j - единичный оператор в $H_j = L_2[r_j, r_{j-1}]$. Областью определения оператора A является плотное в H множество функций $D(A) \subset W_2^2[0, r_0]$, удовлетворяющих краевым условиям

$$\rho_k \nu_k \left(\frac{d\eta_k}{dr} - \frac{2}{r}\eta_k\right) = \rho_{k+1}\nu_{k+1}\left(\frac{d\eta_{k+1}}{dr} - \frac{2}{r}\eta_{k+1}\right), \; r = r_k, \; k=1,2, \qquad (2.16)$$
$$\eta_k = \eta_{k+1}, \; r = r_k, \; k=1,2; \quad \eta_1(r_0) = \eta_3(0) = 0.$$

Эти условия вытекают из (2.13).

Интегрированием по частям с использованием условий (2.16) можно убедиться в том, что $(A\eta, \varsigma)_H = (\eta, A\varsigma)_H$, $\eta, \varsigma \in D(A)$, т.е. оператор A самосопряжен в H; кроме того, можно доказать, что он ограничен снизу (с константой, равной нулю) и имеет дискретный спектр, сгущающийся к $-\infty$. Поэтому и задача (2.15) имеет дискретный спектр, расположенный на отрицательной вещественной полуоси и не зависящий, очевидно, от капиллярных сил. (Свойство $R_e \lambda \leq 0$ для собственных чисел задачи (2.1)-(2.4) можно доказать так же, как это сделано в п.1.3). Теперь из представления (2.11), равенств (2.12) и рекуррентных соотношений для обобщенных сферических функций [12] получаем, что в первом из рассматриваемых случаев жидкость совершает тороидальные апериодически затухающие движения с пространственными множителями вида (2.8) для поля скоростей.

Мы рассмотрим в дальнейшем второй (основной) случай, когда $\psi_{e_j}(r) = 0$, т.е. $f^+_{e_j}(r) = f^-_{e_j}(r)$. Тогда из уравнения неразрывности (2.1) получаем, что обе эти функции можно выразить через $\overset{\circ}{f}_{e_j}(r)$. Вводя вместо $\overset{\circ}{f}_{e_j}(r)$ функцию $f_{e_j}(r) = \frac{r^2}{\ell(\ell+1)}\overset{\circ}{f}_{e_j}(r)$, получим, в силу равенств $T^{\ell}_{on}(\pi/2 - \varphi, \theta, 0) \equiv Y^n_\ell(\theta, \varphi)$, для поля скорости представление (2.9) с $f(r) = f_{\ell_i}(r)$. Таким образом, во втором случае поле скоростей в задаче (2.1)-(2.4) полоидально. Заметим, что при применении метода пограничного слоя в задачах гидромеханики со сферической симметрией этот факт был использован в работах Чандрасекхара [13] и Рейда [14], а впоследствии и А.Г. Шмидта [8].

4. Построение погранслойных решений. Будем искать, следуя идее метода пограничного слоя, решение задачи (2.1)-(2.4) при $\varepsilon^2 \ll 1$ в виде

$$\vec{u}_j = \vec{\nabla}\Phi_j + \vec{W}_j, \quad j = 1,2,3, \qquad (2.17)$$

где $\Phi_j = \Phi_j(r, \theta, \varphi; \varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ переходят в решение (2.5) задачи о колебаниях идеальных жидкостей, а $\vec{W}_j = \vec{W}_j(r, \theta, \varphi; \varepsilon)$ - функции типа пограничного слоя, быстро убывающие при удалении от твердой стенки либо границы раздела жидкостей.

Функции Φ_j будем считать гармоническими; тогда из (2.17) и уравнения неразрывности (2.1) следует, что $div\, \vec{W}_j = 0$ в Ω_j. Так как $\vec{\nabla}\Phi$ - полоидальный вектор, то из (2.17) и рассуждений п. 3 получим, что $\vec{W}_j$ - также полоидальный вектор. Поэтому будем искать его в виде

$$W_{jr} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} f_j(r, \varepsilon)\, Y^n_\ell(\theta, \varphi), \quad W_{j\theta} = \frac{1}{r}\frac{df_j(r,\varepsilon)}{dr}\frac{\partial Y^n_\ell}{\partial\theta}, \qquad (2.18)$$
$$W_{j\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{df_j(r,\varepsilon)}{dr}\frac{\partial Y^n_\ell}{\partial\varphi}, \quad j = 1,2,3,$$

где $f_j(r, \varepsilon)$ - неопределенные функции. Для $\Phi_j(r, \theta, \varphi; \varepsilon)$, $j = 2,3$, мы воспользуемся представлением (2.5), где теперь нужно считать b_1, b_2 и c_1 функциями ε, а для Φ_1 будем иметь

$$\Phi_1 = \left[a_1 r^\ell + a_2(\varepsilon) r^{-\ell-1}\right] Y^n_\ell(\theta, \varphi), \qquad (2.19)$$

где a_1, как и в п. 1.4, можно в силу однородности задачи считать не зависящим от ε.

Дальнейшие выкладки повторяют схему рассуждений п. 1.4. Для $\vec{W}_j$, аналогично выводу (1.20), получаем уравнение

$$\lambda \vec{w}_j - \nu_j \varepsilon^2 \Delta \vec{w}_j = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_j, \qquad j = 1,2,3, \tag{2.20}$$

а для давлений p_j - равенства $p_j = -\lambda \rho_j \Phi_j$. Преимущество представления функций $\vec{w}_j$ в виде полоидального поля (2.I8) состоит в том, что векторное уравнение Гельмгольца (2.20) будет удовлетворено, если f_j из (2.I8) есть решение уравнения

$$\frac{d^2 f_j}{dr^2} - \left[\frac{\lambda}{\nu_j \varepsilon^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] f_j = 0. \tag{2.21}$$

Выпишем погранслойные решения уравнений (2.2I), учитывающие граничное условие на Γ_0 при $r = q$. Аналогично формулам (I.23) будем иметь

$$\begin{aligned}
&f_{10}(r,\varepsilon) = a_{10}(\varepsilon) \exp\left[\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_1} x_{10}\right] + \underset{\sim}{O}(\varepsilon^3), \quad Re\sqrt{\lambda} < 0, \\
&x_{10} = (q-r)/\varepsilon, \quad a_{10}(\varepsilon) = a_1 \frac{(2\ell+1)}{(\ell+1)\sqrt{\lambda}} q^\ell \mu_1 \varepsilon (1 + \ell \mu_1 \varepsilon) + \underset{\sim}{O}(\varepsilon^3), \\
&a_2(\varepsilon) = a_1 \frac{\ell}{(\ell+1)} q^{2\ell+1}\left[1 + \frac{\mu_1}{\sqrt{\lambda}} \frac{(2\ell+1)}{q}\varepsilon + \frac{\ell(2\ell+1)\mu_1^2}{q^2\lambda}\varepsilon^2\right] + \underset{\sim}{O}(\varepsilon^3), \\
&f_{jk}(r,\varepsilon) = a_{jk}(\varepsilon) \exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\mu_j} x_{jk}\right) + \underset{\sim}{O}(\varepsilon^3),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

где j, k и x_{jk} имеют тот же смысл, что и в (I.23).

В граничных условиях задачи (2.I)-(2.4) для решений (2.I7)-(2.I9), (2.5) угловые переменные (θ, φ) отделяются, причем каждые два касательных условия (2.2) при $r = r_k$ дают только одно соотношение на Γ_k. Мы получим вместо (2.2)-(2.4) восемь условий, которые приводят к следующей системе уравнений для определения коэффициентов из (2.5), (2.I9), (2.22)

$$\begin{aligned}
&a_1 - \left(\frac{\ell+1}{\ell}\right) a_2 - b_1 + \frac{(\ell+1)}{\ell} b_2 + (\ell+1)(a_{11} - a_{21}) = 0, \\
&p^{2\ell+1} b_1 - \frac{(\ell+1)}{\ell} b_2 - p^{2\ell+1} c_1 + (\ell+1) p^\ell (a_{22} - a_{32}) = 0, \\
&a_1[\lambda^2\rho_1 + 2\lambda\varepsilon^2\rho_1\lambda_1\ell(\ell-1) - \bar{\sigma}\sigma_1\ell(\ell-1)(\ell+2)] + a_2[\lambda^2\rho_1 + 2\lambda\varepsilon^2\rho_1\nu_1(\ell+1)(\ell+2) + \\
&+ \bar{\sigma}\sigma_1(\ell^2-1)(\ell+2)] - b_1[\lambda^2\rho_2 + 2\lambda\varepsilon^2\rho_2\nu_2\ell(\ell-1)] - b_2[\lambda^2\rho_2 + 2\lambda\varepsilon^2\rho_2\nu_2(\ell+1)(\ell+2)] - \\
&- a_{11}\bar{\sigma}\sigma_1\ell(\ell^2-1)(\ell+2) = 0, \quad b_1 p^{2\ell+1}[\lambda^2\rho_2 + 2\lambda\varepsilon^2\rho_2\nu_2\ell(\ell-1)p^{-2}] + \\
&+ b_2[\lambda^2\rho_2 + 2\lambda\varepsilon^2\rho_2\nu_2(\ell+1)(\ell+2)p^{-2}] - c_1 p^{2\ell+1}[\lambda^2\rho_3 + 2\lambda\varepsilon^2\rho_3\nu_3\ell(\ell-1)p^{-2} + \\
&+ \bar{\sigma}\sigma_2\ell(\ell-1)(\ell+2)p^{-3}] - a_{32}\bar{\sigma}\sigma_2\ell(\ell^2-1)(\ell+2)p^{-3} = 0, \\
&\frac{1}{\mu_1} a_{11} + \frac{1}{\mu_2} a_{21} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}[a_1 + a_2 - b_1 - b_2] = 0, \\
&\rho_1 a_{11} - \rho_2 a_{21} + \frac{2\varepsilon^2}{\lambda}\{\rho_1\nu_1[(\ell-1)a_1 - (\ell+2)a_2] - \rho_2\nu_2[(\ell-1)b_1 - (\ell+2)b_2]\} = 0,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\frac{1}{\mu_2} a_{22} + \frac{1}{\mu_3} a_{32} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda}} p^{-\ell-1} \left[b_1 p^{2\ell+1} + b_2 - c_1 p^{2\ell+1} \right] = 0,$$

$$\rho_2 a_{22} - \rho_3 a_{32} + \frac{2\varepsilon^2}{\lambda p^{\ell+2}} \left\{ \rho_2 \nu_2 \left[(\ell-1) p^{2\ell+1} - (\ell+2) b_2 \right] - c_1 p^{2\ell+1} \rho_3 \nu_3 (\ell-1) \right\} = 0.$$

Приравнивая нулю определитель системы (2.23) и разыскивая приближенно решение $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ в виде, аналогичном (I.26), будем иметь, как и в § I, в нулевом приближении $\lambda^{\pm}_{0\ell} = \pm i\omega^{(1,2)}_{\ell}$ (см. 2.7), а первое приближение дает

$$\lambda^{\pm}_{1\ell} = -\frac{(1\pm i)}{4} \frac{\ell\sqrt{2}}{[\omega^{(1,2)}_{\ell}]^{3/2}} \frac{F_2[\omega^{(1,2)}_{\ell}]}{\rho_{12}\rho_{23} F_1[\omega^{(1,2)}_{\ell}]}, \quad \ell = 2, 3, \ldots,$$

$$F_1(\omega) = (\omega^2_{12\ell} + \omega^2_{23\ell} - 2\omega^2) + p^{2\ell+1} \left[(\omega^2_{23\ell} - 2\varkappa_{23}\omega^2)\varkappa_{12} - \varkappa_{23}\omega^2_{12\ell} \right],$$

$$F_2(\omega) = \frac{(\ell+1)}{\ell} \rho_{23} (\omega^2_{23\ell} - \omega^2) \left\{ \frac{(2\ell+1)}{(\ell+1)} \frac{\mu_1}{q} \frac{1}{(1-q^{-2\ell-1})} \left[\rho_{12}\omega^2_{12\ell} - \bar{\rho}_{12}\omega^2 \right] + \right.$$

$$\left. + \beta_{12} \left[(\rho_1 + \rho_2)\rho_{12}\omega^2_{12\ell} + \omega^2 (\rho_2 - \rho_1)(\rho_{12} - 2\rho_2) \right] \right\} + \frac{\beta_{23}}{p} \rho_{12} (\omega^2_{12\ell} - \omega^2) \left\{ \omega^2_{23\ell} \rho_{23} \left[\rho_{23} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(\ell+1)}{\ell} \rho_2 \right] - \omega^2 (\rho_2 - \rho_3)^2 \right\} - p^{2\ell} \rho_{23} \left[\omega^2_{23\ell} - \varkappa_{23}\omega^2 \right] \left\{ \beta_{23} (\rho_2 - \rho_3) \frac{(\ell+1)}{\ell} \left[\rho_{12}\omega^2_{12\ell} + \right. \right.$$

$$\left. + \omega^2 \left(\frac{2\ell+1}{\ell+1} \rho_2 - \rho_{12} \right) \right] + \beta_{12} \frac{\rho_{12} - \rho_2}{\rho_1} \left[\omega^2 (\rho_1 - \rho_2)^2 + \frac{\ell+1}{\ell} \rho_2 \rho_{12} \omega^2_{12\ell} \right] - \beta_{12} \rho_1 \rho_{12} \omega^2_{12\ell} +$$

$$\left. + \frac{2\ell+1}{\ell} \frac{\mu_1}{q} \frac{1}{(1-q^{-2\ell-1})} \left[\rho_{12}\omega^2_{12\ell} + \omega^2 \left(\rho_2 \frac{2\ell+1}{\ell+1} - \rho_{12} \right) \right] \right\},$$

$$\varkappa_{12} = \left(\rho_2 \frac{2\ell+1}{\ell+1} - \rho_{12} \right) \rho_{12}^{-1}, \quad \bar{\rho}_{12} = \rho_{12}(q) \big|_{q=\infty} . \tag{2.24}$$

Здесь сохранены обозначения § I и п. 2. Как видно из (2.24), общий вывод конца п.I.4 о структуре ответа в первом приближении сохраняется.

5. Частные задачи. В этом пункте, как и в п. I.5, рассмотрим некоторые частные случаи, которые получаются из общей задачи этого параграфа; они представляют самостоятельный интерес.

а) Колебания жидкости в сферическом сосуде $(\rho_2 = \rho_3 = \nu_2 = \nu_3 = \sigma_2 = 0,\ \rho_1 = \nu_1 = \sigma_1 = 1)$

$$\lambda^{\pm}_{0\ell} = \pm i\omega_\ell, \quad \omega^2_\ell = \bar{\sigma}\,\ell(\ell-1)(\ell+2) \frac{(1-q^{-2\ell-1})}{\left(\frac{\ell}{\ell+1} + q^{-2\ell-1}\right)}, \quad \ell = 2, 3, \ldots,$$

$$\lambda^{\pm}_{1\ell} = -\frac{(1\pm i)}{\sqrt{2}} \eta_\ell, \quad \eta_\ell = \frac{(2\ell+1)^2 \omega^{1/2}_\ell q^{-2\ell-2}}{2(\ell+1)\left(\frac{\ell}{\ell+1} + q^{-2\ell-1}\right)(1-q^{-2\ell-1})},$$

$$\lambda^{\pm}_{2\ell} = -\left\{ \frac{\eta^2_\ell}{\omega_\ell} + \frac{2\ell(\ell+2) + 2\ell(\ell-1)q^{-2\ell-1} + \ell^2(2\ell+1)q^{-2}(\ell+1)^{-1}}{2\left(\frac{\ell}{\ell+1} + q^{-2\ell-1}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\ell(\ell+2) - 2(\ell^2-1)q^{-2\ell-1} - \ell(2\ell+1)q^{-2}}{2(1-q^{-2\ell-1})} + \frac{\eta_\ell}{\omega^{1/2}_\ell} \cdot \frac{\ell(2\ell+1)}{(\ell+1)q} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\ell}{\ell+1} + q^{-2\ell-1}\right)} \right\}.$$

(2.25)

При $l=1$ из (2.25) получаем $\omega_1=\eta_1=0$, при этом будет

$$\lambda_{21}=-\frac{81q^{-3}+4(1-q^{-3})[(18-9q^{-5})+27q^{-3}]}{8(1-q^{-3})^2\,(1+2q^{-3})^2},$$

т.е. в рамках маловязкой жидкости система устойчива, поскольку $R_e\lambda<0$.

б) Колебания пузыря в безграничной жидкости. Полагая в (2.25) $q=\infty$, будем иметь

$$\lambda^{\pm}_{0l}=\pm i\omega_l,\quad \omega^2_l=(l^2-1)(l+2)\bar{\sigma},\quad \lambda^{\pm}_{1l}=0,\quad \lambda^{\pm}_{2l}=-(l+2)(2l+1).$$

Здесь при $l=1$ устойчивость системы также обнаруживается только по квадратичным членам разложения $\lambda=\lambda(\varepsilon)$.

в) Колебания маловязкого шара $(\rho_1=\nu_1=\sigma_2=0,\ \rho_2=\rho_3=\nu_2=\nu_3=\sigma_1=1)$

$$\lambda^{\pm}_{0l}=\pm i\omega_l,\ \omega^2_l=\bar{\sigma}l(l-1)(l+2),\ \lambda^{\pm}_{1l}=0,\ \lambda^{\pm}_{2l}=-(l-1)(2l+1),\ l=2,3,\ldots \qquad (2.26)$$

Этот случай разобран в [I4], дальнейшие члены разложения (2.26) получены в [5].

г) Колебания жидкого шара в безграничной жидкости другой плотности $(\rho_2=\rho_3,\ \nu_2=\nu_3,\ \sigma_2=0,\ \sigma_1=1,\ q=\infty)$.

$$\begin{aligned}&\lambda^{\pm}_{0l}=\pm i\omega_l,\quad \omega^2_l=\bar{\sigma}l(l-1)(l+2)/[\rho_2+\rho_1 l(l+1)^{-1}],\\ &\lambda^{\pm}_{1l}=-\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\beta_{12}\frac{\rho_1\rho_2}{\bar{\rho}_{12}}\cdot\frac{(2l+1)}{2(l+1)}|\omega_l|^{1/2},\quad l=2,3,\ldots,\end{aligned}\qquad (2.27)$$

где β_{12} определено в (I.28), а $\bar{\rho}_{12}$ - в (2.24). Здесь,как и в задаче г) из п. I.5, несмотря на отсутствие твердой стенки, величина $\lambda_{1l}\neq 0$, она аннулируется при $\rho_k=0$ $(k=1,2)$.

Эта задача, а также случаи б) и в), в рамках идеальной жидкости разобраны Г.Ламбом (см. [I5], стр. 593).

б) Колебания двух жидкостей в сферическом сосуде. Здесь, в отличие от задачи г), будет $1<q<\infty$. В нулевом приближении имеем $\lambda^{\pm}_{0l}=\pm i\omega_l$, $\omega_l=\omega_{12l}$ (см.(2.6)), а первое приближение дает

$$\lambda^{\pm}_{1l}=-\frac{(1\pm i)}{\sqrt{2}}\frac{(2l+1)^2}{2(l+1)}\frac{\rho_1(\rho_2\beta_{12}+\mu_1 q^{-2l-1})|\omega_l|^{1/2}}{(1-q^{-2l-1})^2\rho_{12}},\quad l=2,3,\ldots,$$

при $q\to\infty$ эта формула переходит в (2.27).

е) Колебания шарового слоя жидкости с двумя свободными поверхностями ($\rho_1=\rho_3=\nu_1=\nu_3=0,\ \rho_2=\nu_2=1$).

$$(\lambda^{(1,2)}_{0l})^2=\begin{cases}-\dfrac{\bar{\sigma}\sigma_1}{\rho_2}(l-1)l(l+2)\left[1-p^{2l+1}\cdot\dfrac{2l+1}{l+1}\cdot\dfrac{(\sigma_1+\frac{\sigma_2}{p^3})}{(\frac{\sigma_2}{p^3}-\sigma_1\frac{l}{l+1})}\right]+\underset{\sim}{O}(p^{4l+2})\\[2ex] -\dfrac{\bar{\sigma}\sigma_2}{p^3\rho_2}(l-1)l(l+2)\dfrac{l+1}{l}\left[1+p^{2l+1}\dfrac{2l+1}{l+1}\cdot\dfrac{(\sigma_1+\frac{\sigma_2}{p^3})}{(\frac{\sigma_2}{p^3}-\sigma_1\frac{l}{l+1})}\right]+\underset{\sim}{O}(p^{4l+2}),\end{cases}$$

$$\lambda^{(1,2)}_{1l}=0,\ \lambda^{(1,2)}_{2l}=\begin{cases}-2(l-1)(2l+1)+\underset{\sim}{O}(p^{2l+1})\\[1ex] -\dfrac{(l+1)(l+2)(2l+1)}{lp^2}+\underset{\sim}{O}(p^{2l+1}),\quad l=2,3,\ldots.\end{cases}$$

В этой задаче спектр распадается на два множества, каждое из которых соответствует колебаниям у определенной свободной поверхности. Первому верхнему индексу отвечают колебания у свободной поверхности Γ_1, а второму – у поверхности Γ_2. Влияние одной свободной поверхности на частоты колебаний, сосредоточенных у другой свободной поверхности, сказывается лишь в первом приближении по параметру $P^{2\ell+1}$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.Д. Копачевский. О колебаниях несмешивающихся жидкостей. Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 1973, 13, № 5, 1249-1263.

2. В.С. Гонткевич. Собственные колебания статифицированной жидкости в сосудах. Известия АН СССР, Механ.жидкости и газа, 1973, № I, 147-152.

3. Н.Д. Копачевский. Применение метода С.Л. Соболева в задаче о колебаниях идеальной капиллярной вращающейся жидкости. Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 1975, 15, (в печати).

4. Н.Д. Копачевский. О свободных колебаниях жидкости, вращающейся в цилиндрическом сосуде в условиях невесомости. Известия АН СССР, Механ.жидкости и газа, 1972, № 4, 3-9.

5. Н.Д. Копачевский, А.д. Мышкис. О свободных колебаниях жидкого самогравитирующего шара с учетом вязких и капиллярных сил. Ж. вычисл. математ. и матем. физ., 1968, 8, № 6, 1291-1305.

6. Н.Н. Моисеев. О краевых задачах для линеаризованных уравнений Навье-Стокса в случае, когда вязкость мала. Ж.вычисл. матем. и матем. физ., 1961, I, № 3, 548-550.

7. Ф.Л. Черноусько. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость, М., ВЦ АН СССР, 1968, вып. 7.

8. А.Г. Шмидт. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности шарового слоя вязкой гравитирующей жидкости. Ж.вычисл. матем. и математ.физ., 1964, 4, № I, 183-189.

9. L.M.Hocking, D.H.Michael. The stability of a column of rotating liquid. Mathematica, 6, N°1, 25-32, 1959.

IO. Л.А. Слобожанин. Об устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости. "Математ. физика и функциональный анализ", вып. П, Харьков, ФТИНТ АН УССР, 1971, 169-174.

II. Backus. A class of self-sustaining dissipative Spherical dynamos, Annals of Physics, 4, N°4, 1958.

I2. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. Представления группы вращения и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.

I3. S.Chandrasekhar. The oscillations of a viscous liquid globe. Proc.London Math.Soc., 9, N°33, 141-149, 1959.

I4. W.H.Reid. The oscillations of viscous liquid globe. Quart.Appl.Math., 18, 86-89, 1960.

I5. Г.Ламб. Гидродинамика, М.-Л., ГИТТЛ, 1947.

TWO PROBLEMS ON NORMAL OSCILLATIONS OF SYSTEM OF SMALL VISCOUSITY CAPILLARY LIQUID

N.D.Kopachevskii, N.K.Radyakin

The problem on normal oscillations of system of small viscousity capillary liquid in two common cases is offered. The plain oscillations of two or three liquids, rotating in the zero-gravity conditions in the cylindrical container, are considered. Then (if there's no rotating) the analogous problem on oscillations of system of spherically symmetric located liquids, occupied the spherical container, is examined. Some general properties of two problems solutions have been determined; the asymptotic formulas for oscillation frequency in the various particular and limit cases have been obtained owing to the method of boundary layer.

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ

И.И. Иевлев

В статье рассматривается численный способ определения осесимметричных форм поверхности газового пузыря, движущегося в безграничной идеальной несжимаемой жидкости под действием переменного во времени гравитационного поля. Силы поверхностного натяжения не учитываются. Начиная с момента времени, в который форма поверхности пузыря считается известной, определяются формы поверхности в последующие моменты времени. Численно построены формы движущегося пузыря для постоянного гравитационного поля и поля, вектор напряженности которого меняется во времени по гармоническому закону.

I. Пусть идеальная несжимаемая жидкость, подверженная действию однородного потенциального силового поля с переменным во времени вектором напряженности $\overline{g(t)}$, занимает все пространство и содержит газовый пузырь. Будем считать, что в начальный момент времени жидкость покоится, а газовый пузырь имеет форму сферы радиуса R.

Введем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z) таким образом, чтобы ось oz была направлена вдоль вектора $\overline{g(t)}$, а геометрический центр пузыря в начальный момент времени совпадал с началом координат. Будем рассматривать осесимметричные относительно оси Oz движения жидкости и осесимметричные формы свободной поверхности $\Gamma(t)$, полагая движение жидкости потенциальным с потенциалом скорости $\Phi(t, \rho, z)$.

Пусть вектор напряженности $\overline{g(t)}$ изменяется по закону

$$\overline{g(t)} = -\vec{z}_0 g_0 \cos 2\pi\omega t. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{z}_0$ - единичный орт, характеризующий положительное направление оси Oz, g_0 - наибольшее значение модуля вектора напряженности, $\omega = 1/T$ - частота колебаний силового поля, где T - период колебаний.

Переходя от размерных величин $\bar{t}, \bar{\rho}, \bar{z}, \bar{\Phi}, \bar{\omega}, \bar{g}$ к безразмерным $t, \rho, z, \Phi, \omega, \vec{g}$ по формулам

$$t = \bar{t}\sqrt{\frac{g_0}{R}}, \quad \rho = \bar{\rho}/R, \quad z = \bar{z}/R, \quad \Phi = \frac{\bar{\Phi}}{\sqrt{g_0 R^3}},$$

$$\omega = \bar{\omega}\sqrt{\frac{R}{g_0}}, \quad \vec{g} = -\vec{z}_0 \cos 2\pi\omega t,$$

перейдем к известным уравнениям [1] для потенциала скорости $\Phi(t, \rho, z)$, регулярного на бесконечности

$$\Delta\Phi = 0 \qquad \left(\Delta \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \qquad (2)$$

в области, занимаемой жидкостью,

$$\frac{d\Phi}{dt} - \frac{1}{2}(\mathrm{grad}\,\Phi)^2 + \cos 2\pi\omega t\, z = 0 \qquad (3)$$

на свободной поверхности жидкости и

$$\Phi(0, \rho, z) = 0. \tag{4}$$

При исследовании осесимметричной формы пузыря достаточно следить за движением линии пересечения $L(t)$ поверхности пузыря $\Gamma(t)$ с меридианальной полуплоскостью $\varphi = const$. Уравнения движения произвольной точки линии $L(t)$, имеющей в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ координаты ρ_0, z_0, примут вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\Phi(t, \rho, z)}{\partial\rho}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial\Phi(t, \rho, z)}{\partial z}, \tag{5}$$

где $\rho = \rho(t, \rho_0, z_0)$, $z = z(t, \rho_0, z_0)$.

2. Решать задачу будем следующим образом. Предположим, что в некоторый момент времени $t = t_k$ заданы координаты точек поверхности $\Gamma(t_k)$ (следовательно, и линия $L(t_k)$) и значения потенциала скорости в них

$$\Phi(t_k, \rho_k, z_k) = U(s). \tag{6}$$

Здесь параметр s - длина дуги линии $L(t_k)$, отсчитываемая от какой-либо точки, лежащей на $L(t_k)$,

$$\rho_k = \rho(s)\Big|_{\Gamma(t_k)}, \qquad z_k = z(s)\Big|_{\Gamma(t_k)}.$$

Воспользовавшись второй формулой Грина, получим интегральное соотношение между значением потенциала и его производной по нормали на поверхности $\Gamma(t_k)$

$$\int_{\Gamma(t_k)} \frac{1}{d(P,Q)} \frac{\partial\Phi(t_k, Q)}{\partial n} d\Gamma_Q =$$
$$= \int_{\Gamma(t_k)} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{d(P,Q)} [\Phi(t_k, Q) - \Phi(t_k, P)] d\Gamma_Q -$$
$$- 4\pi [\Phi(t_k, P) - c(t_k)],$$

где P, Q - точки, лежащие на поверхности $\Gamma(t_k)$, n - нормаль к поверхности $\Gamma(t_k)$, направленная внутрь объема, занимаемого жидкостью, $d(P,Q)$ - расстояние между точками P и Q, а $c(t_k)$ - постоянная, выбранная так, что

$$\int_{\Gamma(t_k)} [\Phi(t_k, P) - c(t_k)] d\Gamma_P = 0. \tag{8}$$

Последнее условие является следствием условия сохранения объема, занимаемого газовым пузырем (см. [1]).

Введем обозначения

$$g(s, \xi) = \rho(\xi) \int_0^{2\pi} \frac{1}{d(P,Q)} d\varphi,$$
$$G(s, \xi) = \rho(\xi) \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial n} \cdot \frac{1}{d(P,Q)} d\varphi,$$

где s и ξ - длины дуг вдоль линии $L(t_k)$, соответствующие точкам P' и Q', координаты ρ и z которых одинаковы с P и Q, но полярные углы могут быть отличными.

Учитывая осевую симметрию в исходной задаче, запишем (7)-(8) в виде уравнений

$$\int_0^{S_N} g(s,\xi)\,\frac{\partial\Phi(t_k,\xi)}{\partial n}\,d\xi=\int_0^{S_N} G(s,\xi)\left[U(\xi)-U(s)\right]d\xi-$$
$$-4\pi\left[U(s)-c(t_k)\right], \tag{10}$$
$$\int_0^{S_N}\left[U(s)-c(t_k)\right]\rho(s)\,ds=0. \tag{11}$$

Решая эти уравнения и дифференцируя (6) по S, найдем производные потенциала $\frac{\partial\Phi(t_k,s)}{\partial n}$ и $\frac{\partial\Phi(t_k,s)}{\partial s}$ на поверхности $\Gamma(t_k)$, через которые выражается градиент потенциала на поверхности $\Gamma(t_k)$. По известному градиенту потенциала на поверхности пузыря в момент времени $t=t_k$ из (3), (5) приближенно определяем положение свободной поверхности $\Gamma(t_{k+1})$ и значение потенциала $\Phi(t_{k+1},\rho,z)\big|_{\Gamma(t_{k+1})}$ на ней в следующий момент времени $t=t_{k+1}=t_k+\Delta_k$ по формулам

$$\rho_{k+1}=\rho_k+\Delta_k\,\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\bigg|_{\substack{t=t_k\\ \rho=\rho_k\\ z=z_k}},$$
$$z_{k+1}=z_k+\Delta_k\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{\substack{t=t_k\\ \rho=\rho_k\\ z=z_k}}, \tag{12}$$
$$\Phi(t_{k+1},\rho_{k+1},z_{k+1})=\Phi(t_k,\rho_k,z_k)+$$
$$+\Delta_k\left\{\frac{1}{2}\left[\operatorname{grad}\Phi(t_k,\rho,z)\Big|_{\substack{\rho=\rho_k\\ z=z_k}}\right]^2-\cos 2\pi\omega t_k z_k\right\}.$$

Повторяя описанный процесс на новой поверхности $\Gamma(t_{k+1})$, найдем положение поверхности $\Gamma(t_{k+2})$ и значение потенциала на ней $\Phi(t_{k+2},\rho_{k+2},z_{k+2})$ в момент времени $t=t_{k+2}=t_{k+1}+\Delta_{k+1}$ и т.д. Начиная вышеописанную процедуру с $t=t_0=0$, когда поверхность пузыря и потенциал на ней известны, найдем форму поверхности и положение пузыря в последующие моменты времени $t_1, t_2, \ldots$.

3. При численном решении задачи линия $L(t_k)$ задается конечной системой точек H с координатами $\rho_k(s_i)$, $z_k(s_i)$ $(i=0,1,\ldots,m)$. Заменим интегралы в выражениях (10), (11) конечными суммами по формулам численного интегрирования с узлами $\{s_i\}_{i=0}^{m}$ в точках линии $L(t_k)$. Требуя, чтобы знак равенства в выражениях (10), (11) выполнялся на той же системе точек H, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно значений производной потенциала по нормали в тех же точках. Так как ядро интегрального уравнения (10) $g(s_i,\xi)$ имеет логарифмическую особенность вблизи точки s_i, то левую часть уравнения (10) предварительно приведем к виду, удобному для применения квадратурных формул

$$\int_0^{S_N} g(s_i,\xi)\,\frac{\partial\Phi(t_k,\xi)}{\partial n}\,d\xi=\frac{\partial\Phi(t_k,s_i)}{\partial n}\int_0^{S_N}\Omega(s_i,\xi)\,d\xi+$$
$$+\int_0^{S_N}\left[g(s_i,\xi)\,\frac{\partial\Phi(t_k,\xi)}{\partial n}-\Omega(s_i,\xi)\,\frac{\partial\Phi(t_k,s_i)}{\partial n}\right]d\xi. \tag{13}$$

Здесь $\Omega(s_i,\xi)$ – функция, имеющая вблизи точки s_i такую же особенность, как и $g(s_i,\xi)$, и интеграл от которой вычисляется в явном виде. Подынтегральное выражение второго интеграла в (13) является непрерывной функцией аргумента ξ. Поэтому второй интеграл можно заменить конечной суммой по квадратурным формулам.

Следует отметить, что уравнение (10) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода и относится к классу некорректно поставленных задач [2,3]. Поэтому система линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих уравнение (10), будет плохо обусловлена. Будем решать эту систему уравнений методом сопряженных градиентов [4]. Возможность применения методов подобного типа для решения уравнений первого рода исследовалась в работе [5].

После определения производных потенциала $\frac{\partial\Phi(t_k, s_i)}{\partial n}$ и $\frac{\partial\Phi(t_k, s)}{\partial s}$ по его значениям $U(s_i)$ найдем новые положения точек $\rho_{k+1}(s_i)$, $z_{k+1}(s_i)$ в следующий момент времени t_{k+1} и значения потенциала в них $\Phi(t_{k+1}, \rho_{k+1}, z_{k+1})$ по формулам (I2). Координаты произвольной точки поверхности $\Gamma(t_{k+1})$ получаем интерполированием по точкам $(\rho_{k+1}(s_i), z_{k+1}(s_i))$. Повторяя такой процесс построения поверхности пузыря с начального момента времени $t_0 = 0$, последовательно найдем положение и форму $\Gamma(t)$ в фиксированные моменты времени $t_1, t_2, \dots$.

4. Расчет проводился на ЭВМ М-20 для случаев движения газового пузыря:

а) $\omega = 0$, что соответствует всплытию пузыря в жидкости при неизменном внешнем силовом поле;

б) $\omega = 0{,}3$ – движение пузыря в осциллирующем поле.

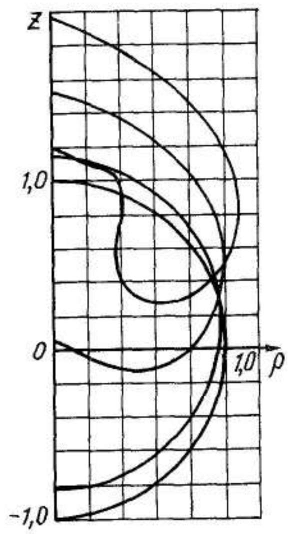


Рис.I.

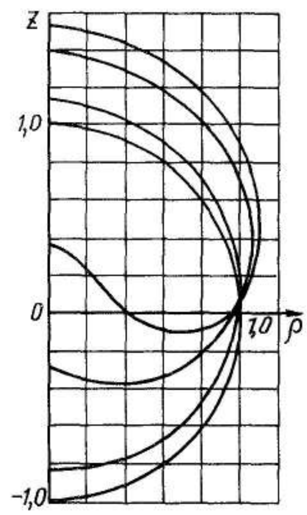


Рис.2.

Выше приведены графики, изображающие линию $L(t)$ в моменты времени $t=0$; 0,4; 0,8; I,2. Рис. I соответствует первому случаю: расчет проводился с m = I6 и постоянным шагом по времени Δ_k = 0,0I. Рис. 2 соответствует случаю б), просчитанному с m=I5 и Δ_k = 0,05. В обоих случаях расчет проведен с абсолютной погрешностью, равной 0,I. В качестве абсолютной погрешности выбиралось максимальное отклонение вдоль оси Oz поверхности пузыря в один и тот же момент времени при разных значениях m и Δ_k.

При реализации этого метода на ЭВМ было обнаружено, что предлагаемая схема вычислений работает устойчиво при определенном соотношении шагов по времени и числа точек, определяющих поверхность пузыря. Шаг по времени приходится брать тем меньшим, чем больше число m.

Автор благодарит И.Д. Борисова за ряд полезных советов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. И.Д. Борисов. О движении газового пузыря в идеальной жидкости. Сб. "Математическая физика и функциональный нализ", вып. I, Харьков, ФТИНТ АН УССР, I969, 56-63.

2. А.Н. Тихонов. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации, ДАН СССР, I5I, № 3, I963.

3. В.К. Иванов. Интегральные уравнения первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала. ДАН СССР, 142, № 5, 1962.

4. В.В. Воеводин. Численные методы алгебры, "Наука", 1966.

5. В.М. Фридман. О сходимости методов типа наискорейшего спуска, УМН, 17, № 3, 1962.

NUMERICAL DETERMINATION OF GASEOUS BLISTER'S SHAPE, MOVING IN LIQUID

I.I. Ievlev

The problem of blister's motion in the ideal incompressible liquid is considered. Suppose liquid motion is potential, forces of stretching surface are absent, blister's shape is axial-symmetric. The shape of blister surface with its motion in the homogeneous field of force is numerically determined. Computer's calculation results are offered as diagrams, representing the location of free surface in successive time moments.

К ВОПРОСУ О НЕКЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.В. Щербина

Определение. Будем называть уравнение

$$y'' = R(x, y, y') \qquad \text{(I)}$$

регулярным в области $\pi = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b, f^-(x) \leqslant y \leqslant f^+(x)\}$, если

а) задача Коши для уравнения (I) локально разрешима в любой внутренней точке области π ;

б) для любых α, β $(a \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b)$ найдется постоянная C такая, что любое решение уравнения (I), удовлетворяющее неравенству

$$f^-(x) \leqslant y(x) \leqslant f^+(x) \qquad \forall x \in (\alpha, \beta),$$

удовлетворяет также неравенству

$$|y'(x)| \leqslant C \qquad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Впервые регулярные уравнения были рассмотрены С.Н. Бернштейном [I] , который получил достаточные условия регулярности уравнения (I). Условия С.Н. Бернштейна были несколько усилены Нагумо [2] . Результаты Бернштейна и Нагумо относятся к уравнениям, правая часть которых непрерывна при $(x, y) \subset \pi$, $|z| < \infty$. Случай, когда правая часть допускает при конечных x особенности по x , был детально изучен Кигурадзе [3] . В частности, Кигурадзе показал, что если

$$\int_0^\infty z^{\frac{1}{p}} [\varphi(z)]^{-1} dz = \infty, \quad \psi(x) \in \mathcal{L}^q(a, b), \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$
$$|R(x, y, z)| \leqslant \varphi(z)\psi(x),$$

то уравнение (I) является регулярным.

Предметом настоящей заметки являются нерегулярные уравнения. Такие уравнения обладают рядом специфических особенностей. Например, для регулярных уравнений наличие верхних и нижних функций Нагумо, то есть функций f_i $(i = 1, 2)$ таких, что

$$f_2(x) \geqslant f_1(x), \quad (-1)^i (f_i''(x) - \Psi(x, f_i(x), f_i'(x)) \geqslant 0$$

гарантирует разрешимость задачи

$$y'' = \Psi(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

при любых α, β , удовлетворяющих неравенствам

$$f_2(a) \geqslant \alpha \geqslant f_1(a), \quad f_2(b) \geqslant \beta \geqslant f_1(b).$$

Для нерегулярных уравнений это, вообще говоря, не так, в чем нетрудно убедиться, рассмотрев простейшее нерегулярное уравнение

$$y'' = y(1 + y'^2)^{3/2},$$

которое интегрируется в квадратурах.

Для простоты изложения мы ограничимся уравнениями $y''=\Psi(x, y, y')$, правая часть которых удовлетворяет при $(x,y)\subset\pi$, $|z|<\infty$ неравенству

$$|\Psi(x, y, z)| \leqslant \varphi(z)\ell(x), \qquad (2)$$

причем φ - непрерывна, $\varphi(z)>0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|z|dz}{\varphi(z)}<\infty, \quad \int_a^b|\ell(x)|dx<\infty.$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

Лемма I. Пусть $\Psi_1 \geqslant \Psi_2$ в некоторой области $\mathcal{G}$, $y_i(x)$ – решения уравнений $y''=\Psi_{i}$ (i = I,2), $y_1'(a)\geqslant y_2'(a)$, $y_1(a)\geqslant y_2(a)$ и хотя бы одна из функций $\Psi_i(x,y,z)$ не убывает по y. Тогда $y_1'(x)\geqslant y_2'(x)$ до тех пор, пока точки $(x, y_i(x), y_i'(x))\in\mathcal{G}$.

Лемма I для квазилинейных уравнений была доказана в работе [4], причем приведенное там доказательство не использует квазилинейность уравнения. В настоящей формулировке лемма I приведена и систематически используется в работе [5]. Отметим, что несколько позже и независимо эта лемма была доказана Кигурадзе [6].

Мы рассмотрим семейство абсолютно непрерывных функций $y_t(x)$, имеющих почти всюду вторые производные и удовлетворяющих $\forall x\in(a,b)$ неравенствам

$$f^-(x)\leqslant y_t(x)\leqslant f^+(x), \qquad (4)$$

$$|y_t''|\leqslant\varphi(y_t')\,\ell(x), \qquad (5)$$

где $\varphi>0$ непрерывная функция $\int^b|\ell(x)|dx<\infty$.

Положим $(\Phi f)(x)=\int_{-\infty}^{f'}[\varphi^a(z)]^{-1}dz$.

Лемма 2. Пусть функции $y_t(x)$ удовлетворяют при $x\in(a,b)$ неравенству (5). Тогда функции $\Phi_t(x)=(\Phi y_t)(x)$ компактны в $C(a,b)$. Доказательство легко следует из неравенства (5).

Следствие. В условиях леммы 2 $\exists\delta^\circ$, не зависящее от t, такое, что если $|y_t'(\xi)|>C$, то $|y_t'(x)|>Q(C)$ при $|x-\xi|<\delta^\circ$ $(\lim\limits_{C\to\infty}Q(C)=\infty)$.

Лемма 4. В условиях леммы 2 $\exists$ подпоследовательность $y_{n_i}(x)$ и всюду плотная на интервале (a,b) последовательность точек $\{\xi_i\}$ такие, что $\lim\limits_{i\to\infty}f_{n_i}'(\xi_j)$ существует и конечен для любого j.

Доказательство леммы 3 сводится к доказательству того, что на каждом интервале $(\alpha,\beta)\in(a,b)$ найдется точка ξ такая, что $|f_{n_i}(\xi)|<C(\xi)$ для некоторой подпоследовательности $\{n_i\}$. Последнее легко доказывается "от противного" с использованием леммы 2 и леммы Гейне-Бореля. Обобщенным решением краевой задачи

$$y''=\Psi(x,y,y'), \qquad (6)$$

$$y'(a)=\alpha,\ y'(b)=\beta,\ |\alpha|+|\beta|\leqslant\infty. \qquad (6')$$

назовем абсолютно непрерывную функцию $y(x)$, удовлетворяющую граничному условию (6) и при $\forall x_1, x_2, x_i\in(a,b)$ $(i=1,2)$ соотношению

$$\int_{y'(x_1)}^{y'(x_2)}\frac{dz}{\varphi(z)}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{F(x,y(x),y'(x))}{\varphi(y'(x))}\,dx. \qquad (7)$$

В дальнейшем $R(x,y,y')$ всегда будет обозначать правую часть некоторого регулярного в области π уравнения.

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция $f^- < f < f^+$, $y(x; x^\circ, z)$ – решение следующей задачи Коши для регулярного уравнения (I)

$$y(x^\circ; x^\circ, z^\circ) = f(x^\circ), \quad y'(x^\circ; x^\circ, z^\circ) = z^\circ.$$

Обозначим через $(m_+^+ f)(x^\circ; a, b)$ точную нижнюю грань тех z°, для которых $\exists \xi$ $(x^\circ < \xi < b)$ такое, что $y(\xi; x^\circ, z^\circ) = f^+(\xi)$, $y(x; x^\circ, z^\circ) > f(\xi)$ при $x \in (x^\circ; \xi)$. Функция, аналогичная m_+^+, введена в работах [7], [8].

Для определения $(m_-^+ f)(x^\circ; a, b)$ сделаем сначала замену $t = a + b - x$, построим для новых уравнения и области функцию $(m_+^+ f(a+b-x))(x^\circ; a, b)$ и положим $m_-^+ f = m_+^+ f(a+b-x)$. Аналогично по $m_+^+ f$ и $m_-^+ f$ с помощью замены $y = -u$ строятся $m_+^- f$ и $m_-^- f$.

Пусть $M^+ f = \max\{m_+^+ f, m_-^- f\}$, $M^- f = \min\{m_-^+ f, m_+^- f\}$.

Лемма 4. Если $a < \bar{a} < \bar{b} < b$, то

$$(m_+^+ f)(x; \bar{a}, \bar{b}) \geqslant (m_+^+ f)(x; a, b); \ (m_-^- f)(x; \bar{a}, \bar{b}) \geqslant (m_-^- f)(x; a, b);$$
$$(m_-^+ f)(x; \bar{a}, \bar{b}) \leqslant (m_-^+ f)(x; a, b); \ (m_+^- f)(x; \bar{a}, \bar{b}) \leqslant (m_+^- f)(x; a, b).$$

Доказательство очевидно.

Лемма 5. Пусть $|f_t(x_1) - f_t(x_2)| \leqslant C|x_1 - x_2|$ $\forall (x_1, x_2) \subset (a, b)$; $a < \alpha < \beta < b$, тогда $\exists M(\alpha, \beta) < \infty$

такое, что

$$\max_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} \left\{ (M^+ f_t)(x; a, b); -(M^- f_t)(x; a, b) \right\} \leqslant M(\alpha, \beta).$$

Доказательство. Докажем, например, что $m_+^+ f < M(\alpha, \beta)$. Будем доказывать это от "противного". Пусть $\sup\limits_{\alpha < x < \beta} m_+^+ f_t = +\infty$, то есть $\exists x_{t_i} \to x^*$, $z_{t_i} \to +\infty$ такие, что $y_{t_i}(x) < f^+(x)$ при $x > x_{t_i}$ до тех пор, пока $y_{t_i}(x) > f_{t_i}(x)$. Здесь $y_{t_i}(x)$ – решения задачи Коши:

$$y_t'' = R(x; y_t, y_t'); \ y_t(x_t) = f_t(x_t); \quad y_t'(x_t) = z_t.$$

Мы можем считать, что $z_{t_i} > Q^{-1}(C)$, по следствию из леммы 2 $y_{t_i}'(x) > C$ в некоторой окрестности δ° точек x_{t_i}, то есть $y_{t_i}(x) > f_{t_i}(x)$ при $x \in (x_1, x_2)$, где $x_1 = x^* + \frac{\delta}{4}$, $x_2 = x^* + \frac{\delta}{2}$. Таким образом функции $y_{t_i}(x)$ определены на интервале (x_1, x_2), $f^- < y_{t_i} < f^+$, $\sup\limits_{t_i} \max\limits_{[x_1, x_2]} |y_{t_i}'(x)| = +\infty$, что невозможно. Мы видим, что если $f(x) \subset C^1$, то $M^+ f$, $M^- f$ ограничены на всяком внутреннем интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ $(\alpha \neq a, \beta \neq b)$. Если же f абсолютно непрерывна, то легко построить пример, когда $M^+ f$, $M^- f$ не суммируемы на некотором внутреннем интервале.

Пусть выполнены неравенства (4) и (5) и $y(x)$ – некоторое обобщенное решение уравнения (2), определенное на интервале (a, b). Из того, что функция $(\Phi y)(x)$ равномерно непрерывна, следует, что в тех точках, в которых y' конечна, равенство (7) можно дифференцировать по x, то есть множество точек $\mathcal{Y}$, в которых функция y' непрерывна, открыто. Следствие из леммы 2 позволяет заключить, что $m\mathcal{Y} = b - a$. В остальных точках функция $y(x)$ имеет бесконечную производную.

Лемма 6. Пусть функция $y(x)$ определена на интервале (a, b) и удовлетворяет неравенствам (4) и (5). Пусть $\exists R(x, z)$, $f(x)$ $(f^-(x) < f(x) < f^+(x))$ такие, что

$$\Psi(x, y, z) - R(x, z) \geqslant 0 \text{ при } y > f. \tag{8}$$

Тогда в тех точках, в которых $y > f$, справедливо неравенство

$$(m_-^+ f)(x; a, b) < y'(x) < (m_+^+ f)(x; a, b).$$

Аналогично, если

$$\Psi(x,y,z)-R(x,z)\leqslant 0 \quad \text{при} \quad y<f, \qquad (8')$$

то в тех точках, в которых $y<f$, справедливо неравенство

$$(m\mp f)(x;a,b)<y'(x)<(m\mp f)(x;a,b).$$

Доказательство легко следует из леммы I. Из лемм 5 и 6 легко следует

Т е о р е м а I. Пусть выполнены условия леммы 6. Тогда любое обобщенное решение задачи (6), (6′) является классическим.

С л е д с т в и е. Пусть $\Psi=\varphi(y')F_1(x,y)+F_2(x,y,y')$, где $|F_2|\leqslant R(x,z)$ и $\exists f\subset C^1(a,b)$ такое, что $F_1(y-f)\geqslant 0$. Тогда любое обобщенное решение задачи (6), (6′) является классическим.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{y''}{1+|y'|^{100}}=y-\frac{|x|^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{5}}}{(3^{3/20})|y'|^{3/20}}+\frac{-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}}{1+[\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}]^{100}},$$

$$3y'(-\tfrac{1}{8})=4,\quad 3y'(\tfrac{1}{8})=4.$$

Ее решение имеет вид $y=x^{\frac{1}{3}}$. Мы видим, что если $\Psi=\varphi(y')(y-f(x)+\varsigma)$, где $\varsigma_{|z|\to\infty}\to 0$, но не оценивается регулярной функцией, то классическое решение краевой задачи может не существовать. Из теоремы 3, которая будет доказана позже, следует, что в этом случае существует обобщенное решение поставленной задачи, которое не является классическим.

Т е о р е м а 2. Пусть при $\forall y>f\subset C^1$, $\forall |z|>k_0$ справедливо неравенство $\Psi-R\geqslant 0$.

Пусть, кроме того, $\exists\{f_k\}\ (f_k\rightrightarrows f\ \ (k\to\infty))$, причем $\Psi(x,y,z)-R(x,z)\leqslant 0$ при $y-f_k<0$, $|z|<k$. Тогда любое обобщенное решение задачи (6), (6′) является классическим.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольный интервал $(\bar a,\bar b)\subset(a,b)$, $a\neq\bar a, b\neq\bar b$.

Легко видеть, что $\exists N_0(\bar a,\bar b)$ такое, что $|y'|<N_0(\bar a,\bar b)$, если $y>f$. Далее из неравенства (3) легко следует, что $\exists\varepsilon_0$ такое, что

$$|y'|<2N_0(\bar a,\bar b),$$

если $y>f-\varepsilon_0$, $x\subset(\bar a,\bar b)$. Выбираем теперь $M>2N_0$ столь большим, чтобы при $k>M>2N_0$ выполнялось неравенство $|f_k-f|<\frac{\varepsilon_0}{2}$. Значит, при $|z|>M$, $y<f_0-\varepsilon_0$ мы имеем $|y'|<M$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Пусть $Sgn(\Psi-R)=Sgn(y-f(x,z))$,

$f(x,z_0)\subset C^1(a,b)$, $f(x,z)\underset{(-1)^i z\to\infty}{\rightrightarrows} f_i\subset C^1(a,b)$

$$(-1)^{k(j)}[f(x,z)-f_i(x)]\leqslant 0 \quad \text{при} \quad (-1)^i z\geqslant z_0.$$

Тогда любое обобщенное решение является классическим.

Т е о р е м а 3. Пусть функции Ψ и R удовлетворяют неравенству (2). Пусть, кроме того, $\exists f_{ij}^k\rightrightarrows f_k\subset C^1$ (k,i =I,2) такие, что

$$(-1)^i[\Psi-R]\geqslant 0,$$

если $(-1)^i(y-f_{ij}^k)>0$, $(-1)^i(z-j)>0$.

Тогда существует обобщенное решение задачи (6), (6'). Для доказательства достаточно построить последовательность уравнений

$$y'' = \Psi_j ,$$

где $\Psi_j = \Psi$ при $|z| < j$;
$\Psi_j = R$ при $|z| \geqslant j$

и сделать предельный переход при $j \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

I. С.Н. Бернштейн. Sur lesequations du calcul des variations, Ann.Ec.Math., 29, 431-485, 1912.

2. M.Nagumo. Proc.Phys.Math.Soc.Japan, 19, N°3, 861-866, 1937.

3. И.Т. Кигурадзе. Дифференциальные уравнения, IУ, № 10, 1753, 1968.

4. Г.В. Щербина. Вестник Харьковского университета, серия мех.-мат., 97, 1961.

5. Г.В. Щербина. Канд. дисс. Воронеж, ВГУ, 1963.

6. И.Т. Кигурадзе. Дифференциальные уравнения, 3, № 7, 1967.

7. Г.В. Щербина. Вестник Харьковского университета, серия мех.-мат. 94, 1967.

8. Г.В. Щербина. ДАН СССР, 178, № 2, 314, 1968.

ON NON-CLASSICAL SOLUTIONS OF NON-LINEAR BOUNDARY PROBLEMS FOR A SECOND-ORDER EQUATION

G.V.Shcherbina

The boundary problem

$$y'' = F(x, y, y'),$$
$$y'(a) = \alpha, \quad y'(b) = \beta$$

is considered for a class of equations that, generally speaking, have no classical solution. A definition of a generalized solution is given and sufficient conditions of its existence are stated.

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В.П. Котляров

ВВЕДЕНИЕ

В 1967 году был открыт метод построения убывающих решений уравнения Кортевега-де Фриса (КдФ) с помощью метода обратной задачи теории рассеяния для оператора Штурма-Лиувилля [1]. В последнее время этот метод был развит [2-5] для получения периодических решений уравнения КдФ.

В данной работе исследуется периодическая задача для нелинейного уравнения Шредингера

$$i v_t + v_{xx} + 2|v|^2 v = 0 \tag{1}$$

методом, развитым в [2].

Впервые это уравнение рассматривалось в [6], где были построены убывающие решения с использованием обратной задачи для несамосопряженного оператора Дирака.

Периодическая задача для нелинейного уравнения другого вида

$$i v_t + v_{xx} - 2|v|^2 v = 0, \tag{2}$$

приводящего в методе обратной задачи к самосопряженному оператору Дирака, в конечнозонном случае описана в заметке [7].

§ 1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОНЕЧНОЗОННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Введем, как и в [2], двухпараметрическое семейство ℓ - периодических комплекснозначных потенциалов:

$$v(x, x_0, t) \equiv v(x + x_0, t), \quad v(x+\ell, x_0, t) = v(x, x_0, t) \tag{1.1}$$

и связанное с ним семейство операторов Дирака

$$L = J\frac{d}{dx} + Q \ , \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

с несамосопряженной потенциальной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & iv(x, x_0, t) \\ i\bar{v}(x, x_0, t) \ , & 0 \end{pmatrix}.$$

Функция $v(x,t)$ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой по x и один раз по t.

Пусть вектор $y(x, z)$ - решение уравнения

$$Ly = zy, \tag{1.3}$$

где z - произвольное комплексное число. Введем еще два семейства операторов:

$$M_k = D_k + A_k(x,z,x_0,t), \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x_0},$$

в которых матрицы A_k выбираются так, чтобы

$$(L-zI)M_k y = [JA_k' + JA_k J(Q-zI) + (Q-zI)A_k - D_k Q]y \equiv B_k(x,x_0,t)y,$$

где матрицы B_k не зависят от z. Матрицы A_k и B_k имеют вид:

$$A_1 = i\begin{pmatrix} 2z^2-|v|^2, & v_x'-2izv \\ \bar{v}_x'+2iz\bar{v}, & -2z^2+|v|^2 \end{pmatrix}, \quad B_1 = -\begin{pmatrix} 0, & v_{xx}''+2|v|^2v+iv_t' \\ -\bar{v}_{xx}''-2|v|^2\bar{v}+i\bar{v}_t', & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} iz, & v \\ -\bar{v}, & -iz \end{pmatrix}, \qquad B_2 = 0.$$

Пусть $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению (I). Тогда $B_1 = 0$ и мы получаем, что операторы M_k $(k=1,2)$ решения уравнения (I.3) переводят в решения того же уравнения. Обозначим через $\Phi(x,z) \equiv \Phi(x,z,x_0,t)$ фундаментальные матрицы уравнения (I.3) и через $\Phi(z,x_0,t) = \Phi(l,z,x_0,t)$ - матрицы монодромии на интервале $(0,l)$. Тогда, если $y(x,z)$ - какое-нибудь решение (I.3), то $y(x,z) = \Phi(x,z)\,y(0,z)$. Далее, т.к. операторы M_k переводят решения (I.3) снова в решения того же уравнения, то, с одной стороны,

$$\tilde{y}_k(x,z) = M_k(x)y(x,z) = M_k(x)\Phi(x,z)\,y(0,z),$$

а, с другой,

$$\tilde{y}_k(x,z) = \Phi(x,z)\tilde{y}_k(0,z) = \Phi(x,z)M_k(0)\,y(0,z).$$

Следовательно

$$[M_k(x)\Phi(x,z) - \Phi(x,z)M_k(0)]\,y(0,z) = 0.$$

Полагая $x=l$ и учитывая, что $A_k(0,z) = A_k(l,z)$ в силу периодичности v, получаем следующие уравнения для матриц монодромии:

$$D_k\Phi(z,x_0,t) = \Phi(z,x_0,t)A_k(z,x_0,t) - A_k(z,x_0,t)\Phi(z,x_0,t), \quad k=1,2 \qquad (I.4)$$

с условиями

$$\Phi(z,x_0,0) = \Phi_1(z,x_0)$$
$$\Phi(z,0,t) = \Phi_2(z,t),$$

где $\Phi_1(z,x_0)$ - матрицы монодромии семейства (I.2) с $v = v(x,x_0,0)$, а $\Phi_2(z,t)$ - матрицы монодромии того же семейства (I.2) с $v = v(x,0,t)$.

Введем обозначения: $2g = \varphi_{11} + \varphi_{22}$, $2if = \varphi_{11} - \varphi_{22}$, $\psi = \varphi_{12}$, $\varphi = \varphi_{21}$, где φ_{ik} - элементы матриц монодромии $\Phi(z,x_0,t)$. Тогда из уравнений (I.4) следует, что $D_k\,g(z,x_0,t) = 0$, то есть $g(z,x_0,t)$ не зависит от x_0 и t, а функции $f(z,x_0,t)$, $\psi(z,x_0,t)$ и $\varphi(z,x_0,t)$ удовлетворяют системам уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= (\bar{v}' + 2iz\bar{v})\psi - (v' - 2izv)\varphi \\ \dot{\psi} &= -2(v'-2izv)f - 2i(2z^2-|v|^2)\psi \\ \dot{\varphi} &= 2(\bar{v}'+2iz\bar{v})f + 2i(2z^2-|v|^2)\varphi \end{aligned} \qquad (I.5)$$

и
$$
\begin{aligned}
f' &= i\bar{v}\psi + iv\varphi \\
\psi' &= 2ivf - 2iz\psi \\
\varphi' &= 2i\bar{v}f + 2iz\varphi,
\end{aligned}
\tag{I.6}
$$

где точка и штрих означают дифференцирование по t и x_0 , соответственно, $v = v(x_0, t)$, $\bar{v} = \bar{v}(x_0, t)$.

Уравнение (I.3) обладает свойством: если вектор $y(x,z) = (y_1(x,z), y_2(x,z))$ - его решение, то вектор $\tilde{y}(x,z) = (-\overline{y_2(x,\bar{z})}, \overline{y_1(x,\bar{z})})$ также является решением. Поэтому элементы матриц монодромии, являющиеся целыми функциями экспоненциального типа ℓ по z , удовлетворяют условиям:

$$
\varphi_{22}(z, x_0, t) = \overline{\varphi_{11}(\bar{z}, x_0, t)}, \quad \varphi_{21}(z, x_0, t) = -\overline{\varphi_{12}(\bar{z}, x_0, t)}.
$$

Следовательно, целые функции f , ψ и φ обладают свойством:

$$
f(z, x_0, t) = \overline{f(\bar{z}, x_0, t)}, \quad \varphi(z, x_0, t) = -\overline{\psi(\bar{z}, x_0, t)}. \tag{I.7}
$$

Предположим, что функции $f_0(z)$, $\psi_0(z)$ и $\varphi_0(z)$, построенные по элементам матрицы монодромии $\Phi_0(z)$ уравнения (I.3) с потенциалом $v(x)$, допускают представление:

$$
\begin{aligned}
f_0(z) &= \tilde{f}_0(z)\, h(z) \\
\psi_0(z) &= \tilde{\psi}_0(z)\, h(z) \\
\varphi_0(z) &= \tilde{\varphi}_0(z)\, h(z),
\end{aligned}
\tag{I.8}
$$

где $h(z)$ - целая функция, а $\tilde{f}_0(z)$, $\tilde{\psi}_0(z)$ и $\tilde{\varphi}_0(z)$ - некоторые полиномы, причем старший коэффициент полинома $\tilde{f}_0(z)$ считаем равным единице (это требование однозначно определяет $h(z)$).

О п р е д е л е н и е. Периодический потенциал $v(x)$ называется n -зонным, если соответствующая матрица монодромии $\Phi_0(z)$ обладает свойством (I.8).

Рассмотрим сдвиги $v(x, x_0) \equiv v(x + x_0)$ этого потенциала. Тогда функции $f(z, x_0)$, $\psi(z, x_0)$ и $\varphi(z, x_0)$, определяемые соответствующим семейством матриц монодромии $\Phi(z, x_0)$ $(\Phi(z, 0) = \Phi_0(z))$, являются решением системы уравнений (I.6), удовлетворяющим начальным условиям:

$$
f(z, 0) = \tilde{f}_0(z) h(z), \quad \psi(z, 0) = \tilde{\psi}_0(z) h(z), \quad \varphi(z, 0) = \tilde{\varphi}_0(z) h(z). \tag{I.9}
$$

Л е м м а I. Решение $f(z, x_0), \psi(z, x_0)$ и $\varphi(z, x_0)$ системы (I.6), удовлетворяющее начальным условиям (I.9), представимо в виде:

$$
f(z, x_0) = \tilde{f}(z, x_0) h(z), \quad \psi(z, x_0) = \tilde{\psi}(z, x_0) h(z), \quad \varphi(z, x_0) = \tilde{\varphi}(z, x_0) h(z) \tag{I.10}
$$

с той же функцией $h(z)$, что и в (I.9), а $\tilde{f}$, $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\varphi}$ - полиномы тех же степеней, что и полиномы $\tilde{f}_0$, $\tilde{\psi}_0$ и $\tilde{\varphi}_0$. При этом периодический n -зонный потенциал $v(x_0)$ выражается через старший коэффициент полинома $\tilde{\psi}(z, x_0)$ по формуле

$$
v(x_0) = \tilde{\psi}_{n-1}(x_0). \tag{I.11}
$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $C(x_0, z)$ - фундаментальное решение уравнения (I.3) на интервале $(0, x_0)$. В силу периодичности $v(x)$, $C(x_0, z)$ есть фундаментальное решение и на интервале $(\ell, \ell+x_0)$. Тогда матрицы монодромии $\Phi(z, x_0)$ на интервале $(x_0, x_0+\ell)$ и $\Phi_0(z)$ на интервале $(0, \ell)$ связаны соотношением:

$$\Phi(z, x_0) = C(x_0, z)\Phi_0(z)C^{-1}(x_0, z). \tag{I.I2}$$

Согласно (I.9) элементы $\Phi_0(z)$ имеют вид:

$$\varphi_{11}^{\circ} = g + i\tilde{f}_0 h, \quad \varphi_{12}^{\circ} = \tilde{\psi}_0 h, \quad \varphi_{21}^{\circ} = \tilde{\varphi}_0 h, \quad \varphi_{22}^{\circ} = g - i\tilde{f}_0 h.$$

Учитывая, что детерминант $C(x_0, z)$ равен единице, и вычисляя правую часть (I.I2), получим элементы матрицы $\Phi(z, x_0)$:

$$\varphi_{11}(x_0) = g + i\left[\tilde{f}_0(c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}) + i\tilde{\psi}_0 c_{11}c_{21} - i\tilde{\varphi}_0 c_{12}c_{22}\right]h,$$

$$\varphi_{12}(x_0) = (\tilde{\psi}_0 c_{11}^2 - \tilde{\varphi}_0 c_{12}^2 - 2i\tilde{f}_0 c_{11}c_{12})h,$$

$$\varphi_{21}(x_0) = (\tilde{\varphi}_0 c_{22}^2 - \tilde{\psi}_0 c_{21}^2 + 2i\tilde{f}_0 c_{21}c_{22})h,$$

$$\varphi_{22}(x_0) = g - i\left[\tilde{f}_0(c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}) + i\tilde{\psi}_0 c_{11}c_{21} - i\tilde{\varphi}_0 c_{12}c_{22}\right]h.$$

Отсюда следует, что представление (I.IO) имеет место с функциями $\tilde{f}(z, x_0)$, $\tilde{\psi}(z, x_0)$ и $\tilde{\varphi}(z, x_0)$, которые, вообще говоря, являются целыми. То, что эти функции являются полиномами тех же степеней, что и $\tilde{f}_0$, $\tilde{\psi}_0$, $\tilde{\varphi}_0$ вытекает из грубых асимптотических формул для элементов матриц монодромии $\Phi_0(z)$ и $\Phi(z, x_0)$.

Таким образом, если $v(x)$ - периодический, n -зонный потенциал, то система (I.6) имеет полиномиальное решение. Тогда, поскольку по определению n -зонного потенциала полином $\tilde{f}$ степени n, из системы (I.6) следует, что полиномы $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\varphi}$ имеют степень $n-1$. Далее, т.к. в силу первого уравнения $f_n(x_0) = f_n(0) = 1$, то из второго уравнения имеем (I.II).

§ 2. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ПРИВОДЯЩИЕ К РЕШЕНИЯМ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В этом параграфе будет показано, как из систем уравнений (I.5) и (I.6) можно получить нелинейные уравнения (автономные системы), приводящие к решениям нелинейного уравнения (I). При этом сначала будем считать, что коэффициенты в уравнениях (I.5) и (I.6) совершенно произвольны, т.е. будем рассматривать следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= (d + 2izb)\psi - (c - 2iza)\varphi \\ \dot{\psi} &= -2(c - 2iza)f - 2i(2z^2 - ab)\psi \\ \dot{\varphi} &= 2(d + 2izb)f + 2i(2z^2 - ab)\varphi \end{aligned} \tag{2.I}$$

и

$$\begin{aligned} f' &= ib\psi + ia\varphi \\ \psi' &= 2iaf - 2iz\psi \\ \varphi' &= 2ibf + 2iz\varphi, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $a = a(x,t)$, $b = b(x,t)$, $c = c(x,t)$, $d = d(x,t)$ - некоторые произвольные функции, а точка и штрих означают дифференцирование по t и x, соответственно.

Прежде всего отметим, что каждая из систем сохраняет величину:

$$f^2(x,t,z)-\psi(x,t,z)\varphi(x,t,z)\equiv P(z), \tag{2.3}$$

где $P(z)$ определяется начальными условиями для соответствующей системы. Если f, ψ и φ одновременно удовлетворяют системам (2.I) и (2.2), то $P(z)$ не зависит ни от t, ни от x.

Системы (2.I) и (2.2) интересуют нас в случае, когда a, b, c, d являются неизвестными функциями. В этом случае эти системы незамкнуты. Однако каждая из них может быть замкнута следующим образом. Будем искать полиномиальные по z решения этих систем. Выбирая f полиномом степени n

$$f(x,t,z)=\sum_{k=0}^{n} f_k(x,t)z^k,$$

легко видеть, что ψ и φ для обеих систем должны быть полиномами степени $n-1$

$$\psi(x,t,z)=\sum_{k=0}^{n-1}\psi_k(x,t)z^k, \quad \varphi(x,t,z)=\sum_{k=0}^{n-1}\varphi_k(x,t)z^k.$$

Тогда система (2.I) в коэффициентах полиномов примет вид

$$\begin{aligned}
\dot f_k &= d\psi_k - c\varphi_k + 2ib\psi_{k-1} + 2ia\varphi_{k-1}, \quad 0\le k\le n,\\
\dot\psi_l &= -2cf_l + 4iaf_{l-1} + 2iab\psi_l - 4i\psi_{l-2}, \quad 0\le l\le n-1,\\
\dot\varphi_m &= 2df_m + 4ibf_{m-1} - 2iab\varphi_m + 4i\varphi_{m-2}, \quad 0\le m\le n-1,
\end{aligned} \tag{2.I'}$$

при этом f_k, ψ_l, φ_m равны нулю, когда $k, l, m<0$ и $k>n$, , а $l,m>n-1$.

Кроме этих дифференциальных уравнений получим следующие алгебраические:

$$\begin{aligned}
0 &= -2cf_n + 4iaf_{n-1} - 4i\psi_{n-2}\\
0 &= 4iaf_n - 4i\psi_{n-1}\\
0 &= 2df_n + 4ibf_{n-1} + 4i\varphi_{n-2}\\
0 &= 4ibf_n + 4i\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда легко находим выражения для неизвестных

$$a=\frac{\psi_{n-1}(x,t)}{f_n}, \qquad b=-\frac{\varphi_{n-1}(x,t)}{f_n}, \tag{2.4}$$

$$c=2i\left[\frac{\psi_{n-1}\cdot f_{n-1}}{f_n^2}-\frac{\psi_{n-2}}{f_n}\right], \quad d=2i\left[\frac{\varphi_{n-1}\cdot f_{n-1}}{f_n^2}-\frac{\varphi_{n-2}}{f_n}\right]. \tag{2.5}$$

Из первого уравнения системы (2.I) находим, что коэффициенты f_{n-1}, f_n не зависят от t. Подставляя найденные выражения для a, b, c, d в систему (2.I′), получим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot y_i = F_i(y_1,\ldots,y_N), \quad i=0,1,\ldots N=3n+1, \tag{2.I''}$$

где $y_i=f_i\ (0\le i\le n)$, $y_{n+1+i}=\psi_i\ (0\le i\le n-1)$, $y_{2n+1+i}=\varphi_i\ (0\le i\le n-1)$, а правые части F_i являются полиномами от $y_1,\ldots,y_N$ не более, чем третьей степени.

Система (2.2) в коэффициентах полиномов запишется так:

$$\begin{aligned} f_k' &= ib\psi_k + ia\varphi_k\ , \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \\ \psi_\ell' &= 2iaf_\ell - 2i\psi_{\ell-1}, \quad 0 \leqslant \ell \leqslant n-1, \\ \varphi_m' &= 2ibf_m + 2i\varphi_{m-1}, \quad 0 \leqslant m \leqslant n-1. \end{aligned} \tag{2.2'}$$

При этом a и b и в этом случае выражаются по формулам (2.4), причем, в силу первого уравнения, f_n и f_{n-1} не зависят от x. После исключения a и b эта система также запишется в виде автономной системы:

$$y_i' = \Phi_i\ (y_1, \ldots, y_N), \quad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{2.2''}$$

где Φ_i – полиномы от $y_1, \ldots, y_N$ не более чем второй степени.

Таким образом, требование существования полиномиального по z решения у систем (2.I) и (2.2) однозначно определяет функции a, b, c, d через решения автономных систем (2.I″) и (2.2″). Верно и обратное, т.е. если $f_k, \psi_\ell, \varphi_m$ – решения автономных систем (2.I″), (2.2″) и a, b, c, d – функции, построенные по этим решениям согласно формулам (2.4), (2.5), то функции

$$f(x,t,z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x,t) z^k, \ \psi(x,t,z) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \psi_\ell(x,t) z^\ell, \ \varphi(x,t,z) = \sum_{m=0}^{n-1} \varphi_m(x,t) z^m \tag{2.6}$$

являются полиномиальными решениями систем (2.I) и (2.2). Всюду в дальнейшем системы (2.I′) и (2.2′) будем рассматривать в совокупности с (2.4) и (2.5), отождествляя их тем самым с системами (2.I″) и (2.2″).

Как известно, необходимым и достаточным условием совместности систем уравнений (2.I″) и (2.2″) является выполнение соотношений:

$$\sum_{k=0}^{N} \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_k} \Phi_k - \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} F_k \right) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, N. \tag{2.7}$$

Выражая в системах (2.I′) и (2.2′) функции a, b, c, d по формулам (2.4) и (2.5), можно непосредственно проверить справедливость равенств (2.7). Тем самым доказано, что автономные системы (2.I′) и (2.2′) совместны.

Т е о р е м а I. Пусть $f_k(x,t), \psi_\ell(x,t)$ и $\varphi_m(x,t)$ – любое совместное локальное решение автономных систем (2.I′) и (2.2′). Тогда функции $a(x,t)$ и $b(x,t)$, определяемые формулами (2.4), являются локальным бесконечно дифференцируемым по x и t решением следующей нелинейной системы уравнений:

$$\begin{aligned} i\dot{a} + a'' + 2a^2 b &= 0, \\ i\dot{b} - b'' - 2b^2 a &= 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматриваемые системы (2.I′) и (2.2′) содержат следующие две пары уравнений:

$$\dot{\psi}_{n-1} = -2cf_{n-1} + 4iaf_{n-2} + 2iab\psi_{n-1} - 4i\psi_{n-3}\ , \tag{2.9}$$

$$\psi_{n-1}' = 2iaf_{n-1} - 2i\psi_{n-2} \tag{2.I0}$$

и

$$\dot{\varphi}_{n-1} = 2df_{n-1} + 4ibf_{n-2} - 2iab\varphi_{n-1} + 4i\varphi_{n-3}\ , \tag{2.II}$$

$$\varphi_{n-1}' = 2ibf_{n-1} + 2i\varphi_{n-2}. \tag{2.I2}$$

Поскольку правые части $F_i\ (y_1, \ldots, y_N)$ и $\Phi_i\ (y_1, \ldots, y_N)$ систем (2.I″) и (2.2″) бесконечно дифференцируемы по $y_1, \cdots, y_N$, то и решения являются бесконечно дифференцируемыми по обеим переменным. Дифференцируя (2.I0) и (2.I2) по x и учитывая, что f_{n-1}

не зависит от x, а

$$\psi'_{n-2} = 2ia f_{n-2} - 2i\psi_{n-3}$$

и

$$\varphi'_{n-2} = 2ib f_{n-2} + 2i\varphi_{n-3},$$

получим

$$\psi''_{n-1} = 2ia' f_{n-1} + 4a f_{n-2} - 4\psi_{n-3},$$
$$-\varphi''_{n-1} = -2ib' f_{n-1} + 4b f_{n-2} + 4\varphi_{n-3}.$$

Умножая последние равенства на мнимую единицу и вычитая их из (2.9) и (2.II), найдем:

$$\dot{\psi}_{n-1} - i\psi''_{n-1} - 2iab\psi_{n-1} = 2(a'-c) f_{n-1},$$
$$\dot{\varphi}_{n-1} + i\varphi''_{n-1} + 2iab\varphi_{n-1} = 2(d-b') f_{n-1}.$$

Так как f_n не зависит от t и x, то из формул (2.4) и (2.5) и уравнений (2.I0) и (2.I2) следует, что $a'=c$ и $b'=d$. Наконец, поскольку $\psi_{n-1} = af_n$ и $\varphi_{n-1} = -bf_n$, то последние уравнения совпадают с системой (2.8). Теорема доказана.

Оказывается, что при некоторых условиях системы (2.I′) и (2.2′) имеют глобальное решение.

Л е м м а 2. Пусть начальные данные удовлетворяют условиям:

$$f_k = \bar{f}_k, \quad \varphi_k = -\bar{\psi}_k. \tag{2.I3}$$

Тогда система (2.I′), ((2.2′)) имеет решение на всей оси $-\infty < t < \infty$, $(-\infty < x < \infty)$, обладающее при любых t (x) тем же свойством (2.I3), что и начальные данные.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем для системы (2.I′). Прежде всего покажем, что система (2.I′) сохраняет свойство (2.I3) начальных данных. Действительно, пусть $f_k(t)$, $\psi_\ell(t)$, $\varphi_m(t)$ - решение системы (2.I′). Рассмотрим такие функции:

$$\hat{f}_k(t) = \bar{f}_k(t), \quad \hat{\psi}_\ell(t) = -\bar{\varphi}_\ell(t), \quad \hat{\varphi}_m(t) = -\bar{\psi}_m(t).$$

Сопрягая систему (2.I′), легко видеть, что $\hat{f}_k(t)$, $\hat{\psi}_\ell(t), \hat{\varphi}_m(t)$ удовлетворяют той же системе (2.I′), что и $f_k(t)$, $\psi_\ell(t)$, $\varphi_m(t)$. В силу (2.I3) при $t = t_0$ эти два набора функций совпадают. Поэтому по теореме единственности они совпадают и при всех других t.

Таким образом, в силу локальной теоремы существования, мы получим решение системы (2.I′) в некоторой окрестности точки t_0, обладающее свойством (2.I3). Используя это свойство решений можно получить равномерную ограниченность по t этих решений. Отсюда будет следовать, что решения неограниченно продолжаемы по t.

Чтобы получить указанную равномерную ограниченность решений, рассмотрим определяемую равенством (2.3) величину

$$P(z) \equiv f^2(z,t) - \psi(z,t)\varphi(z,t), \tag{2.I4}$$

где полиномы f, ψ и φ построены по решениям $f_k(t)$, $\psi_\ell(t)$, $\varphi_m(t)$ согласно формул (2.6), Тогда $P(z)$ сохраняется при всех t. Согласно (2.I3) $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $\varphi(z) = -\overline{\psi(\bar{z})}$ и потому $P(z) = \overline{P(\bar{z})}$. Поэтому полином $P(z)$, степень которого равна $2n$, допускает факторизацию

$$P(z) = P^+(z)\, P^-(z),$$

где $P^+(z)$ – полином степени n, нули которого расположены в замкнутой верхней полуплоскости, а $P^-(z)=\overline{P^+(\bar z)}$. Тождество (2.I4) при вещественных z принимает вид:

$$f^2(z,t)+|\psi(z,t)|^2 \equiv |P^+(z)|^2.$$

Отсюда имеем
$$|f(z,t)|\leqslant |P^+(z)|,\ \Im m\, z=0,$$
$$|\psi(z,t)|=|\varphi(z,t)|\leqslant |P^+(z)|,\ \Im m\, z=0.$$

Согласно неравенствам С.Н. Бернштейна [8] получим

$$\left|\frac{\partial^k f(z,t)}{\partial z^k}\right| \leqslant \left|\frac{\partial^k P^+(z)}{\partial z^k}\right|,\quad \Im m\, z=0.$$

Выбирая $k=0,1,\dots,n$ и полагая $z=0$, найдем

$$|f_k(t)|\leqslant|P_k^+|,\ |\psi_k(t)|=|\varphi_k(t)|\leqslant P_k^+,$$

где P_k^+ – коэффициенты полинома $P^+(z)$, определяемого начальными данными. В случае системы (2.2′) доказательство проводится аналогично. Лемма доказана.

Из доказанных выше теоремы и леммы вытекает

Следствие. Если начальные данные для системы (2.I′) или (2.2′) обладают свойством (2.I3), то эти системы имеют совместное, глобальное, бесконечно дифференцируемое решение $f_k(x,t)$, $(0\leqslant k\leqslant n)$, $\psi_k(x,t)$, $\varphi_k(x,t)$ $(0\leqslant k\leqslant n-1)$. Функция $a(x,t)=\psi_{k-1}(x,t)/f_n(0,0)$ представляет собой решение нелинейного уравнения Шредингера (I).

Действительно, поскольку системы (2.I′) и (2.2′) сохраняют свойство (2.I3) начальных данных, то

$$b(x,t)=-\frac{\varphi_{n-1}(x,t)}{f_n(0,0)}=\overline{\frac{\psi_{n-1}(x,t)}{f_n(0,0)}}=\overline{a(x,t)}.$$

Поэтому первое уравнение системы (2.8) есть уравнение (I), а второе – комплексно сопряженное с уравнением (I).

§ 3. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С КОНЕЧНОЗОННЫМ НАЧАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Рассмотрим на всей оси $-\infty<x<\infty$ периодическую задачу Коши для уравнения (I) с начальным данным $u(x)$, являющимся ℓ – периодическим n –зонным потенциалом. Рассмотрим семейство $v(x,x_0)=u(x+x_0)$ сдвигов этого потенциала. Тогда по лемме I функции $f(z,x_0),\psi(z,x_0),\varphi(z,x_0)$ определяемые матрицей монодромии $\Phi(z,x_0)$, допускают представление (I.I0) с $h(z)$ не зависящей от x_0, а $\tilde f(z,x_0),\tilde\psi(z,x_0),\tilde\varphi(z,x_0)$ являются полиномиальным решением системы (I.6). Полиномы $\tilde f(z,x_0)$, $\tilde\psi(z,x_0)$ и $\tilde\varphi(z,x_0)$ есть ℓ – периодические функции по x_0, что вытекает из периодичности матрицы монодромии $\Phi(z,x_0)$. Поэтому коэффициенты полиномов $\tilde f$, $\tilde\psi$ и $\tilde\varphi$ являются периодическим решением автономной системы (2.2′). Беря в качестве начальных данных для системы (2.I′) коэффициенты полиномов $\tilde f,\tilde\psi$ и $\tilde\varphi$ и решая при каждом x_0 эту систему, мы, согласно следствию из теоремы I, получим некоторое решение $v(x_0,t)$ уравнения (I). В силу единственности решения задачи Коши для системы (2.I′), найденное решение $v(x_0,t)$ будет ℓ – периодическим и единственным при заданном начальном данном $u(x_0)$.

Попутно будут найдены полиномы $\tilde f(z,x_0,t),\tilde\psi(z,x_0,t)$ и $\tilde\varphi(z,x_0,t)$, которые, поскольку $v(x_0,t)$ уже известна, будут решением линейной системы уравнений (I.5). Поэтому, умножая найденные полиномы на функцию $h(z)$, мы снова будем иметь решение системы (I.5), которое при $t=t_0$ имеет начальные данные порождаемые потенциалом $u(x)$. С другой стороны, решение $v(x_0,t)$ уравнения (I) порождает матрицы монодромии $\Phi(z,x_0,t)$ так, что соответствующие ей целые функции $f(z,x_0,t)$, $\psi(z,x_0,t)$ и $\varphi(z,x_0,t)$ также удовлетворяют системе (I.5) с теми же начальными данными, порождаемыми потенциалом $u(x)$. В силу единственности задачи Коши для системы (I.5) получаем

$$
\begin{aligned}
f(z,x_0,t) &= \tilde{f}(z,x_0,t)h(z),\\
\psi(z,x_0,t) &= \tilde{\psi}(z,x_0,t)h(z),\\
\varphi(z,x_0,t) &= \tilde{\varphi}(z,x_0,t)h(z).
\end{aligned}
$$

Следовательно $v(x_0,t)$ является при каждом t n-зонным потенциалом. Тем самым доказана

Т е о р е м а 2. Периодическая задача Коши для нелинейного уравнения Шредингера (I) с периодическим n-зонным начальным данным разрешима единственным образом, причем решение при каждом t также является n-зонным.

§ 4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НУЛЕЙ ПОЛИНОМОВ $\psi(z,x,t)$ И $\varphi(z,x,t)$

Рассмотрим совместное решение $f_k(x,t)$, $\psi_\ell(x,t)$ и $\varphi_m(x,t)$ автономных систем (2.I′) и (2.2′), для которых начальные данные обладают свойством (2.I3). Согласно результатам второго параграфа такое решение определяют по формуле

$$v(x,t)=\frac{\psi_{n-1}(x,t)}{f_n(0,0)} \tag{4.I}$$

некоторое решение нелинейного уравнения (I). При этом полиномы $f(z,x,t)$, $\psi(z,x,t)$ и $\varphi(z,x,t)$, построенные по формулам (2.6), обладают свойством (I.7) и являются решением линейных систем вида (I.5), (I.6). Это позволяет дать другое представление решения $v(x,t)$ уравнения (I).

Действительно, пусть $\mu_k=\mu_k(x,t)$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$ – нули полинома $\psi(z,x,t)$. Нули полинома $\varphi(z,x,t)$ являются комплексно сопряженными к нулям полинома $\psi(z,x,t)$. По формуле Вьета имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k(x,t)=-\frac{\psi_{n-2}(x,t)}{\psi_{n-1}(x,t)}, \tag{4.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\nu_k(x,t)=-\frac{f_{n-1}(0,0)}{f_n(0,0)}, \tag{4.3}$$

где $\nu_k=\nu_k(x,t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ – нули полинома $f(z,x,t)$, причем, согласно (2.3),

$$\frac{f_{n-1}(0,0)}{f_n(0,0)}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_k+\tilde{\lambda}_k)=K \qquad (\operatorname{Im}K=0), \tag{4.4}$$

где λ_k, $\tilde{\lambda}_k$ – нули полинома $P(z)$.

Из второго уравнения системы (2.2′) при $\ell=n-1$, с учетом (4.2)-(4.4), имеем

$$\frac{d}{dx}\ln\psi_{n-1}(x,t)=2i\Big[\sum_{k=1}^{n-1}\mu_k(x,t)+K\Big]=\Phi(x,t). \tag{4.5}$$

Аналогично, из второго уравнения системы (2.I′) при $\ell=n-1$ с учетом (2.3) получим

$$\frac{d}{dt}\ln\psi_{n-1}(x,t)=F(x,t), \tag{4.6}$$

где

$$F(x,t)=2i\left(\frac{P_{2n-2}}{P_{2n}}-3K^2\right)-4i\left(K\sum_{\ell=1}^{n-1}\mu_\ell(x,t)+\sum_{\ell>k}\mu_k(x,t)\mu_\ell(x,t)\right).$$

Так как P_{2n-2}/P_{2n} выражается по второй формуле Виета через парные произведения нулей λ_k, $\tilde\lambda_k$ полинома $P(z)$, то $F(x,t)$ есть функция только от нулей $\mu_1(x,t),\dots,\mu_{n-1}(x,t)$. Отметим, что, поскольку $\psi_{n-1}=v f_n$, то равенство (4.5) можно рассматривать как формулу следов. Интегрируя (4.5) и (4.6), получим представление решения $v(x,t)$ уравнения (I) через функции от нулей полинома $\psi(z,x,t)$:

$$v(x,t)=\frac{\psi_{n-1}(0,0)}{f_n(0,0)}\exp\left[\int_0^t F(0,\tau)\,d\tau+\int_0^x \Phi(\xi,t)\,d\xi\right].$$

Из систем уравнений (I.5) и (I.6) вытекают дифференциальные уравнения для $\mu_k(x,t)$. Действительно, разделив второе уравнение системы (I.5) на ψ и воспользовавшись (2.4), (2.5), найдем:

$$\frac{d}{dt}\ln\psi=\frac{d}{dt}\ln\left[\psi_{n-1}\prod_{\ell=1}^{n-1}(z-\mu_\ell)\right]=-4iv\left[\sum_{\ell=1}^{n-1}\mu_\ell+K-z\right]\frac{f(z)}{\psi(z)}.$$

Умножая на $z-\mu_k$ и устремляя $z\to\mu_k$ [I)], получим

$$\dot\mu_k=4iv\left[\sum_{\ell=1}^{n-1}\mu_\ell+K-\mu_k\right]\frac{f(\mu_k)}{\frac{\partial\psi}{\partial z}(\mu_k)},\quad k=1,2,\dots,n-1.$$

Так как

$$\psi(z)=\psi_{n-1}\prod_{\ell=1}^{n-1}(z-\mu_\ell),$$

то

$$\left.\frac{\partial}{\partial z}\psi(z)\right|_{z=\mu_k}=\psi_{n-1}\prod_{\ell\neq k}(\mu_k-\mu_\ell).$$

Далее, из (2.3) имеем

$$f^2(\mu_k)=P(\mu_k),\quad k=1,2,\dots,n-1, \tag{4.7}$$

где

$$P(\mu_k)=f_n^2\prod_{\ell=1}^{n}(\mu_k-\lambda_\ell)(\mu_k-\tilde\lambda_\ell).$$

Таким образом, с учетом (2.4) получаем систему уравнений

$$\dot\mu_k=4i\left[\sum_{\ell=1}^{n-1}\mu_\ell+K-\mu_k\right]\frac{\sqrt{P(\mu_k)}}{f_n\prod_{\ell\neq k}(\mu_k-\mu_\ell)},\quad k=1,2,\dots,n-1. \tag{4.8}$$

Аналогично из второго уравнения системы (I.6) получим:

I) Предполагается, что μ_k – простые нули полинома ψ .

$$\mu_k' = -2i \frac{\sqrt{P(\mu_k)}}{f_n \prod_{l\neq k} (\mu_k - \mu_l)} \qquad (4.9)$$

Начальные данные для системы (4.8) или (4.9) следует выбирать с учетом тождества (2.3). А именно, начальные данные $\mu_1^0, \ldots, \mu_{n-1}^0$ выбираются так, чтобы разность

$$P(z) - |\psi_{n-1}(0,0)|^2 \prod_{k=1}^{n-1} (z-\mu_k^0)(z-\overline{\mu_k^0}),$$

где $P(z)$ – произвольный неотрицательный на вещественной оси полином степени $2n$, представляла собой квадрат полинома с вещественными коэффициентами.

Системы типа (4.8), (4.9) для уравнения КдФ рассматривались в работах [2, 4, 5]. В [4, 5] такие системы были проинтегрированы, что позволило найти явные формулы для решения задачи Коши с конечнозонным начальным данным.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессору В.А. Марченко за постоянное внимание к работе и ряд ценных указаний.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. C.S. Gardner, I.M. Greene, M.D. Kruskal, R.M. Miura. Method for solving the Korteweg-de Vries equation. Phys. Rev. Lett., 19, 1095-1097, 1967.
2. В.А. Марченко. Периодическая задача Кортевега - де Фриса. Матем. сб., 95, в 3 (II), 331-356, 1974.
3. С.П. Новиков. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриса. Функц. анализ и его прилож., 8, в. 3, 54-66, 1974.
4. А.Р. Итс, В.Б. Матвеев. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N-солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриса, ТМФ, 23, № 1, 51-68, 1975.
5. Б.А. Дубровин. Обратная задача теории рассеяния для периодических конечнозонных потенциалов. Функц. анализ и его прилож., 9, в. 1, 65-66, 1975.
6. В.Е. Захаров, А.Б. Шабат. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах. ЖЭТФ, 61, № 1, 118-134, 1971.
7. А.Р. Итс. Канонические системы с конечнозонным спектром и периодические решения нелинейного уравнения Шредингера (в печати).
8. Б.Я. Левин. Распределение нулей целых функций. ГИТТЛ, М., 468, 1956.

PERIODIC PROBLEM FOR SHREDINGER'S NONLINEAR EQUATION

V.P. Kotlyarov

The work offers the method of discovering of some class of solutions for the non-linear Schrödinger equation:

$$iv_t + v_{xx} + 2|v|^2 v = 0, \qquad (1)$$

included, in particular, the solution of Caushy periodic problem for equation (1) with the finite-zone initial condition.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ "SINE-GORDON"

В.А. Козел

Метод решения задачи Коши для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0 \tag{1}$$

в классе функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0 \ (\mathrm{mod}\, 2\pi),$$

развит в работах [1-4]. Опираясь на эти работы, а также на результаты, полученные при решении периодической задачи для уравнений Кортевега - де Фриса [5-6], мы покажем в настоящей статье, как можно найти некоторый новый класс решений уравнения (1).

1. Пусть $v(x,y,t)$, $w(x,y,t)$ - вообще говоря, комплекснозначные функции, заданные при всех значениях x, y, t и имеющие по этим переменным столько производных, сколько потребуется в дальнейшем.

Рассмотрим уравнение

$$L_x \psi = \lambda \psi, \tag{2}$$

где $\lambda \neq 0$ - произвольное комплексное число,

$$L_x = J\frac{d}{dx} + A + \frac{1}{\lambda}H,$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} e^{iv} & 0 \\ 0 & e^{-iv} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x;\ y,t,\lambda) \\ \psi_2(x;\ y,t,\lambda) \end{pmatrix},$$

переменные t и y играют роль параметров.

Вместе с уравнением (2) введем в рассмотрение семейства операторов

$$M_k = D_k + B_k(x; y, t, \lambda), \quad k = 1,2,$$

где D_1, D_2 - операторы дифференцирования по t и y,

$$B_k = \begin{pmatrix} \frac{iw}{4} & b_k(v,\lambda) \\ -\bar{b}_k(\bar{v},\lambda) & -\frac{iw}{4} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$b_k(v,\lambda) = -\lambda + \frac{(-1)^k}{16\lambda}e^{-iv}$, черта - знак комплексного сопряжения.

Легко проверить, что на решениях ψ уравнения (2) выполняется равенство

$$L_x\{M_k\psi\} - \lambda M_k \psi = \left\{S_k(v,w) + \frac{1}{\lambda}V_k(v,w)\right\}\psi \tag{5}$$

с матрицами S_k, V_k вида

$$S_1 = -D_1 A + A'_x + 2(HJ - JH),$$
$$V_1 = -D_1 H - H'_x + 2(AJH - HJA),$$
$$S_2 = -D_2 A + A'_x,\ V_2 = -D_2 H + H'_x.$$

Из равенств (5) и явного вида матриц (3) следует, что оператор $M_1(M_2)$ переводит решение уравнения (2) в решение того же уравнения тогда и только тогда, когда функции $v(x;y,t), w(x;y,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} w'_t - w'_x + \sin u = 0 \\ v'_t + v'_x - w = 0 \end{cases} \tag{6}$$

$$(w'_x = w'_y,\ v'_x = v'_y). \tag{7}$$

Система (6), очевидно, эквивалентна уравнению (I) для функции $v(x;y,t)$ (y -параметр), а уравнения (7) - равенствам

$$w(x;y,t) = w(0,x+y,t),\ v(x;y,t) = v(0,x+y,t).$$

Если функция $u(x,t)\ (x,t \in (-\infty,\infty))$ удовлетворнет уравнению (I), то функция $u(x+y,t)$, очевидно, тоже удовлетворнет этому уравнению при всех значениях $y \in (-\infty,\infty)$ Поэтому, полагая в (2), (3)

$$v(x;y,t) = u(x+y,t),\ w(x;y,t) = u'_t(x+y,t) + u'_x(x+y,t), \tag{8}$$

мы получим пару функций, которые удовлетворнют обеим системам (6) и (7). Следовательно, в этом случае оба оператора M_1, M_2 переводят решение уравнения (2) в решение того же уравнения.

Обозначим через

$$\Psi(x;y,t,\lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x;y,t,\lambda) & \psi_{12}(x;y,t,\lambda) \\ \psi_{21}(x;y,t,\lambda) & \psi_{22}(x;y,t,\lambda) \end{pmatrix}$$

фундаментальную матрицу этого уравнения, равную единичной при $x = 0$.

Т е о р е м а I. Пусть функция $u(x,t)\ (x,t \in (-\infty,\infty))$ является решением уравнения (I). Тогда фундаментальная матрица уравнения (2), в котором функции $v(x;y,t)$, $w(x;t,y)$ определены равенствами (8), удовлетворяет при всех x, y, t уравнениям

$$D_k \Psi = \Psi A_k(y,t,\lambda) - A_k(y+x,t,\lambda)\Psi,\quad k = 1,2, \tag{9}$$

где матрицы

$$A_k(x+y,t,\lambda) = B_k(x;y,t,\lambda) = B_k(0;x+y,t,\lambda) \tag{10}$$

определены формулой (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение уравнения (2) с начальными данными ψ_0 при $x = 0$ равно $\Psi(x;y,t,\lambda)\psi_0$. Из условий теоремы, согласно предыдущему, следует, что векторы $M_k \Psi \psi_0$ (k = I,2) удовлетворяют тому же уравнению. Поэтому

$$M_k \Psi \psi_0 = \Psi(x;y,t,\lambda)\{M_k \Psi \psi_0\}_{x=0}$$

и так как

$$\{M_k \Psi \psi_0\}_{x=0} = \{M_k\}_{x=0} \Psi(0;y,t,\lambda)\psi_0 = B_k(0;y,t,\lambda)\psi_0 ,$$

то

$$\{M_k \Psi - \Psi B_k(0;y,t,\lambda)\}\psi_0 = 0,$$

откуда, в силу произвольности ψ_0, вытекают равенства

$$M_k \Psi - \Psi B_k(0;y,t,\lambda) = 0,$$

эквивалентные уравнениям (9).

Следствие. Если $u(x,t)$ - периодическое с периодом ℓ решение уравнения (I) $(u(x+\ell,t) = u(x,t))$, то, согласно (4), (8), (I0), $A_k(y+\ell,t,\lambda) = A_k(y,t,\lambda)$ и, следовательно,

$$D_k \Psi_\ell = \Psi_\ell A_k(y,t,\lambda) - A_k(y,t,\lambda)\Psi_\ell , \quad k = 1,2, \tag{II}$$

где через $\Psi_\ell(y,t,\lambda)$ обозначено значение фундаментальной матрицы в точке $x=\ell$.

Уравнения (II) эквивалентны таким системам уравнений для элементов ψ_{ik} матрицы $\Psi_\ell(y,t,\lambda)$

$$\begin{cases} iD_k\psi_- = \left\{\lambda + \dfrac{(-1)^{k-1}}{16\lambda}e^{iu}\right\}\psi_{12} + \left\{\lambda + \dfrac{(-1)^{k-1}}{16\lambda}e^{-iu}\right\}\psi_{21}, \\ iD_k\psi_{12} = 2\left\{\lambda + \dfrac{(-1)^{k-1}}{16\lambda}e^{-iu}\right\}\psi_- + \dfrac{w}{2}\psi_{12}, \\ iD_k\psi_{21} = 2\left\{\lambda + \dfrac{(-1)^{k-1}}{16\lambda}e^{iu}\right\}\psi_- - \dfrac{w}{2}\psi_{21}, \qquad D_k\psi_+ = 0, \end{cases} \tag{I2}$$

где $\psi_- = \frac{1}{2i}(\psi_{11} - \psi_{22})$, $\psi_+ = \frac{1}{2}(\psi_{11} + \psi_{22})$, $u = u(y,t)$, $w = u'_t + u'_y$.

2. Рассмотрим уравнения (I2) $(k=1,2)$ в предположении, что $u(y,t), w(y,t)$ пока произвольные функции, никак не связанные друг с другом и уравнением (I).

Прежде всего отметим, что выражение $\psi_-^2 - \psi_{12}\psi_{21}$, как легко проверить, является интегралом системы уравнений (I2) $(k=1,2)$.

В дальнейшем нас будут интересовать решения этих уравнений, полиномиально зависящие от λ. Заметим, что в уравнениях (I2) при $k=1$ переменная y является параметром, а при $k=2$ параметром является t.

Лемма I. Для того, чтобы система (I2) при $k=1$ имела своим решением полиномы

$$\begin{aligned} \psi_-(t,\lambda) &= \sum_{m=1}^{M} \psi_-^m(t)\lambda^{2m-1}, \\ \psi_{12}(t,\lambda) &= \sum_{m=0}^{M} \psi_{12}^m(t)\lambda^{2m}, \\ \psi_{21}(t,\lambda) &= \sum_{m=0}^{M} \psi_{21}^m(t)\lambda^{2m}, \end{aligned} \tag{I3}$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\psi_{12}^M = -\psi_{21}^M = Const.$$

$$w(t) = -\frac{4\psi_-^M}{\psi_{12}^M}, \qquad e^{-iu} = \psi_{12}^0(t)\left(-\psi_{12}^0\psi_{21}^0\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{I4}$$

и коэффициенты $\psi_-^m(t)$, $\psi_{12}^m(t)$, $\psi_{21}^m(t)$, $m=0,\dots,M$ удовлетворяли такой автономной системе обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений

$$i\dot\psi_-^m = \psi_{12}^{m-1} + \psi_{21}^{m-1} - \frac{1}{16}\left(-\psi_{12}^\circ\psi_{21}^\circ\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\psi_{21}^\circ\psi_{12}^m - \psi_{12}^\circ\psi_{21}^m\right),$$
$$i\dot\psi_{12}^m = 2\psi_-^m + \frac{1}{8}\left(-\psi_{12}^\circ\psi_{21}^\circ\right)^{-\frac{1}{2}}\psi_{12}^\circ\psi_-^{m+1} - \frac{2\psi_-^M}{\psi_{12}^M}\psi_{12}^m, \tag{15}$$
$$i\dot\psi_{21}^m = 2\psi_-^m - \frac{1}{8}\left(-\psi_{12}^\circ\psi_{21}^\circ\right)^{-\frac{1}{2}}\psi_{21}^\circ\psi_-^{m+1} + \frac{2\psi_-^M}{\psi_{12}^M}\psi_{21}^m,$$

из которой, в частности, следует, что величина $\psi_{12}^\circ(t)\psi_{21}^\circ(t)$ сохраняется. (Здесь точкой обозначена производная по t).

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть полиномы (13) удовлетворяют системе (12) с $k=1$. Подставляя их в эту систему и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$i\dot\psi_-^m = \psi_{12}^{m-1} + \psi_{21}^{m-1} + \frac{1}{16}\left(e^{iu}\psi_{12}^m + e^{-iu}\psi_{21}^m\right), \quad m=1,\dots,M,$$
$$i\dot\psi_{12}^m = 2\psi_-^m + \frac{1}{8}e^{-iu}\psi_-^{m+1} + \frac{w}{2}\psi_{12}^m, \quad m=0,\dots,M, \tag{16}$$
$$i\dot\psi_{21}^m = 2\psi_-^m + \frac{1}{8}e^{iu}\psi_-^{m+1} - \frac{w}{2}\psi_{21}^m, \quad m=0,\dots,M$$

и алгебраические соотношения

$$\psi_{12}^M + \psi_{21}^M = 0, \qquad e^{iu}\psi_{12}^\circ + e^{-iu}\psi_{21}^\circ = 0. \tag{17}$$

Вычитая при $m=M$ из второго уравнения системы (16) третье и складывая их, получим

$$\dot\psi_{12}^M - \dot\psi_{21}^M = 0, \qquad 4\psi_-^M + \frac{w}{2}(\psi_{12}^M - \psi_{21}^M) = 0,$$

откуда, согласно первому из равенств (17), следуют первое и второе равенства (14). Далее имеем

$$e^{-2iu} = -\frac{\psi_{12}^\circ(t)}{\psi_{21}^\circ(t)} = -\frac{(\psi_{12}^\circ(t))^2}{\psi_{12}^\circ(t)\,\psi_{21}^\circ(t)},$$

откуда, извлекая корень и выбирая определенный знак, получим последнее из равенств (10), а также равенство

$$e^{iu} = -\psi_{21}^\circ(t)\left(-\psi_{12}^\circ\psi_{21}^\circ\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Умножив второе и третье уравнения (16) при $m=0$ на $\psi_{21}^\circ(t)$ и $\psi_{12}^\circ(t)$, соответственно, и сложив, убедимся, что $(\psi_{12}^\circ(t)\psi_{21}^\circ(t))'_t = 0$. Следовательно, величина $\psi_{12}^\circ(t)\psi_{21}^\circ(t)$ не зависит от t.

Подставив найденные выражения для функций e^{iu}, e^{-iu}, $w(t)$ в (16), получим для $\psi_-^m(t), \psi_{12}^m(t), \psi_{21}^m(t)$ систему уравнений (15).

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнены равенства (14) и коэффициенты $\psi_-^m(t)$, $\psi_{12}^m(t)$, $\psi_{21}^m(t)$ на некотором интервале $-t_0 < t < t_0$ являются решением системы (15). Тогда из этих уравнений при $m=0$ легко следует, что $\psi_{12}^\circ(t)\psi_{21}^\circ(t)$ сохраняется. Далее, согласно (14),

$$e^{iu} = \frac{(-\psi_{12}^\circ\psi_{21}^\circ)^{\frac{1}{2}}}{\psi_{12}^\circ(t)} = -\psi_{21}^\circ(t)\left(-\psi_{12}^\circ\psi_{21}^\circ\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Заменив в уравнениях (15) функции $\psi_-^M(t), \psi_{12}^\circ(t), \psi_{21}^\circ(t)$ их выражениями из равенств (14), (18), получим систему уравнений (16). Кроме того, очевидно, имеют место соотношения (17), что в совокупности эквивалентно тому, что полиномы (13) удовлетворяют при $t\in(-t_0, t_0)$ системе (12) $(k=1)$ с функциями e^{iu}, e^{-iu}, w, определенными равенствами (14), (18). Лемма доказана.

Аналогичная лемма справедлива для системы уравнений (12) при $k=2$, в которой переменную t следует рассматривать как параметр. При этом условия (14) сохраняют свой вид, а соответствующая (I5) система нелинейных уравнений такова:

$$i(\psi_-^m)' = \psi_{12}^{m-1} + \psi_{21}^{m-1} + \frac{1}{16}\left(-\psi_{12}^\circ\psi_{21}^\circ\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\psi_{21}^\circ\psi_{12}^m - \psi_{12}^\circ\psi_{21}^m\right),$$

$$i(\psi_{12}^m)' = 2\psi_-^m - \frac{1}{8}\left(-\psi_{12}^\circ\psi_{21}^\circ\right)^{-\frac{1}{2}}\psi_{12}^\circ\psi_-^{m+1} - \frac{2\psi_-^M}{\psi_{12}^M}\psi_{12}^m, \qquad (I9)$$

$$i(\psi_{21}^m)' = 2\psi_-^m + \frac{1}{8}\left(-\psi_{12}^\circ\psi_{21}^\circ\right)^{-\frac{1}{2}}\psi_{21}^\circ\psi_-^{m+1} + \frac{2\psi_-^M}{\psi_{12}^M}\psi_{21}^m,$$

где $m = 0, 1, \ldots, M$, штрихом обозначено дифференцирование по y .

Рассмотрим системы уравнений (I5) и (I9), переобозначив переменную y через x . При этом, не ограничивая общности, будем полагать $\psi_{12}^M = -\psi_{21}^M = 1$. (Кроме того, следует помнить, что $\psi_-^\circ = 0$).

Л е м м а 2. Системы уравнений (I5) и (I9) совместны, т.е. в некоторой окрестности точки $x=0$, $t=0$ существует набор функций $\psi_-^m(x,t)$, $\psi_{12}^m(x,t)$, $\psi_{21}^m(x,t)$, удовлетворяющих одновременно обеим системам и принимающих при $x=0$, $t=0$ любые, наперед заданные значения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$z_m(x,t) = \begin{cases} \psi_-^m(x,t), & m = 1,\ldots, M, \\ \psi_{12}^{m-M-1}, & m = M+1,\ldots, 2M, \\ \psi_{21}^{m-2M-1}, & m = 2M+1,\ldots, 3M \end{cases}$$

и перепишем уравнения (I5) и (I9) в следующем виде

$$\dot z_m = f_m(z_1,\ldots, z_{3M}), \qquad (20)$$

$$z_m' = \varphi_m(z_1,\ldots, z_{3M}), \qquad (2I)$$

где функции f_m и φ_m определены правой частью соответствующих уравнений. Как известно, необходимое и достаточное условие совместности систем (20), (2I) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{3M}\left\{\frac{\partial f_m}{\partial z_i}\varphi_i - \frac{\partial\varphi_m}{\partial z_i}f_i\right\} \equiv 0$$

при всех значениях m .

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для систем (I5) и (I9) последнее условие выполнено, следовательно, рассматриваемые системы совместны.

Именно совместность систем нелинейных дифференциальных уравнений (I5) и (I9) является тем важным свойством, которое непосредственно приводит к решениям уравнения (I).

Т е о р е м а 2. Пусть функции двух переменных $\psi_-^m(x,t)$, $\psi_{12}^m(x,t)$, $\psi_{21}^m(x,t)$ $(m=0,\ldots,M)$ в некоторой окрестности точки $x=0$, $t=0$ удовлетворяют обеим системам (I5) и (I9). Тогда в той же окрестности функция

$$u(x,t) = i\ln a\psi_{12}^\circ(x,t), \qquad (22)$$

где $a = \left(-\psi_{12}^\circ(0,0)\psi_{21}^\circ(0,0)\right)^{-\frac{1}{2}}$, является бесконечно дифференцируемым решением уравнения „Sine-Gordon" .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая уравнения (I5) и (I9) при $m=M$ и $m=0$

$$i\dot\psi_-^M = \psi_{12}^{M-1} + \psi_{21}^{M-1} - \frac{a}{16}\left(\psi_{12}^\circ + \psi_{21}^\circ\right),$$

$$i(\psi_-^M)' = \psi_{12}^{M-1} + \psi_{21}^{M-1} + \frac{a}{16}\left(\psi_{12}^\circ + \psi_{21}^\circ\right),$$

$$i\dot\psi_{12}^\circ = \frac{1}{8}a\psi_{12}^\circ\psi_-^1 - 2\psi_-^M\psi_{12}^\circ,$$

$$i\dot{\psi}_{21}^{\circ}=-\frac{1}{8}a\psi_{21}^{\circ}\psi_{-}^{1}+2\psi_{-}^{M}\psi_{21}^{\circ},$$

$$i(\psi_{12}^{\circ})'=-\frac{1}{8}a\psi_{12}^{\circ}\psi_{-}^{1}-2\psi_{-}^{M}\psi_{12}^{\circ},$$

$$i(\psi_{21}^{\circ})'=\frac{1}{8}a\psi_{21}^{\circ}\psi_{-}^{1}+2\psi_{-}^{M}\psi_{21}^{\circ},$$

где $a=(-\psi_{12}^{\circ}\psi_{21}^{\circ})^{-\frac{1}{2}}$, находим, что

$$i\{\dot{\psi}_{-}^{M}-(\psi_{-}^{M})'\}=-\frac{1}{8}a(\psi_{12}^{\circ}+\psi_{21}^{\circ}),$$

$$i\{\dot{\psi}_{12}^{\circ}+(\psi_{12}^{\circ})'\}=-4\psi_{-}^{M}\psi_{12}^{\circ},$$

$$i\{\dot{\psi}_{21}^{\circ}+(\psi_{21}^{\circ})'\}=4\psi_{-}^{M}\psi_{21}^{\circ},$$

откуда, полагая

$$w(x,t)=-4\psi_{-}^{M}(x,t),\quad e^{-iu}=a\psi_{12}^{\circ}(x,t),\quad e^{iu}=-a\psi_{21}^{\circ}(x,t),$$

получим, что функции $w(x,t)$ и $u(x,t)=i\ln a\psi_{12}^{\circ}(x,t)$ удовлетворяют системе

$$\dot{w}-w'+\sin u=0,$$

$$\dot{u}+u'-w=0,$$

которая, как уже отмечалось, эквивалентна уравнению (I). Из аналитичности правых частей систем (I5) и (I9) (с учетом того, что сохраняется величина $\psi_{12}^{\circ}(x,t)\psi_{21}^{\circ}(x,t)=\psi_{12}^{\circ}(0,0)\psi_{21}^{\circ}(0,0)$) следует, что $u(x,t)$ бесконечно дифференцируема по обеим переменным.

Таким образом, рассматривая совместные решения систем уравнений (I5) и (I9), удовлетворяющие в точке $x=0$, $t=0$ произвольным начальным данным, мы, согласно теореме 2, получим в окрестности этой точки семейство решений уравнения (I), которые, в общем случае, комплексны. Наиболее интересными, например, с точки зрения физических приложений, являются вещественные решения уравнения (I), определенные при всех x и t .

Л е м м а 3. Пусть начальные данные для системы уравнений (I5) удовлетворяют условиям

$$\psi_{-}^{m}(0)=\overline{\psi_{-}^{m}}(0),\quad \psi_{12}^{m}(0)=-\overline{\psi_{21}^{m}}(0). \tag{23}$$

Тогда эти уравнения имеют решение на всей оси $t\in(-\infty,\infty)$, причем $\psi_{-}^{m}(t)=\overline{\psi_{-}^{m}}(t)$, $\psi_{12}^{m}(t)=-\overline{\psi_{21}^{m}}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно локальной теореме существования, в некоторой окрестности точки $t=0$ существует единственное решение системы уравнений (I5), удовлетворяющее при $t=0$ произвольным начальным данным. Пусть выполнены условия (23), тогда $(-\psi_{12}^{\circ}\psi_{21}^{\circ})^{-\frac{1}{2}}=|\psi_{12}^{\circ}|^{-1}$ и, как легко видеть, функции $\overline{\psi_{-}^{m}},-\overline{\psi_{21}^{m}},-\overline{\psi_{12}^{m}}$ являются решением уравнений (I5) при тех же начальных данных. Отсюда, в силу теоремы единственности, следует, что $\psi_{-}^{m}(t)=\overline{\psi_{-}^{m}}(t)$, $\psi_{12}^{m}(t)=-\overline{\psi_{21}^{m}}(t)$. Построим по функциям $\psi_{-}^{m}(t)$, $\psi_{12}^{m}(t)$, $\psi_{21}^{m}(t)$ полиномы ψ_{-}^{2M-1}, ψ_{12}^{2M} , ψ_{21}^{2M} вида (I3). Очевидно, для них выполнены соотношения

$$\psi_{-}^{2M-1}(t,\lambda)=\overline{\psi_{-}^{2M-1}}(t,\bar{\lambda}),\quad \psi_{12}^{2M}(t,\lambda)=-\overline{\psi_{21}^{2M}}(t,\bar{\lambda}),$$

и, согласно лемме I, эти полиномы удовлетворяют системе уравнений (I2) $(k=1)$ с функциями $w(t)$, e^{iu} , e^{-iu} , определенными равенствами (I4), (I8). Как уже отмечалось, выражение

$$T^{4M}(\lambda) = (\psi_-^{2M-1}(t,\lambda))^2 - \psi_{12}^{2M}(t,\lambda)\psi_{21}^{2M}(t,\lambda)$$

не зависит от t. Рассматривая это тождество при вещественных λ, получим:

$$T^{4M}(\lambda) = (\psi_-^{2M-1})^2 + |\psi_{12}^{2M}|^2.$$

Так как полином $T^{4M}(\lambda)$ имеет вещественные коэффициенты и неотрицателен при вещественных λ, то его можно представить в виде

$$T^{4M}(\lambda) = T_+^{2M}(\lambda)\, T_-^{2M}(\lambda),$$

где T_+^{2M}, T_-^{2M} - многочлены степени $2M$, удовлетворяющие соотношению

$$\overline{T_+^{2M}(\lambda)} = T_-^{2M}(\bar{\lambda}),$$

причем нули $T_+^{2M}(\lambda)$ расположены в замкнутой верхней полуплоскости. Следовательно, при вещественных λ, $T^{4M}(\lambda) = |T_+^{2M}(\lambda)|^2$ и

$$|\psi_-^{2M-1}(t,\lambda)| \le |T_+^{2M}(\lambda)|, \ -\infty < \lambda < \infty,$$

$$|\psi_{12}^{2M}(t,\lambda)| \le |T_+^{2M}(\lambda)|, \ -\infty < \lambda < \infty.$$

Отсюда, согласно неравенствам С.Н. Бернштейна [7], заключаем, что

$$|\psi_-^m(t)| + |\psi_{12}^m(t)| + |\psi_{21}^m(t)| \le C_M, \ m = 0, 1, \ldots, M,$$

где C_M - константа, не зависящая от t.

Последнее неравенство и вид правой части уравнений (I5) показывают, что решение рассматриваемой системы может быть единственным образом продолжено на всю вещественную ось $-\infty < t < \infty$.

Очевидно, аналогичное утверждение имеет место и для системы уравнений (I9).

Т е о р е м а 3. Если совместное решение систем уравнений (I5) и (I9) удовлетворяет в точке $x=0, t=0$ условиям (23), то функция

$$u(x,t) = -\arg \psi_{12}^{0}(x,t) \tag{24}$$

при всех x и t является вещественным решением уравнения (I).

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из теоремы 2, леммы 3 и того факта, что в данном случае

$$\psi_{12}^{0}(x,t)\psi_{21}^{0}(x,t) = -|\psi_{12}^{0}(x,t)|^2 = -|\psi_{12}^{0}(0,0)|^2,$$

следовательно, формула (22) эквивалентна (24).

В заключение автор приносит благодарность профессору В.А. Марченко за постановку задачи и постоянное внимание к работе, а также В.П. Котлярову, Е.Я. Хруслову за полезное обсуждение.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. G.L.Lamb.Ir.IEEE ,I.of Quantum Electr.,QE-8,569,1972.

2. M.I.Ablowitz,D.I.Kaup,A.C.Newell,H.Segur.Phys.Rev.Lett.,30,N°25,1973.

3. Л.А. Тахтаджян. ЖЭТФ, 66, № 2, 1974.

4. В.Е. Захаров, Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. ДАН СССР, 219, № 6, 1974.

5. В.А. Марченко. Матем. сб., 95, 3, 1974.

6. С.П. Новиков. Функцион. анализ и его прилож. 8, в. 3, 1974.

7. Н.И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. "Наука", М., 1965.

ON CLASS OF SOLUTIONS OF THE "SINE-GORDON" EQUATION

V.A. Kozel

For equation $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$ the method of discovering of the N-parametrical family of its solutions, based on the integration procedure of the systems of ordinary differential equations is given.

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА ДРЕЙФОВЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Н. Богаевский

I. ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА ДРЕЙФОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения движения заряженной частицы в дрейфовом приближении можно записать в виде [I]

$$\frac{dr}{dt} = v_{\parallel}\frac{B}{B} + \frac{c}{B^2}[EB] + \frac{mcv_{\parallel}^2}{eB^4}[B,(B\nabla)B] + \frac{mcv_{\perp}^2}{2eB^3}[B\nabla B] = v_0 ,$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\left(E\frac{dr}{dt}\right) + \frac{mv_{\perp}^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial t}; \quad \frac{d}{dt}\frac{m^2v_{\perp}^2}{B} = 0; \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{eB}{mc}; \tag{I.I}$$

где E - электрическое поле, B - магнитное, r - положение "ведущего центра", $d\theta/dt$ - угловая скорость вращения вокруг силовой линии магнитного поля, $v_{\parallel}$ и $v_{\perp}$ - параллельная и перпендикулярная (к магнитному полю) составляющие скорости частицы, m - масса, e - заряд, c - скорость света, $\mathcal{E} = \frac{m}{2}(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)$ - кинетическая энергия*), $B = |B|$ (v_0 - скорость дрейфа). При этом

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{I.2}$$

Уравнения (I.I) имеют место при

$$|r|, |v|, |E| \sim 1, \quad |B| \sim \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \sim \frac{1}{\varepsilon}, \tag{I.3}$$

где ε - малый параметр. В силу (I.3), (I.2)

$$B = B(r, \varepsilon t). \tag{I.4}$$

Для удобства разделения порядков малости заменим B на $\frac{1}{\varepsilon}B$ и назовем

$$\tau = \frac{B}{B}, \quad p_{\parallel} = \frac{c}{e}mv_{\parallel}, \quad p_{\perp} = \frac{c}{e}mv_{\perp}, \quad \omega = -\frac{eB}{mc}, \quad \mathcal{J}_{\perp} = \frac{p_{\perp}^2}{2B} \tag{I.5}$$

($|\omega|$ - циклотронная частота, $\mathcal{J}_{\perp}$ - поперечный адиабатический инвариант).

Заменив уравнение энергии уравнением для $p_{\parallel}$, перепишем систему (I.I)

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\omega}{B}p_{\parallel}\tau + \varepsilon\left\{\frac{c}{B}[E\tau] - \frac{\omega p_{\parallel}^2}{B^2}[\tau,(\tau\nabla)\tau] - \frac{\omega\mathcal{J}_{\perp}}{B^2}[\tau\nabla B]\right\},$$

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = c(\tau E) + \frac{\omega\mathcal{J}_{\perp}}{B}(\tau\nabla B) + \varepsilon\left\{\frac{cp_{\parallel}}{B}\left([\tau,(\tau\nabla)\tau]E\right) + \frac{\omega p_{\parallel}\mathcal{J}_{\perp}}{B^2}\left([\tau,(\tau\nabla)\tau]\nabla B\right)\right\}, \tag{I.6}$$

$$\frac{d\mathcal{J}_{\perp}}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\omega.$$

---

*) Уравнения (I.I) и все приведенные в этом и следующем параграфах формулы справедливы и для релятивистского случая, когда $\mathcal{E} = mc^2$, $m = m_0\left(1 - \frac{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{c^2}\right)^{-1/2}$ (m_0 - масса покоя).

Перейдем от декартовых координат r к криволинейным α, β, s [3] так, что

$$B = [\nabla\alpha \nabla\beta], \tag{I.7}$$

а s - длина дуги силовой линии магнитного поля, определяемой уравнениями $\alpha = const$, $\beta = const$.

Возможность представления магнитного поля в виде (I.7) следует из $div\, B = 0$. Приведем известное [3] доказательство этого факта. Рассмотрим уравнение

$$(B\nabla\gamma) = 0. \tag{I.8}$$

Пусть γ_1 и γ_2 - два независимых решения. Тогда $B = \gamma_3[\nabla\gamma_1 \nabla\gamma_2]$, причем $\gamma_3 = \gamma_3(\gamma_1, \gamma_2)$, поскольку из $div B = 0$ следует $(B\nabla\gamma_3) = 0$, т.е. γ_3 - решение уравнения (I.8). Чтобы иметь (I.7), нужно подчинить $\alpha(\gamma_1, \gamma_2)$ и $\beta(\gamma_1, \gamma_2)$ условию

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma_1}\frac{\partial\beta}{\partial\gamma_2} - \frac{\partial\alpha}{\partial\gamma_2}\frac{\partial\beta}{\partial\gamma_1} = \gamma_3, \tag{I.9}$$

чего всегда можно добиться (например, $\alpha = \gamma_1$, $\beta = \int\gamma_3 d\gamma_2$). $s(r,t)$ также можно ввести различными способами ввиду произвольности начала отсчета.

Введя векторный и скалярный потенциалы, (см. (I.2), (I.4))

$$B = rot\, A, \quad E = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t^*}, \tag{I.10}$$

где $t^* = \varepsilon t$, положим

$$A = \alpha\nabla\beta - \nabla\int\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t^*}dt^*. \tag{I.11}$$

Пусть

$$\xi = R(\alpha, \beta, s, t^*). \tag{I.12}$$

Назовем

$$\delta_\alpha = \left(\tau\frac{\partial R}{\partial\alpha}\right), \quad \delta_\beta = \left(\tau\frac{\partial R}{\partial\beta}\right), \tag{I.13}$$

$$h = \frac{c}{e}(\mathcal{E} + e\Phi). \tag{I.14}$$

Уравнения (I.6) примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial h}{\partial J_\perp}, \quad \frac{dp_\parallel}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial s} + O(\varepsilon), \quad \frac{d\alpha}{dt} = \varepsilon\left(-\frac{\partial h}{\partial\beta} + \delta_\beta\frac{\partial h}{\partial s} - p_\parallel\frac{\partial h}{\partial p_\parallel}\frac{\partial\delta_\beta}{\partial s}\right), \\ &\frac{dJ_\perp}{dt} - \frac{\partial h}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_\parallel} + O(\varepsilon), \quad \frac{d\beta}{dt} = \varepsilon\left(\frac{\partial h}{\partial\alpha} - \delta_\alpha\frac{\partial h}{\partial s} + p_\parallel\frac{\partial h}{\partial p_\parallel}\frac{\partial\delta_\alpha}{\partial s}\right). \end{aligned} \tag{I.15}$$

Действительно, по определению длины дуги

$$\frac{\partial R}{\partial s} = \tau. \tag{I.16}$$

Согласно (I.12), (I.7), (I.16)

$$(\tau\nabla s) = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial\alpha} = \frac{1}{B}[\nabla\beta\nabla s], \quad \frac{\partial R}{\partial\beta} = \frac{1}{B}[\nabla s\nabla\alpha],$$

откуда (см. (I.13))

$$\nabla s = \tau - \delta_\alpha\nabla\alpha - \delta_\beta\nabla\beta, \tag{I.17}$$

δ_α и δ_β должны удовлетворять условию

$$rot\,(\tau - \delta_\alpha \nabla\alpha - \delta_\beta \nabla\beta) = 0. \tag{I.18}$$

Операция ∇ в переменных α, β, s

$$\nabla = \nabla\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\alpha} - \delta_\alpha \frac{\partial}{\partial s}\right) + \nabla\beta\left(\frac{\partial}{\partial\beta} - \delta_\beta \frac{\partial}{\partial s}\right) + \tau \frac{\partial}{\partial s}. \tag{I.19}$$

В силу (I.19) условие (I.18) примет вид

$$rot\,\tau = B\left(-\frac{\partial\delta_\alpha}{\partial\beta} + \frac{\partial\delta_\beta}{\partial\alpha} + \delta_\beta \frac{\partial\delta_\alpha}{\partial s} - \delta_\alpha \frac{\partial\delta_\beta}{\partial s}\right)\tau + \frac{\partial\delta_\alpha}{\partial s}[\tau\nabla\alpha] + \frac{\partial\delta_\beta}{\partial s}[\tau\nabla\beta].$$

Поскольку $(\tau\nabla)\tau = [rot\,\tau, \tau]$, получим отсюда

$$[\tau, (\tau\nabla)\tau] = \frac{\partial\delta_\alpha}{\partial s}[\tau\nabla\alpha] + \frac{\partial\delta_\beta}{\partial s}[\tau\nabla\beta]. \tag{I.20}$$

Далее, из (I.19), (I.11), (I.10) следует

$$\nabla B = \left(\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \delta_\alpha \frac{\partial B}{\partial s}\right)\nabla\alpha + \left(\frac{\partial B}{\partial\beta} - \delta_\beta \frac{\partial B}{\partial s}\right)\nabla\beta + \tau \frac{\partial B}{\partial s}, \tag{I.21}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t^*} = \frac{\partial\alpha}{\partial t^*}\nabla\beta - \frac{\partial\beta}{\partial t^*}\nabla\alpha, \tag{I.22}$$

$$E = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} - \delta_\alpha \frac{\partial\Phi}{\partial s} - \frac{1}{c}\frac{\partial\beta}{\partial t^*}\right)\nabla\alpha - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta} - \delta_\beta \frac{\partial\Phi}{\partial s} + \frac{1}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t^*}\right)\nabla\beta - \frac{\partial\Phi}{\partial s}\tau. \tag{I.23}$$

Наконец,

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial p_\parallel} = -\frac{e\omega}{cB}p_\parallel, \quad \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial J_\perp} = -\frac{e}{c}\omega, \quad \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\mu} = -\frac{e\omega J_\perp}{cB}\frac{\partial B}{\partial\mu}, \tag{I.24}$$

где μ – любая из переменных α, β, s, t^*.

Пользуясь формулами (I.20), (I.21), (I.23), (I.24), (I.7), (I.17) и (I.6), получим (I.15).

Сделаем в уравнениях (I.15) замену переменных, близкую к тождественной

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \varepsilon p_\parallel \delta_\beta, \quad & p'_\parallel &= p_\parallel, \quad \theta' = \theta \\ \beta' &= \beta - \varepsilon p_\parallel \delta_\alpha, \quad & s' &= s, \quad J'_\perp = J_\perp. \end{aligned} \tag{I.25}$$

Поскольку $\frac{\partial\delta_\alpha}{\partial p_\parallel} = \frac{\partial\delta_\beta}{\partial p_\parallel} = 0$ и t входит в замену переменных (I.25) только в виде $t^* = \varepsilon t$, получаем (штрихи опущены)

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial h}{\partial J_\perp} + O(1), \quad \frac{dp_\parallel}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial s} + O(\varepsilon), \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\varepsilon\frac{\partial h}{\partial\beta} + O(\varepsilon^2),$$

$$\frac{dJ_\perp}{dt} = \frac{\partial h}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_\parallel} + O(\varepsilon), \quad \frac{d\beta}{dt} = \varepsilon\frac{\partial h}{\partial\alpha} + O(\varepsilon^2).$$

Таким образом, в первом порядке теории возмущений движение частицы описывается гамильтоновыми уравнениями*)

$$\begin{aligned} &\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial J_\perp}, \quad \frac{dp_\parallel}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial s}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial\beta}, \\ &\frac{dJ_\perp}{dt} = \frac{\partial h}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_\parallel}, \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial h}{\partial\alpha}, \end{aligned} \tag{I.26}$$

где h, как функция $\alpha, \beta, s, p_\parallel, J_\perp, t$, определена формулой (I.14).

*) Искусственно введенный параметр ε можно положить равным единице.

2. СЛУЧАЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Рассмотрим еще один вид дрейфовых уравнений в гамильтоновой форме для случая, когда магнитное поле потенциально

$$B = \nabla \Psi (r, \varepsilon, t). \tag{2.I}$$

В этом случае система (I.6) в переменных

$$\alpha, \beta, \psi = \Psi, \quad \kappa = \frac{p_\parallel}{B} = -\frac{v_\parallel}{\omega}, \quad J_\perp, \ \Theta \tag{2.2}$$

гамильтонова (в первом порядке)

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial h}{\partial J_\perp}, & \frac{d\kappa}{dt} &= -\frac{\partial h}{\partial \psi} + O(\varepsilon), & \frac{d\alpha}{dt} &= -\varepsilon \frac{\partial h}{\partial \beta}, \\ \frac{dJ_\perp}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial \Theta} = 0, & \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial \kappa} + O(\varepsilon), & \frac{d\beta}{dt} &= \varepsilon \frac{\partial h}{\partial \alpha}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В самом деле, согласно (2.I)

$$\nabla \Psi = B\tau,$$

и, значит, операция ∇ будет иметь вид

$$\nabla = \nabla\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \nabla\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + B\tau \frac{\partial}{\partial \psi}. \tag{2.4}$$

Кроме того,

$$[\tau, (\tau\nabla)\tau] = \frac{1}{B}[\tau \nabla B] \tag{2.5}$$

и

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial J_\perp} = -\frac{e}{c}\omega, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \kappa} = -\frac{e\omega}{c}\kappa B, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu} = -\frac{e\omega}{c}\left(\kappa^2 + \frac{J_\perp}{B}\right)\frac{\partial B}{\partial \mu}, \tag{2.6}$$

где μ – любая из переменных α, β, ψ, t^*.

Пользуясь формулами (2.2), (2.4), (2.5), (2.6), (I.7), (I.I4), (I.22) и (I.6), находим

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{B}\left\{\frac{\partial h}{\partial \kappa}\tau + \varepsilon\left(\frac{\partial h}{\partial \alpha} - \frac{\partial \beta}{\partial t^*}\right)[\tau \nabla \alpha] + \varepsilon\left(\frac{\partial h}{\partial \beta} + \frac{\partial \alpha}{\partial t^*}\right)[\tau \nabla \beta]\right\} \\ \dot{p}_\parallel &= \kappa \frac{\partial B}{\partial \psi}\frac{\partial h}{\partial \kappa} - B\frac{\partial h}{\partial \psi} + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.7}$$

и затем (2.3).

3. ФОРМУЛА ТОКА

Плотность тока частиц (при отсутствии столкновений) в дрейфовом приближении может быть вычислена как сумма плотностей тока "ведущих центров" и тока "намагничения" [3]

$$j(r,t) = 2\pi e \int v_\perp \left[v_0 F(r, v_\perp, v_\parallel, t) + \operatorname{rot}\left(-\frac{mc v_\perp^2}{2eB^2} BF\right)\right] dv_\perp dv_\parallel, \tag{3.I}$$

где $F(r, v_\perp, v_\parallel, t)$ – плотность.

Эта формула справедлива, если пренебречь быстроосциллирующими (вокруг нулевого значения) токами, перпендикулярными силовой линии магнитного поля, и малыми продольными токами.

В случае, когда магнитное поле является безвихревым и стационарным, формула (3.I) в гамильтоновых переменных (2.2) принимает простой вид.

Ограничиваясь рассмотрением нерелятивистских частиц, перейдем в интеграле (3.I) от переменных $V_\perp$, $V_\parallel$ к переменным $\mathcal{J}_\perp$, κ Якобиан (см. (I.5), (2.2))

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_\perp}{\partial \mathcal{J}_\perp} & \frac{\partial V_\perp}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial V_\parallel}{\partial \mathcal{J}_\perp} & \frac{\partial V_\parallel}{\partial \kappa} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{e^2 B}{m^2 c^2 V_\perp} & 0 \\ 0 & \frac{eB}{mc} \end{vmatrix} = -\frac{e^2 \omega B}{m^2 c^2 V_\perp}. \qquad (3.2)$$

Далее, (см. (2.7))

$$V_0 = \frac{1}{B}\left(\frac{\partial h}{\partial \kappa}\tau + \frac{\partial h}{\partial \alpha}[\tau \nabla \alpha] + \frac{\partial h}{\partial \beta}[\tau \nabla \beta]\right). \qquad (3.3)$$

Пусть

$$F(r, v_\perp, v_\parallel, t) = G(\alpha, \beta, \psi, \kappa, \mathcal{J}_\perp, t).$$

Тогда, в силу $rot\, B = 0$, (I.5), (2.2)

$$\begin{aligned} rot\left\{-\frac{mcV_\perp^2}{2eB^2} BF\right\} &= \\ &= -\frac{2e\mathcal{J}_\perp G}{mcB}[\tau \nabla B] - \frac{e\mathcal{J}_\perp}{mc}\left[\frac{\partial G}{\partial \alpha}\nabla\alpha + \frac{\partial G}{\partial \beta}\nabla\beta + B\tau\frac{\partial G}{\partial \psi} - \frac{\kappa}{B}\frac{\partial G}{\partial \kappa}\nabla B - \frac{\mathcal{J}_\perp}{B}\frac{\partial G}{\partial \mathcal{J}_\perp}\nabla B, \tau\right] = \qquad (3.4) \\ &= -\frac{e}{mcB}\left(\left\{\frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_\perp}(\mathcal{J}_\perp^2 G) + \frac{\partial}{\partial \kappa}(\mathcal{J}_\perp \kappa G) - \mathcal{J}_\perp G\right\}[\tau \nabla B] - B\mathcal{J}_\perp\left\{\frac{\partial G}{\partial \alpha}[\tau \nabla \alpha] + \frac{\partial G}{\partial \beta}[\tau \nabla \beta]\right\}\right). \end{aligned}$$

Согласно (2.4)

$$[\tau \nabla B] = \frac{\partial B}{\partial \alpha}[\tau \nabla \alpha] + \frac{\partial B}{\partial \beta}[\tau \nabla \beta]. \qquad (3.5)$$

Пользуясь (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) и учитывая, что слагаемые с $\frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_\perp}(\mathcal{J}_\perp^2 G)$, $\frac{\partial}{\partial \kappa}(\mathcal{J}_\perp \kappa G)$ исчезают при интегрировании, получаем следующую формулу для плотности тока.

$$j(\alpha, \beta, \psi, t) = -\frac{2\pi e^3 \omega}{m^2 c^2}\int\left\{\frac{\partial h}{\partial \kappa}G\tau + \left(\frac{\partial h}{\partial \alpha}G + \frac{e\mathcal{J}_\perp}{mc}\frac{\partial (BG)}{\partial \alpha}\right)[\tau \nabla \alpha] + \left(\frac{\partial h}{\partial \beta}G + \frac{e\mathcal{J}_\perp}{mc}\frac{\partial (BG)}{\partial \beta}\right)[\tau \nabla \beta]\right\} d\mathcal{J}_\perp d\kappa,$$

где

$$h = \frac{e}{2mc}B^2\kappa^2 + \frac{e\mathcal{J}_\perp}{mc}B + c\Phi,$$

а $G(\alpha, \beta, \psi, \kappa, \mathcal{J}_\perp, t)$ есть плотность (функция распределения), являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \kappa}\frac{\partial G}{\partial \psi} - \frac{\partial h}{\partial \psi}\frac{\partial G}{\partial \kappa} + \frac{\partial h}{\partial \alpha}\frac{\partial G}{\partial \beta} - \frac{\partial h}{\partial \beta}\frac{\partial G}{\partial \alpha} = 0.$$

4. ПРОДОЛЬНЫЙ ИНВАРИАНТ

Дрейфовое движение частицы описывается гамильтоновой системой*) (см. (I.26))

$$\frac{dp_\parallel}{dt}=-\frac{\partial h}{\partial s}, \qquad \frac{d\alpha}{dt}=-\varepsilon\frac{\partial h}{\partial \beta},$$
$$\frac{ds}{dt}=\frac{\partial h}{\partial p_\parallel}, \qquad \frac{d\beta}{dt}=\varepsilon\frac{\partial h}{\partial \alpha} \tag{4.1}$$

($\mathcal{J}_\perp$ входит в h как параметр).

Пусть не только магнитное (см. (I.4)), но и электрическое поле медленно меняется во времени, т.е. $h=h(\alpha,\beta,s,p_\parallel,t^*;\mathcal{J}_\perp)$, где $t^*=\varepsilon t$.

Система (4.I) станет автономной, если добавить к ней уравнение

$$\frac{dt^*}{dt}=\varepsilon. \tag{4.2}$$

Приведем эту систему к виду, каноническому для применения метода усреднения Н.Н.Боголюбова [2] .

Введем вместо $p_\parallel, s$ новые переменные h,ϑ , где $\vartheta(\alpha,\beta,s,p_\parallel,t^*;\mathcal{J}_\perp)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial h}{\partial p_\parallel}\frac{\partial\vartheta}{\partial s}-\frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial\vartheta}{\partial p_\parallel}=\Omega(\alpha,\beta,h,t^*;\mathcal{J}_\perp), \tag{4.3}$$

причем $\Omega\neq 0$ (Ω^{-1} - якобиан замены переменных).

Употребляя обозначение $\langle f\rangle$ для функции $f(\alpha,\beta,s,p_\parallel,t^*;\mathcal{J}_\perp)$, выраженной через $\alpha,\beta,h,\vartheta,t^*;\mathcal{J}_\perp$, назовем

$$R_\lambda=\langle p_\parallel\rangle\frac{\partial\langle s\rangle}{\partial\lambda}-\langle s\rangle\frac{\partial\langle p_\parallel\rangle}{\partial\lambda}, \tag{4.4}$$

где λ - любая из переменных $\alpha,\beta,h,\vartheta,t^*$.

Тогда

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\Omega+O(\varepsilon), \qquad \frac{d\alpha}{dt}=\frac{1}{2}\varepsilon\Omega\left(\frac{\partial R_\vartheta}{\partial\beta}-\frac{\partial R_\beta}{\partial\vartheta}\right),$$
$$\frac{dt^*}{dt}=\varepsilon, \qquad \frac{d\beta}{dt}=-\frac{1}{2}\varepsilon\Omega\left(\frac{\partial R_\vartheta}{\partial\alpha}-\frac{\partial R_\alpha}{\partial\vartheta}\right), \tag{4.5}$$
$$\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{2}\varepsilon\Omega\left(\frac{\partial R_\vartheta}{\partial t^*}-\frac{\partial R_{t^*}}{\partial\vartheta}\right).$$

При этом

$$\frac{1}{\Omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_\vartheta}{\partial h}-\frac{\partial R_h}{\partial\vartheta}\right) \tag{4.6}$$

(заметим, что по определению $\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta}=0$).

Действительно, в силу (4.I), (4.2)

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\Omega+O(\varepsilon),\ \frac{d\alpha}{dt}=-\varepsilon\left\langle\frac{\partial h}{\partial\beta}\right\rangle,\ \frac{d\beta}{dt}=\varepsilon\left\langle\frac{\partial h}{\partial\alpha}\right\rangle,\ \frac{dh}{dt}=\varepsilon\left\langle\frac{\partial h}{\partial t^*}\right\rangle,\ \frac{dt^*}{dt}=\varepsilon. \tag{4.7}$$

Далее,

---

*) Здесь снова для удобства введен параметр ε .

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial \mu} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial \mu} - \left\langle \frac{\partial h}{\partial p_\parallel} \right\rangle \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial \mu}, \tag{4.8}$$

где μ – любая из α, β, t^*, и

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial h} + \left\langle \frac{\partial h}{\partial p_\parallel} \right\rangle \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial h} = 1, \quad \left\langle \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right\rangle \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial h} + \left\langle \frac{\partial \vartheta}{\partial p_\parallel} \right\rangle \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial h} = 0,$$
$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial \vartheta} + \left\langle \frac{\partial h}{\partial p_\parallel} \right\rangle \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial \vartheta} = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \vartheta}{\partial s} \right\rangle \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial \vartheta} + \left\langle \frac{\partial \vartheta}{\partial p_\parallel} \right\rangle \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial \vartheta} = 1. \tag{4.9}$$

Согласно (4.9) формула (4.3) примет вид

$$\frac{\partial \langle s \rangle}{\partial \vartheta} \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial h} - \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial h} \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\Omega}, \tag{4.10}$$

и мы получим

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial s} \right\rangle = -\Omega \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial \vartheta}, \quad \left\langle \frac{\partial h}{\partial p_\parallel} \right\rangle = \Omega \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial \vartheta}. \tag{4.11}$$

Подставляя (4.11) в (4.8), имеем

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial \mu} \right\rangle = -\Omega \left\{ \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial \mu} \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial \vartheta} \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial \mu} \right\}. \tag{4.8'}$$

Поскольку (см. (4.4))

$$\frac{\partial \langle s \rangle}{\partial \lambda} \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial \vartheta} - \frac{\partial \langle s \rangle}{\partial \vartheta} \frac{\partial \langle p_\parallel \rangle}{\partial \lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial R_\lambda}{\partial \vartheta} - \frac{\partial R_\vartheta}{\partial \lambda} \right),$$

формулы (4.8′), (4.7), (4.10) дают (4.5) и (4.6).

Предположим, что $\langle p_\parallel \rangle$, $\langle s \rangle$ – периодические функции переменной $\vartheta' = \frac{\vartheta}{\Omega}$ (см. (4.3)) с периодом $T(\alpha, \beta, t^*, h;\, \mathcal{J}_\perp)$ (это – требование наличия электромагнитных "пробок").

Положим

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}$$

так, что $\langle p_\parallel \rangle$, $\langle s \rangle$ (а, значит, и R_λ (см. (4.4))) – периодические функции переменной ϑ с <u>постоянным</u> периодом.

Применяя метод усреднения к уравнениям (4.5), будем иметь

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Omega + O(\varepsilon), \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon \Omega \frac{\partial \bar{R}_\vartheta}{\partial \beta} + O(\varepsilon^2),$$
$$\frac{dt^*}{dt} = \varepsilon, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{2}\varepsilon\Omega \frac{\partial \bar{R}_\vartheta}{\partial \alpha} + O(\varepsilon^2), \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{2}\varepsilon\Omega\frac{\partial \bar{R}_\vartheta}{\partial t^*} + O(\varepsilon^2), \tag{4.12}$$

где

$$\bar{R}_\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_\vartheta \, d\vartheta.$$

Обозначим

$$\mathcal{J}_\parallel(\alpha, \beta, h, t^*;\, \mathcal{J}_\perp) = \frac{1}{2}\bar{R}_\vartheta \tag{4.13}$$

и заметим, что в силу (4.6)

$$\frac{1}{\Omega} = \overline{\left(\frac{1}{\Omega}\right)} = \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{R}_\vartheta}{\partial h}. \tag{4.14}$$

Из (4.I2), (4.I3), (4.I4) следует, что дрейфовая система усреднения по продольному параметру ϑ в первом порядке теории возмущений имеет вид $(\varepsilon = 1)$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 1\Big/\frac{\partial \mathcal{J}_\parallel}{\partial h}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathcal{J}_\parallel}{\partial \beta}\Big/\frac{\partial \mathcal{J}_\parallel}{\partial h}, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{J}_\parallel}{\partial \alpha}\Big/\frac{\partial \mathcal{J}_\parallel}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial \mathcal{J}_\parallel}{\partial t}\Big/\frac{\partial \mathcal{J}_\parallel}{\partial h}. \tag{4.I5}$$

Принимая $\mathcal{J}_\parallel$ за независимую переменную и обозначив

$$H = h(\alpha, \beta, \mathcal{J}_\parallel, t^*; \mathcal{J}_\perp),$$

приведем систему (4.I5) к гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}_\parallel}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = 0, & \frac{d\alpha}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \beta}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathcal{J}_\parallel}, & \frac{d\beta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \alpha} \end{aligned} \tag{4.I6}$$

(см. также уравнения Б.Б. Кадомцева [I]).

$\mathcal{J}_\parallel$ называют продольным адиабатическим инвариантом.

Физический смысл $\mathcal{J}_\parallel$ установить нетрудно согласно (4.I3), (4.4)

$$\mathcal{J}_\parallel = \overline{\frac{1}{2}\langle p_\parallel\rangle \frac{\partial\langle s\rangle}{\partial\vartheta} - \langle s\rangle\frac{\partial\langle p_\parallel\rangle}{\partial\vartheta}} = \overline{\frac{1}{2}2\langle p_\parallel\rangle\frac{\partial\langle s\rangle}{\partial\vartheta} - \frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\langle s\rangle\langle p_\parallel\rangle\right)} = \overline{\langle p_\parallel\rangle\frac{\partial\langle s\rangle}{\partial\vartheta}}. \tag{4.I7}$$

Стало быть,

$$\mathcal{J}_\parallel = \oint p_\parallel \, ds$$

(см., например, [3]).

Заметим еще, что из (4.I7), (4.II) следует

$$\mathcal{J}_\parallel = \frac{1}{\Omega}\overline{\langle p_\parallel \frac{\partial h}{\partial p_\parallel}\rangle} = \frac{1}{\Omega}\overline{\left\langle \frac{e}{mc} p_\parallel^2 \right\rangle}. \tag{4.I8}$$

П р и м е р. Рассмотрим движение нерелятивистской частицы в поле плоского диполя

$$B = M\nabla\frac{y}{\rho^2} = M\left\{-\frac{2xy}{\rho^4}, \ \frac{x^2-y^2}{\rho^4}, 0\right\}, \tag{4.I9}$$

$(\rho^2 = x^2 + y^2, \ M = const)$, когда $E = 0$.

Полагая $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, введем координаты α, β, s (см. (I.8), (I.9)):

$$\alpha = \sqrt{2M}\,\frac{\cos\varphi}{\rho}, \quad \beta = \sqrt{\frac{M}{2}}\,z, \quad s = \frac{\rho\varphi}{\cos\varphi}. \tag{4.20}$$

Формулы (I.I4), (I.5), (4.I9), (4.20) дают

$$h = \frac{e}{2mc}\left(p_\parallel^2 + \frac{\mathcal{J}_\perp \alpha^2}{\cos^2\frac{\alpha s}{\sqrt{2M}}}\right). \tag{4.2I}$$

Интегрируя (4.3), найдем $(\vartheta|_{s=0} = 0)$

$$\sin\frac{\alpha s}{\sqrt{2M}} = \sqrt{1 - \frac{e\mathcal{J}_\perp\alpha^2}{2mch}}\cdot\sin\left(\alpha\sqrt{\frac{eh}{mcM}}\,\frac{\vartheta}{\Omega}\right). \tag{4.22}$$

Значит,

$$\Omega = \alpha \sqrt{\frac{eh}{mcM}} \ . \tag{4.23}$$

Из (4.2I), (4.22), (4.23)

$$\left\langle \frac{e}{mc} p_{\parallel}^{2} \right\rangle = \frac{2h\left(1 - \frac{eJ_{\perp}\alpha^{2}}{2mch}\right)}{1 + \frac{eJ_{\perp}\alpha^{2}}{2mch} tg^{2}\vartheta}$$

и

$$\overline{\left\langle \frac{e}{mc} p_{\parallel}^{2} \right\rangle} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \left\langle \frac{e}{mc} p_{\parallel}^{2} \right\rangle d\vartheta = 2h\left(1 - \sqrt{\frac{eJ_{\perp}\alpha^{2}}{2mch}}\right). \tag{4.24}$$

Таким образом (см. (4.I8), (4.23), (4.24)),

$$J_{\parallel} = \frac{2}{\alpha}\sqrt{\frac{mcMh}{e}} - \sqrt{2MJ_{\perp}} \ . \tag{4.25}$$

Из (4.25) находим

$$H = \frac{e}{4mcM}\,\alpha^{2}\left(J_{\parallel} + \sqrt{2MJ_{\perp}}\right)^{2}.$$

Система (4.I6) легко интегрируется

$$\alpha = const, \quad J_{\parallel} = const, \qquad (J_{\perp} = const),$$

$$\beta = \frac{e\alpha}{2mcM}\left(J_{\parallel} + \sqrt{2MJ_{\perp}}\right)^{2} t + \beta_{0},$$

$$\vartheta = \frac{e\alpha^{2}}{2mcM}\left(J_{\parallel} + \sqrt{2MJ_{\perp}}\right) t + \vartheta_{0} \ .$$

5. СЛУЧАЙ МАЛЫХ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Пусть вблизи поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial s} = 0, \tag{5.I}$$

от которой ведется отсчет s, гамильтониан равен

$$h = \frac{e}{2mc}\left(p_{\parallel}^{2} + g_{0} + g_{1}s^{2} + O(s^{2})\right)^{*)},$$
$$\left(g_{i} = g_{i}(\alpha, \beta, t^{*}; J_{\perp}) \qquad (i = 0,1)\right), \tag{5.2}$$

причем $g_1 > 0$, т.е. $|h|$ имеет минимум по s на (5.I).

Предположим, что частица движется в области малых s, и будем пренебрегать степенями s выше второй. Интегрируя (4.3), находим

$$s = \sqrt{\frac{2mch}{eg_{1}} - \frac{g_{0}}{g_{1}}}\ \sin\left(\frac{e\sqrt{g_{1}}}{mc}\frac{\vartheta}{\Omega}\right). \tag{5.3}$$

Отсюда

$$\Omega = \frac{e\sqrt{g_{1}}}{mc} \ . \tag{5.4}$$

---

*) Для простоты здесь рассматривается только нерелятивистский случай.

Согласно (5.3), (5.4), (5.2)

$$\left\langle \frac{e}{mc} p_{\parallel}^2 \right\rangle = \left(h - \frac{e}{2mc} g_0 \right)\left(1 + \cos 2\vartheta\right)$$

и

$$\left\langle \frac{e}{mc} p_{\parallel}^2 \right\rangle = h - \frac{e}{2mc} g_0 . \qquad (5.5)$$

Из (4.I8), (5.4), (5.5) получаем

$$J_{\parallel} = \frac{mc}{e\sqrt{g_1}} \left(h - \frac{e}{2mc} g_0 \right).$$

Отсюда

$$H = \frac{e}{mc} \left(J_{\parallel} \sqrt{g_1} + \frac{1}{2} g_0 \right). \qquad (5.6)$$

В случае стационарного электромагнитного поля $H = const$, и, поскольку $J_{\parallel} = const$, $J_{\perp} = const$, (5.6) дает уравнение средней траектории частицы

$$J_{\parallel} \sqrt{g_1} + \frac{1}{2} g_0 = const \qquad (s = 0)$$

(без учета продольных колебаний).

Сказанное в этом параграфе не вызывает сомнений, если ларморовский радиус мал по сравнению с длиной пробега частицы от одной точки отражения до другой. В случае, когда "пробки" близки друг к другу, величина $\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial p_{\parallel}}\right)^2$ мала, и продольное движение уже не является главным (см. уравнения (4.I)). Заметим, однако, что усреднялась не система (4.I), а система (4.5), где важно лишь условие $\Omega \sim 1$ ж), что выполняется (см. формулу (5.4)). Поэтому формулы, приведенные здесь, справедливы (в рамках дрейфовой теории) и в том случае, когда расстояние между "пробками" порядка ларморовского радиуса.

Автор благодарит А.Л. Крылова и А.Я. Повзнера за внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. А.И. Морозов, Л.С. Соловьев. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. Вопросы теории плазмы, вып. 2, М., Госатомиздат, I963.

2. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., Физматгиз, I958.

3. Т. Нортроп. Адиабатическая теория движения заряженных частиц, М., Атомиздат, I967.

THE GAMILTON'S FORM OF DRIFT EQUATIONS

V.N. Bogaevskii

It is proved the equations of motion of the charge particle with drift approximation [I] may be reduced to the Gamilton's form. The corresponding substitution of variables is explained. Once more series of the Gamilton's equations for the case of the particle motion in the potential magnetic field is considered, and a formula for current density is deduced.

The "secondary" averaging on N.N.Bogolyubov's method [2] (a small parameter is: ratio of Larmor's radius to the characteristic size of the magnetic field) gives the Gamilton's system [3] and "automatically" reduces to longitudinal invariant. A particular case of small longitudinal oscillations is considered.

ж) Другими словами: период продольных осцилляций должен быть велик по сравнению с периодом вращения вокруг силовой линии.

ДРЕЙФОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТОКИ

В.М. Богаевский

I. МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$LF(x) = (L_0 + \varepsilon L_1 + \varepsilon^2 L_2 + \ldots)F(x) = 0\ \text{, где}\ L_i = (f_i(x), \nabla)\ (i=1,2,\ldots) \quad (I.I)$$

(здесь $(f(x), \nabla) = \sum_{j=1}^{n} f^j(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_j}$ – оператор первого порядка , ε – малый параметр).

Будем предполагать, что в некоторой области D переменных x известно общее решение уравнения

$$L_0 F(x) = 0.$$

Перейдем в уравнении (I.I) к новым переменным

$$x^* = e^M x\ , \quad (I.2)$$

где $M = (m(x), \nabla)$. Равенство (I.2) следует понимать покоординатно. Для аналитической $\varphi(x)$

$$e^M \varphi(x) = \varphi(e^M x).$$

Отсюда следует, что оператор L в новых переменных имеет вид

$$e^{-M^*} L^* e^{M^*},$$

где L^* , M^* получены из L , M формальной заменой буквы x на x^* . Таким образом, можно без путаницы обозначать новые переменные той же буквой x , рассматривая уравнение

$$\mathcal{L}F(x) \equiv e^{-M} L e^M F(x) = 0 \quad (I.3)$$

вместо уравнения (I.I).

Пусть замена переменных близка к тождественной

$$M = \varepsilon M_1 + \varepsilon^2 M_2 + \ldots\ . \quad (I.4)$$

Тогда, пользуясь известной формулой

$$e^{-M} L e^M = L + [LM] + \frac{1}{2!}[[LM]M] + \ldots ,$$

где $[AB] = AB - BA$, или вычисляя непосредственно, получим (I.3) в виде

$$\mathcal{L}F(x) \equiv (\mathcal{L}_0 + \varepsilon\mathcal{L}_1 + \varepsilon^2\mathcal{L}_2 + \ldots)F(x) = 0, \quad (I.5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= L_0 \\
\mathcal{L}_1 &= [L_0 M_1] + L_1 \\
\mathcal{L}_2 &= [L_0 M_2] + L_2 + [L_1 M_1] + \tfrac{1}{2}[[L_0 M_1] M_1] \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} . \qquad (I.6)$$

Выбором M_i $(i=1,2,\dots)$ теперь можно попытаться упростить уравнение (I.5) по сравнению с (I.I). Потребуем

$$[\mathcal{L}_0 \mathcal{L}_i] = 0 \qquad (i=1,2,\dots). \qquad (I.7)$$

Алгебраический смысл условия (I.7) заключается в следующей аналогии. Пусть L, M – квадратные матрицы, а задача интегрирования (I.I) есть задача о приведении матрицы L к диагональному виду. Поскольку решение задачи при $\varepsilon=0$ известно, матрицу L_0 можно с самого начала считать диагональной. Далее, так как формулы (I.6) имеют рекуррентный характер (по M_i), достаточно рассмотреть вторую из них. Простая выкладка показывает, что максимальным упрощением задачи, которого можно добиться выбором M_i, есть (I.7). При этом $\mathcal{L}_i$ окажутся диагональными только в том случае, когда все собственные числа L_0 различны. Если же спектр L_0 кратный, задача сведется к нескольким матрицам меньшей размерности.

Формулы (I.7), (I.6), (I.5) определяют постановку задачи усреднения. Заметим, что при выполнении (I.7) уравнение (I.5) действительно окажется проще уравнения (I.I), так как это позволяет перейти к интегрированию на подпространстве. В частности, если в области D можно перейти к переменным θ, q_j $(j=1,2,\dots,n-1)$ так, что

$$L_0 q_j(x) = 0 \quad (j=1,2,\dots,n-1), \quad L_0 \theta(x) = 1,$$

переменные θ и q разделяются, поскольку L_0 примет вид $\partial/\partial\theta$, и операторы $\mathcal{L}_i$ $(i=1,2,\dots)$ в силу (I.7) не будут содержать переменной θ в коэффициентах при производных.

Сформулируем достаточное условие разрешимости (I.7).

О п р е д е л е н и е I. Оператор $N=(\nu(x),\nabla)$ удовлетворяет условию разложимости на "постоянную" ($\bar{N}$) и "переменную" ($\tilde{N}$) части относительно L_0, если в области D

$$N = \bar{N} + \tilde{N}, \quad [L_0 \bar{N}] = 0, \quad \tilde{N} = [L_0 P] \qquad (I.8)$$

(такое разложение может быть, вообще говоря, не единственным).

Назовем (см. (I.6))

$$\left.\begin{aligned}
N_1 &= L_1 \\
N_2 &= L_2 + [L_1 M_1] + \tfrac{1}{2}[[L_0 M_1] M_1] \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad (I.9)$$

и предположим, что операторы N_i $(i=1,2,\dots)$ удовлетворяют условию разложимости. Тогда задача (I.7) сведется к задаче разложения (I.8) для N_i. Действительно, из (I.9), (I.6), (I.7) следует, что можно положить

$$\mathcal{L}_i = \bar{N}_i, \quad M_i = -P_i \qquad (I.10)$$

(заметим, что $\bar{P}_i$ и, значит, $\bar{M}_i$ произвольны).

О п р е д е л е н и е 2. Оператор $H=(h(x),\nabla)$ называется собственным (по отношению к L_0), если

$$[L_0 H] = \lambda H, \qquad (I.11)$$

где $\lambda = const$ [1] - собственное значение. Пусть

$$N = \sum_k \omega_k(x) H_k , \tag{I.I2}$$

где H_k - собственные операторы, принадлежащие собственным значениям λ_k , а $\omega_k(x)$ - инварианты L_o

$$L_o \omega_k(x) = 0.$$

Тогда, согласно (I.II), (I.8),

$$\bar{N} = \sum_m \omega_m(x) H_m , \tag{I.I3}$$

где H_m принадлежат $\lambda_m = 0$, и

$$\tilde{N} = \sum_{k \neq m} \omega_k(x) H_k = [L_o , \sum_{k\neq m} \frac{\omega_k(x)}{\lambda_k} H_k], \qquad P = \sum_{k\neq m} \frac{\omega_k(x)}{\lambda_k} H_k \tag{I.I4}$$

(с точностью до $\bar{P}$).

Достаточным условием разрешимости (I.7) является

$$L_i = \sum_k \omega_{ik}(x) H_k \qquad (i = 1,2) \quad), \tag{I.I5}$$

где H_k - собственные операторы и $L_o \omega_{ik}(x) = 0$.

В самом деле, пусть Q и R - операторы вида (I.I2). Рассмотрим $[QR]$. Не ограничивая общности, можно считать $\omega_k(x) = 1$ (поскольку оператор $\omega_k(x) H_k$ - собственный в силу $L_o \omega_k(x) = 0$). Но оператор $[H_i H_j]$ - собственный (с собственным значением $\lambda_i + \lambda_j$), что легко проверить, пользуясь тождеством Якоби

$$[X[YZ]] + [Y[ZX]] + [Z[XY]] = 0. \tag{I.I6}$$

Значит, оператор $[QR]$ есть оператор вида (I.I2). Этот факт вместе с (I.9), (I.I0), (I.I3), (I.I4), (I.I5) доказывает справедливость высказанного утверждения.

Заметим, что если разложение (I.I5) достигнуто, все приближения находятся путем дифференцирования и арифметических действий.

Метод можно попытаться применить "повторно", т.е. к уравнению (I.5), где роль L_o будет играть $\mathcal{L}_o + \varepsilon \mathcal{L}_1$. Очевидно, что это эквивалентно некоторому выбору M_i , что наглядно показывает второе приближение: после несложных упрощений получим согласно (I.9), (I.I0), (I.I6)

$$\mathcal{L}_1 = \bar{L}_1 ; \quad \mathcal{L}_2 = [\mathcal{L}_1 \bar{M}_1] + \frac{1}{2}[\tilde{L}_1 \tilde{M}_1] + L_2 , \ldots ,$$

где

$$\tilde{M}_1 = -\tilde{P}_1 , \quad \tilde{L}_1 = [L_o P_1] , \ldots . \tag{I.I7}$$

Задача усреднения теперь будет формулироваться, как $[\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_j] = 0 \quad (j = 2,3,\ldots)$. При этом M_i определяется уже с точностью до постоянной части относительно $\mathcal{L}_1$.

2. ДРЕЙФОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле имеют вид

$$\frac{dmv}{dt} = -eE + \frac{e}{c}[vB] , \quad \frac{dr}{dt} = v , \tag{2.I}$$

---

[1] Более общий случай $L_o \lambda(x) = 0$ здесь не рассматривается.

где E - электрическое поле[2)], B - магнитное, r - вектор положения частицы, v - скорость, m - масса, e - заряд, c - скорость света.

Поля B и E подчинены уравнениям Максвелла

$$div\, B=0\ , \quad rot\, E=-\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}\ . \tag{2.2}$$

Предположения дрейфовой теории, как известно [I], сводятся к следующим формальным требованиям

$$|r|,|v|,|E|\sim 1\ ,\quad |B|\sim\frac{1}{\varepsilon}\ ,\quad 0\leqslant t\leqslant T\sim\frac{1}{\varepsilon}\ , \tag{2.3}$$

где ε - малый параметр (отношение ларморовского радиуса к характерному размеру неоднородности B).

При этом из (2.3), (2.2) следует медленность изменения магнитного поля во времени

$$B=B(r,\varepsilon t). \tag{2.4}$$

Требуется найти уравнения, описывающие усредненное движение частицы (за выбросом быстрого вращения вокруг силовой линии магнитного поля) с точностью $\sim\varepsilon$ в области (2.3) (дрейфовые уравнения).

Применяя метод усреднения, будем учитывать только (2.3). Условия (2.2), (2.4) будут использованы лишь для упрощения ответа. Для удобства разделения порядков малости подставим в уравнения (2.I) $\frac{1}{\varepsilon}B$ вместо B (так, что $|B|$ уже ~ 1) и назовем

$$|B|=B\ ,\ \tau={}^{B}\!/_{B}\ ,\quad \omega=-\frac{eB}{mc}\ . \tag{2.5}$$

Получим уравнения движения в виде

$$\frac{dv}{dt}=\frac{e}{m}E+\frac{\omega}{\varepsilon}[\tau v]\ ,\ \frac{dr}{dt}=v,^{3)}$$

что эквивалентно одному уравнению для функции распределения

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+\left(\frac{e}{m}E+\frac{\omega}{\varepsilon}[\tau v],\nabla_v\right)+(v\nabla)\right\}F(r,v,t)=0. \tag{2.6}$$

Сокращая на ω/ε , будем иметь уравнение вида (I.I)

$$LF\ (r,v,t)=(L_0+\varepsilon L_1)F(r,v,t)=0, \tag{2.7}$$

где

$$L_0=\left([\tau v],\nabla_v\right)\ ,\quad L_1=-\frac{c}{B}(E\nabla_v)+\frac{1}{\omega}(v\nabla)+\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial t}\ . \tag{2.8}$$

Метод усреднения нужно применить до второго приближения включительно, поскольку (2.6) было умножено на $\varepsilon/\omega\sim\varepsilon\ \ (\omega\neq 0)$; в замене переменных ограничимся членами с ε (см. (I.I7)). Заметим, что L_0 имеет инварианты

$$t,r,\frac{1}{2}v^2,\quad (\tau\, v)^{4)} \tag{2.9}$$

---

2) Сюда можно включить и произвольное поле неэлектромагнитного происхождения. Если, в частности, оно потенциально, все формулы остаются без изменений.

3) В случае $m=const$. Рассматривая релятивистский случай, удобно положить $p={}^{c}\!/_{e}\,mV$ так, что $\frac{dp}{dt}=cE+\frac{\omega}{\varepsilon}[\tau p]\ ,\ \frac{dr}{dt}=\frac{\omega}{B}p\ .$
Затем нужно только помнить о зависимости ω от p^2, что приводит к очень незначительному усложнению выкладок.

4) Легко видеть, что эти величины (кроме t) после усреднения можно принять за дрейфовые переменные.

и, значит, τ , E , B , ω – также инварианты L_0 . Далее,

$$\tau^2 = 1, \quad L_0 v = [\tau v], \quad L_0^2 v = [\tau L_0 v] = (\tau v)\tau - v, \tag{2.10}$$

откуда следует основное свойство L_0

$$L_0^3 v = - L_0 v. \tag{2.11}$$

Найдем разложение (I.I5) для L_1 . Вводя обозначение

$$[L_0 N] = N^{(1)},$$

получим согласно (2.8), (2.I0), (2.II)

$$4L_1^{(1)} + 5L_1^{(3)} + L_1^{(5)} = 0. \tag{2.12}$$

Действительно,

$$L_1^{(1)} = \left(\frac{c}{B}[\tau E] - \frac{1}{\omega}[(v\nabla)\tau, v] - \frac{1}{\omega}\left[\frac{\partial\tau}{\partial t} v\right], \nabla_v\right) + \frac{1}{\omega}(L_0 v, \nabla), \tag{2.13}$$

$$L_1^{(2)} = \left(-\frac{c}{B}[\tau[\tau E]] - \frac{2}{\omega}[(L_0 v, \nabla)\tau, v] - \frac{1}{\omega}[[(v\nabla)\tau, \tau]v] - \frac{1}{\omega}\left[\left[\frac{\partial\tau}{\partial t}\tau\right]v\right], \nabla_v\right) + \frac{1}{\omega}(L_0^2 v, \nabla), \tag{2.14}$$

$$L_1^{(3)} = -L_1^{(1)} - \frac{3}{\omega}\Big([(L_0^2 v, \nabla)\tau, v] + [[(L_0 v, \nabla)\tau, \tau]v], \nabla_v\Big), \tag{2.15}$$

$$L_1^{(4)} = -L_1^{(2)} - \frac{6}{\omega}\Big(-[(L_0 v, \nabla)\tau, v] + [[(L_0^2 v, \nabla)\tau, \tau]v], \nabla_v\Big), \tag{2.16}$$

$$L_1^{(5)} = -L_1^{(3)} + \frac{12}{\omega}\Big([(L_0^2 v, \nabla)\tau, v] + [[(L_0 v, \nabla)\tau, \tau]v], \nabla_v\Big). \tag{2.17}$$

Из (2.I5), (2.I7) следует (2.I2).

Пользуясь (2.I2), будем искать собственные операторы в виде

$$H = x_0 L_1 + x_1 L_1^{(1)} + x_2 L_1^{(2)} + x_3 L_1^{(3)} + x_4 L_1^{(4)},$$

где $x_0, \dots, x_4$ – постоянные. Из условия $H^{(1)} = \lambda H$ и (2.I2) ($L_1, \dots, L_1^{(4)}$ линейно независимы) получим характеристическое уравнение $\lambda(\lambda^2+1)(\lambda^2+4) = 0$ и собственные операторы H_λ

$$H_0 = 4L_1 + 5L_1^{(2)} + L_1^{(4)}, \quad H_{\pm i} = 4L_1^{(2)} + L_1^{(4)} \pm i(4L_1^{(1)} + L_1^{(3)}). \tag{2.18}$$

Отсюда получаем искомое разложение

$$L_1 = \frac{1}{4}H_0 - \frac{1}{6}(H_i + H_{-i}) + \frac{1}{24}(H_{2i} + H_{-2i}). \tag{2.19}$$

Согласно (2.I9), (I.I7) ($L_2 = 0$) находим

$$\mathcal{L}_1 = L_1 = \frac{1}{4} H_0,$$

$$\widetilde{L}_1 = -\frac{1}{6}(H_i + H_{-i}) + \frac{1}{24}(H_{2i} + H_{-2i}); \quad \widetilde{M}_1 = -\frac{i}{6}(H_i - H_{-i}) + \frac{i}{48}(H_{2i} - H_{-2i});$$

$$\mathcal{L}_2=[\mathcal{L}_1\bar{M}_1]+\frac{1}{2}[\tilde{L}_1\tilde{M}_1]=[\mathcal{L}_1\bar{M}_1]-\frac{i}{36}[H_i H_{-i}]-\frac{i}{1152}[H_{2i}H_{-2i}],$$

или, подставляя (2.18),

$$\mathcal{L}_1=L_1+\frac{5}{4}L_1^{(2)}+\frac{1}{4}L_1^{(4)}, \tag{2.20}$$

$$\mathcal{L}_2=\frac{1}{18}[4L_1^{(1)}+L_1^{(3)},\ 4L_1^{(2)}+L_1^{(4)}]+\frac{1}{288}[L_1^{(1)}+L_1^{(3)},L_1^{(2)}+L_1^{(4)}]+[\mathcal{L}_1\bar{M}_1], \tag{2.21}$$

$$M_1=\frac{5}{4}L_1^{(1)}+\frac{1}{4}L_1^{(3)}+\bar{M}_1 \tag{2.22}$$

(2.20) и (2.22) также легко увидеть непосредственно из (2.12)), где $\bar{M}_1$ произвольно (в частности, можно положить $\bar{M}_1=0$).

Подставляя (2.8), (2.13)-(2.16) в (2.20)-(2.22) и пользуясь (2.10), найдем

$$\mathcal{L}_1=\Big(-\frac{c}{B}(\tau E)\tau-\frac{1}{2\omega}[(L_0v,\nabla)\tau,v]-\frac{1}{2\omega}[[(L_0^2v,\nabla)\tau,\tau]v]-\frac{(\tau v)}{\omega}[[(\tau,v)\tau,\tau]v]-\frac{1}{\omega}[[\frac{\partial\tau}{\partial t}\tau]v],\nabla_v\Big)+$$
$$+\frac{(\tau v)}{\omega}(\tau\nabla)+\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.23}$$

$$\mathcal{L}_2=\frac{1}{2}[QR]+\frac{1}{16}[XY]+[\mathcal{L}_1\bar{M}_1], \tag{2.24}$$

где

$$Q=\frac{4}{3}L_1^{(1)}+\frac{1}{3}L_1^{(3)}=\Big(\frac{c}{B}[\tau E]-\frac{1}{\omega}[[(L_0v,\nabla)\tau,\tau]v]-\frac{1}{\omega}[\frac{\partial\tau}{\partial t}v],\nabla_v\Big)+\frac{1}{\omega}(L_0v,\nabla), \tag{2.25}$$

$$R=\frac{4}{3}L_1^{(2)}+\frac{1}{3}L_1^{(4)}=\Big(-\frac{c}{B}[\tau[\tau E]]-\frac{1}{\omega}[[(L_0^2v,\nabla)\tau,\tau]v]-\frac{(\tau v)}{\omega}[[(\tau\nabla)\tau,\tau]v]-\frac{1}{\omega}[[\frac{\partial\tau}{\partial t}\tau]v],\nabla_v\Big)+\frac{1}{\omega}(L_0^2v,\nabla), \tag{2.26}$$

$$X=\frac{1}{\omega}\Big([(L_0^2v,\nabla)\tau,v]+[[(L_0v,\nabla)\tau,\tau]v],\nabla_v\Big);\ Y=\frac{1}{\omega}\Big(-[(L_0v,\nabla)\tau,v]+[[(L_0^2v,\nabla)\tau,\tau]v],\nabla_v\Big), \tag{2.27}$$

$$M_1=\Big(\frac{c}{B}[\tau E]-\frac{3}{4\omega}[(L_0^2v,\nabla)\tau,v]-\frac{3}{4\omega}[[(L_0v,\nabla)\tau,\tau]v]-\frac{1}{\omega}[(v\nabla)\tau,v]-\frac{1}{\omega}[\frac{\partial\tau}{\partial t}v],\nabla_v\Big)+\frac{1}{\omega}(L_0v,\nabla)+\bar{M}_1. \tag{2.28}$$

Усредненное уравнение

$$(\mathcal{L}_0+\varepsilon\mathcal{L}_1+\varepsilon^2\mathcal{L}_2)F(r,v,t)=0 \tag{2.29}$$

в силу $[\mathcal{L}_0\mathcal{L}_i]=0$ $(i=1,2)$ имеет решение, удовлетворяющее условию $\mathcal{L}_0F=0$. Уравнение

$$(\mathcal{L}_1+\varepsilon\mathcal{L}_2)f\,(t,r,\tfrac{1}{2}v^2,(\tau v))=0 \tag{2.30}$$

(см. сноску к (2.9)) будет описывать дрейфовое движение.

Остается вычислить $\mathcal{L}_1 g$, $\mathcal{L}_2 g$, где g - инварианты (2.9), выбрав каким-либо образом $\bar{M}_1$.

Назовем

$$v_\parallel=(\tau v)\ ,\quad v_\perp^2=v^2-v_\parallel^2 \tag{2.31}$$

и положим

$$\bar{M}_1 t=\bar{M}_1(\tfrac{1}{2}v^2)=0,\ \bar{M}_1 r=0,\ \bar{M}_1 v_\parallel=-\frac{v_\perp^2}{2\omega}(\tau\,\mathrm{rot}\,\tau). \tag{2.32}$$

Этот выбор $\overline{M}_1$ соответствует поправкам Брагинского [I] и основан на тех же соображениях.

Ниже приведены результаты вычислений с учетом (2.4) и (2.2).
Из (2.4) следует: $\partial\tau/\partial t \sim \varepsilon$. Это значит, что $\partial\tau/\partial t$ не войдет в окончательный ответ, поскольку $\mathcal{L}_1 g$, как нетрудно увидеть из (2.23), (2.9), не содержит $\partial\tau/\partial t$, а в формулах (2.25), (2.26) членами с $\partial\tau/\partial t$ можно пренебречь. Из $div B = 0$ следует, что $div\,\tau = -1/B\,(\tau, \nabla B)$, а из второго уравнения (2.2) получим $(\tau\, rot E) = -\frac{1}{c}\cdot \partial B/\partial t^*$, где $t^* = \varepsilon t$ (вспомним, что B было заменено на $1/\varepsilon\, B$).

Пользуясь этими замечаниями, (2.23)-(2.27), (2.3I), (2.32), (2.I0), (2.II), (2.5) и тождествами

$$((a\nabla)c, b) - ((b\nabla)c, a) = ([ab]\,rot\,c),$$
$$[(a\nabla)c, b] - [(b\nabla)c, a] = [ab]\,div\,c - [[ab]\,rot\,c] - ([ab]\nabla)c,$$
$$(a\nabla)a = [rot\,a, a] + \frac{1}{2}\nabla a^2,$$
$$rot[ab] = a\,div\,b - b\,div\,a + (b\nabla)a - (a\nabla)b,$$

получим следующие формулы:

$$\mathcal{L}_1 t = \frac{1}{\omega}, \qquad \mathcal{L}_2 t = 0, \tag{2.33}$$

$$\mathcal{L}_1 r = \frac{V_\parallel}{\omega}\tau, \qquad \mathcal{L}_2 r = \frac{c}{\omega B}[E\tau] - \frac{V_\parallel^2}{\omega^2}[\tau,(\tau\nabla)\tau] - \frac{V_\perp^2}{2\omega^2 B}[\tau, \nabla B], \tag{2.34}$$

$$\mathcal{L}_1\left(\frac{1}{2}V^2\right) = -\frac{cV_\parallel}{B}(\tau E), \qquad \mathcal{L}_2\left(\frac{1}{2}V^2\right) = \frac{cV_\parallel^2}{\omega B}\left([\tau,(\tau\nabla)\tau]E\right) + \frac{cV_\perp^2}{2\omega B^2}\left([\tau,\nabla B]E\right) + \frac{V_\perp^2}{2\omega B}\frac{\partial B}{\partial t^*}, \tag{2.35}$$

$$\mathcal{L}_1 V_\parallel = -\frac{c}{B}(\tau E) - \frac{V_\perp^2}{2\omega B}(\tau, \nabla B), \qquad \mathcal{L}_2 V_\parallel = \frac{cV_\parallel}{\omega B}\left([\tau,(\tau\nabla)\tau]E\right) + \frac{V_\parallel V_\perp^2}{2\omega^2 B}\left([\tau,(\tau\nabla)\tau], \nabla B\right), \tag{2.36}$$

где $t^* = \varepsilon t, \quad \omega = -\frac{eB}{mc}$.

Назовем (см. (2.34), (2.33), (2.30))

$$V_0 = \omega\mathcal{L}_1 r + \varepsilon\omega\mathcal{L}_2 r = V_\parallel \tau + \varepsilon\left(\frac{c}{B}[E\tau] - \frac{V_\parallel^2}{\omega}[\tau,(\tau\nabla)\tau] - \frac{V_\perp^2}{2\omega B}[\tau,\nabla B]\right) \tag{2.37}$$

(это - дрейфовая скорость или скорость "ведущего центра"). Введем кинетическую энергию $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mV^2$ и поперечный адиабатический инвариант

$$\mathcal{J}_\perp = \frac{V_\perp^2}{B}. \tag{2.38}$$

Из (2.35), (2.34), (2.5) следует

$$\mathcal{L}_1\mathcal{E} = e(\mathcal{L}_1 r, E), \qquad \mathcal{L}_2\mathcal{E} = e(\mathcal{L}_2 r, E) + \frac{mV_\perp^2}{2\omega B}\frac{\partial B}{\partial t^*} \tag{2.39}$$

и из (2.33)-(2.36), (2.4), (2.38)

$$(\mathcal{L}_1 + \varepsilon\mathcal{L}_2)\mathcal{J}_\perp = 0. \tag{2.40}$$

Сократим (2.30) на $\frac{1}{\omega}$ и положим искусственно введенный параметр ε равным единице. Согласно (2.33), (2.34), (2.37), (2.39), (2.40), (2.5) получим окончательно

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + (V_0\nabla) + \left[e(V_0 E) + \frac{mV_\perp^2}{2B}\frac{\partial B}{\partial t}\right]\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}}\right\} F(t, r, \mathcal{E}, \mathcal{J}_\perp) = 0, \tag{2.4I}$$

где $\quad V_0 = V_\parallel \dfrac{B}{B} + \dfrac{c}{B^2}[EB] + \dfrac{mcV_\parallel^2}{eB^4}[B,(B\nabla)B] + \dfrac{mcV_\perp^2}{2eB^3}[B\nabla B],$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m(V_\parallel^2 + V_\perp^2), \quad J_\perp = \frac{V_\perp^2}{B}\text{ [5]}.$$

3. ТОК ЧАСТИЦ В ДРЕЙФОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим движение ансамбля большого числа невзаимодействующих одноименных частиц. Функция распределения $F(r,v,t)$ удовлетворяет уравнению Лиувилля (Власова)

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (a, \nabla_v F) + (v, \nabla F) = 0, \tag{3.I}$$

где $a = dv/dt$ - ускорение, выраженное через r, v, t из (2.I). Физический смысл уравнения (3.I) заключается в том, что F - плотность частиц в пространстве r, v (если в начальный момент это так)[6] (3.I) называют еще уравнением Больцмана (без интеграла столкновений).

Плотность тока частиц равна

$$j(r,t) = e\int v F(r,v,t)\,dv. \tag{3.2}$$

Перейдем к постановке задачи вычисления тока в дрейфовом приближении. Уравнением Лиувилля является (2.6) или, что все равно, (2.7). Пусть

$$F(r,v,0) = h(r, v_\parallel, v_\perp) \tag{3.3}$$

или, другими словами, $L_0 F(r,v,0) = 0$.

Начальное условие (3.3) означает изотропность распределения по скоростям в плоскости, проведенной перпендикулярно силовой линии магнитного поля через точку наблюдения.

После замены переменных (близкой к тождественной), согласно которой уравнение (2.7) переходит в (2.29), условие (3.3) примет вид (см. (I.2), (I.4))

$$F(r,v,0) = h - \varepsilon M_1 h \qquad (M_1 t = 0). \tag{3.4}$$

Заменить уравнение (2.29) дрейфовым уравнением

$$(\mathcal{L}_1 + \varepsilon\mathcal{L}_2)F = 0 \tag{3.5}$$

препятствует возмущение $-\varepsilon M_1 h$, которое нельзя просто отбросить, основываясь на его малости, поскольку речь будет идти об учете слабых токов, перпендикулярных силовой линии магнитного поля.

Исследуем влияние этого возмущения на решение. Сначала рассмотрим $\tilde{M}_1 h$. Согласно $L_0 h = 0$, (2.28), (2.9) $\tilde{M}_1 h$ есть многочлен от v (второго порядка) с коэффициентами, являющимися инвариантами L_0. Если перейти к переменным Θ, t, r, $v_\parallel$, $v_\perp$ так, что $L_0\Theta(r,v,t) = 1$, то

$$v = v_\parallel \tau + v_\perp(\nu\cos\Theta + \beta\sin\Theta),$$

где $L_0\nu = L_0\beta = 0$ ($\nu^2 = \beta^2 = 1$; τ, ν, β попарно ортогональны).

---

5) В релятивистском случае будем иметь $\mathcal{E} = mc^2 = m_0c^2\left(1 - \frac{v_\parallel^2 + v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $J_\perp = \frac{m^2 v_\perp^2}{m_0^2 B}$ (m_0 - масса покоя) и то же уравнение (2.4I).

6) В релятивистском случае, положив $F(r,v,0) = \left(\frac{m_0}{m}\right)^5 n(r,v,0)$, где $n(r,v,t)$ - плотность, будем иметь $n(r,v,t) = (m/m_0)^5 F(r,v,t)$, поскольку эта функция удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}_v na + \operatorname{div} nv = 0.$$

В силу сказанного $\tilde{M}_1 h$ будет иметь вид

$$\tilde{M}_1 h = b_1 \cos\theta + b_2 \sin\theta + b_3 \cos 2\theta + b_4 \sin 2\theta,$$

где $L_0 b_i = 0$ (свободный член отсутствует ввиду $\tilde{M}_1 h = [L_0 P] h = L_0 (Ph) = \frac{\partial}{\partial\theta}(Ph)$).

Уравнение (2.29) линейно; значит, достаточно изучить решение с начальным условием $F|_{t=0} = G_0 \exp in\theta$, где $L_0 G_0 = 0$, $i^2 = 1$, $n \neq 0$. Это решение есть

$$G(r, v_\parallel, v_\perp, t) \exp in[\theta - \vartheta(r, v_\perp, v_\parallel, \theta, t)], \tag{3.6}$$

где G – решение уравнения (3.5) с начальным условием $F|_{t=0} = G_0$, а ϑ – решение уравнения

$$(\mathcal{L}_0 + \varepsilon \mathcal{L}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{L}_2)\vartheta = 1 + \varepsilon(\mathcal{L}_1 \theta) + \varepsilon^2 (\mathcal{L}_2 \theta)$$

с начальным условием $\vartheta|_{t=0} = 0$. Заметим теперь, что вдоль интегральной кривой

$$(\mathcal{L}_0 + \varepsilon \mathcal{L}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{L}_2)\vartheta = \frac{\varepsilon}{\omega}\frac{d\vartheta}{dt}$$

и, стало быть,

$$\vartheta \approx \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \omega\, dt.$$

Таким образом, решение (3.6) быстро осциллирует (с частотой $\sim \frac{1}{\varepsilon}$). Его среднее значение по t на интервале ~ 1 будет $\sim \varepsilon$ 7); и, следовательно, среднее значение решения, отвечающего возмущению $\varepsilon \tilde{M}_1 h$, будет $\sim \varepsilon^2$. Возврат к старым переменным не изменит этого обстоятельства. Значит, отбрасывая $-\varepsilon \tilde{M}_1 h$, т.е. заменяя (3.4) на

$$F(r, v, 0) = h - \varepsilon \bar{M}_1 h, \tag{3.7}$$

мы пренебрегаем малыми и быстроосциллирующими токами (со средним значением $\sim \varepsilon^2$ на интервале времени $\sim$I).

Рассмотрим теперь влияние возмущения $-\varepsilon \bar{M}_1 h$ и выбора $\bar{M}_1$.

Предварительно рассмотрим интеграл

$$\mathcal{J} = \int \kappa(r, v, t)\, dv, \tag{3.8}$$

где $\kappa(r, v, t) = \kappa_1(r, v, t) + L_0 \kappa_2(r, v, t)$, $L_0 \kappa_1(r, v, t) = 0$.

Перейдем к интегрированию по $v_\parallel$, $v_\perp$, θ. Якобиан

$$D = (\nabla_v v_\parallel \cdot \nabla_v v_\perp \cdot \nabla_v \theta)^{-1} = v_\perp([\tau v] \cdot \nabla_v \theta)^{-1} = v_\perp (L_0 \theta)^{-1} = v_\perp$$

(т.е. $L_0 D = 0$). Поскольку $L_0 = \frac{\partial}{\partial\theta}$,

$$\mathcal{J} = 2\pi \int v_\perp \kappa_1\, dv_\parallel\, dv_\perp.$$

Пусть теперь $F(r, v, t) + \varepsilon S(r, v, t)$ есть решение уравнения (3.5) с начальным условием (3.7) (при этом, конечно, $F|_{t=0} = h$, $S|_{t=0} = -\bar{M}_1 h$, $L_0 F = L_0 S = 0$). Учитывая, что это решение записано в новых переменных, в формулу (3.2) нужно вместо F подставить

$$F + \varepsilon(M_1 F + S),$$

т.е. решение в старых, "истинных" переменных. Тогда, в силу $L_0 F = L_0 S = 0$, $v = v_\parallel \tau - L_0^2 v$ и замечания о вычислении интеграла вида (3.8), получим

---

7) Поскольку оно колеблется вокруг нуля.

$$j(r,t) = 2\pi e \int v_\perp \left\{ v_\parallel \tau (F + \varepsilon \bar{M}_1 F + \varepsilon S) - \varepsilon L_0^2 v \tilde{M}_1 F \right\} dv_\parallel dv_\perp . \tag{3.9}$$

Отсюда видно, что $\bar{M}_1 F$ и S вносят вклад (порядка ε) только в составляющую тока, параллельную силовой линии. Так как основной ток вдоль силовой линии определяется F , а он порядка единицы, то вкладом $\bar{M}_1 F$ и S естественно пренебречь. Формула (3.9) упростится

$$j(r,t) = 2\pi e \int v_\perp \{ v_\parallel \tau F - \varepsilon L_0^2 v \tilde{M}_1 F \} dv_\parallel dv_\perp . \tag{3.10}$$

Итак, дрейфовая постановка задачи вычисления тока состоит в следующем. Если в начальный момент функция распределения удовлетворяет условию (3.3), то, пренебрегая малыми и быстроколеблющимися токами, перпендикулярными силовой линии магнитного поля, и малыми токами вдоль нее, плотность тока следует вычислять по формуле (3.10), где F есть решение дрейфового уравнения (3.5) при начальном условии (3.3) (т.е. (3.5) формально переносится на "истинные" переменные).

Заметим еще, что возможна более общая постановка задачи вычисления усредненного тока, когда быстроколеблющимися токами можно пренебрегать, даже если они достигают значений ~ 1. В таком случае, как видно из предыдущих рассуждений, начальную функцию распределения нужно усреднить по Θ , т.е., представив в виде $h(r, v_\parallel, v_\perp) + L_0 q(r, v)$, отбросить слагаемое $L_0 q(r,v)$, которое дает быстроосциллирующий вклад в ток.

Перейдем к вычислениям.

$\overline{L_0^2 v \tilde{M}_1}$ нетрудно найти, пользуясь (2.22) и (2.11), (2.12). А именно, положим

$$\overline{L_0^2 v \tilde{M}_1} = x_1 L_0^2 v L_1^{(1)} + x_2 L_0^2 v L_1^{(3)} + x_3 L_0 v L_1^{(2)} + x_4 L_0 v L_1^{(4)},$$

$$\widetilde{L_0^2 v \tilde{M}_1} = [L_0, y_1 L_0 v L_1^{(1)} + y_2 L_0 v L_1^{(3)} + y_3 L_0^2 v L_1^{(2)} + y_4 L_0^2 v L_1^{(4)}],$$

где x_i , y_i - постоянные. Из условий

$$[L_0, \overline{L_0^2 v \tilde{M}_1}] = 0, \quad L_0^2 v \tilde{M}_1 = \frac{5}{4} L_0^2 v L_1^{(1)} + \frac{1}{4} L_0^2 v L_1^{(3)} = \overline{L_0^2 v \tilde{M}_1} + \widetilde{L_0^2 v \tilde{M}_1}$$

найдем

$$\overline{L_0^2 v \tilde{M}_1} = \frac{1}{6} \left\{ L_0^2 v (4 L_1^{(1)} + L_1^{(3)}) - L_0 v (4 L_1^{(2)} + L_1^{(4)}) \right\},$$

или, согласно (2.25), (2.26)

$$\overline{L_0^2 v \tilde{M}_1} = \frac{1}{2} (L_0^2 v Q - L_0 v R).$$

Отсюда получим, учитывая, что $\partial \tau / \partial t \sim \varepsilon$, $F = F(r, v_\perp, v_\parallel, t)$, следующее выражение

$$\overline{L_0^2 v \tilde{M}_1} F = \frac{v_\perp^2}{2\omega} [\tau, \nabla F] + \frac{v_\parallel v_\perp^2}{2\omega} [\tau, (\tau \nabla) \tau] \frac{\partial F}{\partial v_\parallel} + \left\{ \frac{c v_\perp}{2B} [E \tau] - \frac{v_\parallel^2 v_\perp}{2\omega} [\tau, (\tau \nabla) \tau] \right\} \frac{\partial F}{\partial v_\perp} + O(\varepsilon).$$

Здесь ∇F вычисляется при независимых r , $v_\perp$, $v_\parallel$).

Подставим $\overline{L_0^2 v \tilde{M}_1} F$ в формулу (3.10) и заменим слагаемые вида $a \, \partial F / \partial v_\parallel + b \, \partial F / \partial v_\perp$ на $-(\partial a / \partial v_\parallel + \partial b / \partial v_\perp) F$, интегрируя по частям

$$j(r,t) = 2\pi e \int v_\perp \left\{ v_\parallel F \tau - \varepsilon \frac{v_\perp^2}{2\omega} [\tau, \nabla F] + \varepsilon \left(\frac{v_\perp^2}{2\omega} - \frac{v_\parallel^2}{\omega} \right) [\tau, (\tau \nabla) \tau] F + \varepsilon \frac{c}{B} [E \tau] F \right\} dv_\parallel dv_\perp . \tag{3.11}$$

Далее, пользуясь тем, что

$$[\tau, (\tau \nabla) \tau] = \operatorname{rot} \tau - (\tau \operatorname{rot} \tau) \tau; \qquad \operatorname{rot} \frac{F}{\omega} \tau = \frac{F}{\omega} \operatorname{rot} \tau - \frac{1}{\omega} [\tau, \nabla F] + \frac{F}{\omega B} [\tau, \nabla B],$$

запишем (3.11) в виде (см. (2.37)

$$j(r,t) = 2\pi e \int v_\perp \left\{ F v_0 - \varepsilon \frac{v_\perp^2}{2\omega} (\tau \operatorname{rot} \tau) \tau F + \varepsilon \frac{v_\perp^2}{2} \operatorname{rot} \frac{F}{\omega} \tau \right\} dv_\parallel dv_\perp .$$

Член с $(\tau \operatorname{rot} \tau)\tau$ дает малый параллельный ток, и им можно пренебречь. Полагая $\varepsilon = 1$ и пользуясь (2.5), получим искомую формулу для плотности тока

$$j(r,t) = 2\pi e \int v_\perp \left\{ F v_0 + \operatorname{rot} \left(-\frac{m c v_\perp^2}{2 e B^2} F B \right) \right\} dv_\parallel dv_\perp , \quad ^{8)} \qquad (3.12)$$

где F как функция r, $v_\perp$, $v_\parallel$, t есть плотность (функция распределения), определенная дрейфовым уравнением (2.41).

Из (3.12) следует, что усредненный ток состоит из тока "ведущих центров" и тока "намагничения" [3].

Автор приносит глубокую благодарность А.Л. Крылову и А.Я. Повзнеру за внимание к работе и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.И. Морозов, Л.С. Соловьев. Движение заряженных частиц в электромагнитных полях. Сб. "Вопросы теории плазмы", вып 2, М., Госатомиздат, 1963.
2. Д.В. Сивухин. Дрейфовая теория движения заряженной частицы в электромагнитных полях. Сб. "Вопросы теории плазмы", вып. I, М., Госатомиздат, 1963.
3. Т. Нортроп. Адиабатическая теория движения заряженных частиц, М., Атомиздат, 1967.
4. Х. Альфвен. Космическая электродинамика, М., ИЛ, 1952.
5. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., Физматгиз, 1958.
6. A.Povzner. Linear methods in problems of nonlinear differential equations with a small parameter. Int.J.Non-Linear Mechanics, v.9, 1974, 279-323.

DRIFT EQUATIONS AND CURRENTS

V.N.Bogaevskii

A new method of receipt of drift approximation of any order for equation on distribution function of system of noninteracting charge particles is improved in the paper. An expression for currents through distribution function of "leading centres" is received. The equations are applied for description of plasma motion.

---

8) Эта формула справедлива и в релятивистском случае, где F - плотность.

ОБ УСЛОВИЯХ ПЛЮРИГАРМОНИЧНОСТИ ИНДИКАТОРА ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

П.З. Агранович, Л.И. Ронкин

В работе рассматриваются функции $f(z, w)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $w \in \mathbb{C}$, голоморфные в области

$$A_{r,\alpha} = \{(z, w) : z \in E_r, w \in T_\alpha\},$$

где

$$E_r = \{z : |z| < r\},$$

$$T_\alpha = \{w : |\arg w| < \alpha\}.$$

Для таких функций в работе вводится понятие индикатора и находятся условия его плюригармоничности.

Для функций одной переменной известен следующий результат:

ТЕОРЕМА (Б.Я. Левин [I]). Пусть $f(w)$ - голоморфная в T_α функция вполне регулярного роста относительно уточненного порядка $\rho(t)$ $(\rho(t) \to \rho > 0$ при $t \to \infty)$. Пусть далее $n_f(t, \alpha')$ - число корней (с учетом кратности) функции $f(w)$ в области $T_{\alpha'} \cap \{w : 1 < |w| < t\}$. Тогда для того, чтобы множество корней функции $f(w)$ имело нулевую плотность в $T_{\alpha'}$ $\forall \alpha' < \alpha$, то есть

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n_f(t, \alpha')}{t^{\rho(t)}} = 0 \qquad \forall \alpha' < \alpha,$$

необходимо и достаточно, чтобы индикатор

$$h_f(\theta) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|f(te^{i\theta})|}{t^{\rho(t)}}$$

был ρ - тригонометрическим.

Заметим, что ρ - тригонометричность функции $h(\theta)$ эквивалентна тому, что функция $r^\rho h(\theta)$ является гармонической функцией от $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Л. Грумен [2] был получен некоторый аналог этого утверждения для случая многих комплексных переменных. В [2] рассматривались целые функции $f(z)$ порядка ρ (обычного, а не уточненного). Такая функция называется Л.Грумен функцией вполне регулярного роста в конусе

$$\mathcal{K}_D = \left\{z : \frac{z}{|z|} \in D\right\},$$

где D - открытое множество на сфере $S = \{z : |z| = 1\}$, если функция $f(\lambda z)$, как функция переменного $\lambda \in \mathbb{C}$, является функцией вполне регулярного роста в угле $\{\lambda : \lambda z \in \mathcal{K}_D\}$ для почти всех $z \in \mathcal{K}_D$. Массивность нулевого множества измеряется в [2] с помощью функции $\sigma_D(t)$, равной $(2n-2)$ -мерному объему множества

$\{z: f(z)=0, z\in\mathcal{K}_D, |z|<t\}$, вычисленному с учетом кратности корней функции $f(z)$.

ТЕОРЕМА (Л.Грумен [2]). Пусть $f(z)$ - целая функция порядка ρ вполне регулярного роста в $\mathcal{K}_D$. Тогда

I) если $f(0)\neq 0$ и для любого открытого на S множества $D'\Subset D$ выполняется условие

а) $$\sigma_{D'}(t)=O(t^{\rho+2n-2}),$$

когда ρ не целое, и условие

б) $$\int_0^\infty \frac{d\sigma_{D'}(t)}{t^{\rho+2n-2}}<\infty,$$

когда ρ целое, то индикатор функции

$$\mathcal{L}_f^*(z)=\overline{\lim_{z'\to z}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(tz')|}{t^\rho}$$

является плюригармонической функцией в $\mathcal{K}_D$.

II) если $\mathcal{L}_f^*(z)$ является в $\mathcal{K}_D$ плюригармонической функцией, то

$$\sigma_{D'}(t)=O(t^{\rho+2n-2})\qquad \forall D'\Subset D.$$

Доказательство этой теоремы, данное в [2] , использует представление Брело субгармонической функции конечного порядка и не распространяется на функции, заданные в конусе.

Нами исследуются функции $f(z,w)$, голоморфные в области $A_{r,\alpha}$ и такие, что при заданном уточненном порядке $\rho(t)$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-\rho(t)}\ln M_{r',\alpha'}(t)<\infty \qquad \forall r'<r,\ \alpha'<\alpha,$$

$$\Big(M_{r',\alpha'}(t)=\max_{\substack{z\in E_{r'}\\ w\in T_{\alpha'},\,|w|<t}}|f(z,w)|\Big).$$

Для таких функций следующим образом введем понятие индикатора

$$h_f^*(z,w)=\overline{\lim_{(z',w')\to(z,w)}} h_f(z',w'),$$

где

$$h_f(z,w)=\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|f(z,tw)|}{t^{\rho(t)}}\ .$$

Распределение множества нулей функции $f(z,w)$ будем характеризовать с помощью проекции этого множества на пространство переменных $z_1,\dots,z_n$, то есть с помощью функции

$$n_f(t,t_0;r',\alpha')=\int_{E_{r''}} n_f(t,t_0;z,\alpha')\,d\omega_z,$$

где $n_f(t,t_0;z,\alpha')$ - число корней (с учетом кратности) функции $f(z,w)$ в области $T_{\alpha'}(t,t_0)=\{w:|\arg w|<\alpha',\ t_0<|w|<t$, а $d\omega_z$ - элемент объема в $\mathbb{C}^n$.

Функцию $f(z,w)$ будем называть функцией вполне регулярного роста в $A_{r,\alpha}$ относительно уточненного порядка $\rho(t)$, если для почти всех фиксированных z она, как функция переменного w , является функцией вполне регулярного роста в $T_{\alpha'}\ \forall\alpha'<\alpha$.

ТЕОРЕМА I. Пусть $f(z,w)$ - функция вполне регулярного роста в $A_{r,\alpha}$ (относительно уточненного порядка $\rho(t)$). Для того, чтобы ее индикатор $h_f^*(z,w)$ был функцией плюригармонической в $A_{r,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы при каком-нибудь $t_0>0$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{n_f(t,t_0;r',\alpha')}{t^{\rho(t)}} = 0 \qquad \forall \alpha'<\alpha \;\; r'<r.$$

С помощью теоремы 1 можно получить соответствующее утверждение для индикатора

$$\mathcal{L}_f^*(z) = \overline{\lim_{z'\to z}}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\ t^{-\rho(t)} \ln|f(tz')|$$

функции $f(z)$, голоморфной в конусе $\mathcal{K}_D = \left\{z : \frac{z}{|z|} \in D\right\}$ и имеющей там вполне регулярный рост относительно уточненного порядка $\rho(t) \to \rho > 0$, то есть такой функции $f(z)$, что

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t^{\rho(t)}} \ln \max_{\substack{z\in\mathcal{K}_{D'} \\ |z|=t}} |f(z)| < \infty \qquad \forall D' \Subset D.$$

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы индикатор $\mathcal{L}_f^*(z)$ функции $f(z)$, вполне регулярного роста в $\mathcal{K}_D$, был плюригармонической функцией, необходимо и достаточно, чтобы $(2n-2)$-мерный объем $\sigma_{D'}(t)$ множества $\{z : f(z)=0,\ 1<|z|<t,\ z\in\mathcal{K}_{D'}\}$, вычисленный с учетом кратности корней функции $f(z)$, удовлетворял условию

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sigma_{D'}(t)}{t^{\rho(t)+2n-2}} = 0 \qquad \forall D' \Subset D.$$

Итак, из теоремы 2 следует, что в теореме Л. Грумен в случае целого ρ можно ограничиться лишь условием а).

ЛИТЕРАТУРА

I. Б.Я. Левин. Распределение корней целых функций, М., Гостехиздат, I956.

2. L.Gruman. Entire functions of several variables and their asymptotic growth. "Arkiv for mathematik", I97I, 9, N°I, I4I-I63.

ON CONDITIONS OF PLURIHARMONICITY OF INDICATOR FUNCTIONS OF HOLOMORPHIC FUNCTION OF SEVERAL COMPLEX VARIABLES

P.Z.Agranovich, L.I.Ronkin

The functions $f(z,w)$, $z\in C^n$, $w\in C$ are considered which are holomorphic in domain $A_{r,\alpha} = E_r \times T_\alpha$ where $E_r = \{z: |z| < r\}$, $T_\alpha = \{w: |\arg w| < \alpha\}$.

The notion of indicator function for $f(z,w)$ is introduced and the conditions of its pluriharmonicity are established.

An extension of results by L.Gruman on pluriharmonicity of indicator function of the holomorphic function in the cone is obtained.

О СВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА

Ю.В. Гандель

В работе [1] (РЖ Мат., 1974, 10Б363), в связи с одной смешанной краевой задачей для уравнения Гельмгольца в полупространстве, рассматривается парное интегральное уравнение вида

$$\int_0^\infty \frac{C(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+\kappa^2}} J_0(\lambda r)\lambda d\lambda = f(r), \quad 0<r<a \tag{1}$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r)\lambda d\lambda = 0, \quad r>a. \tag{2}$$

$C(\lambda)$ с точностью до числового множителя ищется в виде

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a h(s)\cos(s\sqrt{\lambda^2+\kappa^2})\,ds, \tag{3}$$

а для функций $h(s)$ получено интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром, которое представлено в виде ряда произведений функций Бесселя с дробным индексом.

В пункте 1° настоящей статьи показано, что непосредственное использование методики Н.И. Ахиезера [2] дает для функции $h(s)$, через которую по формуле (3) выражается решение рассматриваемой системы (1)-(2), следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} h(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^a \left\{ \frac{\sin\kappa(x+s)}{x+s} + \frac{\sin\kappa(x-s)}{x-s} \right\} h(s)\,ds = \\ = \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x r f(r)\, \frac{\cos\kappa\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\,dr. \end{aligned} \tag{4}$$

1°. Действуя так же, как в § 4 работы [2], предположим, что система (1)-(2) имеет решение $C(\lambda)$, для которого $\sqrt{\lambda}\,C(\lambda)\in L^2$. Из равенства (2) в силу формулы обращения Ганкеля получаем

$$C(\lambda) = \int_0^a g(r) J_0(\lambda r) r\,dr,$$

где $\sqrt{r}\,g(r)\in L^2$. Поэтому $C(\lambda)$ – четная целая трансцендентная функция степени, не превосходящей a. Этим же свойством обладает и функция $C(\sqrt{t^2-\kappa^2})$, которая, очевидно, принадлежит L^2. Следовательно, по теореме Винера-Пэйли

$$C(\sqrt{t^2-\kappa^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a h(s)\cos ts\,ds, \tag{5}$$

где $h(s)\in L^2$. Откуда для искомого решения $C(\lambda)$ системы (1)-(2) получаем представление (3).

Далее, используя уравнение (1) и представление (5), выведем уравнение Фредгольма второго рода для функции $h(s)$. Для этого умножим обе части (I) на функцию

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos(\kappa\sqrt{x^2-r^2})}{\sqrt{x^2-r^2}} \cdot r$$

и проинтегрируем по r от 0 до x. Используя интеграл Н.Я. Сонина [3]

$$\int_0^x J_0(\lambda r) \frac{\cos \kappa\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}} r\,dr = \frac{\sin(x\sqrt{\lambda^2+\kappa^2})}{\sqrt{\lambda^2+\kappa^2}},$$

получаем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(\lambda) \frac{\sin(x\sqrt{\lambda^2+\kappa^2})}{\sqrt{\lambda^2+\kappa^2}} \frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\kappa^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x r f(r) \frac{\cos \kappa\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}\, dr,$$

или после замены переменной $\lambda^2+\kappa^2 = t^2$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_k^\infty C(\sqrt{t^2-\kappa^2}) \frac{\sin xt}{t}\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x r f(r) \frac{\cos \kappa\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}} \cdot dr. \qquad (6)$$

Преобразуем левую часть этого равенства, используя представление (5) для $C(\sqrt{t^2-\kappa^2})$. Имеем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_k^\infty C(\sqrt{t^2-\kappa^2}) \frac{\sin xt}{t}\, dt =$$

$$= \int_0^a h(s)\,ds \frac{2}{\pi} \int_k^\infty \frac{\sin xt \cos ts}{t}\, dt =$$

$$= \int_0^x h(s)\,ds - \frac{1}{\pi} \int_0^a h(s)\,ds \int_0^k \frac{2 \sin xt \cos ts}{t}\, dt,$$

здесь использован известный разрывный интеграл

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xt \cos ts}{t}\, dt = \begin{cases} 1, & \text{при } s < x \\ 0, & \text{при } s > x \end{cases}.$$

Подставим в равенство (6) найденное выражение для его левой части и продифференцируем обе части полученного равенства по x (предполагается, что $f(r) \in C^1[0,a]$). Получаем

$$h(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^a \mathcal{K}(x,s)h(s)ds=\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a rf(r)\frac{\cos\kappa\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}dr, \quad (7)$$

где $\mathcal{K}(x,s)=2\int_0^\kappa \cos xt\cos ts\,dt$. Последний интеграл непосредственно вычисляется, и для ядра интегрального уравнения (7) получаем окончательно выражение

$$\mathcal{K}(x,s)=\frac{\sin\kappa(x+s)}{x+s}+\frac{\sin\kappa(x-s)}{x-s}.$$

Таким образом, функция $h(s)$ должна быть найдена из уравнения Фредгольма (4).

2^0. Из результатов работы [2] непосредственно получается аналогичный результат и для родственного парного интегрального уравнения

$$\int_0^\infty C(\lambda)J_0(\lambda r)\lambda d\lambda=f(r),\quad 0<r<a, \quad (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{C(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2+\kappa^2}}J_0(\lambda r)\lambda d\lambda=0,\quad r>a. \quad (9)$$

В этом случае решение системы (8)-(9) в L^2 имеет вид

$$C(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a h(s)\sin\left(s\sqrt{\lambda^2+\kappa^2}\right)ds, \quad (10)$$

где $h(s)$ - решение интегрального уравнения Фредгольма

$$h(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^a\left\{\frac{\sin\kappa(x+s)}{x+s}-\frac{\sin\kappa(x-s)}{x-s}\right\}h(s)ds=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^x rf(r)\frac{\cos\kappa\sqrt{x^2-r^2}}{\sqrt{x^2-r^2}}dr. \quad (11)$$

(Предполагается, что $f(r)\in C[0,a]$).

Интегральное уравнение Фредгольма (4) так же, как и (II), при малых κa имеет решение в виде ряда по степеням κa, для коэффициентов которого легко получаются простые рекуррентные формулы.

В некоторых случаях приближенные решения этих уравнений удобно получать, если использовать тот факт, что интегральный оператор

$$(Kh)(x)=\int_{-1}^1\frac{\sin\kappa(x+s)}{x+s}h(s)ds$$

с точностью до постоянного множителя равен квадрату такого интегрального оператора

$$(Ah)(x)=\int_{-1}^1 e^{i\kappa xs}h(s)ds,$$

как это было сделано в аналогичной ситуации в работе автора [4] в связи с решением одного интегрального уравнения математической теории дифракции волн.

ЛИТЕРАТУРА

I. В.З. Партон, Б.А. Кудрявцев. Об одном классе парных интегральных уравнений. Тр. Московского института хим. машиностроения, вып. 50, 1973, 3-10.

2. Н.И. Ахиезер. К теории спаренных интегральных уравнений. Зап. Матем. отд. физ.-матем. ф-та и Харьковского математического общества, XXУ, I957, 5-3I.

3. Н.Я. Сонин. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, ГТТИ, I954.

4. Ю.В. Гандель. О решении одного интегрального уравнения математической теории дифракции волн. "Вестник ХГУ", № 66, Математика и механика, вып. 35, I97I, 23-28.

ON REDUCING OF ANY CLASS OF DOUBLE INTEGRAL EQUATIONS TO FREDHOL'M EQUATION OF THE SECOND SERIES

Yu.V.Gandel

The double integral equations are considered in the paper

$$\int_0^\infty \frac{C(\lambda)}{(\lambda^2+k^2)^p} J_0(\lambda r)\lambda d\lambda = f(r), \quad 0<r<a,$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r)\lambda d\lambda = 0, \quad r>a, \quad (p=\pm\tfrac{1}{2}).$$

The solution of $C(\lambda)$ with $p=\frac{1}{2}$ offers in the form of

$$C(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^a h(s)\cos\left(s\sqrt{\lambda^2+k^2}\right)ds,$$

and $h(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant a)$ – solution of Fredholm integral equation of the second series with kernel as

$$\frac{\sin k(x+s)}{x+s} + \frac{\sin k(x-s)}{x-s}.$$

The analogous result is obtained in the case of $p=-\frac{1}{2}$.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА, ВСТРЕЧАЮЩЕЙСЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ

Г.В. Щероина

При рассмотрении формы свободной поверхности жидкости, частично заполняющей произвольный осесимметричный сосуд, возникает нелинейная система уравнений

$$\ddot{x} = -\dot{y}\left(by + f(x) + c - \frac{\dot{y}}{x}\right),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\left(by + f(x) + c - \frac{\dot{y}}{x}\right). \tag{I}$$

Здесь $(\cdot)$ – дифференцирование по S, S – натуральный параметр, $\bar{r} = \bar{r}(S) = \{x(S), y(S)\}$ – уравнение образующей свободной поверхности, C – неизвестная постоянная, $f(x)$ – известная функция, зависящая от массовых сил. В частности, при наличии только поля сил тяжести для покоящейся жидкости $f = 0$, для вращающейся – $c_1 x^2$.

Пусть $\bar{r} = \bar{r}^\circ(\tau) = \{x^\circ(\tau), y^\circ(\tau)\}$ – уравнение ооразующей стенки сосуда в натуральных координатах, $\dot{x} = \cos\beta(S)$, $\dot{y} = \sin\beta(S)$, $\dot{x}^\circ = \cos\beta^\circ(\tau)$, $\dot{y}^\circ = \sin\beta^\circ(\tau)$. Тогда граничные условия на твердой стенке запишутся в виде

$$\dot{y}(0) = 0, \quad \beta^\circ(\tau^*) - \beta(S^*) = \gamma_0, \quad V_\Sigma = \pi\int_0^{\tau^*} x^2(\tau)\,\dot{y}^\circ(\tau)\,d\tau,$$
$$V_\Sigma(\tau^*) - \pi\int_0^{\tau^*} x^{\circ 2}(\tau)\,\dot{y}^\circ(\tau)\,d\tau = V_0, \tag{2}$$

где γ_0, V_0 заданные положительные величины, $|\gamma_0| \leqslant \pi$; S^*, τ^* – неизвестные нам длины дуг соответственно образующих свооодной поверхности и сосуда.

Определение. Решение системы (I), удовлетворяющее условиям (2), пересекающее ось y и имеющее при $x > 0$ единственную общую точку с кривой $\bar{r} = \bar{r}^\circ(\tau)$, назовем правильным.

Например, вопрос о том, при какой скорости вращения жидкости ее поверхность "разорвется" – это вопрос о том, при каких параметрах правильное решение перестает быть устойчивым. Вопрос о построении правильного решения рассмотрен в работах [I], [2]. В настоящей статье мы ограничимся вопросом о существовании правильного решения, не затрагивая вопрос о его устойчивости.

Теорема. Если $\dot{x}^\circ \geqslant 0, \dot{y}^\circ \geqslant 0$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}(\pi x^{\circ 2} y^\circ - V_\Sigma) = \infty$ и

$$\frac{d}{d\tau}\psi(\tau) = \frac{d}{d\tau}\left\{K[r^\circ(\tau)] - by^\circ(\tau) - f(x^\circ(\tau))\right\} \leqslant 0,$$

где K – средняя кривизна поверхности вращения с образующей $r = r^\circ(\tau)$, то правильное решение существует.

Доказательство. Проинтегрировав второе из уравнений (I) по S от нуля до S^* и воспользовавшись условиями (2), получим при $\tau = \tau^*$

$$x^\circ(\tau)\sin[\beta^\circ(\tau) - \gamma_0] = \frac{b}{2\pi}\left[\pi x^{\circ 2}(\tau)\,y^\circ(\tau) + V_0 - V_\Sigma(\tau)\right] + \frac{c x^{\circ 2}(\tau)}{2} +$$
$$+ \int_0^\tau f(x^\circ(\tau))\,x^\circ \cdot \dot{x}^\circ\,d\tau\,; \qquad c = A(\tau^*).$$

Построим теперь однопараметрическое семейство интегральных кривых $r = R(s;\tau) = \{\mathcal{X}(s;\tau), \mathcal{Y}(s;\tau)\}$, удовлетворяющих условиям

$$c = A(\tau);\ \mathcal{X}(0,\tau) = x^\circ(\tau),\ \mathcal{Y}(0;\tau) = y^\circ(\tau),\ \beta(0,\tau) = \beta^\circ(\tau) - \gamma_0\,.$$

Легко видеть, что если кривая семейства $R(s;\tau)$ пересекает ось y, то она после некоторой линейной замены независимой переменной дает решение краевой задачи (I), (2). Если $\tau \to 0$, то графики интегральных кривых семейства $R(s;\tau)$ пересекают график образующей сосуда при некотором $\bar{s} < 0$, если же $t \to \infty$, то при $\bar{s} > 0$. Предположение об отсутствии в семействе $R(s;\tau)$ правильных решений сразу приводит к наличию в нем решения, график которого касается графика образующей, оставаясь при всех τ от нуля до точки касания выше него.

Допустим, что $\bar{s} < 0$. Очевидно, что $c > \Psi(\bar{\tau})$, где $\bar{\tau}$ соответствует точке касания.

Рассмотрим семейство интегральных кривых $\tilde{R}(s;C)$ системы (I), удовлетворяющих условиям $C > c$,

$$\tilde{x}(\bar{\tau};C) = x^\circ(\bar{\tau}),\ \tilde{y}(\bar{\tau};C) = y^\circ(\bar{\tau});\ \tilde{\beta}(\bar{\tau},C) = \beta^\circ(\bar{\tau}).$$

В семействе $\tilde{R}(s;C)$, в свою очередь, либо найдется кривая, график которой касается графика образующей в двух точках τ_1 и τ_2, оставаясь при τ между τ_1 и τ_2 выше него, либо имеется правильное решение при $\gamma_0 = 0$.

В первом случае, учитывая второе из уравнений (2) и уравнение образующей

$$\ddot{y}^\circ = \dot{x}^\circ\left(by^\circ + f(x^\circ) + \Psi(\tau) - \frac{\dot{y}^\circ}{x^\circ}\right),$$

получим, что $\int_{\tau_1}^{\tau_2} [C - \Psi(\tau)]\, x^\circ \dot{x}^\circ d\tau < 0$, что невозможно, так как $C > \Psi(\tau)$ при $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$.

Аналогично приходим к противоречию и во втором случае. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. М.А. Беляева, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов. Математические методы в динамике космических аппаратов, вып. 6, ВЦ АН СССР, М., I968.

2. Л.А. Темкин, В.С. Темкина, Г.В. Щербина. Сб. "Вычислительная математика и вычислительная техника", ФТИНТ АН УССР, вып. 5, стр. 8I-86, Харьков, I974.

ON A PROBLEM OF AN ISOPERIMETRIC TYPE USEFUL FOR APPLICATIONS

G.V.Shcherbina

Sufficient conditions are found for the existence of solutions of simultaneous equations

$$\ddot{x} = -\dot{y}\left(by + f(x) - \frac{\dot{y}}{x}\right),$$
$$\ddot{y} = \dot{x}\left(by + f(x) + c - \frac{y'}{x}\right),$$

satisfying the following conditions:

a) $\dot{y}(0) = 0,\ \beta^\circ(\tau^*) - \beta(s^*) = \gamma_0,$
$V_\Sigma(\tau^*) - \pi \int_0^{\tau^*} x^{\circ 2}(\tau)\, \dot{y}^\circ(\tau)\, d\tau = V_0,$

b) the equations $x(s) = x^\circ(\tau), y(s) = y^\circ(\tau)$ have no solutions (s,τ) in the intervals $(0,s^*)$, $(0,\tau^*)$, respectively.

Here γ_0, V_0 are known positive values, $\gamma_0 < \pi$, $x^\circ(\tau)$, $y^\circ(\tau)$ are known functions, $\dot{x}^{\circ 2} + \dot{y}^{\circ 2} = 1$, $\cos\beta(s) = \dot{x}$, $\sin\beta(s) = \dot{y}$, $\cos\beta^\circ(\tau) = \dot{x}^\circ$, $\sin\beta^\circ(\tau) = \dot{y}^\circ$.

Note that when eqs. (I) describe form of the free surface of a liquid in the field of gravity forces.

УДК 517.55

О СЕПАРАТНО АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. Н.И. Ахиезер, Л.И. Ронкин. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров, "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 3-10.

Доказаны две теоремы об аналитическом продолжении в область $G \subset C^n$ специального вида функции, заданной на $(n+1)$-мерной части границы этой области.

Библиографических ссылок 3.

УДК 519.2

ОБ АРИФМЕТИКЕ ПОЛУГРУПП ШЕНБЕРГА-КЕННЕДИ. И.В. Островский, И.П. Трухина. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров, "Наукова думка", Киев, 1976, стр.11-19.

Обозначим через $\mathcal{P}_\nu$ множество функций вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^\nu(x) \left\{ C_k^\nu(1) \right\}^{-1}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

где $a_k \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$, а $C_k^\nu(x)$ - классические полиномы Гегенбауэра. Множество $\mathcal{P}_\nu$ является полугруппой относительно умножения. Функция $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$ называется простой, если делителями являются лишь $e(x) = 1$ и $f(x)$. Основные результаты работы:

1) множество функций $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$, не имеющих простых делителей в $\mathcal{P}_\nu$, состоит из функций вида

$$f(x) = \exp\left\{ \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x - \alpha_2 - \alpha_1 \right\}, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \ \alpha_2 \geqslant 0;$$

2) множество простых функций $f(x) \in \mathcal{P}_\nu$ плотно в $\mathcal{P}_\nu$ в смысле равномерной сходимости на $[-1,1]$.

Библиографических ссылок 8.

УДК 517.539+513.88

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ. В.А. Ткаченко. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 20-32.

Тригонометрически выпуклой функции $H(\theta)$ при заданном порядке $\rho > 0$ сопоставляется пространство $\mathcal{F}$ целых функций с индуктивной топологией, которая определяется набором норм $\sup_{r,\theta} |\varphi(re^{i\theta})| \exp[-h(\theta) r^\rho]$ при $h(\theta) < H(\theta)$ и его сопряженное - пространство $\mathcal{E}$. Указаны простейшие свойства пространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$. Приведены некоторые реализации при специальном выборе функции $H(\theta)$.

Библиографических ссылок 11.

УДК 517.54

ЗАМЕЧАНИЕ О ДЕФЕКТАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ. В.П. Петренко, А.В. Крытов. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 33-42.

Пусть $f(z)$ - мероморфная функция нижнего порядка $\lambda < 1$ и a_1, a_2, a_3 - исключительные значения $f(z)$ в смысле Р. Неванлинны. В работе получена, используя методы теории целых кривых, следующая оценка величины $\delta(a_3) = \min_{1 \leqslant k \leqslant 3} \delta(a_k, f)$, а именно, справедливо утверждение: если мероморфная функция $f(z)$ имеет нижний порядок $\lambda < 1$, то

$$\delta(a_3) \leqslant 1 - \frac{2\sin\frac{\pi\lambda}{2}}{\pi\lambda}.$$

Библиографических ссылок 12.

УДК 519. 2

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАКОНОВ. Н.И. Яковлева. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр.43-54.

Работа состоит из 2-х частей. I часть посвящена изучению до сих пор, насколько нам известно, не рассматривавшегося вопроса о том, каким может быть и как связан с поведением соответствующего вероятностного закона нижний порядок роста целой характеристической функции. Во II части работы автору удалось усилить прежний результат, обобщающий некоторые доказанные Б. Рамачандраном теоремы о связи между ростом целой характеристической функции и поведением соответствующего закона.

Библиографических ссылок 5.

УДК 513.88:517:519

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА, ЕЕ СВОЙСТВА И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ. В.Я. Голодец. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр.55-71.

В работе изучаются спектральные свойства модулярных операторов в связи с асимптотической коммутативностью в алгебрах фон Неймана. Если M - фактор, U - свободный ультрафильтр на $\mathbb{N}$, то каноническим образом строится неймановская алгебра C_M^U, вобравшая в себя асимптотические свойства M. Изучаются свойства C_M^U, ее структура. Получены приложения к изучению алгебр квазилокальных наблюдаемых.

Библиографических ссылок 14.

УДК 513.8

ОБ ИТЕРАЦИЯХ ФОРМАЛЬНЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ. Г.Р.Белицкий. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 72-75.

В статье обобщаются две теоремы об итерациях формальных степенных рядов - теорема о линеаризации ряда с ограниченной (слабой топологией) последовательностью итераций и "лемма об извлечении корня".

Библиографических ссылок 2.

УДК 517.946

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ. П.А. Мышкис. Вопросы математической физики и фукционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 76-82.

В работе рассматривается краевая задача с разрывными кограничными операторами типа потенциалов для эллиптического псевдодифференциального оператора $A(x, D_x)$:

$$A(x,D_x)\,u(x) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{|\varkappa|} G_{ij}(x,D_x)(\rho_{ij}(x') \times \delta(\Gamma)) = f(x), \qquad (0.I)$$

где $x \in \Omega \subset R^{n+1}$, $x' \in \Gamma = \partial\Omega$, ρ_{ij} ищутся на Γ_i, $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2 = \omega$, $\delta(\Gamma)$ - дельта-функция, сосредоточенная на Γ. Число потенциалов $|\varkappa|$ определяется индексом факторизации $\varkappa$ символа оператора $A(x, D_x)$, в данной работе индекс $\varkappa$ предполагается отрицательным. Символы операторов задачи (0.I) удовлетворяют условию гладкости, на Γ требуется выполнение условий типа Шапиро-Лопатинского, а на $\omega = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$ на символы накладывается дополнительное условие при $\varkappa < -1$. В этом случае для задачи (0.I) в ограниченной замкнутой области методом разбиения единицы строятся регуляризаторы, откуда следуют априорная оценка и фредгольмовость в функциональных пространствах типа Соболева-Слободецкого.

Библиографических ссылок 3.

УДК 517.9:532

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ В ГИДРОМЕХАНИКЕ НЕВЕСОМОСТИ
В.Г. Бабский, Н.Д. Копачевский, А.Д. Мышкис, Л.А. Слобожанин, А.Д. Тюпцов. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка",Киев, 1976, стр. 83-92.

Приводится краткий обзор исследований, выполненных, в основном, авторами и связанных с приближенными и численными методами в механике жидкости, обладающей поверхностным натяжением. Рассматриваются вопросы об определении равновесных форм поверхности жидкости, их устойчивости, запаса устойчивости и ветвления, об отыскании частот и форм малых колебаний покоящейся и вращающейся жидкости (как идеальной, так и вязкой), а также о возникновении термокапиллярной конвекции.

Рисунков 13.

УДК 517.9:532

ДВЕ ЗАДАЧИ О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМЫ ИЗ МАЛОВЯЗКИХ КАПИЛЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ. Н.Д. Копачевский, Н.К. Радякин. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976,стр.93-110.

Работа посвящена задаче о нормальных колебаниях системы из маловязких капиллярных жидкостей в двух простых случаях. Сначала рассматриваются плоские колебания двух либо трех жидкостей, вращающихся в условиях невесомости в цилиндрическом сосуде. Затем (при отсутствии вращения) рассматривается аналогичная задача о колебаниях системы сферически симметрично расположенных жидкостей, заполняющих сферический сосуд.

Установлены некоторые общие свойства решений обеих задач; методом пограничного слоя получены асимптотические формулы для частот колебаний в различных частных и предельных случаях.

Библиографических ссылок 15.

УДК 532.

ЧИСЛЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ, ДВИЖУЩЕГОСЯ В ЖИДКОСТИ. И.И. Иевлев. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка",Киев, 1976, стр. 111-115.

В работе предлагается схема численного определения формы газового пузыря при его движении в жидкости под действием однородного силового поля. Предполагается, что жидкость идеальная несжимаемая, движение потенциальное. Силы поверхностного натяжения не учитываются. Изучаются лишь осесимметричные формы пузыря.

Численная схема решения задачи заключается в следующем. Уравнения движения свободной поверхности и уравнения для потенциала скорости на ней решаются методом Эйлера. При этом на каждом шаге по времени необходимо находить градиент скорости жидкости на свободной поверхности. Последняя задача сводится к численному решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода относительно производной потенциала скорости по нормали к поверхности и дифференцированию известной функции по касательному направлению. Для решения системы линейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих интегральное уравнение, применяется метод сопряженных градиентов, позволяющий решать системы уравнений с большими числами обусловленности.

Приведены результаты расчетов на ЭВМ в виде графиков, изображающих поведение поверхности пузыря в его меридианном сечении.

Рисунков 2, библиографических ссылок 5.

УДК 517.9:532

К ВОПРОСУ О НЕКЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА. Г.В. Щербина.Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка",Киев, 1976, стр.116-120.

Рассматривается краевая задача

$$y'' = F(x, y, y'),$$
$$y'(a) = \alpha, \quad y'(\beta) = \beta$$

для класса уравнений, для которых классическое решение не существует. Даются определения обобщенного решения и достаточные условия его существования.

Библиографических ссылок 8.

УДК 517.946

ПЕРИОДИЧЕСКАН ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА. В.П. Котляров. Вопросы математической физики и функционального анализа, Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 121-131.

В работе предлагается метод нахождения некоторого класса решений нелинейного уравнения Шредингера:

$$iv_t + v_{xx} + 2|v|^2 v = 0, \tag{I}$$

содержащего, в частности, решение периодической задачи Коши для уравнения (I) с конечнозонным начальным данным.

Библиографических ссылок 8.

УДК 517.946

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ "SINE-GORDON". В.А. Козел. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 132-139.

Для уравнения

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$$

разработан метод отыскания N -параметрического семейства его решений, получающихся интегрированием систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Библиографических ссылок 7.

УДК 53:51+517.4

ГАМИЛЬТОНОВА ФОРМА ДРЕЙФОВЫХ УРАВНЕНИЙ. В.Н. Богаевский. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 140-149.

Показано, что уравнения движения заряженной частицы в дрейфовом приближении [1] могут быть приведены к гамильтоновой форме. Указывается соответствующая замена переменных. Для случая движения частицы в потенциальном магнитном поле рассмотрен еще один вид гамильтоновых уравнений и выведена простая формула для плотности тока.

Показано также, что "вторичное" усреднение по методу Н.Н. Боголюбова [2] (малый параметр тот же: отношение ларморовского радиуса к характерному размеру магнитного поля) вновь дает гамильтонову систему [3] и "автоматически" приводит к продольному инварианту.

Рассмотрен частный случай малых продольных колебаний.

Библиографических ссылок 3.

УДК 53:51+517.4

ДРЕЙФОВЫЕ УРАВНЕНИЯ И ТОКИ. В.Н. Богаевский. Вопросы математической физики и функционального анализа, Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 150-160.

В работе развит новый метод получения дрейфового приближения любого порядка для уравнения на функцию распределения системы невзаимодействующих заряженных частиц. Применяемая техника позволяет сделать это короче и проще, чем обычно (см., например, [1-3] *)). Получено выражение для токов через функцию распределения "ведущих центров". Уравнения имеют широкое применение при описании движения плазмы [4].

*) Там же смотри более подробно литературу.

В первом параграфе излагается метод теории возмущений, который используется для вывода дрейфовых уравнений. Это вариант метода Н.Н. Боголюбова [5], основанный на алгебраической постановке задачи усреднения. Данная постановка является частным случаем постановки, которая принадлежит А.Я. Повзнеру [6].

Во втором параграфе выводятся дрейфовые уравнения.

В третьем параграфе ставится задача вычисления усредненного тока и выводится формула для плотности тока. Показывается, что ток состоит из тока "ведущих центров" и тока "намагничения" [3].

Библиографических ссылок 6.

УДК 517.55

ОБ УСЛОВИЯХ ПЛЮРИГАРМОНИЧНОСТИ ИНДИКАТОРА ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. П.З. Агранович, Л.И. Ронкин. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 161-163.

В работе рассматриваются функции $f(z,w)$, $z\in C^n$, $w\in C$, голоморфные в области $A_{r,\alpha}=\{(z,w): z\in E_r,\ w\in T_\alpha\}$, где $E_r=\{z:|z|<r\}$, $T_\alpha=\{w:|\arg w|<\alpha\}$.

Через $n_f(t,t_0;r',\alpha')$ обозначается

$$\int_{E_{r'}} n_f(t,t_0,z,\alpha')\,dw_z,$$

где $n_f(t,t_0;z,\alpha')$ – число корней (с учетом кратности) функции $f(z,w)$ в области $\{w:|\arg w|<\alpha',\ t_0<|w|<t\}$, а dw_z – элемент объема.

Функция $f(z,w)$ называется функцией вполне регулярного роста в области $A_{r,\alpha}$ относительно уточненного порядка $\rho(t)$, если для почти всех фиксированных z она, как функция переменного w, является функцией вполне регулярного роста в $T_{\alpha'}\ \forall\alpha'<\alpha$.

Справедлива следующая теорема: пусть функция $f(z,w)$ является функцией вполне регулярного роста в $A_{r,\alpha}$ (относительно уточненного порядка $\rho(t)$). Для того, чтобы ее индикатор $h^*_f(z,w)=\varlimsup\limits_{(z',w')\to(z,w)}\ \varlimsup\limits_{t\to\infty} t^{-\rho(t)}\ln|f(z',tw')|$ был функцией плюригармонической в $A_{r,\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы при каком-нибудь $t_0>0$ $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-\rho(t)} n_f(t,t_0;r',\alpha')=0\ \forall\alpha'<\alpha, r'<r$.

Отсюда следует обобщение результата Л. Грумен о плюригармоничности индикатора голоморфной в конусе функции.

Библиографических ссылок 2.

УДК 517.948.3

О СВЕДЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К УРАВНЕНИЮ ФРЕДГОЛЬМА ВТОРОГО РОДА. Ю.В. Гандель. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 164-167.

В заметке рассматриваются парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty \frac{C(\lambda)}{(\lambda^2+k^2)^p} J_0(\lambda r)\lambda\,d\lambda = f(r), \qquad 0<r<a,$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_0(\lambda r)\lambda\,d\lambda = 0, \qquad r>a, \qquad (p=\pm\tfrac{1}{2}).$$

Решение $C(\lambda)$ при $p=\frac{1}{2}$ представляется в виде

$$C(\lambda)=\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\int_0^a h(s)\cos(s\sqrt{\lambda^2+k^2})\,ds,$$

а $h(s)$ $(0\leqslant s\leqslant a)$ – решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром

$$\frac{\sin k(x+s)}{x+s}+\frac{\sin k(x-s)}{x-s}.$$

Аналогичный результат получается и в случае $p=-\frac{1}{2}$.

Библиографических ссылок 4.

УДК 517.9:532

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА, ВСТРЕЧАЮЩЕЙСЯ В ПРИЛОЖЕНИЯХ. Г.В. Щербина. Вопросы математической физики и функционального анализа. Материалы научных семинаров. "Наукова думка", Киев, 1976, стр. 168-169.

В работе находятся достаточные условия существования решения системы

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\dot{y}\left(by + f(x) - \frac{y'}{x}\right), \\ \ddot{y} &= \dot{x}\left(by + f(x) + c - \frac{y'}{x}\right), \end{aligned} \qquad (\mathrm{I})$$

удовлетворяющего условиям

а) $\dot{y}(0) = 0, \ \beta^{\circ}(\tau^*) - \beta(s^*) = \gamma.$

$$V_{\varepsilon}(\tau^*) - \pi\int_0^{\tau^*} x^{\circ 2}(\tau)\,\dot{y}^{\circ}(\tau)\,d\tau = V_0,$$

б) уравнения $x(s) = x^{\circ}(\tau), y(s) = y^{\circ}(\tau)$ не имеют решения (s,τ) соответственно в интервалах $(0, s^*)$, $(0, \tau^*)$.

Здесь γ_0 , V_0 - известные положительные величины, $\gamma_0 < \pi, x^{\circ}(\tau)$, $y^{\circ}(\tau)$ - известные функции, $\dot{x}^{\circ 2} + \dot{y}^{\circ 2} = 1$, $\cos\beta(s) = \dot{x}$, $\sin\beta(s) = \dot{y}$, $\cos\beta^{\circ}(\tau) = \dot{x}^{\circ}$, $\sin\beta^{\circ}(\tau) = \dot{y}^{\circ}$.

Заметим, что при $f = 0$ система (I) описывает форму свободной поверхности жидкости в поле сил тяжести.

Библиографических ссылок 2.