АКАДЕМИЯ НАУК УССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

Математическая физика и функциональный анализ

ВЫПУСК II

ХАРЬКОВ • 1971

АКАДЕМИЯ НАУК УССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

В ы п у с к П

Харьков - 1971

Адрес редакционной коллегии:

г. Харьков, 86, пр. Ленина, 47, ФТИНТ АН УССР.

СОДЕРЖАНИЕ

БЦ 20139, подписано к печати 25/VI-71, физ.п.л. 15; усл.п.л. 15, заказ № 227, тираж 400. Цена 1 руб. 50 коп.

Ротопринт ФТИНТ АН УССР, г. Харьков, 86, пр. Ленина, 47.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

ОБ ОДНОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОМ УРАВНЕНИИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ *)

Н.И.Ахиезер

1°. П.Л.Чебышев и его ученики сводили многие задачи на нахождение экстремальных многочленов (в частности, ортогональных многочленов и многочленов, наименее уклоняющихся от нуля) к некоторым неопределенным уравнениям, которые затем решали с помощью разложения в непрерывные дроби. От применения непрерывных дробей в конструктивной теории функции постепенно отошли. Однако сведение к неопределенным уравнениям чебышевского типа, как мы хотим здесь показать, продолжает оставаться полезным и, возможно даже, наиболее простым методом решения многих конкретных задач конструктивной теории функций.

Мы ограничимся вопросами, которые связаны с ортогональными системами, но и в этих вопросах, ради упрощения, не будем стремиться к максимальной общности.

Уравнение, которое мы хотим рассмотреть, имеет вид

$$a(x)\,[G(x)]^2 + b(x)\,[F(x)]^2 = c(x).$$

Здесь $a(x)$, $b(x)$ – заданные многочлены с вещественными и перемежающимися корнями; пусть $a(x)$ точно степени ν, а $b(x)$ – степени ν или $\nu-1$. Главными неизвестными являются $G(x)$ и $F(x)$, это – целые функции с определенным, ниже описываемым, поведением на бесконечности. Наконец, $c(x)$ – многочлен степени $\nu-1$, который также неизвестен.

Старший коэффициент многочлена $a(x)$ можно считать равным 1, а старший коэффициент $b(x)$ пусть будет ± 1. Таким образом, мы получаем три случая, которые соответственно назовем A,B,C:**)

$$\text{(A)}\qquad a(x) = x^\nu + \dots, \qquad b(x) = -x^\nu + \dots,$$

$$\text{(B)}\qquad a(x) = x^\nu + \dots, \qquad b(x) = x^{\nu-1} + \dots,$$

$$\text{(C)}\qquad a(x) = x^\nu + \dots, \qquad b(x) = x^\nu + \dots .$$

Обозначим через E множество точек вещественной оси, на котором

$$\frac{b(x)}{a(x)} \geqslant 0,$$

а через I-дополнение E до всей оси. В x – плоскости, разрезанной вдоль E, каждая ветвь функции

$$R(x) = \sqrt{\frac{b(x)}{a(x)}}$$

вещественна на берегах разрезов. Мы выберем ту ветвь, которая $\geqslant 0$ на верхнем берегу одного из разрезов, а, следовательно, и на верхних берегах всех разрезов.

Обобщенным чебышевским весом (на всей оси) назовем функцию

---

*) Настоящая статья была подготовлена в качестве доклада об одном цикле работ автора, две из которых были выполнены в соавторстве с аспирантами Ю.Я.Томчуком и А.М.Рыбалко.

**) Случай B′: $a(x) = x^\nu + \dots$, $b(x) = -x^{\nu+1} + \dots$ можно не рассматривать, так как он сводится к случаю B заменой x на $-x$.

$$p(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} R(u+i0) & (u \in E) \\ 0 & (u \in I) \end{cases} \qquad (I)$$

Параллельно будем рассматривать чебышевский вес

$$q(u) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \quad \frac{1}{R(u+i0)} & (u \in E) \\ 0 & (u \in I) \end{cases}.$$

Пространства L^2 с весом $p(u)$, соответственно $q(u)$, обозначим H_p, соответственно H_q.

Далее введем в разрезанной λ - плоскости аналитическую функцию

$$w(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(u)\,du}{u-\lambda},$$

причем в случае C интеграл рассматривается как главное значение (относительно точки ∞). С помощью контурного интегрирования находим, что в случаях В и С

$$w(\lambda) = i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}}. \qquad (2')$$

В случае же А

$$w(\lambda) = i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}} \pm 1, \qquad (2'')$$

где знак определяется из условия $w(\infty) = 0$.

Обратимся к рассмотрению ортогональных систем.

2°. Начнем со случая А. Так как в этом случае носителем веса является ограниченное множество, то все многочлены принадлежат каждому из пространств H_p, H_q. Обозначим ортогональные многочлены в этих пространствах соответственно

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \ldots, \quad Q_n(\lambda) = \lambda^n + \ldots .$$

Если использовать так называемые полиномы второго рода

$$\tilde{P}_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(u) - P_n(\lambda)}{u-\lambda}\, p(u)\,du, \quad \tilde{Q}_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_n(u) - Q_n(\lambda)}{u-\lambda}\, q(u)\,du$$

и принять для определенности, что в формуле (2″) имеет место знак +, то получим, что *)

$$Q_n(\lambda) + i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}}\, P_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(u)}{u-\lambda} pu\, du = -\int_{-\infty}^{\infty} P_n(u) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{u^k}{\lambda^{k+1}}\, du = O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) \quad (\lambda \to \infty). \qquad (3)$$

Так как наряду с (3) имеет место соотношение

$$Q_n(\lambda) - i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}}\, P_n(\lambda) = O(\lambda^n) \qquad (\lambda \to \infty), \qquad (3')$$

то

$$a(\lambda)[Q_n(\lambda)]^2 + b(\lambda)[P_n(\lambda)]^2 = O(\lambda^{\nu-1}) \qquad (\lambda \to \infty).$$

А значит

$$a(\lambda)[Q_n(\lambda)]^2 + b(\lambda)[P_n(\lambda)]^2 = c(\lambda), \qquad (4)$$

где $c(\lambda)$ - многочлен степени $\nu - 1$. Это то уравнение, с которого мы начали, причем дополнительными условиями для искомых функций (здесь это многочлены) являются асимптотические формулы

$$P_n(\lambda) \sim \lambda^n, \quad Q_n(\lambda) \sim \lambda^n \qquad (\lambda \to \infty). \qquad (5)$$

3°. В случаях В и С целые рациональные функции не принадлежат пространствам H_p, H_q, но этим пространствам принадлежат множества целых трансцендентных функций. Они порождают континуальные ортогональные системы.

При рассмотрении относящихся сюда вопросов мы должны воспользоваться теоремами существования теории так называемых обратных задач спектрального анализа дифференциальных операторов, созданной в пятидесятых годах И.М.Гельфандом и Г.М.Левитаном, М.Г.Крейном, В.А.Марченко.

Обратимся прежде всего к случаю В и примем для простоты, что

$$a(0) = 0, \quad a(u) \neq 0 \quad \text{при} \quad u < 0.$$

---

*) И аналогично $P_n(\lambda) - i\sqrt{\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)}}\, Q_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_n(u)}{u-\lambda} q(u)\,du = O\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) \qquad (\lambda \to \infty)$

Общность этим, очевидно, не нарушается. Введем спектральную функцию

$$\sigma(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} p(u)\,du \qquad (-\infty < \lambda < \infty)$$

и так называемую "переходную" функцию, которая в нашем случае равна

$$\Phi(x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos(x\sqrt{\lambda})}{\lambda}\,d\sigma(\lambda) = |x| + \int_{0}^{\infty} \frac{1-\cos(x\sqrt{\lambda})}{\lambda}\left\{p(\lambda) - \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\right\}d\lambda = |x| + \Omega(x),$$

где $\Omega(x)$ имеет непрерывную вторую и кусочно-непрерывную третью производную. При этом функция

$$f(x,y) = \Omega''(x+y) + \Omega''(x-y)$$

удовлетворяет неравенству

$$\int_0^r\int_0^r f(x,y)\varphi(x)\overline{\varphi(y)}\,dx\,dy + \int_0^r |\varphi(x)|^2\,dx > 0$$

при любом $r > 0$ и любой непрерывной функции $\varphi(x) \not\equiv 0$ $(0 \leqslant x \leqslant r)$*).

Благодаря перечисленным свойствам функции $\Phi(x)$, из упомянутых выше исследований по обратным задачам следует, что существует уравнение Штурма-Лиувилля

$$-y'' + v(x)\,y = \lambda y \qquad (x \geqslant 0) \tag{6}$$

с вещественным локально интегрируемым потенциалом $v(x)$ и вещественное краевое условие

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = h, \tag{7}$$

которым в качестве спектральной функции отвечает $\sigma(\lambda)$. Удовлетворяющее краевому условию (7) решение уравнения (6) обозначим $\varphi(x,\lambda)$. Второе решение уравнения (6), удовлетворяющее краевому условию

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \tag{7}$$

обозначим $\Psi(x,\lambda)$.

Запись того факта, что $\sigma(\lambda)$ есть спектральная функция проблемы (6), (7), имеет следующий вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\alpha}\varphi(x,\lambda)\,dx\right\}\left\{\int_0^{\beta}\varphi(y,\lambda)\,dy\right\}d\sigma(\lambda) = \min\{\alpha,\beta\},$$

где α, β -произвольные неотрицательные вещественные числа. Это равенство говорит о том, что множество функций (от λ) $\{\varphi(x,\lambda)\}$ $(x>0)$ представляет континуальную ортогональную систему относительно функции распределения $\sigma(\lambda)$.

Из общей теории уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси $x>0$ нам понадобятся два факта:

I) $\varphi(x,\lambda)$ и $\Psi(x,\lambda)$ являются четными целыми функциями экспоненциального типа x от переменной $s = \sqrt{\lambda}$, причем

$$\varphi(x,\lambda) = \cos(sx) + e^{|t|x}\,O\left(\frac{1}{|s|}\right),$$
$$\Psi(x,\lambda) = \frac{\sin(sx)}{s} + e^{|t|x}\,O\left(\frac{1}{|s|^2}\right),$$

где $t = \operatorname{Im} s$, а символ O понимается в смысле " равномерно по x на каждом конечном отрезке полуоси $x > 0$, когда $|s| \to \infty$ ".

2. При любом $x \geqslant 0$ справедливо соотношение

$$\Psi(x,\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x,\lambda) - \varphi(x,u)}{\lambda - u}\,d\sigma(u), \tag{8}$$

выражающее, что $\Psi(x,\lambda)$ есть континуальный аналог полиномов второго рода.

Если, как в интересующем нас случае, носитель функции $\sigma(\lambda)$ ограничен снизу, то при $t \geqslant \varepsilon > 0$ имеет место неравенство

*) Действительно, левая часть написанного неравенства есть

$$\int_E p(\lambda)\,d\lambda \left|\int_0^r \varphi(x)\cos(x\sqrt{\lambda})\,dx\right|^2.$$

$$\left| \frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(u)}{u-\lambda} \right| < M|s|e^{-2xt}, \tag{9}$$

где M означает величину, которая зависит только от чисел ε, x и которая при фиксированном ε ограничена на каждом конечном отрезке полуоси $x > 0$. В дальнейшем той же буквой M будем обозначать и другие величины этого рода.

В нашем случае

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{u-\lambda} = i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}} = O\left(\frac{1}{|s|}\right), \qquad (\lambda \to \infty), \tag{10}$$

кроме того, в силу асимптотических формул,

$$\left| \frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)} \right| < \frac{M}{|s|}.$$

Поэтому при $t \geqslant \varepsilon > 0$

$$\left| \frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)} + i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}} \right| < \frac{M}{|s|}.$$

А с другой стороны, в силу (10), неравенство (9) при $t \geqslant \varepsilon > 0$ принимает вид

$$\left| \frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)} - i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}} \right| < M|s|e^{-2xt}.$$

Следовательно,

$$\left| \left[\frac{\psi(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)} \right]^2 + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \right| < Me^{-2xt}$$

и значит при $t \geqslant \varepsilon > 0$:

$$\left| a(\lambda)[\psi(x,\lambda)]^2 + b(\lambda)[\varphi(x,\lambda)]^2 \right| < Ma(\lambda). \tag{11}$$

Вещественная целая функция от λ, стоящая в левой части (11) под знаком модуля, принимает значения разных знаков на концах каждого пустого, то есть дополнительного к E, интервала полуоси $\lambda > 0$. Поэтому эта целая функция имеет $\nu - 1$ корней в упомянутых интервалах, иначе говоря, делится на некоторый многочлен $c(\lambda)$ степени $\nu - 1$. Вводя целую функцию от переменной s по формуле

$$g(x,s) = \frac{a(\lambda)[\psi(x,\lambda)]^2 + b(\lambda)[\varphi(x,\lambda)]^2}{c(\lambda)},$$

найдем, в силу (11), что при $t \geqslant \varepsilon > 0$

$$|g(x;s)| < M|s|^2.$$

Так как $g(x,s)$ – четная функция от s, то это же неравенство верно и при $t \leqslant -\varepsilon < 0$. Оно, стало быть, верно вне полосы $|\Im m\, t| < \varepsilon$. А поскольку $g(x,s)$ есть целая функция экспоненциального типа (равного x), то, в силу принципа Фрагмена-Линделефа, функция $g(x,s)$ есть многочлен от s степени не выше второй. Поэтому

$$\frac{a(\lambda)[\psi(x,\lambda)]^2 + b(\lambda)[\varphi(x,\lambda)]^2}{c(\lambda)} = \alpha + \beta\lambda,$$

где α, β зависят лишь от x, равно как и корни многочлена $c(\lambda) = \lambda^{\nu-1} + \ldots$. Зафиксируем $x > 0$ и $t \neq 0$. Тогда левая часть, в силу асимптотических формул, будет иметь вид

$$1 + \cos^2(sx) \cdot O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

Сравнивая это с правой частью, заключаем, что $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Следовательно, мы получили неопределенное уравнение

$$a(\lambda)[\Psi(x,\lambda)]^2 + b(\lambda)[\varphi(x,\lambda)]^2 = c(\lambda),$$

где $c(\lambda) = \lambda^{\nu-1} + \ldots$ наперед не известный многочлен с зависящими от x корнями, а поведение на бесконечности неизвестных целых функций $\varphi(x,\lambda)$, $\Psi(x,\lambda)$ описывается асимптотическими формулами.

4^0. Остается рассмотреть случай C . Снова введем неубывающую функцию $\sigma(u)$ $(-\infty < u < \infty)$, но на сей раз по формуле

$$\sigma'(u) = \frac{1}{2} p(u).$$

Однако вначале не будем предполагать, что $p(u)$ определяется формулой (I), а примем лишь, что

$$p(u) = \frac{1}{\pi}[1 + \zeta(u)], \tag{I2}$$

где $\zeta(u) \in L^{\kappa}(-\infty, \infty)$ при каком-нибудь $\kappa \in [1,2]$. Если $p(u)$ определяется формулой (I), то это условие, очевидно, выполнено.

Теперь введем преобразование Фурье функции $\zeta(u)$

$$H(s) = \mathrm{l.i.m.} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ius} \zeta(u)\, du \qquad \left(\frac{1}{\kappa'} + \frac{1}{\kappa} = 1\right)$$

и положим

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iut} - 1}{iu}\, d\sigma(u) \qquad (-\infty < t < \infty),$$

где интеграл рассматривается как главное значение. Легко видеть, что

$$g(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sign} t + \int_0^t H(s)\, ds.$$

Далее мы замечаем, что при произвольной непрерывной функции $\varphi(t) \not\equiv 0$ $(0 \leqslant t \leqslant r)$:

$$\int_0^r\!\!\int_0^r H(t-s)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\, dt\, ds + \int_0^r |\varphi(t)|^2 dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u) \left| \int_0^r \varphi(t) e^{iut} dt \right|^2 > 0.$$

С помощью теории М.Г.Крейна можно доказать, что функции $\sigma(\lambda)$ отвечает вполне определенная система

$$\frac{dy}{dr} = ixy - \mathcal{D}(r)z, \qquad \frac{dz}{dr} = -\overline{\mathcal{D}(r)y}, \tag{I3}$$

которая при краевом условии

$$y\big|_{r=0} = z\big|_{r=0} = 1 \tag{I4}$$

имеет $\sigma(\lambda)$ своей спектральной функцией. Разъясним, в каком смысле это надлежит понимать.

Решением системы (I3) при условии (I4) является пара целых трансцендентных функций (экспоненциального типа r) от λ :

$$y = P(r,\lambda), \quad z = P_*(r,\lambda).$$

Нетрудно показать, что *)

$$P_*(r,\lambda) = e^{ir\lambda}\, \overline{P}(r,\lambda).$$

*) Черта над P означает, что операции комплексного сопряжения, определяющей $P(r,\lambda)$ как функцию от λ, подвергаются лишь коэффициенты степенного ряда.

Таким образом, нашей системой и рассматриваемым условием при $z=0$, в сущности, определяется только одна комплексная функция.

Основной факт состоит в том, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma(u) \int_{\alpha}^{\beta} P(z,u)\,dz \int_{\gamma}^{\delta} \overline{P(s,u)}\,ds = \ell,$$

где $[\alpha,\beta]$, $[\gamma,\delta]$ – произвольные отрезки полуоси $z \geqslant 0$, а ℓ – длина их общей части. Имея ввиду это свойство, говорят, что $\sigma(\lambda)$ является спектральной функцией системы (I3) при условии (I4). Мы можем также сказать, что множество целых функций $\{P(z,\lambda)\}(z>0)$ представляет континуальную ортонормированную систему относительно функции распределения $\sigma(\lambda)$.

Наряду с условием (I4) рассмотрим краевое условие

$$y\big|_{z=0} = -i,\quad z\big|_{z=0} = i.$$

Отвечающее ему решение обозначим $\{Q(z,\lambda),\ Q_*(z,\lambda)\}$, так что и теперь имеет место равенство

$$Q_*(z,\lambda) = e^{iz\lambda}\,\overline{Q}(z,\lambda).$$

Из общих свойств введенных решений системы (I2) отметим представления

$$P_*(z,\lambda) = 1 + \int_0^z \alpha(z,s)\,e^{i\lambda s}\,ds,$$
$$Q_*(z,\lambda) = i + \int_0^z \beta(z,s)\,e^{i\lambda s}\,ds,$$

где $\alpha(z,s)$, $\beta(z,s)$ – суммируемые функции от s $(0 \leqslant s \leqslant z)$. В силу этих представлений

$$P(z,\lambda) = e^{i\lambda z} + \int_0^z \alpha(s,z)\,e^{i\lambda(z-s)}\,ds, \qquad (I5)$$
$$Q(z,\lambda) = -ie^{i\lambda z} + \int_0^z \beta(s,z)\,e^{i\lambda(z-s)}\,ds,$$

причем

$$\alpha(s,z) = \overline{\alpha(z,s)}, \qquad \beta(s,z) = \overline{\beta(z,s)}.$$

Таким образом, функция $P(z,\lambda)$ получается линейной суперпозицией функций $e^{is\lambda}$ с лишь положительными s и, следовательно, может рассматриваться как континуальный аналог полиномов, ортогональных на окружности.

Второй, важный для нас факт, при доказательстве которого существенно используется вид (I2) функции $p(\lambda)$, состоит в том, что

$$Q(z,\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(z,u)-P(z,\lambda)}{u-\lambda}\,p(u)\,du, \quad (z>0) \qquad (I6)$$

и

$$Q_*(z,\lambda) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_*(z,u)-P_*(z,\lambda)}{u-\lambda}\,p(u)\,du + i, \quad (z \geqslant 0).$$

Соотношение (I6) аналогично соотношению (8), но здесь интеграл рассматривается как главное значение.

Интегральные представления (I5) и соотношение (I6) позволяют изучить поведение рассматриваемых функций на бесконечности.

Возьмем функцию

$$w(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(u)}{u-\lambda}\,du, \qquad (\operatorname{Im}\lambda \neq 0).$$

Так как интеграл рассматривается как главное значение, то

$$w(\lambda) = i + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(u)}{u-\lambda}\,du, \qquad (\operatorname{Im}\lambda > 0)$$

и

$$w(\lambda) = -i + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(u)}{u-\lambda}\,du, \qquad (\operatorname{Im}\lambda < 0).$$

Полагая
$$\Im m\,\lambda = \eta,$$
находим, что
$$\lim_{\lambda\to\infty}\left[Q_*(z,\lambda)+w(\lambda)P_*(z,\lambda)\right]=2i \tag{I7}$$
равномерно при $\eta \geqslant \varepsilon > 0$, а также что
$$e^{z\eta}\left|Q_*(z,\lambda)-w(\lambda)P_*(z,\lambda)\right|<\frac{M(z)}{\eta^{1/\kappa}}, \quad (\eta>0), \tag{I8}$$
$$\left.\begin{aligned} &e^{z\eta}\left|Q_*(z,\lambda)+w(\lambda)P_*(z,\lambda)\right|<M(z)\left\{1+\frac{e^{z\eta}}{|\eta|^{1/\kappa}}\right\} \\ &\left|Q_*(z,\lambda)-w(\lambda)P_*(z,\lambda)\right|<M(z)\left\{1+\frac{1}{|\eta|^{1/\kappa}}\right\} \end{aligned}\quad (\eta<0)\right\}. \tag{I9}$$

Теперь предположим, что $p(\lambda)$ имеет специальную форму (I), и значит
$$w(\lambda)=i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}},$$
как это было принято для случая C. Рассмотрим при фиксированном $z>0$ величину
$$e^{-i\lambda z}\left\{[Q_*(z,\lambda)]^2-[w(\lambda)]^2[P_*(z,\lambda)]^2\right\}=f(z,\lambda).$$
Из соотношений (I7) и (I8) следует, что $f(z,\lambda)$ ограничена при $\Im m\,\lambda \geqslant \varepsilon>0$, а из (I9) вытекает, что она ограничена также при $\Im m\,\lambda \leqslant -\varepsilon<0$. Применяя к целой функции экспоненциального типа
$$f(z,\lambda)\,a(\lambda)=g(\lambda)$$
принцип Фрагмена-Линделефа в трех областях
$$\Im m\,\lambda \geqslant 1, \quad -1<\Im m\,\lambda<1, \quad \Im m\,\lambda \leqslant -1,$$
находим, что $g(\lambda)$ есть многочлен степени $\leqslant \nu$, а из (I7) и(I8) заключаем, что
$$f(z,\lambda)\to 0 \qquad (\eta\to\infty).$$
Поэтому $g(\lambda)$ - многочлен степени $\nu-1$. Итак, мы доказали,что
$$e^{-iz\lambda}\left\{a(\lambda)[Q_*(z,\lambda)]^2+b(\lambda)[P_*(z,\lambda)]^2\right\}=c(\lambda),$$
где $c(\lambda)$ - многочлен степени $\nu-1$, то есть мы снова пришли к неопределенному уравнению рассматриваемого вида.

5^0. Перейдем к вопросу о том, что можно извлечь из этого неопределенного уравнения. Для исследования этого вопроса введем в рассмотрение расположенную над λ - плоскостью двухлистную риманову поверхность f, имеющую в качестве линий перехода интервалы, образующие множество E. Таким образом,род поверхности f равен $\nu-1$. На этой римановой поверхности рассмотрим однозначную функцию
$$\mathcal{E}_n(\lambda)=Q_n(\lambda)+i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}}P_n(\lambda), \qquad \text{(в случае A)}$$
$$\mathcal{E}(x,\lambda)=\Psi(x,\lambda)+i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}}\varphi(x,\lambda) \qquad \text{(в случае B)}$$
и
$$\mathcal{E}(z,\lambda)=e^{-\frac{iz\lambda}{2}}\left[Q_*(z,\lambda)+i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}}P_*(z,\lambda)\right]. \qquad \text{(в случае C)}$$

Если λ - точка на верхнем листе, а λ' лежит под λ на нижнем листе, то в случае A
$$\mathcal{E}_n(\lambda')=Q_n(\lambda)-i\sqrt{\frac{b(\lambda)}{a(\lambda)}}P_n(\lambda)=\frac{c(\lambda)}{\mathcal{E}_n(\lambda)a(\lambda)}. \tag{20}$$

Аналогичные соотношения имеют место в случаях B и C.

Ограничимся здесь исследованием соотношения (20), которое перепишем в виде

$$\varepsilon_n(\lambda')\,\varepsilon_n(\lambda) = \frac{c(\lambda)}{a(\lambda)}\ .$$

При нашем выборе радикала функция ε_n имеет n - кратный полюс в точке ∞ (на верхнем листе). Кроме того, ε_n имеет простые полюсы в корнях многочлена $a(\lambda)$; число этих полюсов равно V .Иных полюсов у ε_n нет,так что полное число полюсов этой функции равно $n+V$. Правая часть формулы (20) имеет в точке ∞ корень кратности $n+1$. Поэтому функция ε_n имеет в точке ∞' (нижний лист) корень кратности $n+1$. Мы видим, что функция ε_n должна иметь еще $V-1$ корней. Эти корни не могут быть заданы наперед (так как род поверхности равен $V-1$) и являются корнями подлежащего нахождению многочлена $c(\lambda)$.Имеющаяся информация о функции ε_n позволяет построить ее с помощью гиперэллиптических интегралов. При этом для определения непроизвольных корней приходится решать якобиеву задачу обращения. Несмотря на техническую сложность, на этом пути удается получить законченные и просто формулируемые результаты относительно асимптотического поведения ортогональных многочленов с весом довольно общего вида на системе конечных интервалов (это было показано в работах Ю.Я.Томчука и автора).

Аналогично обстоит дело в случаях В и С. Разница лишь в том, что теперь искомые функции имеют существенную особенность на бесконечности. Поэтому для получения представлений в этих случаях приходится прибегать к принципу Фрагмена-Линделефа (после того, как искомая функция разделена на функцию с тем же поведением на бесконечности, которую можно построить с помощью гиперэллиптических интегралов).

6^0. Поясним общие соображения предыдущего п° на простейших частных задачах.

I) Случай А, $V=1$. Положим $a(\lambda)=\lambda-1$, $b(\lambda)=-\lambda-1$. Так как

$$\varepsilon_n(\lambda) = Q_n(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\ P_n(\lambda)$$

и значит

$$\varepsilon_n(\lambda') = \frac{C}{(\lambda-1)\left\{Q_n(\lambda) - \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,P_n(\lambda)\right\}}\ ,$$

то ε_n имеет полюс порядка n в точке ∞ , полюс порядка I в точке I и корень кратности $n+1$ в точке ∞' . Замечая, что функция

$$1+\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} = \int\frac{d\lambda}{(1-\lambda)\sqrt{\lambda^2-1}}\ ,$$

(интеграл второго рода) имеет простой корень в точке ∞' и простой полюс в точке I, а функция

$$\lambda+\sqrt{\lambda^2-1} = \exp\int\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}$$

(экспоненциальная от интеграла третьего рода) имеет простой полюс в точке ∞' и простой корень в точке ∞', заключаем, что

$$\varepsilon_n(\lambda) = C\left(1+\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\right)\left(\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}}{2}\right)^n,$$

где, как нетрудно усмотреть, константа C равна I. Отсюда получаем, что

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\left(\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}}{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\left(\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}}{2}\right)\right\}.$$

И если положить

$$\lambda = \cos\theta,$$

то мы придем к известному представлению

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{2^n}\,\frac{\cos(n+\frac{1}{2})\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta}\ ,\qquad p(\lambda) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\ .$$

Аналогично найдем, что

$$Q_n(\lambda) = \frac{1}{2^n}\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}\,, \qquad q(\lambda) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\ .$$

2) Случай С, $V=1$. Положим $a(\lambda)=\lambda-1$, $b(\lambda)=\lambda+1$. Функция

$$\mathcal{E}(z,\lambda) = e^{-\frac{iz\lambda}{2}}\left[Q_*(z,\lambda) + i\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,P_*(z,\lambda)\right]$$

имеет на f единственный (простой) полюс в точке I. Корней у нее нет. Далее из формул (2), (I7) следует, что при $\lambda\to\infty$, $\mathcal{J}m\lambda>0$ справедливо соотношение

$$e^{\frac{iz\lambda}{2}}\,\mathcal{E}(z,\lambda)\to 2i.$$

Всеми указанными свойствами обладает также однозначная на f функция

$$\Omega(z,\lambda) = i\left(1+\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\right)e^{-\frac{iz\lambda}{2}\sqrt{\lambda^2-1}}\,.$$

Поэтому рассмотрим отношение

$$g(z,\lambda) = \frac{\mathcal{E}(z,\lambda)}{\Omega(z,\lambda)} = \frac{e^{-\frac{iz}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}\left[Q_*(z,\lambda)+i\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,P_*(z,\lambda)\right]}{i\left(1+\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\right)}\ .$$

Это – целая функция экспоненциального типа на f ; она не имеет ни корней, ни полюсов. Кроме того,

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(z,\lambda) = 1,$$

если $\mathcal{J}m\lambda>0$ (и притом равномерно, если $\mathcal{J}m\lambda\geqslant\varepsilon>0$). Так как

$$g(z,\lambda') = \frac{c}{g(z,\lambda)}\,,$$

то

$$\lim_{\lambda\to\infty} g(z,\lambda') = C$$

снова, если $\mathcal{J}m\lambda>0$ (и равномерно, если $\mathcal{J}m\lambda\geqslant\varepsilon>0$).

Замечая далее, что на первом листе (вне разрезов)

$$\mathcal{J}m\sqrt{\lambda^2-1} > 0,$$

а на втором листе

$$\mathcal{J}m\sqrt{\lambda^2-1} < 0\,,$$

заключаем, что при $\mathcal{J}m\lambda<0$, $|\lambda|\to\infty$ на первом листе

$$e^{-\frac{iz}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})} \sim e^{-iz\lambda},$$

а на втором листе

$$e^{-\frac{iz}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})} \sim 1.$$

Поэтому, благодаря неравенствам (I9), на обоих листах

$$|g(z,\lambda)| < M(z),$$

если $\mathcal{J}m\lambda\leqslant-\varepsilon<0$. Перечисленные свойства функции $g(z,\lambda)$ позволяют применить к ней принцип Фрагмена-Линделефа, в результате чего мы находим, что

$$g(z,\lambda)\equiv 1.$$

Следовательно,

$$Q_*(z,\lambda) + i\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,P_*(z,\lambda) = i\left(1+\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\right)e^{\frac{iz}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}$$

Отсюда уже нетрудно получить, что

$$P(\tau,\lambda)=\frac{1}{2}\left\{\left(1+\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)e^{\frac{i\tau}{2}(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})}+\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)e^{\frac{i\tau}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}\right\}.$$

3) Случай A, $V=2$. Теперь род римановой поверхности есть I, следовательно, целесообразно ввести эллиптические функции (иначе говоря, отобразить риманову поверхность на параллелограмм, здесь – прямоугольник).

Положим

$$a(\lambda)=(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2),\qquad b(\lambda)=-(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2),$$

где

$$\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2.$$

Прежде всего, найдем модуль $k\ (0<k<1)$ по формуле

$$\frac{\alpha_2-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}:\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\beta_2-\alpha_1}=k^2; \tag{2I}$$

а затем определим число $t\ (0<t<1)$ из уравнения

$$\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\beta_2-\alpha_1}=sn^2(tk). \tag{22}$$

После этого положим *)

$$\alpha_2=A+B\,\frac{\vartheta_0'(\frac{t}{2})}{\vartheta_0(\frac{t}{2})},$$

$$\beta_2=A+B\,\frac{\vartheta_1'(\frac{t}{2})}{\vartheta_1(\frac{t}{2})}.$$

Тогда из формулы (22) будет следовать, что

$$\alpha_1=A+B\,\frac{\vartheta_2'(\frac{t}{2})}{\vartheta_2(\frac{t}{2})},$$

а из формулы (2I), что

$$\beta_1=A+B\,\frac{\vartheta_3'(\frac{t}{2})}{\vartheta_3(\frac{t}{2})}.$$

Если угодно, переменную λ можно подвергнуть целому линейному преобразованию. Удобно сделать это так, чтобы A = 0, B = 2. Принимая эту " нормировку" интервалов, будем иметь

$$\alpha_1=2\,\frac{\vartheta_2'(\frac{t}{2})}{\vartheta_2(\frac{t}{2})},\quad \beta_1=2\,\frac{\vartheta_3'(\frac{t}{2})}{\vartheta_3(\frac{t}{2})},\quad \alpha_2=2\,\frac{\vartheta_0'(\frac{t}{2})}{\vartheta_0(\frac{t}{2})},\quad \beta_2=2\,\frac{\vartheta_1'(\frac{t}{2})}{\vartheta_1(\frac{t}{2})}.$$

А теперь рассмотрим отображение

$$\lambda=\frac{\vartheta_1'(u+\frac{t}{2})}{\vartheta_1(u+\frac{t}{2})}-\frac{\vartheta_1'(u-\frac{t}{2})}{\vartheta_1(u-\frac{t}{2})}.$$

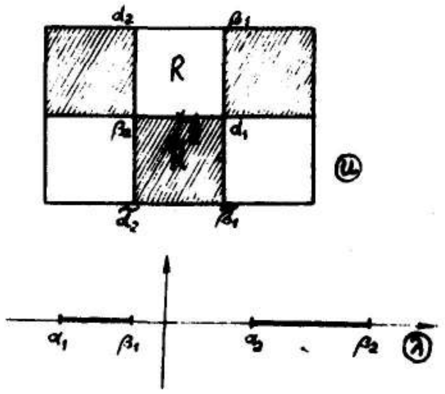
Возьмем в u - плоскости прямоугольник R с вершинами в точках $u=0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\frac{\tau}{2}$. Этим вершинам в λ - плоскости отвечают, соответственно, точки $\lambda=\beta_2,\alpha_1,\beta_1,\alpha_2$; далее, точке $u=\frac{t}{2}$ отвечает точка $\lambda=\infty$. Нетрудно видеть, что прямоугольник R отображается на верхнюю половину плоскости λ, причем, что ею является верхняя половина первого листа. На чертеже соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами. В случае A разрезами являются отрезки $[\alpha_1,\beta_1]$, $[\alpha_2,\beta_2]$. Поэтому образом первого листа будет прямоугольник $R+\widetilde{R}$, стороны которого $\alpha_2\beta_1$, $\widetilde{\alpha}_2\widetilde{\beta}_1$ отождествлены. Заштрихованные прямоугольники соответствуют нижним полуплоскостям. Теперь обратимся к представлению ортогональных систем.

Функция $\mathcal{E}_n(\lambda)$ имеет вид

$$\mathcal{E}_n(\lambda)=Q_n^*(\lambda)+\sqrt{\frac{(\lambda-\alpha_1)(\lambda-\alpha_2)}{(\lambda-\beta_1)(\lambda-\beta_2)}}\,P_n(\lambda).$$

---

*) Здесь ϑ - функции строятся для $\tau=\frac{iK'}{K}$, где K,K' - полные эллиптические интегралы первого рода для модулей k и k'.



Из наших общих рассмотрений следует, что

$$\mathcal{E}_n(x') = \frac{C(x-\gamma)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)\left[Q_n(x) - \sqrt{\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)}}\,P_n(x)\right]} .$$

Поэтому функция $\mathcal{E}_n$ имеет полюс порядка n в точке ∞, простые полюсы в точках β_1, β_2, далее $(n+1)$ - кратный корень в точке ∞' и еще один, пока неизвестный, корень $x=\gamma$. Этими свойствами обладает функция

$$\left[\frac{\vartheta_1(\frac{t}{2}+u)}{\vartheta_1(\frac{t}{2}-u)}\right]^n \frac{\vartheta_1(u+\frac{t}{2})\,\vartheta_1(u-\xi)}{\vartheta_1(u)\,\vartheta_1(u-\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2})} , \tag{23}$$

где ξ пока неизвестно. Функция $\mathcal{E}_n$ на римановой поверхности однозначна; этому должно отвечать наличие у функции (23) периодов I и τ. Первый из них функция (23), очевидно, имеет. Требование о наличии периода τ является условием для определения параметра ξ. Это условие приводит к значению

$$\xi = \frac{1+\tau}{2} + (n+\frac{1}{2})\,t ,$$

и мы можем написать, что отношение функции $\mathcal{E}_n(x)$ к функции (23) есть константа. После этого легко получить представление ортогональных многочленов $P_n(x)$ и $Q_n(x)$:

$$P_n(x) = M_n \left\{\left[\frac{\vartheta_1(\frac{t}{2}+u)}{\vartheta_1(\frac{t}{2}-u)}\right]^n \frac{\vartheta_1(\frac{t}{2}+u)\,\vartheta_3(u-nt-\frac{t}{2})}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_2(u)} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\vartheta_1(\frac{t}{2}-u)}{\vartheta_1(\frac{t}{2}+u)}\right]^n \frac{\vartheta_1(\frac{t}{2}-u)\,\vartheta_3(u+nt+\frac{t}{2})}{\vartheta_0(u)\,\vartheta_2(u)}\right\},$$

где

$$M_n = \left[\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(t)}\right]^n \frac{\vartheta_0(\frac{t}{2})\,\vartheta_2(\frac{t}{2})}{\vartheta_1(t)\,\vartheta_3(nt)},$$

а вес равен

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{-\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)}} & (x \in E) \\ 0 & (x \in I) \end{cases} .$$

Далее

$$Q_n(x) = N_n \left\{\left[\frac{\vartheta_1(\frac{t}{2}+u)}{\vartheta_1(\frac{t}{2}-u)}\right]^n \cdot \frac{\vartheta_1(\frac{t}{2}+u)\,\vartheta_3(u-nt-\frac{t}{2})}{\vartheta_1(u)\,\vartheta_3(u)} - \right.$$

$$
-\left[\frac{\vartheta_1(\frac{t}{2}-u)}{\vartheta_1(\frac{t}{2}+u)}\right]^n \frac{\vartheta_1(\frac{t}{2}-u)\,\vartheta_3(u+nt+\frac{t}{2})}{\vartheta_1(u)\,\vartheta_3(u)},
$$

где

$$
N_n=\left[\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_1(t)}\right]^n \frac{\vartheta_1(\frac{t}{2})\,\vartheta_3(\frac{t}{2})}{\vartheta_1(t)\,\vartheta_3(nt)},
$$

а вес равен

$$
q(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sqrt{-\dfrac{(x-\beta_1)(x-\beta_2)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}} & (x\in E) \\ 0 & (x\in I) \end{cases}.
$$

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

I97I выпуск П

УСЛОВИЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

А.Г.Брусенцев, Ф.С.Рофе-Бекетов

В настоящей работе исследуются условия самосопряженности дифференциальных операторов двух видов:

$$Lu = (-\Delta)^m u + q(x)u, \quad x = (x_1, \dots x_n) \in E^n \tag{0.I}$$

и

$$Mu = (-1)^m \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^{2m} u}{\partial x_i^{2m}} + q(x)u \tag{0.2}$$

во всем n-мерном пространстве E^n без краевых условий на бесконечности ($q(x)$- вещественно).

Для оператора Шредингера достаточные условия самосопряженности дает известная теорема Титчмарша-Сиерса [I ,п.п.22.I5, 22. I6], справедливость которой для пространства произвольной размерности отметил Б.М.Левитан [2] . (В [I] рассматривались только одномерный и двумерный случаи).

Для операторов порядка $2m$ общего вида в одномерном случае ряд признаков самосопряженности установил М.А.Наймарк [3, § 23] . Для одномерного оператора вида (0.2) Р.С.Исмагилов [4] установил достаточный признак самосопряженности, который затем М.Г.Гимадисламов [5] перенес на пространства любой размерности n . Иной признак самосопряженности для операторов общего вида (не обязательно эллиптических) установлен Л.П.Нижником [6, стр. 388].

В настоящей работе, развивая метод, примененный в [7,8], мы устанавливаем для операторов (0.I) и (0.2) признаки самосопряженности, отличные от известных [5,6]. При этом признаки самосопряженности, установленные в [4 , 5] , охватываются нашими результатами.

§ I. ОПЕРАТОР БЕЗ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ M (0.2)

Пусть $e_1, \dots e_n$ - ортонормированный базис в E^n . Определим символический оператор

$$\nabla^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} e_i \mathcal{D}_i^k, \quad (\mathcal{D}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}). \tag{I.I}$$

Л Е М М А I.I. Если при некоторых $K>0$, $C>0$

$$q(x) \geqslant -KQ(x), \tag{I.2}$$

где $1 \leqslant Q(x) \leqslant \infty$, $Q^{-\frac{1}{2m}}(x) \in C^m$ и

$$|\nabla^{(k)} Q^{-\frac{1}{2m}}| \cdot Q^{-\frac{k-1}{2m}} \leqslant C \quad (k = 1, \dots, m), \tag{I.3}$$

то для любой функции $u(x) \in \mathcal{L}_2(E^n)$, для которой $Mu \in \mathcal{L}_2(E^n)$, будут

$$\int_{E^n} Q^{-\frac{k}{m}}(x) |\nabla^{(k)} u|^2 dx < \infty; \quad (k = 1, \dots, m). \tag{I.4}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Обозначим

$$\mathcal{J}_\kappa(R)=\int_{C_R}\varphi_R^{2\kappa}\,|\nabla^{(\kappa)}u|^2dx,\quad (\kappa=1,\dots,m), \tag{I.5}$$

где

$$\varphi_R(x)=Q^{-\frac{1}{2m}}(x)\,(1-\frac{|x|^2}{R^2}), \tag{I.6}$$

а C_R – шар $|x|\leqslant R$. Покажем, что

$$\lim_{R\to\infty}\mathcal{J}_\kappa(R)<\infty\qquad (\kappa=1,2,\dots,m), \tag{I.7}$$

а это эквивалентно (I.4).

С помощью интегрирования по частям находим

$$\int_{C_R}\mathcal{D}_i(\varphi_R^2u)\mathcal{D}_iu\,dx=-\int_{C_R}\varphi_R^2u\mathcal{D}_i^2u\,dx \tag{I.8}$$

и аналогично, с помощью многократного интегрирования по частям, имеем

$$\int_{C_R}[\mathcal{D}_i^\kappa(\varphi_R^{2\kappa}u)]\mathcal{D}_i^\kappa u\,dx=(-1)^\kappa\int_{C_R}\varphi_R^{2\kappa}u\,\mathcal{D}_i^{2\kappa}u\,dx,\quad \kappa=1,2,\dots . \tag{I.9}$$

Отсюда при $\kappa=m$, раскрывая скобки, получаем тождества

$$\int_{C_R}\varphi_R^{2m}\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_i^m}\right)^2dx=-\int_{C_R}\Big[\sum_{j=1}^m C_m^j(\mathcal{D}_i^j\varphi_R^{2m})(\mathcal{D}_i^mu)\mathcal{D}_i^{m-j}u\Big]dx+$$
$$+(-1)^m\int_{C_R}\varphi_R^{2m}u\mathcal{D}_i^{2m}u\,dx,\quad (i=1,\dots,n).$$

Суммируя эти тождества по i, найдем, что

$$\int_{C_R}\varphi_R^{2m}|\nabla^{(m)}u|^2dx=-\int_{C_R}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m C_m^j(\mathcal{D}_i^j\varphi_R^{2m})(\mathcal{D}_i^mu)\mathcal{D}_i^{m-j}u\,dx+$$
$$+\int_{C_R}\varphi_R^{2m}u[Mu-q(x)u]dx.$$

Производим оценку с помощью неравенства Коши

$$\int_{C_R}\varphi_R^{2m}|\nabla^{(m)}u|^2dx\leqslant N\int_{C_R}\sum_{j=1}^m\sqrt{\sum_{i=1}^n[\mathcal{D}_i^j\varphi_R^{2m}\mathcal{D}_i^{m-j}u]^2}\,\times$$
$$\times|\nabla^{(m)}u|^2dx+\int_{C_R}\varphi_R^{2m}u[Mu-q(x)u]dx.$$

Заметим, что при $|x|\leqslant R$

$$|\varphi_R(x)|\leqslant Q^{-\frac{1}{2m}}(x),\ |\nabla^{(\kappa)}\varphi_R|\,\varphi_R^{\kappa-1}\leqslant C,\quad (\kappa=\overline{1,m});$$
$$|\nabla^{(j)}\varphi_R^{2m}(x)|\leqslant C\varphi_R^{2m-j}(x),\quad (j=\overline{1,m}). \tag{I.10}$$

Поэтому

$$\int_{C_R}\varphi_R^{2m}|\nabla^{(m)}u|^2dx\leqslant C\int_{C_R}\sum_{j=1}^m\varphi_R^{2m-j}|\nabla^{(m-j)}u|\cdot|\nabla^{(m)}u|dx+\int_{C_R}\varphi_R^{2m}u(Mu-q(x)u)dx.$$

Отсюда, применяя неравенство Буняковского-Шварца и используя оценки (I.2), получаем

$$\mathcal{J}_m^2(R)\leqslant C\sum_{j=1}^m\mathcal{J}_{m-j}(R)\mathcal{J}_m(R)+\mathcal{D}\|u\|\cdot\|Mu\|+E\|u\|.$$

Итак,

$$\mathcal{J}_m^2(R)\leqslant C\sum_{j=1}^m\mathcal{J}_{m-j}(R)\mathcal{J}_m(R)+A_u, \tag{I.II}$$

где $A_u>0$ не зависит от R.

Подставляя в (I.8) вместо $u(x)$ функцию $\mathcal{D}_j^{\kappa-1}u$ и заменяя одновременно $\varphi_R^2(x)$ на $\varphi_R^{2\kappa}(x)$, что не нарушает справедливости (I.8), получим

$$\int_{C_R}\varphi_R^{2k}(\mathcal{D}_i^k u)^2 dx = -\int_{C_R}\varphi_R^{2k}(\mathcal{D}_i^{k-1}u)\,\mathcal{D}_i^{k+1}u\,dx - 2k\int_{C_R}(\mathcal{D}_i\varphi_R)\varphi_R^{2k-1}(\mathcal{D}_i^{k-1}u)\,\mathcal{D}_i^k u\,dx.$$

Суммируя по i и учитывая (I.5), (I.6), (I.9), отсюда получаем при некоторых $a_k>0,\ b_k>0$

$$\mathcal{J}_k^2(R)\le a_k\mathcal{J}_{k-1}(R)\mathcal{J}_k(R)+b_k\mathcal{J}_{k-1}(R)\mathcal{J}_{k+1}(R). \tag{I.I2}$$

Из неравенств (I.II), (I.I2) следует (I.7). Действительно, при $k=1$ из (I.I2) имеем

$$\mathcal{J}_1^2(R)\le\alpha_1\mathcal{J}_1(R)+\beta_1\mathcal{J}_2(R),\quad(\alpha_1,\beta_1>0), \tag{I.I3}$$

если учесть, что $\mathcal{J}_0(\infty)<\infty$, ибо $u(x)\in\mathcal{L}_2(E^n)$.

Поэтому, если допустить, что $\mathcal{J}_1(R)\to\infty$, то, в силу (I.I3), $\mathcal{J}_2(R)\to\infty$, причем

$$\mathcal{J}_1(R)=o(\mathcal{J}_2(R))\qquad\text{при}\quad R\to\infty.$$

Замечая это, получаем из (I.I2) при $k=2$

$$\mathcal{J}_2(R)=o(\mathcal{J}_3(R))$$

и вообще

$$\mathcal{J}_k(R)=o(\mathcal{J}_{k+1}(R)),\quad(k=1,\dots,m-1).$$

Но это противоречит (I.II). Аналогичным путем приходим к противоречию, если предположить, что

$$\lim_{R\to\infty}\mathcal{J}_k(R)<\infty\ \text{для}\quad k=1,\dots,j\ (<m);$$
$$\lim_{R\to\infty}\mathcal{J}_{j+1}(R)=\infty.$$

Лемма доказана.

Т Е О Р Е М А I.I. Оператор M (0.2) с непрерывным коэффициентом $q(x)$ самосопряжен в $\mathcal{L}_2(E^n)$ без краевых условий на бесконечности, если выполнены условия леммы I (I.2), (I.3) и если при этом существует такая функция $0\le P(x)\in C^m$ и такая последовательность областей $\Omega_k\subset\Omega_{k+1}$ с кусочно-гладкими границами S_k, что $\bigcup_{k=0}^{\infty}\Omega_k=E^n$,

$$P(x)\le N_k,\ x\in\Omega_k;\ P(x)\big|_{S_k}=N_k\to\infty\quad\text{при}\quad k\to\infty; \tag{I.I4}$$

$$|\nabla^{(j)}P(x)|\le C_kQ^{-1+\frac{j}{2m}},\quad(j=\overline{1,m}),\quad x\in\Omega_k,\ C_k=o(N_k). \tag{I.I5}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Достаточно ограничиться рассмотрением случая $q(x)\in C^\infty$, так как непрерывная функция может быть аппроксимирована во всем пространстве функцией из C^∞ с точностью до ограниченного слагаемого, которое не влияет на индексы дефекта оператора M. Заметим, что при $q(x)\in C^\infty$ максимальный оператор, отвечающий (0.2), совпадает с замыканием своего сужения на совокупность $C^\infty\cap\mathcal{L}_2(E^n)$.

Пусть

$$u(x),\ v(x)\in C^\infty\cap\mathcal{L}_2(E^n),\quad Mu,\ Mv\in\mathcal{L}_2. \tag{I.I6}$$

Для доказательства теоремы, ввиду сказанного выше, достаточно показать, что тогда

$$(Mu,v)-(u,Mv)=(-1)^m\int_{E^n}\Big[\bar v\sum_{i=1}^n\mathcal{D}_i^{2m}u-u\sum_{i=1}^n\mathcal{D}_i^{2m}\bar v\Big]dx=0, \tag{I.I7}$$

причем u и v можно считать вещественными.

В силу абсолютной сходимости интеграла, (I.I7) эквивалентно условию

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{F}_k=0, \tag{I.I8}$$

где
$$\mathfrak{J}_\kappa = \int\limits_{\Omega_\kappa} \left(1-\frac{P(x)}{N_\kappa}\right)^m \left[u \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i^{2m} v - v \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i^{2m} u\right] dx.$$

Интегрируя m раз по частям, имеем

$$|\mathfrak{J}_\kappa| = \Big|\int\limits_{\Omega_\kappa} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} (\mathcal{D}_i^m v) \mathcal{D}_i^m \Big[\Big(1-\frac{P(x)}{N_\kappa}\Big)^m u\Big] -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \mathcal{D}_i^m u \, \mathcal{D}_i^m \Big[\Big(1-\frac{P(x)}{N_\kappa}\Big)^m v\Big]\Big\} dx \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{|\alpha|=m-\nu} \frac{m!}{\nu!\,\alpha!} \int\limits_{\Omega_\kappa} \Big[|\mathcal{D}_i^\nu u| \cdot |\mathcal{D}_i^m v| + |\mathcal{D}_i^m u| \cdot |\mathcal{D}_i^\nu v| \Big] \prod_{j=1}^{m} \Big|\mathcal{D}_i^{\alpha_j} \Big(1-\frac{P(x)}{N_\kappa}\Big)\Big| dx \leqslant$$

$$\leqslant O\Big(\frac{C_\kappa}{N_\kappa}\Big) \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega_\kappa} Q^{-\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2m}} \Big\{ |\mathcal{D}_i^\nu u| |\mathcal{D}_i^m v| + |\mathcal{D}_i^\nu v| \cdot |\mathcal{D}_i^m u| \Big\} dx.$$

Здесь α - мультииндекс.

Здесь использованы условия (I.I4), (I.I5) с учетом того, что $\sum \alpha_j = m - \nu$. Применяя к последнему интегралу неравенство Буняковского- Шварца, в силу (I.4) устанавливаем его ограниченность, а так как $c_\kappa N_\kappa^{-1} \longrightarrow 0$, то (I.I8) и теорема доказаны.

С Л Е Д С Т В И Е. Если при некотором $K > 0$
$$q(x) \geqslant -KQ(|x|), \tag{I.I9}$$
где $1 \leqslant Q(z) \leqslant \infty$,
$$\Big|\frac{d^\kappa}{dz^\kappa} Q^{-\frac{1}{2m}}(z)\Big| Q^{-\frac{\kappa-1}{2m}}(z) \leqslant C, \qquad (\kappa = \overline{1,m}) \tag{I.20}$$
и
$$\int^{\infty} Q^{-1+\frac{1}{2m}}(z)\, dz = \infty, \tag{I.2I}$$
то оператор M (0.2) самосопряжен без краевых условий на бесконечности.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. В силу (I.I9), (I.20) для $q(x)$ выполнены условия леммы I с $Q(x) = Q(|x|)$. Полагая
$$P(x) = \int_0^{|x|} Q^{-1+\frac{1}{2m}}(z)\, dz$$
видим, в силу (I.20), (I.2I), что удовлетворены и условия (I.I5), (I.I4) теоремы I. Поэтому оператор M самосопряжен.

Замечание. Полученное условие (I.2I) является обобщением условия Титчмарша-Сиерса на случай операторов высших порядков.

При требовании монотонности $Q(z)$ вместо (I.20), условие (I.2I) было получено Р.С.Исмагиловым [4] $(n=1)$ и М.Г.Гимадисламовым [5] как следствие установленных ими признаков самосопряженности. Однако условие (I.20) является более общим, чем требование монотонности $Q(z)$. Покажем это . Пусть (I.I9), (I.2I) выполнены для некоторой монотонной $Q(z)$. Тогда найдется такая функция $Q_1(z)$, для которой выполнены все три условия: (I.I9),(I.20), (I.2I). Действительно, достаточно положить $(0 < z < \infty)$
$$Q_1^{-\frac{1}{2m}}(z) = \int_{-1}^{\infty} Q^{-\frac{1}{2m}}(t+1)\,\omega(t-z)\, dt, \tag{I.22}$$

где $0 \leqslant \omega(t) \in C_0^\infty$, $\omega(t) = 0$ при $|t| > 1$
$\int_{-1}^{1} \omega(t)\,dt = 1.$

Очевидно, $Q^{-\frac{1}{2m}} \in C^\infty$ удовлетворяет (I.20), а так как в силу (I.22) и монотонности $Q(z)$,

$$Q^{-\frac{1}{2m}}(z+2) \leqslant Q_1^{-\frac{1}{2m}} \leqslant Q^{-\frac{1}{2m}}(z),$$

то для $Q_1(z)$ остаются в силе (I.19), (I.21).

§ 2. ОПЕРАТОР $\Delta^2 + q(x)$.

Рассмотрим оператор L (0.I), ограничиваясь для простоты случаем $m = 2$. Итак,

$$Lu = \Delta^2 u + q(x)u. \tag{2.1}$$

ЛЕММА 2.I. Пусть при некоторых $K > 0$, $C > 0$

$$q(x) \geqslant -KQ(x) \tag{2.2}$$

$$1 \leqslant Q(x) \leqslant \infty, \quad Q^{-\frac{1}{4}}(x) \in C^2$$

и

$$|\nabla Q^{-\frac{1}{4}}(x)| \leqslant C, \quad |\Delta Q^{-\frac{1}{4}}(x)|\, Q^{-\frac{1}{4}}(x) \leqslant C. \tag{2.3}$$

Тогда для всякого $u(x)$ такого, что

$$u(x) \in \mathcal{L}_2(E^n), \quad Lu \in \mathcal{L}_2(E^n), \tag{2.4}$$

будет

$$\int_{E^n} Q^{-\frac{1}{2}}(x) |\nabla u|^2 dx < \infty, \tag{2.5}$$

$$\int_{E^n} Q^{-1} |\Delta u|^2 dx < \infty. \tag{2.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяются следующие тождества:

$$|\varphi_R(x)\nabla u|^2 = \nabla(\varphi_R^2 u \nabla u) - (\nabla\varphi_R^2, \nabla u)u - \varphi_R^2 u \Delta u, \tag{2.7}$$

$$|\varphi_R^2(x)\Delta u|^2 = \Delta(\varphi_R^4 u \Delta u) - 2\nabla(\varphi_R^4 u \nabla\Delta u) - (\Delta\varphi_R^4) u \Delta u - 2(\nabla\varphi_R^4, \nabla u)\Delta u + \varphi_R^4 u \Delta^2 u. \tag{2.8}$$

Полагая

$$\varphi_R(x) = Q^{-\frac{1}{4}}(x)\left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right),$$

проинтегрируем оба тождества по C_R $(|x| \leqslant R)$

$$\int_{C_R} \varphi_R^2 |\nabla u|^2 dx = -\int_{C_R} (\nabla\varphi_R^2, \nabla u) u\, dx - \int_{C_R} \varphi_R^2 u \Delta u\, dx$$

$$\int_{C_R} \varphi_R^4 |\Delta u|^2 dx = -\int_{C_R} (\Delta\varphi_R^4) u \Delta u\, dx - 2\int_{C_R} (\nabla\varphi_R^4, \nabla u)\Delta u\, dx + \int_{C_R} \varphi_R^4 u \Delta^2 u\, dx.$$

Отсюда, замечая, что

$$|\nabla\varphi_R^2| \leqslant C_1 \varphi_R; \quad |\nabla\varphi_R^4| \leqslant C_3 \varphi_R^3;$$
$$|\Delta\varphi_R^4| \leqslant C_2 \varphi_R^2,$$

и обозначая

$$J_1^2(R)=\int_{C_R}\varphi_R^2|\nabla u|^2dx\ ;\quad J_2(R)=\int_{C_R}\varphi_R^4|\Delta u|^2dx,$$

с помощью неравенства Буняковского–Шварца получим

$$J_1^2(R)\leqslant a_1J_1(R)+a_2J_2(R); \tag{2.9}$$

$$J_2^2(R)\leqslant b_1J_2(R)+b_2J_1(R)J_2(R)+\int_{C_R}Q^{-1}\left(1-\frac{|x|^2}{R^2}\right)(uLu-q(x)u)\,dx.$$

Второе неравенство, в силу (2.2), дает

$$J_2^2(R)\leqslant b_1J_2(R)+b_2J_1(R)J_2(R)+b_0 \tag{2.10}$$

($a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 > 0$). Из (2.9) и (2.10) вытекает, что

$$\lim J_1(R)<\infty,\quad \lim J_2(R)<\infty \quad \text{при}\quad R\to\infty,$$

что означает (2.5), (2.6). Лемма доказана.

Т Е О Р Е М А 2.1. Оператор L (2.1) с непрерывным $q(x)$ самосопряжен в $\mathcal{L}_2(E^n)$ без краевых условий на бесконечности, если выполнены условия леммы 2.1 и при этом существуют $P(x)\in C^2$, $P(x)\geqslant 0$ и описанная в теореме 1.1 последовательность областей Ω_k, для которых справедливо (1.14), причем

$$|\nabla P|\leqslant C_kQ^{-3/4}(x),\quad |\Delta P(x)|\leqslant C_kQ^{-1/2}(x),$$
$$x\in\Omega_k\ ;\quad C_k=o(N_k). \tag{2.11}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Достаточно показать, что при $k\to\infty$

$$\mathcal{J}_k=\int_{\Omega_k}\left(1-\frac{P(x)}{N_k}\right)^2[v\Delta^2u-u\Delta^2v]\,dx\to 0 \tag{2.12}$$

для вещественных $u(x)$, $v(x)$, удовлетворяющих (2.4). Положим

$$F_k(x)=\left(1-\frac{P(x)}{N_k}\right)^2,\quad x\in\Omega_k.$$

Учитывая, что при $k\to\infty$, $x\in\Omega_k$

$$|\nabla F_k|=\frac{C_k}{N_k}Q^{-3/4}(x),\quad |\Delta F_k|\leqslant 2\frac{C_k}{N_k}Q^{-1/2}(x),$$

из (2.12) получаем

$$|\mathcal{J}_k|=\left|\int_{\Omega_k}\Delta F_k[v\Delta u-u\Delta u]\,dx+2\int_{\Omega_k}(\nabla F_k,[\Delta u\nabla v-\Delta v\nabla u])\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant 2\frac{C_k}{N_k}\int_{\Omega_k}Q^{-1/2}(x)[|v||\Delta u|+|u|\cdot|\Delta v|]\,dx+2\frac{C_k}{N_k}\int_{\Omega_k}Q^{-3/4}(x)[|\Delta u|\cdot|\nabla v|+$$
$$+|\Delta v|\cdot|\nabla u|]\,dx\leqslant 2\frac{C_k}{N_k}\left\{\int_{E^n}Q^{-1}(x)(|\Delta u|+|\Delta v|)^2dx\right\}^{1/2}\Big\{\|u\|+\|v\|+$$
$$+\int_{E^n}Q^{-1/2}(x)(|\nabla u|+|\nabla v|)^2dx\Big\},$$

$$\mathcal{J}_k\to 0.$$

Теорема доказана.

С Л Е Д С Т В И Е. При условиях (2.2) с $Q(x) = Q(|x|)$,

$$\left|\frac{d}{dz} Q^{-1/4}(z)\right| < C, \quad \left|\frac{d^2}{dz^2} Q^{-1/4}(z)\right| Q^{-1/4}(z) < C, \quad \int^{\infty} Q^{-3/4}(z)\,dz = \infty$$

оператор L (2.I) самосопряжен.

§ 3. ОПЕРАТОР L (0.I)

Налагая на $q(x)$ двустороннее ограничение, можно получить условия самосопряженности операторов L (0.I) и M (0.2) при менее жестких требованиях к мажоранте $Q(x)$, чем в §§ I,2, где ограничения для $q(x)$ были односторонними. Покажем это на примере оператора L (0.I).

Л Е М М А 3.I. Если при некоторых $K > 0$, $C > 0$ коэффициент $q(x)$ оператора L (0.I) удовлетворяет условию

$$|q(x)| \leqslant K Q(x), \tag{3.I}$$

где $1 \leqslant Q(x) \leqslant \infty$, $Q^{-1/2m} \in C^1$

$$|\nabla Q^{-1/2m}| \leqslant C, \tag{3.2}$$

то для любой функции $u(x)$, такой, что

$$u(x) \in \mathcal{L}_2(E^n), \quad Lu \in \mathcal{L}_2(E^n) \tag{3.3}$$

будет

$$\int_{E^n} Q^{-k/m}(x)\,|\nabla^k u|^2\,dx < \infty \qquad (k = \overline{1, 2m-1}), \tag{3.4}$$

где ∇ - оператор Гамильтона,

$$\nabla^{2p} = \Delta^p, \quad \nabla^{2p+1} = \nabla\Delta^p. \tag{3.5}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Определяя $\varphi_R(x)$, как в (I.6), положим

$$J_k^2(R) = \int_{C_R} \varphi_R^{2k}\,|\nabla^k u|^2\,dx \qquad (k = \overline{1, 2m-1}). \tag{3.6}$$

Заметим, что тождество (2.7) остается верным, если в него формально вместо $u(x)$ подставить ∇u и $\varphi_R^2(x)$ заменить на $\varphi_R^4(x)$. Такие замены можно повторять, в результате чего получаем

$$\varphi_R^{2k}|\nabla^k u|^2 = \nabla(\varphi_R^{2k}\nabla^k u\,\nabla^{k-1}u) - (\nabla\varphi_R^{2k}, \nabla^k u\,\nabla^{k-1}u) - \tag{3.7}$$
$$- \varphi_R^{2k}(\nabla^{k-1}u\,\nabla^{k+1}u), \qquad (k = \overline{1, 2m-1}).$$

(В последних скобках стоит либо обычное, либо скалярное произведение, в зависимости от того, нечетно k или четно).

Интегрируя тождество (3.7) по C_R и используя формулу Остроградского-Гаусса, получаем

$$\int_{C_R} \varphi_R^{2k}|\nabla^k u|^2 dx = -2k\int_{C_R}(\varphi_R^{2k-1}\nabla\varphi_R;\ \nabla^{k-1}u\cdot\nabla^k u)\,dx - \tag{3.8}$$
$$-\int_{C_R}\varphi_R^{2k}(\nabla^{k-1}u\,\nabla^{k+1}u)\,dx,$$

откуда, в силу неравенства Буняковского-Шварца и так как

$$|\nabla \varphi_R(x)| < C, \quad x \in C_R, \tag{3.9}$$

где C от R не зависит, получаем при $k = \overline{1, 2m-2}$

$$\mathcal{J}_k^2(R) \leqslant a_k \mathcal{J}_k(R) \mathcal{J}_{k-1}(R) + b_k \mathcal{J}_{k-1}(R) \mathcal{J}_{k+1}(R). \tag{3.10}$$

Отсюда, в частности, следует при $k = 1$, что

$$\mathcal{J}_1^2(R) \leqslant \alpha_1 \mathcal{J}_1(R) + \beta_1 \mathcal{J}_2(R). \tag{3.11}$$

Рассмотрим отдельно случай $k = 2m-1$. Замечая, что

$$\nabla^{2m} u = (-1)^m [Lu - q(x) u]$$

и учитывая (3.3), оценки (3.1), (3.9), получаем из (3.8)

$$\mathcal{J}_{2m-1}^2(R) \leqslant a_{2m-1} \mathcal{J}_{2m-1}(R) \mathcal{J}_{2m-2}(R) + \beta \mathcal{J}_{2m-2}(R). \tag{3.12}$$

Все коэффициенты a_j, b_j, α_j, $\beta_j > 0$). Из системы неравенств (3.10) $(k = \overline{2, 2m-2})$, (3.11), (3.12), рассуждая как и при доказательстве леммы 1.1, получаем ограниченность всех $\mathcal{J}_k(R)$ при $R \to \infty$ $(k = \overline{1, 2m-1})$. Отсюда следует (3.4). Лемма доказана.

Т Е О Р Е М А 3.1. Оператор (0.1) с непрерывным $q(x)$ самосопряжен в $\mathcal{L}_2(E^n)$ без краевых условий на бесконечности, если выполнены условия леммы 3.1 (3.1), (3.2) и существует функция $0 \leqslant P(x) \in C^1$ и такая последовательность областей Ω_k с кусочно-гладкими границами S_k, чтобы

$$\Omega_k \subset \Omega_{k+1} \; \bigcup_{k=0} \Omega_k = E^n, \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered} P(x) \leqslant N_k, \quad x \in \Omega_k, \quad P(x)\big|_{S_k} = N_k \to \infty, \quad k \to \infty, \\ |\nabla P| \leqslant C_k Q^{-1+\frac{1}{2m}}(x), \quad (x \in \Omega_k), \quad C_k = o(N_k). \end{gathered} \tag{3.14}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Положим

$$A_p[u, v] = u \Delta^p v - v \Delta^p u. \tag{3.15}$$

Докажем, что при $k \to \infty$ для u, v, удовлетворяющих (3.3),

$$\int\limits_{\Omega_k} \left(1 - \frac{P(x)}{N_k}\right) A_m[u, v] \, dx \to 0. \tag{3.16}$$

Воспользуемся непосредственно проверяемым тождеством

$$A_p[u, v] = \nabla B_p[u, v] + A_{p-2}[\Delta u, \Delta v], \tag{3.17}$$

где обозначено

$$B_p[u, v] = [u \nabla^{2p-1} v - \Delta^{p-1} v \nabla u] + [\Delta^{p-1} u \nabla v - v \nabla^{2p-1} u], \tag{3.18}$$

и заметим, что $A_0[u, v] = 0$. Применяя повторно (3.17), получим

а) если m - четное, $m = 2p$

$$A_m[u, v] = \nabla \sum_{j=1}^{p} B_{2j}[\Delta^{m-2j} u, \Delta^{m-2j} v]. \tag{3.19}$$

в) если m – нечетное, $m=2p+1$

$$A_m[u,v]=\nabla\sum_{j=1}^{p}B_{2j+1}[\Delta^{m-2j-1}u,\Delta^{m-2j-1}v]+A_1[\Delta^p u,\Delta^p v],\tag{3.20}$$

причем

$$A_1[\Delta^p u,\Delta^p v]=\nabla(\Delta^p u\nabla^m v-\Delta^p v\nabla^m u).\tag{3.21}$$

Таким образом, для доказательства (3.16) достаточно проверить это соотношение отдельно для каждого из слагаемых, через которые выражается $A_m[u,v]$ по формулам (3.19), (3.20). Но это устанавливается непосредственно, если учесть, что

$$\int_{\Omega_\kappa}\left(1-\frac{P(x)}{N_\kappa}\right)\nabla B_p[\varphi,\psi]\,dx=\frac{1}{N_\kappa}\int_{\Omega_\kappa}(\nabla P(x),B_p[\varphi,\psi])\,dx,$$

и, подставляя вместо φ и ψ соответствующие выражения через u и v, воспользоваться затем оценками (3.14) и (3.4). Теорема доказана.

С Л Е Д С Т В И Е. Если выполняется (3.1) с некоторым $Q(x)=Q(|x|)$, причем

$$\left|\frac{d}{dz}Q^{-\frac{1}{2m}}(z)\right|\leqslant C,\qquad \int^{\infty}Q^{-1+\frac{1}{2m}}(z)\,dz=\infty,$$

то оператор L (0.1) самосопряжен в $\mathcal{L}_2(E^n)$ без краевых условий на бесконечности.

§ 4. ОГРАНИЧЕНИЯ НА СЛОЯХ

Обобщая результат Р.С.Исмагилова [4], М.Г.Гимадисламов [5] показал, что самосопряженность оператора M (0.2) можно обеспечить, ограничивая $q(x)$ снизу лишь на некоторой последовательности кубических слоев.

Здесь мы покажем как подобного рода условия с ограничениями на слоях T_κ произвольной формы

$$T_\kappa=\Omega_{2\kappa+1}\setminus\Omega_{2\kappa},\tag{4.1}$$

где Ω_ν односвязные конечные области,

$$\overline{\Omega}_\nu\subset\Omega_{\nu+1},\quad\bigcup_{\nu=0}^{\infty}\Omega_\nu=E^n\tag{4.2}$$

могут быть для оператора M (0.2) или при $m=2$ для L (0.1) выведены из теорем 1.1 и 1.2 соответственно.

Способ получения этих условий является обобщением приема, предложенного при $m=1$ в [8].

Т Е О Р Е М А 4.1. Пусть дана последовательность слоев T_κ (4.1), (4.2) и

$$q(x)\geqslant -C\gamma_\kappa\quad x\in T_\kappa\quad(\kappa=0,1,\dots),\tag{4.3}$$

где $\gamma_\kappa\geqslant 1$, $C>0$ и от κ не зависит. Тогда, если

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty}\min\left\{h_\kappa^{2m},\,h_\kappa\gamma_\kappa^{-1+\frac{1}{2m}}\right\}=\infty,\tag{4.4}$$

где h_κ –минимальная толщина слоя T_κ (то есть расстояние между $\Omega_{2\kappa}$ и $E^n\setminus\Omega_{2\kappa+1}$), то оператор M (0.2) с непрерывным вещественным $q(x)$ самосопряжен в $\mathcal{L}_2(E^n)$ без краевых условий на бесконечности независимо от поведения $q(x)$ между слоями.

Л Е М М А 4.1. Для любого слоя T_κ существуют такие функции $P_\kappa(x)$, $Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}}(x)\in C^\infty$, что

$$\begin{gathered}0\leqslant P_\kappa(x)\leqslant 1,\quad P_\kappa(x)=0,\quad(x\in\Omega_{2\kappa}),\\ P_\kappa(x)=1\quad(x\notin\Omega_{2\kappa+1}),\\ |\nabla^{(j)}P_\kappa(x)|\leqslant Ch_\kappa^{-j}\quad(j=1\dots m).\end{gathered}\tag{4.5}$$

$$Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}}(x)=0 \quad (x\notin T_\kappa); \quad |\nabla^{(j)} Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}}(x)| \leqslant C h_\kappa^{-j} \qquad (j=1\dots m), \tag{4.6}$$

$$Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}}(x)=1, \qquad x\in \operatorname{supp}|\nabla P_\kappa(x)|. \tag{4.7}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Л Е М М Ы. Рассмотрим слой $T_0=\Omega_1\setminus\Omega_0$. Обозначим $\delta_0(x)$, $\delta_1(x)$ расстояния точки x до Ω_0 и, соответственно, до $E^n\setminus\Omega_1$. Положим

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad \delta_0<\delta_1(x) \\ 1 & \text{при} \quad \delta_0 \geqslant \delta_1(x) \end{cases}.$$

Тогда в качестве $P_0(x)$ можно взять осреднение $p(x)$

$$P_0(x)=6^n h_0^{-n}\int_{E^n} \omega\left(\frac{x-\xi}{h_0/6}\right)p(\xi)\,d\xi, \tag{4.8}$$

где

$$\omega(x)=\begin{cases} C_1 e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x|<1 \\ 0 & |x|\geqslant 1 \end{cases}. \tag{4.9}$$

C_1 выбрано так, что
$$\int_{E^n}\omega(x)\,dx=1. \tag{4.10}$$

Очевидно, $P_0(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы. В частности, (4.5) выполнено с коэффициентом

$$C=\max_{j=1\dots m}\left\{6^j\int_{E^n}|\nabla^{(j)}\omega(\xi)|\,d\xi\right\}, \tag{4.11}$$

не зависящим от κ. Построим $Q_0^{-\frac{1}{2m}}(x)$. Положим

$$z(x)=\begin{cases} 0, & \min\{\delta_0(x),\ \delta_1(x)\}<\frac{1}{6}h_0 \\ 1, & \min\{\delta_0(x),\ \delta_1(x)\}\geqslant\frac{1}{6}h_0 \end{cases}.$$

Тогда в качестве $Q_0^{-\frac{1}{2m}}(x)$ можно взять осреднение $z(x)$

$$Q_0^{-\frac{1}{2m}}(x)=6^n h_0^{-n}\int_{E^n}\omega\left(\frac{x-\xi}{h_0 6^{-1}}\right)z(\xi)\,d\xi. \tag{4.12}$$

Легко видеть, что $Q_0^{-\frac{1}{2m}}(x)$ удовлетворяет всем требованиям леммы, в частности, условию (4.6) с коэффициентом (4.11). Аналогично строятся $P_\kappa(x)$ и $Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}}(x)$ при $\kappa=1,2,\dots$. Лемма доказана.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы 4.1.

Положим

$$Q^{-\frac{1}{2m}}(x)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} a_\kappa Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}}(x), \tag{4.13}$$

$$P(x)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} b_\kappa P_\kappa(x). \tag{4.14}$$

Здесь при каждом x суммы конечные. Чтобы удовлетворить условию (1.3) и требованию

$$a_\kappa Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}}(x)\leqslant \gamma_\kappa^{-\frac{1}{2m}}, \quad x\in T_\kappa, \quad \kappa=0,1,\dots,$$

положим

$$a_\kappa=\min\left\{h_\kappa,\ \gamma_\kappa^{-\frac{1}{2m}}\right\}.$$

После этого подберем b_κ из условий (1.15)

$$b_\kappa|\nabla^{(j)}P_\kappa(x)|\leqslant C\left(a_\kappa Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}}\right)^{2m-j}.$$

Учитывая (4.5), (4.6), (4.7), можно взять

$$b_\kappa = \min\left\{ h_\kappa^{2m},\ h_\kappa \gamma_\kappa^{-1+\frac{1}{2m}} \right\}. \tag{4.15}$$

Действительно, при

$$x \in \operatorname{supp} |\nabla P_\kappa(x)| \quad a_\kappa Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}} = a_\kappa .$$

Если $h_\kappa > \gamma_\kappa^{-\frac{1}{2m}}$, то $a_\kappa = \gamma_\kappa^{-\frac{1}{2m}}$, а также

$$b_\kappa |\nabla^{(j)} P_\kappa(x)| \le C \min\left\{ h_\kappa^{2m},\ h_\kappa \gamma_\kappa^{-1+\frac{1}{2m}} \right\} \cdot h_\kappa^{-j} \le$$
$$\le C \min\left\{ h_\kappa^{2m},\ h_\kappa^{j} (\gamma_\kappa^{-\frac{1}{2m}})^{2m-j} \right\} h_\kappa^{-j} \le$$
$$\le C (\gamma_\kappa^{-\frac{1}{2m}})^{2m-j} = C (a_\kappa Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}})^{2m-j} .$$

Если $h_\kappa \le \gamma_\kappa^{-\frac{1}{2m}}$, то $a_\kappa = h_\kappa$ и

$$b_\kappa |\nabla^{(j)} P_\kappa(x)| \le C b_\kappa h_\kappa^{-j} \le C h_\kappa^{2m-j} = C (a_\kappa Q_\kappa^{-\frac{1}{2m}})^{2m-j} .$$

Соответствующие неравенства в иных точках слоя T_κ очевидны. Таким образом,

$$|\nabla^{(j)} P(x)| \le C Q^{-1+\frac{j}{2m}} \quad (j = 1 \ldots m) .$$

Поэтому условие (4.4) означает, что для функции $p(x)$ (4.14) выполнено условие (1.14).

Следовательно, при условиях теоремы 4.1 существуют функции $P(x)$, $Q^{-\frac{1}{2m}}(x)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1.1, а поэтому оператор M (0.2) самосопряжен. Теорема доказана. Заметим, что это доказательство можно дословно повторить для оператора L (0.1) при $m = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, П, ИЛ., М., 1961.
2. Б.М.Левитан, Об одной теореме Титчмарша и Сиерса, Успехи математических наук, 16, № 4, 175-178, 1961.
3. М.А.Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969.
4. Р.С.Исмагилов, Об условиях самосопряженности дифференциальных операторов высших порядков, ДАН СССР, 142, 1239-1242, № 6, 1962.
5. Н.Г.Гимадисламов, Достаточные условия совпадения минимального и максимального операторов в частных производных и дискретности их спектра, Матем.заметки, 4, № 3, 301-311, 1968.
6. Ю.М.Березанский, Разложение по собственным функциям, Наукова думка, Киев, 1965.
7. Ф.С.Рофе-Бекетов, Условия самосопряженности оператора Шредингера в бесконечных областях, Сб. Математическая физика и функциональный анализ, ФТИНТ АН УССР, вып. 1, 126-135, 1969.
8. Ф.С.Рофе-Бекетов, Условия самосопряженности оператора Шредингера, Матем.заметки, 8, № 6, 741-751, 1970.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

К ВОПРОСУ О ПОДФАКТОРАХ ГИПЕРФИНИТНЫХ ФАКТОРОВ

В.Я.Голодец

1. Вопрос о том, всякий ли подфактор N гиперфинитного фактора M типа II_1 является гиперфинитным, до сих пор остается открытым. Известно только, что не всякий фактор типа II_1 может быть подфактором гиперфинитного фактора [5].

В настоящей работе мы докажем, используя результаты [8], что если N – гиперфинитный подфактор гиперфинитного фактора M типа II_1, то коммутант N в M – гиперфинитная подалгебра M (см. р.р.2 и 3).

Далее (см. р.4) в статье доказано, что если гиперфинитный фактор M типа II_1 есть тензорное произведение факторов M_i (i = 1,2) типа II_1, то M_i (i = 1,2) – снова гиперфинитные факторы. (Как сообщил нам А.М.Степин, эта проблема была поставлена С.Сакаи в его известных лекциях о W^* – алгебрах [6]).

Результаты настоящей статьи справедливы и для факторов типа III. Но эти вопросы будут рассмотрены в другой работе.

Автор благодарен А.Б.Катку и А.М.Степину за полезное обсуждение результатов настоящей работы.

2. В этом разделе рассматриваются аппроксимативно конечные (гиперфинитные) неймановские алгебры с конечным следом. Предполагается знакомство с алгебрами Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве в объеме книги [1]. Доказательство основных результатов этого раздела можно восстановить с помощью стандартных методов, поэтому они только намечены.

Говорят, что неймановская алгебра M обладает конечным следом, если на элементах M можно определить линейный позитивный функционал Tr_M со свойствами:

1. $Tr_M(I) = 1$ (конечность, нормированность).
2. Если P – проектор из M и $Tr_M(P) = 0$, то $P = 0$ (точность).
3. $Tr_M(xy) = Tr_M(yx)$ $(x, y \in M)$
4. Если $x, x_n \in M$ и x есть сильный предел x_n, то $Tr_M(x) = \lim_{n\to\infty} Tr_M(x_n)$.

Простейшим примером неймановской алгебры с конечным следом μ может служить коммутативная неймановская алгебра A в сепарабельном гильбертовом пространстве. Если A_P –множество всех проекторов, то сужение μ на A_P называют мерой.

Напомним, что фактором M называют неймановскую алгебру в гильбертовом пространстве H, центр которой состоит только из операторов вида λI, где I –единичный оператор, а λ – число. Таким образом, если M' – коммутант M, т.е. множество всех линейных ограниченных операторов в H, перестановочных с каждым оператором из M, то $M \cap M' = \{\lambda I\}$.

Приведем известную классификацию факторов M с конечным следом. Если M_P –множество всех проекторов из M, то сужение Tr_M на M_P принято называть функцией размерности. Если функция размерности принимает значения $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1)$ (n –натуральное число), то говорят, что M – фактор типа I_n. Если же функция размерности принимает все значения из интервала $[0,1]$, то говорят, что фактор M имеет тип II_1.

В соответствии с этой классификацией факторов с конечным следом неймановская алгебра M называется алгеброй типа I_n (n = 1,2...)(или типа II_1), если M можно представить в виде прямого интеграла факторов типа I_n ($n = 1,2 \ldots$) (или типа II_1). (Аналогичным образом можно ввести понятие неймановской алгебры типа II_∞ и типа III [2] .

Легко проверяется, что всякая неймановская алгебра M типа I_n представима в виде тензорного произведения $R \otimes \mathfrak{Z}_M$, где $\mathfrak{Z}_M$ - центр M , а R - фактор типа I_n .

Неймановскую алгебру M условимся называть алгеброй типа I , если она распадается в прямую сумму алгебр типа I_n ($n = 1,2 \ldots, \infty$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Неймановская алгебра M с конечным следом Tr_M и центром $\mathfrak{Z}_M$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H называется аппроксимативной конечной алгеброй (А К алгеброй) или гиперфинитной алгеброй, если для произвольного числа $\varepsilon>0$ и любого конечного набора операторов a_i $(1 \le i \le S)$ из M существует подалгебра $R \subset M$ типа I , центр которой $\mathfrak{Z}_R$ содержит $\mathfrak{Z}_M$ и в которой найдутся элементы b_i $(1 \le i \le S)$ такие, что

$$\|a_i - b_i\|_2 = Tr_M((a_i - b_i)^*(a_i - b_i))^{1/2} < \varepsilon. \qquad (2.1)$$

Приведем еще одно определение А К алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Неймановская алгебра M типа II_1 с конечным следом Tr_M и центром $\mathfrak{Z}_M$ называется аппроксимативно конечной (или гиперфинитной), если M порождена возрастающей последовательностью алгебр N_i типа I_{n_i} , центры которых совпадают с $\mathfrak{Z}_M$.

Муррей и фон Нейман [3] для случая А К факторов типа II_1 доказали эквивалентность этих определений. Это доказательство переносится на алгебры типа II_1 , если воспользоваться понятием условного ожидания M относительно $\mathfrak{Z}_M$ [2] . В этой же работе Муррей и фон Нейман доказали, что все А К факторы типа II_1 *- изоморфны между собой.

Эквивалентность определений для алгебр типа II_1 можно доказать, воспользовавшись результатами работы [7] . Если выполнено определение 2.1, то, как легко проверить, M разлагается в прямой интеграл А К факторов типа II_1 . Поскольку все АК факторы типа II_1 * - изоморфны, то из [7] следует, что M можно представить в виде тензорного произведения $R \otimes \mathfrak{Z}_M$, где $\mathfrak{Z}_M$ - центр M , а R - АК фактор типа II_1 . Так как R порожден возрастающей последовательностью факторов R_i типа I_{n_i} , то $M = R \otimes \mathfrak{Z}_M$ удовлетворяет требованиям определения 2.2.

Перечислим свойства А К алгебр типа II_1 , которые будут использованы в этой статье.

(i) Всякая А К алгебра M типа II_1 представима в виде тензорного произведения $R \otimes \mathfrak{Z}_M$, где R - АК - фактор типа II_1 , а $\mathfrak{Z}_M$ - центр M .

Как мы отмечали, этот результат является следствием [7] . Его можно доказать непосредственно, исходя из определения 2.2.

(ii) Если неймановская алгебра M с конечным следом в сепарабельном гильбертовом пространстве порождена возрастающей последовательностью А К алгебр M_α , где α пробегает вполне упорядоченное множество A , то M - А К алгебра. Так как $M = \overline{\bigcup_\alpha M_\alpha}$, то легко проверить, что M удовлетворяет требованиям определения 2.1.

(iii) Если M_i ($i = 1,2,\ldots$)- убывающая последовательность А К алгебр типа II_1 , то $M = \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$ - А К алгебра.

Свойство (iii) в предположении, что M и M_i($i = 1,2,\ldots$)- факторы типа II_1 , доказано в [8] . В настоящем,более общем случае,это доказывается аналогично.(Для доказательства (iii) нужно ввести понятие аппроксимативной конечной неймановской алгебры следующим образом. Неймановская алгебра $\mathfrak{M}$ с центром $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{M}}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется аппроксимативно конечной А К алгеброй, если для всякого числа $\varepsilon>0$, любого конечного набора операторов a_i $(1 \le i \le s)$ из $\mathfrak{M}$ и произвольного конечного множества векторов ξ_j $(1 \le j \le t)$ из $\mathfrak{H}$ существует алгебра $\mathfrak{N}$ типа I , центр которой $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{N}}$ содержит $\mathfrak{Z}_{\mathfrak{M}}$, и в которой найдутся операторы b_i $(1 \le i \le s)$ такие, что

$$\|(b_i - a_i)\xi_j\| < \varepsilon \,(1 \le i \le s;\ j = 1,\ldots,t).$$

Точно так же, как и в [8] ,доказывается,что если $\mathfrak{M}$ -А К алгебра,то $\mathfrak{M}'$ -снова А К алгебра.Из определения А К алгебры следует,что если $\mathfrak{M} = \overline{\bigcup_n \mathfrak{M}_n}$, где $\mathfrak{M}_n$ -возрастающая последовательность А К алгебр,то $\mathfrak{M}$ - А К алгебра).

Перейдем к доказательству (iii). Пусть M' – коммутант M в H, а M'_i – коммутант M ($i = 1,2,\ldots$). Тогда $M' = \bigcup_{i=1}^{\infty} M'_i$. Более того, поскольку $M_1 \supset M_2 \supset \ldots$, то $M'_1 \subset M'_2 \subset \ldots$, а так как M_i – А К алгебра, то M'_i – снова А К алгебра. Следовательно, M', а потому и M, – А К алгебры. Доказательство (iii) закончено.

(iv) Если M – А К алгебра с конечным следом в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а P – проектор из M, то PMP снова А К алгебра в пространстве PH.

Для факторов типа II_1 этот результат доказан в [3]. В нашем случае он доказывается аналогично. Наметим, однако, основные моменты доказательства. Без ограничения общности можно предполагать, что центральный носитель P равен I. Тогда можно доказать, что $(PMP)' = PM'$. Но алгебра PM' * – изоморфна M'. Следовательно, PM' –АК алгебра, поэтому PMP – также А К алгебра.

3. Перейдем к изучению коммутанта гиперфинитного подфактора в гиперфинитном факторе типа II_1.

Л Е М М А 3.I. Если N – гиперфинитный подфактор гиперфинитного фактора M типа II_1 в сепарабельном гильбертовом пространстве H, то $N^c = N' \cap M$ является А К алгеброй.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть N_i – возрастающая последовательность факторов типа I_{n_i} (см. определение 2.2), порождающая N, а N_i^c – коммутант N_i в $\underline{M}$. Тогда N_i^c –гиперфинитный подфактор M типа II_1 [3]. Легко видеть, что поскольку $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, то $N^c \supset \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i^c$. С другой стороны, поскольку $N^c \subset N_i^c$, то $N^c \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i^c$. Следовательно, $N^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} N_i^c$. В силу свойства (iii) р. 2 N^c – А К алгебра. Лемма доказана.

Л Е М М А 3.2. Пусть выполнены предположения леммы 3.I относительно M, а A – коммутативная неймановская подалгебра M, тогда коммутант A в M, т.е. алгебра $A^c = A' \cap M$, является АК алгеброй.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Так как H сепарабельно, то в A существует счетное семейство проекторов (P_i), порождающих A. Рассмотрим алгебру A_n, порожденную проекторами $(P_i, I - P_i)$, где $1 \le i \le n$. Положим $E_i^0 = P_i$, $E_i^1 = I - P_i$. Тогда атомами A_n служат проекторы

$$F(x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} E_i^{x_i} \qquad (x_i = 0 \text{ или } I)$$

Рассмотрим теперь неймановскую подалгебру M_n алгебры M вида

$$M_n = \sum_{(x_1 \ldots x_n)} F(x_1 \ldots x_n) M F(x_1, \ldots, x_n).$$

Так как $F(x_1, \ldots, x_n) M F(x_1, \ldots, x_n)$ – А К алгебра для любых $(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i = 0$ или I, в пространстве $F(x_1 \ldots x_n) H$ (см. (iv) р.2), а $\sum_{(x_1 \ldots x_n)} F(x_1 \ldots x_n) = I$, то M_n – А К алгебра. Легко доказать, что $A^c = \bigcap_n M_n$. Следовательно, A^c – А К алгебра (см. (iii) р.2). Лемма доказана.

Т Е О Р Е М А 3.3. Пусть M –гиперфинитный фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а N – А К подалгебра M. Тогда коммутант N в M, т.е. алгебра $N^c = N' \cap M$, является А К алгеброй.

Теорема является следствием (i) р. 2 и лемм 3.I и 3.2.

4. В этом разделе будет доказан основной результат данной работы.

Т Е О Р Е М А 4.I. Пусть гиперфинитный фактор M типа II_1 в сепарабельном гильбертовом пространстве H представим в виде тензорного произведения двух факторов M_i типа II_1 ($i = 1,2$). Тогда M_i $(i = 1,2)$ – гиперфинитные факторы.

(Обратное утверждение – простое следствие определения гиперфинитного фактора).

Для доказательства теоремы нам понадобится следующее.

Л Е М М А 4.2. Если M–не гиперфинитный фактор типа II_1, то в M существует максимальная А К подалгебра N типа II_1. Более того, коммутант N в M является либо алгеброй вида $\{\lambda I\}$, либо коммутативной подалгеброй M.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Справедливость первого утверждения вытекает из свойства (ii) р. 2 и леммы Цорна с помощью стандартных рассуждений. Пусть теперь N –максимальная А К подалгебра M. Ясно, что $N \cap N^c$ – центр N. Если N^c не совпадает с $N \cap N^c$, то в N^c существует А К подалгебра R типа I_n для некоторого $n < \infty$, с центром, равным

$N \cap N^c$. Но тогда алгебра $C(N,R)$, порожденная N и R, будет А К подалгеброй M, содержащей N, что противоречит максимальности N. Таким образом, если N -максимальная А К подалгебра M, то $N^c = N \cap N^c$. Лемма доказана.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О   Т Е О Р Е М Ы 4.I. Пусть N - максимальная А К подалгебра M_1, через $\mathfrak{Z}_N$ обозначим центр N, а через N^c - коммутант N в M. Согласно теореме 3.3, N^c - А К подалгебра M, причем понятно, что $\mathfrak{Z}_N \otimes M_2 \subset N^c$.

Докажем, что $N^c = \mathfrak{Z}_N \otimes M_2$. Из результатов р. 2 будет тогда следовать, что M_2 - А К фактор типа II_1. Аналогично доказывается, что M_1 - А К фактор типа II_1.

Итак, докажем, что $N^c = \mathfrak{Z}_N \otimes M_2$. Поскольку $M = M_1 \otimes M_2$, то $Tz_M = Tz_{M_1} \times Tz_{M_2}$. Определим на элементах M норму, положив для $m \in M$

$$\|m\|_2 = Tz_M (m^* m)^{1/2}.$$

Относительно этой нормы M превращается в предгильбертово пространство, пополнение которого обозначим через $H(M)$. Ясно, что $H(M)$ является тензорным произведением пространств $H(M_1)$ и $H(M_2)$, т.е. $H(M) = H(M_1) \otimes H(M_2)$. Выберем в $H(M_2)$ полный ортонормированный базис (u_i). (Легко видеть, что этот базис при помощи обычного процесса ортогонализации можно построить таким образом, чтобы $u_i \in M_2$ (i = I,2,...)). Тогда всякому элементу $m \in M$ отвечает ряд $m \sim \sum_{i=1}^{\infty} b_i(m) \otimes u_i$, где $b_i(m) \in H(M_1)$, $Tz_{M_1}(b_i(m)^* b_i(m)) < \infty$

$\|m\|_2^2 = \sum_{i=1}^{\infty} Tz_{M_1}(b_i^* b_i)$.

Согласно результатам [4] $b_i(m)$ можно рассматривать как операторы в $H(M_1)$, присоединенные к M_1, для которых $Tz_{M_1}(b_i^* b_i) < \infty$.

Пусть теперь $m \in N^c$. Тогда, поскольку $mn = nm$ для всякого $n \in N$, то при i = I,2,... выполнены равенства

$$n b_i(m) = b_i(m) n, \tag{4.I}$$

ввиду того, что ряды $\sum_i n b_i(m) \otimes u_i$ и $\sum_i b_i(m) n \otimes u_i$, отвечающие элементу $nm = mn$, совпадают. Так как $b_i(m)$ присоединены к M_1, то из (4.I) следует, что они присоединены к $N' \cap M_1$, т.е. к $\mathfrak{Z}_N$ (поскольку $\mathfrak{Z}_N = N' \cap M_1$ согласно лемме 4.2). Но тогда $m \in \mathfrak{Z}_N \otimes M_2$, т.е. $N^c \subseteq \mathfrak{Z}_N \otimes M_2$.

Ввиду того, что обратное включение также имеет место (см. начало доказательства), то $N^c = \mathfrak{Z}_N \otimes M_2$. Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. М.А.Наймарк, Нормированные кольца, Мир, М, I969.

2. J.Dixmier, Les algebres d'operators dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

3. F.J.Murray, J.von Neumann, On rings of operators IY, Ann.Math. 44, 716-808, 1943.

4. F.J.Murray, J.von Neumann, On rings of operators II, Trans.Amer.Math.Soc.41, 208-248, 1937.

5. S.Sakai, On hyperfinite II_1-factors, TAMS 19, 3, 589-593, 1968.

6. S.Sakai, The theory of W^*- algebras, Lecture Notes, Yale University, 1962.

7. M.Takesaki, Remark of the reduction theory of von Neumann algebras, TAMS 20, 2, 434-438, 1969.

8. В.Я.Голодец, О гиперфинитных факторах типа II_∞, (см. настоящий сборник)

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

О ГИПЕРФИНИТНЫХ ФАКТОРАХ ТИПА II_∞.

В.Я.Голодец

В настоящей статье доказано, что все гиперфинитные факторы типа II_∞ алгебраически изоморфны между собой. Этот результат получается в качестве следствия из известных теорем Муррея и фон Неймана [1] о том, что все гиперфинитные факторы типа II_1 алгебраически изоморфны, а также из наших результатов о коммутанте для гиперфинитного фактора типа II_∞ (§2) В связи с этим интересно напомнить, что, как показал Р.Пауэрс [4], существует континуум не изоморфных гиперфинитных факторов типа III.

Из теоремы об изоморфизме гиперфинитных факторов типа II_∞ следует, что фактор типа II_1, который получен пересечением гиперфинитных факторов типа II_1, сам является гиперфинитным. Этот результат, также ранее не известный, доказан в настоящей статье.

Статья состоит из двух параграфов. В § I изложены основные определения и предварительные результаты. В § 2 доказаны теоремы о коммутанте, об изоморфизме факторов типа II_∞, и получены следствия из них.

§ I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

I. О ФАКТОРАХ ТИПА I, II и III. Слабозамкнутое симметрическое кольцо $\mathfrak{M}$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, содержащее единичный оператор I, называется неймановской алгеброй. Через $\mathfrak{M}'$ принято обозначать коммутант $\mathfrak{M}$, т.е. множество всех линейных ограниченных операторов в H, перестановочных с каждым оператором из $\mathfrak{M}$. Отметим следующие свойства неймановских алгебр: I) $\mathfrak{M}''=\mathfrak{M}$ и 2) $\mathfrak{M}$ замкнута относительно сильной топологии [2, 3].

Неймановская алгебра называется фактором, если ее центр состоит лишь из операторов вида λI, где λ - комплексное число или $\mathfrak{M}\cap\mathfrak{M}'=\{\lambda I\}$. Хорошо известно из [2, 3], что на элементах $\mathfrak{M}$ можно определить линейный, однородный, позитивный функционал $Tr_{\mathfrak{M}}$, называемый следом, обладающий следующими свойствами:

I)если P - проектор из $\mathfrak{M}$ и $Tr_{\mathfrak{M}}(P)=0$, то $P=0$ (точность);

2) $Tr(A)=Tr(U^*AU)$, где $A\in\mathfrak{M}$, а U - унитарный оператор из $\mathfrak{M}$;

3) если A_n - последовательность положительно определенных эрмитовых операторов из $\mathfrak{M}$, а ряд $\sum_n A_n$ сильно сходится к $A\in\mathfrak{M}$, то $Tr(A)=\sum_n Tr(A_n)$ (нормальность).

Пусть $\mathfrak{M}_p$ - множество всех проекторов из $\mathfrak{M}$. Сужение $Tr_{\mathfrak{M}}$ на $\mathfrak{M}_p$ принято называть функцией размерности. Если функция размерности для фактора $\mathfrak{M}$ принимает лишь значения $1,2,\ldots,n$, то говорят, что $\mathfrak{M}$ имеет тип I_n. В частности, n может быть равно ∞. Если функция размерности принимает все значения из интервала $[0,\alpha]$, где $0<\alpha<\infty$, то $\mathfrak{M}$ имеет тип II_1; если функция размерности принимает все значения из интервала $[0,\infty]$, то $\mathfrak{M}$ имеет тип II_∞. И, наконец, $\mathfrak{M}$ имеет тип III, если функция размерности принимает только значения 0 и ∞.

Два фактора $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называются алгебраически изоморфными (или $*$ -изоморфными), если существует взаимно однозначное отображение $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}_2$, сохраняющее инволюцию и алгебраические операции.

Фактор типа I_n, например, $*$ - изоморфен полному матричному кольцу порядка n над комплексным полем, а фактор типа I_∞ $*$- изоморфен кольцу всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве.

Два фактора $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно называются пространственно изоморфными, если существует линейная изометрия из H_1 на H_2, отображающая $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}_2$.

Если $\mathfrak{M}$ – фактор типа I, то его коммутант $\mathfrak{M}'$ – снова фактор типа I (I_n или I_∞ в любой комбинации); если $\mathfrak{M}$ – фактор типа II, то его коммутант – фактор типа II_1 или II_∞. Коммутант $\mathfrak{M}'$ для фактора $\mathfrak{M}$ типа III – фактор типа III.

Два проектора P_1 и P_2, принадлежащие фактору $\mathfrak{M}$, называются эквивалентными, если $Tr_{\mathfrak{M}}(P_1) = Tr_{\mathfrak{M}}(P_2)$. Для эквивалентных проекторов P_1 и P_2 существует частично изометрический оператор $U \in \mathfrak{M}$, для которого $U^*U = P_1$ и $UU^* = P_2$.

Пусть элементы фактора $\mathfrak{M}$ являются операторами в гильбертовом пространстве H, а $P \in \mathfrak{M}_P$, то в пространстве PH можно рассмотреть операторы $P_m P$, где $m \in \mathfrak{M}$ и $P_{m'} P = P_{m'} = m' P$, где $m' \in \mathfrak{M}$. Неймановскую алгебру в PH, порожденную операторами PmP, где $m \in \mathfrak{M}$, обозначим через $\mathfrak{M}_{PH}$, а алгебру, порожденную операторами $m' P$, где $m' \in \mathfrak{M}'$, обозначим через $\mathfrak{M}'_{PH}$. При этом оказывается, что $\mathfrak{M}_{PH} = P\mathfrak{M}P$, а $\mathfrak{M}'_{PH} = P\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'P$. Более того, $(\mathfrak{M}_{PH})' = \mathfrak{M}'_{PH}$, и $\mathfrak{M}'_{PH}$ алгебраически изоморфно $\mathfrak{M}'$. Следовательно, $\mathfrak{M}_{PH}$ и $\mathfrak{M}'_{PH}$ – факторы [2, 3].

Далее, если ξ – вектор из H, то можно рассмотреть линейное многообразие $\mathfrak{M}_\xi$, состоящее из векторов $m\xi$, где $m \in \mathfrak{M}$. Замыкание $\mathfrak{M}_\xi$ относительно нормы в H обозначим через $[\mathfrak{M}_\xi]$. Если $P_{[\mathfrak{M}_\xi]}$ – проектор на $[\mathfrak{M}_\xi]$, то, поскольку $[\mathfrak{M}_\xi]$ инвариантно относительно $\mathfrak{M}$, $P_{[\mathfrak{M}]} \in \mathfrak{M}'$.

2. ПОНЯТИЕ ГИПЕРФИНИТНОГО ФАКТОРА. Пусть $\langle n_i ; i = 1,2,\dots \}$ – последовательность натуральных чисел, причем $n_i < n_{i+1}$, $n_i \to \infty$ при $i \to \infty$ и n_i является делителем n_{i+1}. Фактор $\mathfrak{M}$ называется гиперфинитным фактором класса $\{n_i ; i = 1,2,\dots\}$, если в $\mathfrak{M}$ существует возрастающая последовательность факторов M_i типа I_{n_i} такая, что слабое, а значит и сильное, замыкание $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ совпадает с $\mathfrak{M}$ [4].

В действительности понятие гиперфинитного фактора не зависит от класса. А именно: всякий гиперфинитный фактор класса $\{n_i ; i = 1,2,\dots\}$ является гиперфинитным фактором любого другого класса и, в частности, класса $\langle 2^i ; i = 1,2,\dots\}$ [5]. Более того, с помощью методов работы [5] легко показать, что фактор $\mathfrak{M}$ будет гиперфинитным тогда и только тогда, когда он порожден возрастающей последовательностью $*$-алгебр N_i, каждую из которых можно представить в виде конечной прямой суммы факторов типа $I_n (n < \infty)$.

Для гиперфинитных факторов типа II_1 эти результаты были доказаны Мурреем и фон Нейманом [1]. В [1] доказано также, что все гиперфинитные факторы типа II_1, в сепарабельных гильбертовых пространствах алгебраически изоморфны.

3. ПОЗИТИВНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НА СИММЕТРИЧЕСКИХ КОЛЬЦАХ

Пусть R – симметрическое кольцо с единицей, а F – линейный функционал на R. Функционал F на R называется позитивным, если $F(a^*a) \geq 0$ для $a \in R$.

Всякий позитивный функционал F на R определяет представление π кольца R в гильбертовом пространстве H с точностью до унитарной эквивалентности, причем $F(a) = (\pi(a)\xi, \xi)$, где $(. , .)$ – скалярное произведение в H, а ξ – вектор из H. Более того, оказывается, что $[\pi(R)\xi] = H$, т.е. ξ -циклический вектор для $\pi(R)$. Описанная конструкция принадлежит И.М.Гельфанду и М.А.Наймарку (см. [2], § 17).

Линейный позитивный функционал F_1 на R называется подчиненным функционалу F ($F_1 \prec F$), если существует положительное число λ такое, что $\lambda F - F_1$ – также позитивный функционал на R. Далее, линейный функционал F_2, не обязательно позитивный, называется подчиненным позитивному функционалу F, если F_2 есть линейная комбинация с комплексными коэффициентами позитивных функционалов, подчиненных F ([2], § 19).

Т Е О Р Е М А 3.1. ([2], § 19). Пусть $a \to \pi(a)$ – циклическое представление симметрического кольца R в пространстве H, определенное данным позитивным функционалом F, а ξ – циклический вектор. Тогда всякий линейный функционал F_1, подчиненный F, имеет вид

$$F_1(a) = (\pi(a)b\xi, \xi) = (b\pi(a)\xi, \xi), \tag{3.1}$$

где b – линейный ограниченный оператор в пространстве H, перестановочный с каждым оператором $\pi(a)$, где $a \in R$, или иначе, $b \in \pi(R)'$. Обратно, всякий такой оператор определяет позитивный функционал F_b, подчиненный F, по формуле (3.1).

Соответствие $F_b \sim b$ – взаимно однозначно.

§ 2. СВОЙСТВА ГИПЕРФИНИТНЫХ ФАКТОРОВ

В этом параграфе доказываются основные результаты данной статьи (см. введение).

I. О КОММУТАНТЕ ДЛЯ ГИПЕРФИНИТНЫХ ФАКТОРОВ. В этом разделе излагается доказательство следующей теоремы.

Т Е О Р Е М А I.I. Пусть $\mathfrak{M}$ – гиперфинитный фактор, элементы которого являются операторами в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда, если $\mathfrak{M}'$ – коммутант $\mathfrak{M}$ в H, то $\mathfrak{M}'$ – также гиперфинитный фактор.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Говорят, что неймановская алгебра $\mathfrak{M}$ имеет в пространстве циклическое представление, если в H существует вектор, для которого $[\mathfrak{M}_\xi]=H$.

Л Е М М А I.2. Пусть неймановская алгебра $\mathfrak{M}$ имеет в пространстве $\mathfrak{H}$ циклическое представление с циклическим вектором ξ, т.е. $[\mathfrak{M}_\xi]=\mathfrak{H}$; M – неймановская подалгебра $\mathfrak{M}$ и $H=[M_\xi]$. Обозначим через E проектор на подпространство H и рассмотрим в H неймановскую алгебру $\mathfrak{M}_H$, порожденную операторами вида EmE, где $m\in\mathfrak{M}$. Пусть $(\mathfrak{M}_H)'$–коммутант $\mathfrak{M}_H$ в пространстве H. Тогда всякий оператор a' из $(\mathfrak{M}_H)'$ можно расширить до оператора $\pi(a')$ из $\mathfrak{M}'$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Более того, $\pi((\mathfrak{M}_H)')$ – слабозамкнутая $*$ – подалгебра $\mathfrak{M}'$, $*$ – изоморфная $(\mathfrak{M}_H)'$. (В частности, если M – фактор типа I_n $(n<\infty)$, то $\dim H\le n^2$, а $\pi((\mathfrak{M}_H)')$ обладает конечным базисом из линейно независимых элементов).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Докажем одно вспомогательное неравенство. Пусть η –вектор из H, $b\in\mathfrak{M}$ и $a'\in(\mathfrak{M}_H)'$, тогда

$$\|ba'\eta\|^2=(bEa'\eta, bEa'\eta)=(Eb^*bEa'\eta, a'\eta)=(a'^*a'Eb^*bE\eta,\eta), \tag{I.I}$$

Обозначим $\alpha=\|a'\|$ и рассмотрим оператор $h'=\sqrt{\alpha^2-a'^*a'}$, тогда $h'\in(\mathfrak{M}_H)'$. Учитывая (I.I), получаем, что

$$\|ba'\eta\|^2+\|bh'\eta\|^2=((h'^2+a'^*a')Eb^*bE\eta,\eta)=\alpha^2(b\eta,b\eta)=\alpha^2\|b\eta\|^2.$$

Следовательно, для любого вектора $\eta\in H$, $b\in\mathfrak{M}$ и $a\in(\mathfrak{M}_H)'$ имеет место неравенство

$$\|ba'\eta\|\le\alpha\|b\eta\|. \tag{I.2}$$

Теперь для всякого линейного оператора $a'\in(\mathfrak{M}_H)'$ в пространстве H определим линейный оператор $\pi(a')$ в $\mathfrak{H}$, положив

$$\pi(a')b\eta=ba'\eta \tag{I.3}$$

для любых $\eta\in H$, $b\in\mathfrak{M}$. Из (I.2) следует, что если $b\eta=0$ для некоторых $b\in\mathfrak{M}$ и $\eta\in H$, то $\pi(a')b\eta=0$. Таким образом, $\pi(a')$ определен корректно. Поскольку $[\mathfrak{M}_\xi]=\mathfrak{H}$, то $\pi(a')$ определен на плотном подмножестве $\mathfrak{M}_\xi$ пространства $\mathfrak{H}$, поэтому, в силу (I.2), $\pi(a')$ может быть однозначно расширен до линейного ограниченного оператора в пространстве $\mathfrak{H}$, причем из (I.3) следует, что сужение этого оператора на H совпадает с a'.

Покажем, что $\pi(a')\in\mathfrak{M}'$. Действительно, если $d\in\mathfrak{M}$, то из (I.3) выводим, что для любого $b\in\mathfrak{M}$

$$d\pi(a')b\xi=dba'\xi=\pi(a')db\xi.$$

Ввиду произвольности $b\in\mathfrak{M}$ и того, что $[\mathfrak{M}_\xi]=\mathfrak{H}$, $d\pi(a')=\pi(a')d$ для всякого $d\in\mathfrak{M}$. Следовательно, $\pi(a')\in\mathfrak{M}'$.

Теперь докажем, что $\pi((\mathfrak{M}_H)')$ – $*$ – подалгебра $\mathfrak{M}'$, $*$ –изоморфная $(\mathfrak{M}_H)'$. Для этого достаточно доказать, что отображение $a'\to\pi(a')$ из $(\mathfrak{M}_H)'$ в $\mathfrak{M}'$ есть $*$ –мономорфизм. Во-первых, понятно, что отображение $a'\to\pi(a')$ является линейным и однородным, во-вторых, из (I.3) следует, что если $a',b'\in(\mathfrak{M}_H)'$, то $\pi(a'b')=\pi(a')\pi(b')$, поскольку $b'\eta\in H$

при $\eta \in H$.

Докажем, что $\pi(a'^*) = \pi^*(a')$. Действительно, если b – произвольный оператор из $\mathfrak{M}$, то

$$(b\xi, \pi(a')^*\xi) = (\pi(a')b\xi, \xi) = (\pi(a')b\xi, E\xi) = (E\pi(a')b\xi, \xi)$$
$$= (\pi(a')Eb\xi, \xi) = (a'Eb\xi, \xi) = (b\xi, (a')^*\xi).$$

Ввиду произвольности $b \in \mathfrak{M}$, получаем, что $\pi(a')^*\xi = (a')^*\xi$. Следовательно, учитывая (I.3), находим, что для любого $b \in \mathfrak{M}$

$$\pi(a')^* b\xi = b\pi(a')^*\xi = b(a')^*\xi = \pi(a'^*)b\xi.$$

Поскольку b – произвольный элемент $\mathfrak{M}$, а $[\mathfrak{M}_\xi] = H$, то $\pi(a')^* = \pi(a'^*)$. Лемма доказана.

Л Е М М А I.3. Пусть M – фактор типа $I_n (n < \infty)$ или прямая конечная сумма факторов типа I_{t_i} $(i = 1, \dots, k)$, где t_i, $k < \infty$, и пусть Φ – позитивный линейный функционал на M, а Φ' – некоторый линейный функционал на M, удовлетворяющий условию:

$$\Phi'(x^* x) = 0 \quad \text{, если} \quad \Phi(x^*, x) = 0 \quad , \tag{I.4}$$

где $x \in M$. Тогда Φ' подчинен Φ (см. р.3 § I).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Обозначим через M_+ – множество всех эрмитовых позитивных элементов из M. Предположим сначала, что Φ' – также позитивный функционал на M. Тогда, поскольку множество всех $x \in M_+$, для которых $\|x\| = 1$, компактно, то, в силу (I.4), существует такое число λ, что $\Phi'(x) \leq \lambda\Phi(x)$ при всех $x \in M_+$, т.е. в этом случае $\Phi' \prec \Phi$. Предположим теперь, что Φ' – эрмитов функционал на M, т.е. что Φ' на M_+ принимает вещественные значения. Тогда Φ' можно представить в виде $\Phi' = \Phi'_+ - \Phi'_-$, где Φ'_+, Φ'_- –позитивные эрмитовы функционалы на M, носители которых на M_+ дизъюнктны. В силу предыдущего, Φ'_+, $\Phi'_- \prec \Phi$, следовательно, $\Phi' \prec \Phi$. Наконец, если Φ' – произвольный линейный функционал на M, удовлетворяющий (I.4), то $\Phi' = \Phi'_1 + i\Phi'_2$, где Φ'_1, Φ'_2 –линейные эрмитовы функционалы, также удовлетворяющие (I.4). Таким образом, из предыдущего вытекает, что $\Phi'_1, \Phi'_2 \prec \Phi$, следовательно, $\Phi' = \Phi'_1 + i\Phi'_2 \prec \Phi$. Лемма доказана.

Л Е М М А I.4. Пусть $\mathfrak{M}$ – фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а P – проектор из $\mathfrak{M}$. Для того, чтобы $\mathfrak{M}$ был гиперфинитным фактором, достаточно, чтобы фактор $\mathfrak{M}_{PH}$ (по поводу обозначений см. конец р. I§ I) в пространстве PH был гиперфинитным.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Если $\mathfrak{M}$ – фактор типа II_1, то, как показано в [I], фактор $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда будет гиперфинитным, когда гиперфинитным является фактор $\mathfrak{M}_{PH}$ в пространстве PH, где P – проектор из $\mathfrak{M}$ *).

Пусть $\mathfrak{M}$ имеет тип III. Так как $Tr_{\mathfrak{M}}(P) = Tr_{\mathfrak{M}}(I) = \infty$, то проекторы P и I эквивалентны. Следовательно, существует частично изометрический оператор U из $\mathfrak{M}$, для которого $U^*U = P$, $UU^* = I$. Согласно § 38 [2] алгебра $\mathfrak{M}_{PH}$ совпадает с $P\mathfrak{M}P$. Но $P\mathfrak{M}P = U^*\mathfrak{M}U$. Следовательно, факторы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_{PH}$ пространственно изоморфны (см.р.I § I), а поэтому они одновременно являются или не являются гиперфинитными.

Наконец, пусть $\mathfrak{M}$ имеет тип II_∞. Если $Tr_{\mathfrak{M}}(P) = \infty$, то лемма доказывается точно так же, как и в случае, когда $\mathfrak{M}$ имеет тип III. Если же $Tr_{\mathfrak{M}}(P) < \infty$, то $\mathfrak{M}_{PH}$ – фактор типа II_1 и, более того, согласно предположению леммы, $\mathfrak{M}_{PH}$ – гиперфинитный фактор. Известно, что фактор $\mathfrak{M}$ типа II_∞ можно представить в виде кольца ограниченных бесконечных матриц над кольцом $\mathfrak{M}_{PH}$ [2, § 38, теорема I], которое в нашем случае является гиперфинитным фактором типа II_1. Но подобная реализация для $\mathfrak{M}$ означает, что $\mathfrak{M}$ алгебраически изоморфен тензорному произведению фактора $\mathfrak{M}_{PH}$ типа II_1 на фактор $\mathfrak{N}$ типа I_∞ в сепарабельном гильбертовом пространстве ($\mathfrak{M} \approx (\mathfrak{M}_{PH}) \otimes \mathfrak{N}$). Так как $\mathfrak{M}_{PH}$ – гиперфинитный фактор, то существует возрастающая последовательность факторов M_i типа I_{n_i}, порождающая $\mathfrak{M}_{PH}$. Фактор $\mathfrak{N}$ типа I_∞ в сепарабельном гильбертовом пространстве всегда является гиперфинитным, поэтому в $\mathfrak{N}$ также существует возрастающая последовательность факторов $\mathfrak{N}_i$ типа I_{m_i}, порождающая $\mathfrak{N}$. Но тогда $M_i \otimes \mathfrak{N}_i$ ($i = \mathrm{I}, 2, \dots$) – возрастающая последовательность факторов типа $I_{n_i m_i}$, порождающая $\mathfrak{M}_{PH} \otimes \mathfrak{N}$. Лемма доказана.

*) Для факторов типа II_1 лемма может быть легко доказана без ссылки на [I] с помощью соображений, близких к тем, которые будут использованы при рассмотрении случая, когда $\mathfrak{M}$ имеет тип II_∞.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы I.I. Пусть выполнены предположения теоремы I.I. Через ξ обозначим вектор из H, а через $P' = P_{[\mathfrak{M}\xi]}$ обозначим проектор на подпространство $[\mathfrak{M}\xi]$. Тогда $P' \in \mathfrak{M}'$ и можно рассмотреть факторы $\mathfrak{M}_{P'H}$ и $\mathfrak{M}'_{P'H}$ в пространстве $P'H$ (см. р.I § I). Фактор $\mathfrak{M}_{P'H}$ алгебраически изоморфен $\mathfrak{M}$, а потому он является гиперфинитным. Более того, так как $[\mathfrak{M}_{P'H}\xi] = [P'\mathfrak{M}\xi] = P'H$, то фактор $\mathfrak{M}_{P'H}$ имеет в пространстве $P'H$ циклическое представление. Если бы удалось доказать гиперфинитность фактора $(\mathfrak{M}_{P'H})' = \mathfrak{M}'_{P'H} = P'\mathfrak{M}'P'$, то из леммы I.4 следовала бы гиперфинитность фактора $\mathfrak{M}'$, и теорема была бы доказана.

Таким образом, теорему достаточно доказать в предположении, что алгебра $\mathfrak{M}$ имеет в пространстве H циклическое представление с циклическим вектором ξ, т.е. $[\mathfrak{M}\xi] = H$. В дальнейшем будем считать, что это предположение выполнено.

Условимся о некоторых обозначениях. Пусть M_i – возрастающая последовательность факторов типа I_{n_i}, порождающая $\mathfrak{M}$ (см. р. 2 § I), т.е. $\mathfrak{M} = (\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i)$. Положим $H_i = M_i\xi$, а через E_i обозначим проектор на H_i. Очевидно, что $\dim H_i \leq n_i^2$, более того, $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots$ и $E_1 \leq E_2 \leq \ldots$. Рассмотрим в H_i $*$ - алгебру операторов $\mathfrak{M}_i$, порожденную операторами вида $E_i m E_i$, где m пробегает $\mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M}_i$ – $*$ -подалгебра алгебры всех линейных операторов $B(H_i)$ в конечномерном пространстве H_i. Пусть $\mathfrak{M}'_i$ – коммутант $\mathfrak{M}_i$ в H_i, тогда $\mathfrak{M}'_i$ – $*$ – подалгебра $B(H_i)$, представимая в виде конечной прямой суммы факторов типа I_t ($t < \infty$). Согласно лемме I.2 всякий оператор $m'_i \in \mathfrak{M}'_i$ может быть расширен до оператора $\pi(m'_i)$ из $\mathfrak{M}'$, причем $\pi(\mathfrak{M}'_i)$ – $*$ – подалгебра $\mathfrak{M}'$, $*$ – изоморфная $\mathfrak{M}'_i$. Поскольку $E_1 \leq E_2 \leq \ldots$, то $\mathfrak{M}'_1 \subseteq \mathfrak{M}'_2 \subseteq \ldots$, а следовательно, и $\pi(\mathfrak{M}'_1) \subseteq \pi(\mathfrak{M}'_2) \subseteq \ldots$

Так как E_i, вообще говоря, не принадлежит $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}_i$ не является подалгеброй $\mathfrak{M}$. Важно отметить, что $E_i M_i E_i \subseteq \mathfrak{M}_i$, где $E_i M_i E_i$ – сужение алгебры M_i на H_i, поскольку согласно построению $E_i \in M'_i$.

Пусть теперь m' – произвольный элемент из $\mathfrak{M}'$. Рассмотрим на $\mathfrak{M}$ два функционала $F(x) = (x\xi, \xi)$ и $F_{m'}(x) = (m'x\xi, \xi)$, где $x \in \mathfrak{M}$, а ξ – циклический вектор. Понятно,что $F_{m'}$ подчинен F (см. р.3 § I). Сузим F и $F_{m'}$ на подалгебру M_i ($\subseteq \mathfrak{M}$). Сужения обозначим через F/M_i и $F_{m'}/M_i$, соответственно. Так как $E_i\xi = \xi$ и $E_i \in M'_i$, то $F_{m'}/M_i$ и $F_{m'}/M_i$ можно рассматривать как функционалы на $E_i M_i E_i$, причем очевидно, что $F_{m'}/M_i$ подчинен F/M_i. Расширим теперь функционалы F/M_i и $F_{m'}/M_i$ на $E_i M_i E_i$ до функционалов Φ и $\Phi_{m'}$ на $\mathfrak{M}_i$ следующим образом. Поскольку $H_i = M_i\xi$, то для всякого $x \in \mathfrak{M}_i$ существует такой элемент $a \in M_i$, что $x\xi = a\xi$. Поэтому положим для $x \in \mathfrak{M}_i$

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= F(a) = (a\xi, \xi) = (x\xi, \xi), \\ \Phi_{m'}(x) &= F_{m'}(a) = (m'a\xi, \xi) = (m'x\xi, \xi). \end{aligned} \tag{I.5}$$

Из этого определения вытекает, что Φ и $\Phi_{m'}$ – линейные функционалы на $\mathfrak{M}_i$, причем Φ – позитивный функционал. Если $\Phi(x^*x) = 0$ для некоторого $x \in \mathfrak{M}_i$, то, в силу (I.5), $(x^*x\xi, \xi) = (x\xi, x\xi) = 0$ и поэтому $x\xi = 0$. Но тогда и $\Phi_{m'}(x^*x) = (m'x^*x\xi, \xi) = 0$. Из леммы I.3 следует, что $\Phi_{m'}$ подчинен Φ. Но тогда согласно результатам р. 3 § I в $\mathfrak{M}'_i$ существует оператор m'_i, для которого при любом $x \in \mathfrak{M}_i$ имеет место формула

$$\Phi_{m'}(x) = (m'_i x\xi, \xi). \tag{I.6}$$

В частности, если $x \in M_i$, то в силу (I.5)

$$\begin{aligned} (m'_i x\xi, \xi) &= (m'_i E_i x E_i \xi, \xi) = \Phi_{m'}(E_i x E_i) = F_{m'}(E_i x E_i) \\ &= (m' E_i x E_i \xi, \xi) = (m' x\xi, \xi), \end{aligned} \tag{I.7}$$

поскольку $E_i\xi = \xi$ и $xE_i = E_i x$. Так как $m'_i \in \mathfrak{M}'_i$ может быть расширен согласно лемме I.2 до оператора $\pi(m'_i)$ из $\mathfrak{M}'_i$, то (I.7) можно переписать в виде

$$(\pi(m'_i) x\xi, \xi) = (m'x\xi, \xi).$$

Другими словами, при $x \in M_i$ имеет место равенство

$$((m' - \pi(m'_i)) x\xi, \xi) = 0. \tag{I.8}$$

Таким образом, если x и y операторы из M_k, то для всех $\pi(m'_i)$, для которых $i \geq k$, выполнено равенство

$$((m'-\pi(m'_i))x\xi, y\xi) = ((m'-\pi(m'_i))y^* x\xi, \xi) = 0.$$

Это соотношение означает, что последовательность операторов $\pi(m'_i)$, где i = I,2,... из $\bigcup_{i=1}^{\infty} \pi(\mathfrak{M}'_i)$ слабо сходится к оператору $m' \in \mathfrak{M}'$ для векторов из $\bigcup_{i=1}^{\infty}(M_i\xi)$. Из (I.8) и леммы I.2 следует, что $\|\pi(m'_i)\| \leq \|m'\|$ $(i=1,2,.)$. Поскольку $[\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\xi] = [\mathfrak{M}\xi] = H$, то последовательность $\pi(m'_i)$ (i =I,2,...) слабо сходится к m' в $H^{i=1}$. Ввиду произвольности $m' \in \mathfrak{M}'$ получаем, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} \pi(\mathfrak{M}'_i)$ слабо плотно в $\mathfrak{M}'$. Теорема доказана.

2. ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ФАКТОРОВ ТИПА II_∞. Теорема I.I позволяет доказать, что все гиперфинитные факторы типа II_∞ - изоморфны между собой.

Т Е О Р Е М А 2.I. Все гиперфинитные факторы типа II_∞ в сепарабельном гильбертовом пространстве алгебраически изоморфны между собой и $*$ - изоморфны тензорному произведению гиперфинитного фактора типа II_1 и фактора типа I_∞.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\mathfrak{M}$ - гиперфинитный фактор типа II_∞ в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а P -конечный проектор из $\mathfrak{M}$, т.е. $Tr_{\mathfrak{M}}(P) < \infty$. Рассмотрим факторы $\mathfrak{M}_{PH}$ и $(\mathfrak{M}_{PH})' = \mathfrak{M}'_{PH}$ в пространстве PH. Так как $\mathfrak{M}'_{PH}$ $*$-изоморфен $\mathfrak{M}'$, а $\mathfrak{M}'$ - согласно теореме I.I, гиперфинитный фактор, то $\mathfrak{M}'_{PH} = (\mathfrak{M}_{PH})'$, а значит и $\mathfrak{M}_{PH}$ -гиперфинитные факторы. Но $Tr_{\mathfrak{M}}(P) < \infty$, поэтому $\mathfrak{M}_{PH}$ - гиперфинитный фактор типа II_1. В силу теоремы I § 38 [2], фактор $\mathfrak{M}$ можно представить в виде кольца ограниченных бесконечных матриц над $\mathfrak{M}_{PH}$, т.е. $\mathfrak{M}$ изоморфен тензорному произведению гиперфинитного фактора $\mathfrak{M}_{PH}$ и фактора типа I_∞. Доказательство закончено.

Т Е О Р Е М А 2.2. Пусть $\mathfrak{M}$ - фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве, а P - проектор из $\mathfrak{M}$. Для того, чтобы $\mathfrak{M}$ был гиперфинитным, необходимо и достаточно, чтобы фактор $\mathfrak{M}_{PH}$ в пространстве PH был гиперфинитным.

Теорема - следствие леммы I.3 и теоремы 2.I.

3. ПРИЛОЖЕНИЕ К ФАКТОРАМ ТИПА II_I. Применим теорему 2.I к изучению гиперфинитных факторов типа II_I.

Прежде всего заметим следующее. Для того, чтобы фактор $\mathfrak{M}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве был гиперфинитным, необходимо и достаточно, чтобы для всякого числа $\varepsilon > 0$ для произвольно конечного набора операторов a_i $(1 \leq i \leq s)$ из $\mathfrak{M}$ и любого конечного множества векторов ξ_j $(1 \leq j \leq t)$ существовал подфактор M типа I_n $(n < \infty)$, содержащий операторы b_j $(1 \leq i \leq s)$, для которых

$$\|(a_i - b_i)\xi_j\| < \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, s; \quad j = 1, \ldots, t).$$

Для факторов типа II_1 этот результат доказан в [I], для факторов II_∞ и III он может быть доказан аналогично, причем все построения [I] для этих случаев сильно упрощаются, поскольку все проекторы, с которыми приходится иметь дело в этих случаях, бесконечны, а потому и эквивалентны.

Из сформулированного результата легко следует, что если фактор $\mathfrak{M}$ порожден возрастающей последовательностью гиперфинитных факторов, то сам $\mathfrak{M}$ также является гиперфинитным.

Т Е О Р Е М А 3.I. Пусть $\mathfrak{M}_n$ - убывающая последовательность гиперфинитных факторов (например, типа II_1) в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Если $\mathfrak{M} = \prod_n \mathfrak{M}_n$ -фактор (типа II_1), то $\mathfrak{M}$ - необходимо гиперфинитный фактор.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\mathfrak{M}'_n$ - коммутант $\mathfrak{M}_n$ в H, а $\mathfrak{M}'$ - коммутант $\mathfrak{M}$. Тогда $(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}'_n)' \subset \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}' = (\prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n)' \supset (\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}'_n)$. Следовательно, $\mathfrak{M}' = (\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}'_n)''$, т.е. $\mathfrak{M}'$ порожден возрастающей последовательностью факторов $\mathfrak{M}'_n$. Поскольку $\mathfrak{M}_n$ - гиперфинитные факторы, то из теоремы I.I. вытекает, что $\mathfrak{M}'_n$ - также гиперфинитные факторы. Но тогда $\mathfrak{M}'$ порожден возрастающей последовательностью гиперфинитных факторов, и поэтому он является гиперфинитным фактором. Из теоремы I.I. выводим, что $\mathfrak{M}$ также гиперфинитный фактор. Теорема доказана.

Теорема 3.I. играет важную роль в изучении факторов типа II_1. Приведем без доказательства несколько теорем, которые доказываются с помощью теоремы 3.I.

Т Е О Р Е М А 3.2. Пусть G – счетная разрешимая группа, тогда справедливы следующие утверждения.

(i) Пусть A – коммутативная неймановская алгебра с конечным следом μ. Если G – свободно действующая эргодическая группа автоморфизмов A, сохраняющих μ, то скрещенное произведение $G \times A$ – гиперфинитный фактор типа II_1.

(ii) Пусть M – гиперфинитный фактор типа II_1. Если G – группа внешних автоморфизмов M то $G \times M$ – гиперфинитный фактор типа II_1. Справедливо обратное.

(iii) Если все классы сопряженных элементов G, кроме тривиального, бесконечны, то регулярное представление G порождает гиперфинитный фактор типа II_1.

Доказательство теоремы приведено в [6]. Утверждение (i) в случае, когда G – счетная коммутативная группа, доказал Дай [7] другими методами.

Автор пользуется случаем, чтобы поблагодарить А.А.Кириллова за внимание и полезные советы и А.Д.Мышкиса за обсуждение.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. F.J.Murray, J.von Neumann, On rings of operators, Ann.Math., 44, 716-808, 1943.
2. М.А.Наймарк, Нормированные кольца, М, 1969.
3. J.Dixmier, Les algebres d'operateurs dans l'espase hilbertiene, Gautier-Villars, 1957.
4. R.T.Powers, Represeutations of uniformly hyperfinite algebras and their associated von Neumann rings, Ann.Math., 86, № 1, 138-171, 1967.
5. В.Я.Голодец, О группах преобразований, оставляющих меру квазиинвариантной. Препринт ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1969.
6. В.Я.Голодец, Скрещенные произведения неймановских алгебр, (послано для опубликования).
7. H.A.Dye, On groups of measure preserving transformations II, Amer., J.Math., 55, № 4, 551-576, 1963..

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МОДУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

(краткое сообщение)

В.Я. Голодец

1. В этой работе мы укажем общие спектральные свойства семейства модулярных операторов Δ_ω [3], где ω пробегает точные и нормальные состояния фактора M в сепарабельном гильбертовом пространстве H.

Пусть ξ - единичный вектор из H, для которого $[M\xi]=[M'\xi]=H$. Такой вектор в дальнейшем будем называть оициклическим для M. Можно показать, что всякое точное нормальное состояние ω фактора M определяется бициклическим вектором $\eta\in H$: $\omega(x)=(x\eta,\eta)(x\in M)$.

Оператор a в H, присоединенный к M, назовем ξ - нормируемым, если

$$\|a\xi\| < \infty. \tag{1.1}$$

Оказывается, для всякого вектора $\eta\in H$ существует ξ - нормируемый оператор a, присоединенный к M такой, что

$$a\xi=\eta, \tag{1.2}$$

причем a однозначно определен на $M'\xi$. Если η - бициклический вектор из H, то оператор a обратим. Обратимый оператор a, удовлетворяющий (1.2), можно выбрать таким образом, чтобы он имел полярное разложение

$$a=uk, \tag{1.3}$$

где u - унитарный оператор из M, а k есть ξ - нормируемый положительно определенный обратимый оператор, присоединенный к M.

Понятно, что можно рассмотреть также ξ - нормируемые операторы, присоединенные к M, которые в силу симметрии будут обладать аналогичными свойствами. Но тогда для всякого ξ -нормируемого оператора x, присоединенного к M, существует ξ -нормируемый оператор $\pi'_\xi(x)$, присоединенный к M', для которого

$$x\xi=\pi'_\xi(x)\xi. \tag{1.4}$$

2. Напомним определение модулярного оператора [3]. На элементах $x\xi$ $(x\in M)$ линейного многообразия M_ξ рассмотрим оператор инволюции S_ξ

$$S_\xi x\xi = x^*\xi, \quad (x\in M), \tag{2.1}$$

а на M'_ξ - оператор инволюции F_ξ

$$F_\xi x'\xi = (x')^*\xi, \quad (x'\in M'). \tag{2.2}$$

Тогда оператор $\Delta_\xi = F_\xi S_\xi$, который, следуя [3], назовем модулярным (сокращенно МО), является положительно определенным обратимым самосопряженным оператором, действующим в H, а операторы S_ξ и F_ξ имеют следующее полярное разложение:

$$S_\xi = j_\xi \Delta_\xi^{1/2} = \Delta_\xi^{-1/2} j_\xi , \tag{2.3}$$

$$F_\xi = \Delta_\xi^{1/2} j_\xi = j_\xi \Delta_\xi^{-1/2}, \tag{2.4}$$

где j_ξ – антилинейный изометрический оператор в H со свойствами: $j_\xi^2 = I$, $j_\xi \Delta_\xi j_\xi = \Delta_\xi^{-1}$, $j_\xi M j_\xi = M'$ [3].

Важно отметить, что из (2.I) и (2.2) следует, что $\Delta_\xi \xi = \xi$ и $j_\xi \xi = \xi$. С помощью отображения $x \to \pi'_\xi(x)$ (I.4) действие модулярного оператора Δ_ξ можно представить в виде

$$\Delta_\xi (x\xi) = \pi'_\xi (x^*)^* \xi. \tag{2.5}$$

Если вектор η будет пробегать все бициклические векторы из H, то Δ_η образуют некоторое семейство операторов, которое мы назовем эквивалентными модулярными операторами (сокращенно ЭМО). Так как всякое точное нормальное состояние ω фактора M определяется некоторым бициклическим вектором η (см. р. I), то ЭМО содержат с точностью до унитарного сопряжения все МО для фактора M.

В настоящей работе мы изучим общую часть спектра ЭМО для M. Для этого нам понадобится следующая

ТЕОРЕМА 2.I. Если ξ и η – два бициклических вектора в H, связанных соотношением (I.2), где $a = u$ – унитарный оператор из M, то $\Delta_\eta = u \Delta_\xi u^*$.

3. Для того, чтобы исследовать общие свойства операторов Δ_ξ и Δ_η, где $\eta = k\xi$, т.е, когда $u = I$ в (I.3), нам понадобятся следующие вспомогательные результаты:

Последовательность операторов (x_n) из M называется центральной (сокращенно ЦП), если

$$\sup_n \| x_n \| < C, \tag{3.I}$$

где C – конечная постоянная, и если

$$\lim_{n\to\infty} \| [x, x_n] \zeta \| = 0, \quad \text{где} \quad [x, x_n] = x x_n - x_n x,$$

для всякого $\zeta \in H$ и любого $x \in M$.

ЦП (x_n) назовем ненулевой, если сильный $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$.

Нам понадобятся следующие простые сведения о ЦП.

ЛЕММА 3.I. Если (x_n) – ненулевая ЦП в M и если

$$\sup_n \| \pi'_\xi (x_n) \| < C, \tag{3.2}$$

то $(\pi'_\xi (x_n))$ – ЦП в M'.

ЛЕММА 3.2. Пусть (x_n) – ЦП в M, для которой выполнено (3.2). Тогда, если k есть ξ –нормируемый оператор, присоединенный к M, то

$$\lim_{n\to\infty} \| [k, x_n] \xi \| = 0.$$

ЛЕММА 3.3. Если (x_n) – ЦП в M, то для всякого $x \in M$ и любого бициклического вектора ξ

$$\lim_{n\to\infty} | (x_n x\xi, \xi) - (x_n \xi, \xi)(x\xi, \xi) | = 0.$$

4. Перейдем к изучению общей части спектра ЭМО.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.I. Пусть M – фактор, ξ –бициклический вектор, λ – число ($0 < \lambda < \infty$). Ненулевую ЦП (x_n) в M назовем λ – спектральной последовательностью (сокращенно λ – СП) для Δ_ξ, если $x_n \xi \in \mathcal{D}(\Delta_\xi)$ (области определения Δ_ξ) и

$$\lim_{n\to\infty} \| (\Delta_\xi - \lambda) x_n \xi \| = 0. \tag{4.I}$$

Ясно, что λ принадлежит спектру Δ_ξ $(Sp\Delta_\xi)$.

ЛЕММА 4.2. Пусть (x_n) - λ - СП $(0<\lambda<\infty)$, а (x_n^*) - μ - СП для Δ_ξ, если

$$\sup_n (\|\pi'_\xi(x_n)\|, \ \|\pi'_\xi(x_n^*)\|) < C, \tag{4.2}$$

где C - конечная постоянная, то $\mu = \lambda^{-1}$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть (x_n) и (x_n^*) - λ и λ^{-1} - СП для Δ_ξ, для которых выполнено (4.2), тогда λ и λ^{-1} принадлежат $S_p\Delta_\eta$, где η - произвольный бициклический вектор из H, а $0<\lambda<\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом (2.5) соотношение (4.I) перепишем в виде

$$\lim_{n\to\infty} \|(\pi'_\xi(x_n^*)^* - \lambda\pi'_\xi(x_n))\xi\| = 0. \tag{4.I'}$$

В силу (4.2) отсюда следует, что

$$\lim \|(\pi'_\xi(x_n^*)^* - \lambda\pi'_\xi(x_n))\eta\| = 0. \tag{4.3}$$

Но поскольку $\eta = k\xi$, где k есть ξ - нормируемый самосопряженный обратимый оператор, присоединенный к M, то (см. (2.2))

$$\pi'_\xi(x^*)^*\eta = F_\eta\pi'_\xi(x_n^*)\eta = j_\eta\Delta_\eta^{-1/2}\pi'_\xi(x_n^*)k\xi = j_\eta\Delta_\eta^{-1/2}(kx_n^*k^{-1})\eta. \tag{4.4}$$

Так как $\pi'_\xi(x_n)\eta = kx_n\xi$, то в силу леммы 3.2

$$\lim_{n\to\infty} \|\pi'_\xi(x_n)\eta - x_n\eta\| = 0. \tag{4.5}$$

Но $x_n\eta = j_\eta\Delta_\eta^{1/2}x_n^*\eta$, поэтому, подставляя (4.4) и (4.5) в (4.3), получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\eta^{-1/2}(kx_n^*k^{-1}) - \lambda\Delta_\eta^{1/2}x_n^*)\eta\| = 0. \tag{4.6}$$

Так как $(kx_n^*k^{-1})\eta = kx_n^*\xi$, то в силу леммы 3.2

$$\lim_{n\to\infty} \|(kx_n^*k^{-1})\eta - x_n^*\eta\| = 0.$$

Но тогда поскольку $\|(1+\Delta_\eta)^{-1}\|$, $\|\Delta_\eta^{1/2}(1+\Delta_\eta)^{-1}\|$, $\|\Delta_\eta(1+\Delta_\eta)^{-1}\| \leq 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|(1+\Delta_\eta)^{-1}(kx_n^*k^{-1} - x_n^*)\eta\| = 0.$$

Следовательно, из (4.6) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \|(\Delta_\eta - \lambda^{-1})(1+\Delta_\eta)^{-1}x_n^*\eta\| = 0. \tag{4.7}$$

Если

$$\lim_{n\to\infty} \|(1+\Delta_\eta)^{-1}x_n^*\eta\| = 0, \tag{4.8}$$

то из (4.7) следует, что также и

$$\lim_{n\to\infty} \|\Delta_\eta(1+\Delta_\eta)^{-1}x_n^*\eta\| = 0. \tag{4.9}$$

Но легко видеть, что (4.8) и (4.9) одновременно выполняться не могут, так как (x_n^*) -ненулевая ЦП в M. Тогда из (4.7) заключаем, что $\lambda^{-1}\in S_p\Delta_\eta$. Аналогично получаем, что $\lambda\in S_p\Delta_\eta$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть (x_n) и (y_n) - λ и μ - СП для Δ_ξ $(0<\lambda, \mu<\infty)$, удовлетворяющие условию (4.2). Тогда, если $Sp_\xi(M)$ - замкнутая подгруппа мультипликативной группы вещественных чисел, порожденная λ и μ, то $Sp_\xi(M)$ принадлежит общей части спектра ЭМО. Ясно, что $Sp_\xi(M)$ есть одно из следующих множеств: $[0,\infty]$; $(x^n, n=0,\pm1,\ldots)$, где $0 < x \leqslant 1$.

Доказательство следует из леммы 3.3.

Автор благодарен Дюзе Макдуфф, познакомившей его с работой [3].

ЛИТЕРАТУРА

I. М.А.Наймарк, Нормированные кольца, М, Наука, 1969.

2. J.Dixmier, Les algebres d'operators dans l'espace hilbertiene, Gautier-Villars, Paris, 1957.

3. M.Takesaki, Tomita's theory of modular hilbert algebras and its applications (препринт).

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Г.Б.Клебанова, А.А.Янцевич

В работе рассматривается задача восстановления случайного поля по значениям в узлах решетки. Получена интерполяционная формула, с помощью которой исследуется вопрос об ограниченности случайного поля. Для простоты записи рассматриваются двумерные случайные поля.

Для доказательства основных соотношений нам понадобится следующее утверждение.

Л Е М М А. Пусть $f(z_1, z_2)$, $z_j = x_j + iy_j$, $j=1,2$ – целая функция конечной степени и

$$|f(x_1, x_2)| \leqslant L < \infty. \tag{1}$$

Тогда имеет место разложение

$$f(z_1,z_2)=\frac{\sin\alpha z_1 \sin\beta z_2}{\alpha\beta}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{\ell=-\infty}^{\infty}(-1)^{k+\ell}\frac{\sin\delta_1(\alpha z_1-k\pi)\sin\delta_2(\beta z_2-\ell\pi)}{\delta_1(\alpha z_1-k\pi)^2\,\delta_2(\beta z_2-\ell\pi)^2}\,f\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{\ell\pi}{\beta}\right), \tag{2}$$

где α, β, δ_1, δ_2 – фиксированные числа $\alpha > \sigma_{10}$, $\beta > \sigma_{20}$, $0 < \delta_1 < \alpha - \sigma_{10}$, $0 < \delta_2 < \beta - \sigma_{20}$, а σ_{10}, σ_{20} – нижнесопряженные степени функции $f(z_1, z_2)$ [2], причем при достаточно большом n имеет место оценка

$$\left|f(z_1,z_2)-\frac{\sin\alpha z_1\sin\beta z_2}{\alpha\beta}\sum_{-n}^{n}\sum_{-n}^{n}(-1)^{k+\ell}\frac{\sin\delta_1(\alpha z_1-k\pi)\sin\delta_2(\beta z_2-\ell\pi)}{\delta_1(\alpha z_1-k\pi)^2\,\delta_2(\beta z_2-\ell\pi)^2}f\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{\ell\pi}{\beta}\right)\right|\leqslant \tag{3}$$
$$\leqslant\frac{C(z_1,z_2)}{n}A(L,\sigma_{10},\sigma_{20},\alpha,\beta),$$

где $C(z_1, z_2)$ – функция, ограниченная на каждом ограниченном множестве, $A(L, \sigma_{10}, \sigma_{20}, \alpha, \beta)$ – некоторая конечная величина. Эти обозначения будут сохранены и в дальнейшем.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $f(z)$ – целая функция степени, не выше σ, ограниченная на вещественной оси константой L. Пусть α, δ – фиксированные числа и $\alpha > \sigma$, $0 < \delta < \alpha - \sigma$. Рассмотрим функцию $F(z)=\frac{\sin\delta(z-w)}{\delta(z-w)}f(z)$, где w – фиксированная точка плоскости. Применяя теорему Коши о вычетах к интегралу $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{F(\zeta)}{\sin\alpha\zeta}\frac{d\zeta}{(\zeta-z)}$, где C_n – окружность $|\zeta|=(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\alpha}$, и оценивая этот интеграл, а затем, полагая $w = z$, получим

$$\left|f(z)-\frac{\sin\alpha z}{\alpha}\sum_{-n}^{n}(-1)^{k}\frac{\sin\delta(\alpha z-k\pi)}{\delta(\alpha z-k\pi)^2}f\left(\frac{k\pi}{\alpha}\right)\right|\leqslant\frac{C(z)}{n}A(L,\sigma,\alpha). \tag{4}$$

Пусть $f(z_1, z_2)$ – функция, фигурирующая в условиях леммы. Тогда имеем

$$\left|f(z_1,z_2)-\frac{\sin\alpha z_1\sin\beta z_2}{\alpha\beta}\sum_{-n}^{n}\sum_{-n}^{n}(-1)^{k+\ell}\frac{\sin\delta_1(\alpha z_1-k\pi)\sin\delta_2(\beta z_2-\ell\pi)}{\delta_1(\alpha z_1-k\pi)^2\,\delta_2(\beta z_2-\ell\pi)^2}f\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{\ell\pi}{\beta}\right)\right|=$$
$$=\left|f(z_1,z_2)-\frac{\sin\alpha z_1}{\alpha}\sum_{-n}^{n}(-1)^{k}\frac{\sin\delta_1(\alpha z_1-k\pi)}{\delta_1(\alpha z_1-k\pi)^2}f\left(\frac{k\pi}{\alpha},z_2\right)+\right.$$
$$+\frac{\sin\alpha z_1}{\alpha}\sum_{-n}^{n}(-1)^{k}\frac{\sin\delta_1(\alpha z_1-k\pi)}{\delta_1(\alpha z_1-k\pi)^2}f\left(\frac{k\pi}{\alpha},z_2\right)- \tag{5}$$
$$\left.-\frac{\sin\alpha z_1\sin\beta z_2}{\alpha\beta}\sum_{-n}^{n}\sum_{-n}^{n}(-1)^{k+\ell}\frac{\sin\delta_1(\alpha z_1-k\pi)\sin\delta_2(\beta z_2-\ell\pi)}{\delta_1(\alpha z_1-k\pi)^2\,\delta_2(\beta z_2-\ell\pi)^2}f\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{\ell\pi}{\beta}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \left| f(z_1,z_2) - \frac{\sin\alpha z_1}{\alpha} \sum_{-n}^{n} (-1)^k \frac{\sin\delta_1(\alpha z_1 - k\pi)}{\delta_1(\alpha z_1 - k\pi)^2} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}, z_2\right) \right| +$$

$$+ \left| \frac{\sin\alpha z_1}{\alpha} \right| \left| \sum_{-n}^{n} \left| (-1)^k \frac{\sin\delta_1(\alpha z_1 - k\pi)}{\delta_1(\alpha z_1 - k\pi)^2} \right| \cdot \left| f\left(\frac{k\pi}{\alpha}, z_2\right) - \frac{\sin\beta z_2}{\beta} \sum_{-n}^{n} (-1)^\ell \frac{\sin\delta_2(\beta z_2 - \ell\pi)}{\delta_2(\beta z_2 - \ell\pi)^2} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}, \frac{\ell\pi}{\beta}\right) \right| \right. .$$

Как показано в работе [2] , кривая сопряженных степеней функции $f(z_1, z_2)$ представляет собой границу угла $\sigma_1 \geqslant \sigma_{10}, \sigma_2 \geqslant \sigma_{20}$, причем единственная система нижнесопряженных степеней, то есть система сопряженных степеней, определяющая угловую точку, совпадает с системой верхних степеней $\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2$ функции $f(z_1, z_2)$. Поэтому из принципа Фрагмена-Линделефа для полуплоскости следует, что

$$|f(z_1,z_2)| \leqslant L e^{\sigma_{10}|y_1| + \sigma_{20}|y_2|}. \qquad (6)$$

Из (4) и (5) с учетом оценки (6) следует утверждение леммы.

Рассмотрим случайное поле $\xi(t,s), -\infty < t,s < \infty$, сепарабельное вместе со всеми своими производными, если они существуют, и такое, что $M|\xi(t,s)|^2 < \infty$, $M\xi(t,s) = 0$, $-\infty < t,s < \infty$.

Пусть функция ковариации поля $\xi(t,s)$ представима в виде

$$B(t,s,t',s') = \iint_\Lambda \iint_\Lambda f(t,s,\lambda,\mu) \overline{f(t',s',\lambda',\mu')}\, F(d\lambda, d\mu, d\lambda', d\mu'), \qquad (7)$$

где Λ – некоторое множество пар вещественных параметров $\{\lambda,\mu\}$, $F(D,D')$, $D,D' \in \Lambda$ – комплексная, положительно определенная, аддитивная по обоим аргументам функция, такая, что $\iint_\Lambda \iint_\Lambda |F(d\lambda, d\mu, d\lambda', d\mu')| < \infty$.

Предположим, как и в работе [I] ,что при всех $\{\lambda,\mu\} \in \Lambda$ функция $f(t,s,\lambda,\mu)$ относительно t и s может быть доопределена в произведении комплексных плоскостей до целой функции конечной степени такой, что

$$\sup_{\{\lambda,\mu\}\in\Lambda} \sup_{t,s\in R} |f(t,s,\lambda,\mu)| = \sup_{\{\lambda,\mu\}\in\Lambda} L(\lambda,\mu) = L < \infty. \qquad (8)$$

Пусть для каждых $\{\lambda,\mu\} \in \Lambda$ $\sigma_{10}(\lambda,\mu), \sigma_{20}(\lambda,\mu)$ – нижнесопряженные степени функции $f(\cdot t,s,\lambda,\mu)$. Предположим, что существуют

$$\sup_{\{\lambda,\mu\}\in\Lambda} \sigma_{10}(\lambda,\mu) = \sigma_{10} < \infty, \quad \sup_{\{\lambda,\mu\}\in\Lambda} \sigma_{20}(\lambda,\mu) = \sigma_{20} < \infty. \qquad (9)$$

Т Е О Р Е М А I. Для почти всех выборочных функций случайного поля $\xi(t,s)$ справедлива формула

$$\xi(t,s) = \frac{\sin\alpha t \sin\beta s}{\alpha\beta} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \frac{\sin\delta_1(\alpha t - k\pi)\sin\delta_2(\beta s - \ell\pi)}{\delta_1(\alpha t - k\pi)^2\, \delta_2(\beta s - \ell\pi)^2} \xi\left(\frac{k\pi}{\alpha}, \frac{\ell\pi}{\beta}\right), \qquad (10)$$

где $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2$ – фиксированные числа $\alpha > \sigma_{10}$, $\beta > \sigma_{20}$, $0 < \delta_1 < \alpha - \sigma_{10}$, $0 < \delta_2 < \beta - \sigma_{20}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\alpha, \beta, \delta_1, \delta_2$ такие, как сказано в условии теоремы. Тогда при любых $\{\lambda,\mu\} \in \Lambda$

$$\sigma_{10}(\lambda,\mu) < \alpha, \quad 0 < \delta_1 < \alpha - \sigma_{10}(\lambda,\mu),$$
$$\sigma_{20}(\lambda,\mu) < \beta, \quad 0 < \delta_2 < \beta - \sigma_{20}(\lambda,\mu)$$

и, в силу леммы, имеет место разложение

$$f(t,s,\lambda,\mu) = \frac{\sin\alpha t \sin\beta s}{\alpha\beta} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^{k+\ell} \frac{\sin\delta_1(\alpha t - k\pi)\sin\delta_2(\beta s - \ell\pi)}{\delta_1(\alpha t - k\pi)^2\, \delta_2(\beta s - \ell\pi)^2} f\left(\frac{k\pi}{\alpha}, \frac{\ell\pi}{\beta}, \lambda, \mu\right), \qquad (11)$$

причем при любых фиксированных t и s и при достаточно большом n

$$\sup_{\{\lambda,\mu\}\in\Lambda}\left|f(t,s,\lambda,\mu)-\frac{\sin\alpha t\sin\beta s}{\alpha\beta}\sum_{-n}^{n}\sum_{-n}^{n}(-1)^{k+\ell}\frac{\sin\delta_1(\alpha t-k\pi)\sin\delta_2(\beta s-\ell\pi)}{\delta_1(\alpha t-k\pi)^2\,\delta_2(\beta s-\ell\pi)^2}f\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{\ell\pi}{\beta},\lambda,\mu\right)\right|\leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant\sup_{\{\lambda,\mu\}\in\Lambda}\frac{c(t,s)}{n}A(L(\lambda,\mu),\sigma_{10}(\lambda,\mu),\sigma_{20}(\lambda,\mu),\alpha,\beta)=\frac{c(t,s)}{n}A(L,\sigma_{10},\sigma_{20},\alpha,\beta).$$

Далее по теореме Карунена о спектральном представлении случайное поле $\xi(t,s)$ имеет вид

$$\xi(t,s)=\iint_{\Lambda}f(t,s,\lambda,\mu)\,z(d\lambda,d\mu), \tag{13}$$

где $z(D)$, $D\in\Lambda$ – случайная спектральная мера, такая, что

$$Mz(D_1)\overline{z(D_2)}=F(D_1,D_2).$$

Рассмотрим случайное поле

$$\xi_n(t,s)=\frac{\sin\alpha t\sin\beta s}{\alpha\beta}\sum_{-n}^{n}\sum_{-n}^{n}(-1)^{k+\ell}\frac{\sin\delta_1(\alpha t-k\pi)\sin\delta_2(\beta s-\ell\pi)}{\delta_1(\alpha t-k\pi)^2\,\delta_2(\beta s-\ell\pi)^2}\xi\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{\ell\pi}{\beta}\right). \tag{14}$$

Используя оценку (12), получаем

$$M|\xi(t,s)-\xi_n(t,s)|^2\leqslant\frac{[c(t,s)]^2}{n^2}[A(L,\sigma_{10},\sigma_{20},\alpha,\beta)]^2\iint_{\Lambda}\iint_{\Lambda}|F(d\lambda,d\mu,d\lambda',d\mu')|. \tag{15}$$

Таким образом, разложение (10) справедливо в среднем квадратичном.

Так как

$$\sum_{(n)}M|\xi(t,s)-\xi_n(t,s)|^2\leqslant[C(t,s)]^2[A(L,\sigma_{10},\sigma_{20},\alpha,\beta)]^2\iint_{\Lambda}\iint_{\Lambda}|F(d\lambda,d\mu,d\lambda',d\mu')|\sum_{(n)}\frac{1}{n^2}<\infty, \tag{16}$$

то ряд в (10) сходится почти наверное при любых фиксированных t и s, причем равномерно, когда t и s находятся в конечной части плоскости. Так как почти все выборочные функции поля $\xi(t,s)$ непрерывны (доказательство этого утверждения представляет собой очевидное обобщение результатов, полученных в [1]), то разложение (10) справедливо почти для всех выборочных функций поля $\xi(t,s)$ при любых t и s.

Следующая теорема является аналогом теоремы М.Картрайт в теории целых функций [3].

Т Е О Р Е М А II. Пусть задана константа N и пусть поле $\xi(t,s)$ таково, что при любых числах $C_{k\ell}>0$

$$P\left\{C_{k\ell}\left|\xi\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{\ell\pi}{\beta}\right)\right|\geqslant N\right\}\leqslant\varepsilon\cdot C_{k\ell},\qquad k,\ell=0,\pm1,\pm2,\dots, \tag{17}$$

где α,β – фиксированные числа $\alpha>\sigma_{10}$, $\beta>\sigma_{20}$, а ε не зависит от k и ℓ. Тогда

$$P\{|\xi(t,s)|\geqslant N\}\leqslant\varepsilon B(\alpha,\beta,\sigma_{10},\sigma_{20}), \tag{18}$$

где $B(\alpha,\beta,\sigma_{10},\sigma_{20})$ – некоторая конечная величина при фиксированных $\alpha>\sigma_{10}$, $\beta>\sigma_{20}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Следующая цепочка неравенств приводит к доказательству теоремы:

$$P\{|\xi(t,s)|\geqslant N\}=P\left\{\left|\frac{\sin\alpha t\sin\beta s}{\alpha\beta}\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{k+\ell}\frac{\sin\delta_1(\alpha t-k\pi)\sin\delta_2(\beta s-\ell\pi)}{\delta_1(\alpha t-k\pi)^2\,\delta_2(\beta s-\ell\pi)^2}\xi\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{\ell\pi}{\beta}\right)\right|\geqslant N\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}P\left\{\left|\frac{\sin\alpha t\sin\beta s}{\alpha\beta}\cdot\frac{\sin\delta_1(\alpha t-k\pi)\sin\delta_2(\beta s-\ell\pi)}{\delta_1(\alpha t-k\pi)^2\,\delta_2(\beta s-\ell\pi)^2}\xi\left(\frac{k\pi}{\alpha},\frac{\ell\pi}{\beta}\right)\right|\geqslant N\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin\alpha t\sin\beta s}{\alpha\beta}\cdot\frac{\sin\delta_1(\alpha t-k\pi)\sin\delta_2(\beta s-\ell\pi)}{\delta_1(\alpha t-k\pi)^2\,\delta_2(\beta s-\ell\pi)^2}\right|.$$

$$P\{|\xi(t,s)|\geqslant N\}\leqslant\varepsilon B(\alpha,\beta,\sigma_{10},\sigma_{20}).$$

$$B(\alpha,\beta,\sigma_{10},\sigma_{20})\to\infty,\ \text{ когда }\ \alpha\to\sigma_{10},\ \beta\to\sigma_{20}.$$

В заключение авторы благодарят Л.И.Ронкина за обсуждение результатов и критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

I. З.А.Пиранашвили, К вопросу об интерполяции случайных процессов, Теория вероятностей и ее приложения, I2:4, 708-7I7, I967.

2. Л.И.Ронкин, Об одной характеристике роста целых функций от нескольких переменных, Ученые записки механико-математического факультета ХГУ и Харьковского математического общества, 27:4, 59-66, I96I.

3. Б.Я.Левин, Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, М., I956.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

К ВОПРОСУ О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.И.Коган, Ф.С.Рофе-Бекетов

§ I. ВВЕДЕНИЕ. ТЕОРЕМЫ ОБ АСИМПТОТИКЕ.

Как известно, дефектные числа минимального симметрического дифференциального оператора четного порядка $2m$ с вещественными коэффициентами на полуоси находятся в пределах от m до $2m$ и равны между собой. И.М.Глазман [I] впервые показал на примерах, что для таких операторов индексы дефекта $\{p, p\}$ могут действительно принимать все промежуточные значения $m \leqslant p \leqslant 2m$. Впоследствии новые примеры операторов с вещественными коэффициентами, индексы дефекта которых принимают всевозможные значения, строились рядом авторов (С.А.Орлов [2], М.В.Федорюк [3] и др.).

Дефектные числа симметрических сингулярных дифференциальных операторов с комплексными коэффициентами, в отличие от операторов с вещественными коэффициентами, могут быть неравными между собой, простейшим примером чему является оператор $i \cdot \frac{d}{dx}$ на полуоси. Однако до недавнего времени не были известны ни примеры симметрических операторов четного порядка с неравными индексами дефекта, ни примеры операторов нечетного порядка (на полуоси) с равными дефектными числами *). По-видимому, первым примером симметрического оператора четного (четвертого) порядка, имеющего разные дефектные числа $\{3,2\}$, является пример, построенный Мак-Леодом [4].

В настоящей работе мы выделяем некоторый класс симметрических дифференциальных операторов произвольного, четного или нечетного порядка, с комплексными, вообще говоря, коэффициентами, и для операторов этого класса находим дефектные числа как количество попадающих в некоторую полуплоскость корней явно выписываемых многочленов.

В случае операторов четного порядка $2m$ рассмотренный нами класс содержит, в частности, операторы, исследованные С.А.Орловым [2] и, кроме того, операторы с различными дефектными числами $\{p, p+1\}$ или $\{p+1, p\}$ при $p = m, m+1, \ldots, 2m-2$, весьма частным случаем которых является упомянутый выше пример Мак-Леода [4].

Для случая нечетного порядка $2m+1$ мы получаем набор операторов с индексами дефекта $\{p, p\}$ $(p = m+1, \ldots, 2m+1)$ и с индексами $\{p, p+1\}$ или $\{p+1, p\}$, где $p = m$, $m+1, \ldots, 2m-1$. (Случай индексов дефекта $\{n, p\}$, $p < n$ для операторов четного или нечетного порядка $n > 1$ невозможен, так как максимальные значения дефектных чисел обыкновенных дифференциальных операторов достигаются лишь одновременно**) в обеих полуплоскостях $\operatorname{Im} \lambda \gtrless 0$, за исключением операторов первого порядка (см. [5,6])).

Отметим также, что дефектные числа $\{N_+, N_-\}$ симметрических дифференциальных операторов произвольного порядка n с комплексными коэффициентами на полуоси удовлетворяют неравенствам

---

*) Что касается выражения первого порядка

$$\frac{1}{2} i \{(qy)' + qy'\} + p(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty,$$

то здесь непосредственно проверяется, что индексы дефекта соответствующего минимального оператора при $q(x) > 0$ и вещественной $p(x)$ есть $\{I, I\}$ в случае $q^{-1/2}(x) \in \mathcal{L}^2[0,\infty)$ и $\{0, I\}$ в противном случае.

**) Отсюда и из (I) следует, в частности, что симметрический оператор второго порядка всегда имеет равные дефектные числа $\{I, I\}$ или $\{2, 2\}$ (на полуоси).

$$\left[\frac{n}{2}\right] \leqslant N_+,\ N_- \leqslant n, \tag{I}$$

причем

$$N_+ + N_- \geqslant n. \tag{2}$$

Названные оценки для дефектных чисел хорошо известны в случае операторов четного порядка $n = 2m$ с вещественными коэффициентами. В общем случае довольно сложным путем они были выведены в [7]. Мы получим их сейчас элементарно в силу формул Неймана. Действительно, правое из неравенств (I) тривиально, левое следует из того, что минимальный симметрический оператор порядка n на полуоси допускает не менее чем $\left[\frac{n}{2}\right]$ -мерное симметрическое расширение, определяемое краевыми условиями в нуле:

$$y^{(p)}(0) = 0, \quad p = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

А так как при нечетном $n = 2m+1$ это симметрическое расширение не является самосопряженным, то в этом случае $N_+ + N_- \geqslant 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1 = n$, что приводит к (2). Еще очевиднее (2) при четном n. (По поводу (I), (2) см. также [6]).

Исследование индексов дефекта дифференциальных операторов, как известно, тесно связано с вопросами асимптотического поведения решений соответствующих дифференциальных уравнений. Здесь следует назвать фундаментальные работы И.М.Рапопорта [8] и М.А.Наймарка [9], а из более поздних - работы М.В.Федорюка [10].

Наша работа основана на выводимых нами и представляющих, как нам кажется, самостоятельный интерес асимптотических формулах для решений дифференциального уравнения

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = 0, \quad 0 < x_0 \leqslant x < \infty \tag{3}$$

коэффициенты которого голоморфны в некотором открытом секторе S правой x -полуплоскости, содержащем положительную полуось, и имеют в S при $x \to \infty$ асимптотические разложения в виде степенных рядов

$$a_j(x) \sim x^{n-\ell}\left\{a_{j0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x^{-k}\right\}, \quad a_{00} \neq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, \ell-1; \tag{4}$$

$$a_j(x) \sim x^{n-j}\left\{a_{j0} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x^{-k}\right\}, \quad a_{\ell 0} \neq 0, \quad j = \ell, \ldots, n; \ n \geqslant \ell \geqslant 0. \tag{5}$$

Для столбцевой вектор-функции

$$\vec{Y}(x) = \{y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\} \tag{6}$$

уравнение (3) стандартным образом сводится к системе

$$Y'(x) = A(x)Y(x) \tag{7}$$

с иррегулярной особой точкой на бесконечности, причем главный член $A_0 = A(\infty)$ асимптотического разложения коэффициента $A(x)$ (при $x \to \infty$) имеет, вообще говоря, кратные собственные значения. Матрица $A(x)$ имеет вид *)

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_n(x) & -\alpha_{n-1}(x) & \cdots & \cdots & -\alpha_1(x) \end{bmatrix} \tag{8}$$

где

$$\alpha_j(x) = \frac{a_j(x)}{a_0(x)}, \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

---

*) Всюду на пропущенных местах стоят нули.

Таким образом, для $\alpha_j(x)$ справедливы следующие асимптотические разложения:

$$\alpha_j(x) \sim \alpha_{j0} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_{j\kappa} x^{-\kappa}, \quad j = 1, \ldots, \ell, \tag{10}$$

$$\alpha_j(x) \sim x^{\ell - j} \left\{ \alpha_{j0} + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_{j\kappa} x^{-\kappa} \right\}, \quad j = \ell+1, \ldots, n; \tag{10'}$$

где

$$\alpha_{j0} = \frac{a_j}{a_0}, \quad \alpha_{\ell 0} \neq 0. \tag{11}$$

Первая строка фундаментального матричного решения системы (7) дает фундаментальную систему решений уравнения (3).

Отметим, что дифференциальная операция (3) не предполагается симметрической. Предположение об аналитичности коэффициентов (3) сделано простоты ради, чтобы воспользоваться аналитической теорией дифференциальных уравнений (см., например, [11]). Это предположение, видимо, не является принципиальным так же, как оно не оказалось существенным в случае, рассмотренном С.А.Орловым [2] (см.Ф.А.Неймарк [12]).

В системах, полученных из скалярных дифференциальных уравнений, часто оказывается целесообразным применять так называемое "срезающее преобразование", которое, например, может понижать ранг системы (см. [11], стр. 80). Мы же, в отличие от [11] , произведем, если можно так выразиться, "срезку на подпространстве", которая позволяет в рассматриваемом случае улучшить структуру системы (7). Для этого положим

$$Y(x) = S(x)\,\tilde{Y}(x), \tag{12}$$

где

$$S(x) = diag\left\{ x^{n-\ell}, x^{n-\ell-1}, \ldots, x, 1, \ldots, 1 \right\}. \tag{13}$$

В результате система (7) переходит в систему

$$\tilde{Y}' = \tilde{A}(x)\,\tilde{Y}, \tag{14}$$

где

$$\tilde{A}(x) = S^{-1}(x) A(x) S(x) - S^{-1}(x) S'(x)$$

-матрица, голоморфная в S при $x_0 \leq |x| < \infty$, имеющая в S асимптотическое представление в виде степенного ряда

$$\tilde{A}(x) \sim \sum_{z=0}^{\infty} \tilde{A}_z x^{-z}, \quad x \to \infty, \quad x \in S, \tag{15}$$

причем

$$\tilde{A}_0 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ \hline & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ -\alpha_{n,0} & -\alpha_{n-1,0} & \cdots & -\alpha_{\ell+1,0} & -\alpha_{\ell,0} & -\alpha_{\ell-1,0} & \cdots & -\alpha_{1,0} \end{array}\right] \tag{16}$$

Т Е О Р Е М А 1. Пусть коэффициенты $a_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ дифференциального уравнения (3) голоморфны в открытом секторе S раствора $< \pi$ и имеют там равномерное асимптотическое разложение (4), (5), причем корни $\mu_1, \ldots, \mu_\ell$ уравнения

$$M_\ell(\mu) \equiv a_{00}\mu^\ell + a_{10}\mu^{\ell-1} + \ldots + a_{\ell 0} = 0 \tag{17}$$

простые. Тогда уравнение (3) имеет фундаментальную систему решений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ такую, что ℓ решений из них при $x \to \infty$ допускают в S асимптотическое разложение вида

$$y_j(x) \sim e^{\mu_j x} x^{z_j} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} x^{-k}\right) \sim$$
$$\sim \exp\left\{\int^x \left(\mu_j + \frac{z_j}{x} + \sum_{k=2}^{\infty} c_{jk} x^{-k}\right) dx\right\}, \quad (j = 1, \ldots, \ell), \tag{18}$$

где $\mu_j \neq 0$ определены из (17),

$$z_j = -\frac{\sum_{k=0}^{\ell} a_{k1} \mu_j^{\ell-k+1} + a_{\ell+1,0}}{\mu_j M'_\ell(\mu_j)}, \quad (j = 1, \ldots, \ell). \tag{19}$$

Коэффициенты c_{jk} ($k = 2, 3, \ldots; j = 1, \ldots, \ell$) могут быть определены непосредственной подстановкой разложения (18) в уравнение (3) и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x.

Остальные $n - \ell$ решений имеют асимптотику вида

$$y_{j+\ell}(x) \sim x^{z_{j+\ell}} \cdot \ln^{s_{j+\ell}} x \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{j+\ell,k} \, x^{-k}\right), \quad j = 1, \ldots, n-\ell, \tag{20}$$

где $z_{j+\ell}$ есть корни уравнения

$$R(z) \equiv \sum_{j=\ell}^{n-1} a_{j,0} \prod_{k=0}^{n-j-1} (z - k) + a_{n,0} = 0, \tag{21}$$

$S_{j+\ell}$ – некоторые целые неотрицательные числа, $0 \leqslant S_{j+\ell} \leqslant n - \ell - 1$, причем, если $R(z)$ не имеет кратных корней или корней, различающихся на целые числа, то все $S_{j+\ell} = 0$ и коэффициенты разложений (20) могут быть определены подстановкой выражения (20) в уравнение (3) и сравнением коэффициентов при одинаковых степенях x.

Названные асимптотические разложения допускают дифференцирование неограниченное число раз.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Легко видеть, что формально дифференцируя разложения (18) (во второй форме) и (20) и подставляя их в уравнение (3) при условиях теоремы, мы сможем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, последовательно определить коэффициенты c_{jk}, $b_{j+\ell,k}$ не более чем для n линейно независимых формальных рядов вида (18) и (20) (не более чем ℓ рядов вида (18) и $n-\ell$ вида (20)). При этом $\mu_j \neq 0$ ($j = 1, \ldots, \ell$), так как $a_{\ell 0} \neq 0$ по условию (5).

Применяя аналитическую теорию к системе (14), полученной из (7) и, следовательно, из (3), покажем, что уравнение (3) имеет фундаментальную систему решений, допускающих в S при $x \to \infty$ асимптотические разложения указанного в теореме общего вида (18), (20), причем, как известно [11], эти разложения можно дифференцировать любое количество раз. Это будет означать, что, последовательно находя коэффициенты разложений (18), (20) из уравнения (3), как об этом было сказано выше, мы сможем построить все n линейно независимых рядов (18), (20) (то есть при таком построении мы не встретимся с неразрешимым уравнением для определения какого-либо из коэффициентов разложений (18), (20)). При этом построенные ряды (18), (20) окажутся не только формальными рядами, но и асимптотическими разложениями для фундаментальной системы решений (3), чем теорема будет доказана.

Итак, рассмотрим систему (14). Собственные значения ее главной матрицы $\tilde{A}_0 = \tilde{A}_0(\infty)$ распадаются на две группы

$$\sigma(\tilde{A}_0) = \{\mu_j (\neq 0)\}_{j=1}^{\ell} \cup \{\lambda_k = 0\}_{k=1}^{n-\ell},$$

причем $\mu_j \neq \lambda_k$. (Значения μ_j, $j = 1, \ldots, \ell$ определяются уравнением

$$\mu^\ell + \alpha_{10} \mu^\ell + \ldots + \alpha_{\ell 0} = 0, \tag{22}$$

которое эквивалентно (17) в силу (11)). Таким образом, к системе (14) применима теорема 12.2 [11, стр. 76], в силу которой существует голоморфная в S матрица-функция $P(x)$ такая, что преобразование

$$\tilde{Y} = P(x) Z \tag{23}$$

переводит систему (14) в

$$Z' = B(x) Z, \tag{24}$$

где $B(x)$ имеет блочно-диагональную форму

$$B(x) = \begin{bmatrix} B^{11}(x) & 0 \\ 0 & B^{22}(x) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

матрицы $B^{ii}(x)$, $(i=1,2)$ допускают в S асимптотические разложения

$$B^{ii}(x) \sim \sum_{z=0}^{\infty} B_z^{ii} x^{-z}, \quad x \to \infty, \tag{26}$$

причем собственные значения матрицы B_0^{11} есть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{n-\ell}$ и, таким образом, $\sigma(B_0^{11}) = \{0\}$, а собственные значения матрицы B_0^{22} есть $\{\mu_j\}_{j=1}^{\ell}$, то есть $\sigma(B_0^{22}) = \{\mu_j\}_{j=1}^{\ell}$. Кроме того, матрица $P(x)$ имеет асимптотическое разложение вида

$$P(x) \sim \sum_{z=0}^{\infty} P_z x^{-z}, \tag{27}$$

где в качестве P_0 может быть взята любая невырожденная матрица, приводящая матрицу $\tilde{A}_0$ к блочно-диагональному виду

$$P_0^{-1} \tilde{A}_0 P_0 = B_0^{11} \oplus B_0^{22}. \tag{28}$$

Например, можно положить

$$P_0 = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ \hline -\frac{\alpha_n}{\alpha_\ell} & -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_\ell} & \cdots & -\frac{\alpha_{\ell+1}}{\alpha_\ell} & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\ \ddots\\1\end{array}}\right\} n-\ell \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\ \ddots\\1\end{array}}\right\} \ell \end{array} \tag{29}$$

Так как $\tilde{A}_0$ имеет ранг ℓ, то в нашем случае

$$B_0^{11} = 0. \tag{30}$$

Кроме того, при заданном выборе P_0

$$B_0^{22} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_\ell & -\alpha_{\ell-1} & \cdots & \cdots & -\alpha_1 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Таким образом, система (24) распадается на две подсистемы, из которых первая

$$Z_1' = B^{11}(x) Z_1 \tag{32}$$

имеет при $x \to \infty$ регулярную особенность в силу (30), а вторая

$$Z_2' = B^{22}(x) Z_2 \tag{33}$$

имеет на бесконечности иррегулярную особую точку. Коротко будем называть подсистему (32) и связанные с нею решения уравнения (3) "регулярными", а подсистему (33) и отвечающие ей решения "иррегулярными".

В силу теоремы I7.2 [II , стр. I20] подсистема (32) обладает фундаментальным матричным решением вида

$$Z_1(x) = U_1(x)x^G, \tag{34}$$

где G - постоянная матрица, а $U_1(x)$ допускает асимптотическое разложение, когда $x \to \infty$ в S. В том случае, когда матрица $B^{11}_1 = \lim\limits_{x\to\infty} x\, B^{11}(x)$ не имеет кратных собственных значений или собственных значений, различающихся между собой на целое число, то в качестве показателя G в формуле (34) может быть взята диагональная матрица

$$G = diag\{\sigma(B^{11}_1)\} \tag{35}$$

(см. [II ,стр. 39]). В этом случае

$$\det U_1(\infty) \neq 0 \tag{36}$$

и, более того, можно считать $U_1(\infty) = I$. В общем случае для $U_1(x)$ из формулы (34) нельзя гарантировать справедливость (36), однако, (см. [I3 , стр. I35-I36]) при некотором целом $p \geqslant 0$

$$\det U_1(x) \sim Cx^{-p},\quad C \neq 0,\quad x \to \infty. \tag{37}$$

Что касается иррегулярной подсистемы (33), то она в силу теоремы I2.3 [II , стр. 78] обладает фундаментальным матричным решением вида

$$Z_2(x) = U_2(x)\cdot x^{D} e^{x\, diag\{\sigma(B^{22}_0)\}}, \tag{38}$$

где $\mathcal{D}$ - некоторая постоянная диагональная матрица, а $U_2(x)$ допускает асимптотическое разложение в S при $x \to \infty$, причем

$$\det U_2(\infty) \neq 0. \tag{39}$$

Таким образом, в качестве фундаментальной системы решений уравнения (3) может быть взята первая строка матрицы

$$Y(x) = S(x)P(x)[Z_1(x) \oplus Z_2(x)]. \tag{40}$$

Элементы этой строки в силу формул (I3), (27), (29), (34)-(40) являются выражениями вида (18) и (20), указанного в данной теореме *).

Следует лишь отметить, что каждый асимптотический ряд в первой строке $Y(x)$ обязательно содержит ненулевые коэффициенты, иначе в силу (6) оказалось бы, что асимптотическое разложение $Y(x)$ (40) содержит целый столбец нулевых асимптотических разложений, а это противоречило бы (37) и (39). Поэтому, выбирая надлежащим образом показатель Z_j в (I8) и (20), мы всегда сможем добиться того, чтобы соответствующие асимптотические ряды имели отличный от нуля свободный член. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Система (7) с коэффициентом (8), где $\alpha_j(x)$ имеют вид (I0), (I0′), $\alpha_{\ell 0} \neq 0$, имеет фундаментальное матричное решение, в котором первая строка состоит из ℓ элементов $y_j(x)$ вида (I8) и $(n-\ell)$ элементов вида (20), а остальные строки и их асимптотические разложения получаются последовательным дифференцированием первой строки или соответственно последовательным дифференцированием асимптотического разложения первой строки.

Коэффициенты a_{jk} в формулах (I7), (I9), (2I), служащих для определения главных членов асимптотических разложений $y_j(x)$ $(j=1,\dots,n)$ могут быть выражены через α_{jk} в силу соотношений (9), (I0), (I0′) и (4), (5). В частности, (I7) эквива-

---

*) С точностью до линейных комбинаций с коэффициентами,имеющими асимптотические разложения (если матрица G (34) имеет непростую жорданову структуру).

лентно уравнению (22). В (19), (21) следует положить $a_{\infty}=1$, $a_{ok}=0\ (k>0)$; a_{kj} при $k>0$ заменить на α_{kj}.

Вторым следствием является следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть коэффициенты уравнения

$$\sum_{j=0}^{n} a_j(t)\, y^{(n-j)}(t) = 0 \tag{3'}$$

голоморфны в некоторой полосе $S:\ |\operatorname{Im} t| < \frac{\pi}{2}-\varepsilon,\ 0 < t_0 \leq \operatorname{Re} t < \infty$ и имеют там равномерные асимптотические разложения

$$a_j(t) \sim e^{(-\ell+j)\gamma t} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} e^{-k\gamma t}, \quad a_{00} \neq 0 \quad (j=0,\dots,\ell-1), \tag{4'}$$

$$a_j(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} e^{-k\gamma t}, \quad a_{\ell 0} \neq 0 \quad (j=\ell,\dots,n). \tag{5'}$$

Тогда уравнение (3') имеет фундаментальную систему решений $y_1(t),\dots,y_n(t)$ такую, что ℓ решений из них при $t \to \infty$ допускают в S асимптотические разложения вида

$$y_j(t) \sim e^{\mu_j e^{\gamma t}} \cdot e^{z_j \gamma t} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk} e^{-k\gamma t}\right), \tag{18'}$$

где $\mu_j \neq 0$ определены из уравнения

$$M_\ell(\gamma\mu) = \sum_{k=0}^{\ell} a_{k0} (\gamma\mu)^{\ell-k} = 0, \tag{17'}$$

(о котором предполагаем, что оно имеет лишь простые корни), а соответствующие значения z_j определены формулой

$$\gamma z_j = -(n-\ell)\gamma - \frac{1}{M'(\gamma\mu_j)} \left\{ \sum_{k=0}^{\ell} a_{k1} (\gamma\mu_j)^{\ell-k} + a_{\ell+1,0} (\gamma\mu_j)^{-1} + \frac{\gamma}{2} M''(\gamma\mu_j)\, \gamma\mu_j \right\}; \tag{19'}$$

коэффициенты b_{jk} $(k=2,3,\dots;\ j=1,\dots,\ell)$ тоже могут быть определены методом неопределенных коэффициентов. Остальные $n-\ell$ решений имеют асимптотику вида

$$y_{j+\ell}(t) \sim e^{z_{j+\ell} \gamma t} (\gamma t)^{s_{j+\ell}} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{j+\ell,k} e^{-k\gamma t}\right), \tag{20'}$$

где $z_{j+\ell}$ есть корни уравнения

$$R(\gamma z) = \sum_{j=0}^{n-\ell} a_{\ell+j,0} (\gamma z)^{n-\ell-j} = 0, \tag{21'}$$

$s_{j+\ell}$ – некоторые целые неотрицательные числа, $0 \leq s_{j+\ell} \leq n-\ell-1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 1, если заметить, что после замены $x = e^{\gamma t}$ уравнение (3') переходит в уравнение вида (3).

§ 2. ИНДЕКСЫ ДЕФЕКТА СИММЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим симметрические дифференциальные операции $\ell[y]$ произвольного порядка n, для которых уравнение

$$\ell[y] = \lambda y \tag{41}$$

оказывается уравнением вида (3), и займемся отысканием индексов дефекта минимальных дифференциальных операторов, порожденных операцией $\ell[y]$ (41) в $\mathcal{L}^2[0,\infty)$. Будем считать операцию $\ell[y]$ записанной в виде

$$\ell[y] = \sum_{k=0}^{n} i^k \ell_k[y], \tag{42}$$

где

$$\ell_{2r}[y] = \left\{ P_{n-2r}(x)\, y^{(r)} \right\}^{(r)}, \tag{43}$$

$$\ell_{2r+1}[y] = \frac{1}{2}\left\{ (P_{n-2r-1}(x)\, y^{(r)})^{(r+1)} + (P_{n-2r-1}(x)\, y^{(r+1)})^{(r)} \right\}, \tag{44}$$
$$\left(r = 0, 1, \ldots, \left[\tfrac{n}{2}\right]\right).$$

Коэффициенты $P_j(x)$ являются вещественными при $0 \le x < \infty$ функциями, которые предполагаются голоморфными в содержащем положительную полуось открытом секторе S раствора $< \pi$, имеющими в этом секторе равномерные асимптотические разложения при $x \to \infty$

$$P_j(x) \sim x^{n-\ell+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}\, x^{-k}, \qquad P_{00} \neq 0, \qquad (j = 0, 1, \ldots, \ell-1); \tag{45}$$

$$P_j(x) \sim x^{n-j+\nu} \sum_{k=0}^{\infty} P_{jk}\, x^{-k}, \qquad P_{\ell 0} \neq 0, \qquad (j = \ell, \ldots, n). \tag{46}$$

Здесь ν - целочисленный параметр,

$$\nu \geqslant 0.$$

Чтобы воспользоваться теоремой I об асимптотике решений уравнения (3), запишем уравнение (41) в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{\ell+1} \left\{ i^{n-k} P_k(x) + i^{n-k+1} \cdot \frac{n-k+1}{2} \cdot P'_{k-1}(x) + \ldots \right\} y^{(n-k)} + \ldots = \lambda y, \ (P_j(x) \equiv 0 \text{ при } j \notin [0,n]). \tag{47}$$

Это уравнение принимает вид (3) после умножения обеих частей его на $x^{-\nu}$. (Мы выписали явно лишь те члены уравнения, которые определяют асимптотику иррегулярных решений (I8)). Характеристическое уравнение (I7), отвечающее иррегулярной подсистеме, в этом случае имеет вид

$$P_\ell(i\mu) \equiv P_{00}(i\mu)^{\ell} + P_{10}(i\mu)^{\ell-1} + \ldots + P_{\ell 0} = \lambda \delta_{0,\, n-\ell+\nu}, \tag{48}$$

а формула (I9) для показателей z_j $(j = 1, \ldots, \ell)$ приводит к следующему выражению:

$$z_j = -\frac{n-\ell+\nu}{2} - \frac{i\lambda (i\mu_j)^{\nu-1}}{P'_\ell(i\mu_j)} \cdot \delta_{1,\, n-\ell+\nu} + i\, \frac{\sum_{k=0}^{\ell} P_{k1}(i\mu_j)^{\ell-k+1} + P_{\ell+1,0}}{i\mu_j\, P'_\ell(i\mu_j)}. \tag{49}$$

Здесь $\delta_{j,k}$ -символ Кронекера

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.$$

Характеристическое уравнение (2I), отвечающее регулярной подсистеме, имеющей решения вида (20), после замены

$$\zeta = z + \frac{1}{2} \tag{50}$$

принимает следующий вид, определяемый непосредственно из уравнения (4I) в силу (42)-(46):

$$F(\zeta, \nu) \equiv \sum_{k=0}^{n-\ell} i^{k} P_{n-k,0}\, Q_k(\zeta, \nu) = \delta_{\nu,0} \cdot \lambda, \tag{5I}$$

где

$$Q_{2r}(\zeta,\nu)=\prod_{j=0}^{r-1}\left\{\left(\zeta+\frac{\nu}{2}\right)^2-\left(j+\frac{\nu+1}{2}\right)^2\right\};\qquad Q_0\equiv 1; \tag{52}$$

$$Q_{2r+1}(\zeta,\nu)=\left(\zeta+\frac{\nu}{2}\right)Q_{2r}(\zeta,\nu). \tag{53}$$

Обозначим $N_1(\lambda,\nu)$ количество линейно независимых "регулярных" решений уравнения (41), имеющих вид (20) и принадлежащих $\mathcal{L}^2[0,\infty)$, а через $N_2(\lambda,\nu)$ обозначим число "иррегулярных" решений уравнения (41), имеющих вид (18) и тоже принадлежащих $\mathcal{L}^2[0,\infty)$. Тогда

$$N_\pm=N_1(\lambda,\nu)+N_2(\lambda,\nu),\quad \operatorname{Im}\lambda\gtrless 0 \tag{54}$$

определяют пару дефектных чисел $\{N_+,N_-\}$ минимального оператора, порожденного в $\mathcal{L}^2[0,\infty)$ выражением $\ell[y]$. Поэтому $N_\pm$, как известно, не зависят от λ в соответствующих полуплоскостях.

ЛЕММА I. I[0]) Величины $N_1(\lambda,\nu)$ и $N_2(\lambda,\nu)$ не зависят от λ в каждой из полуплоскостей $\operatorname{Im}\lambda>0$, $\operatorname{Im}\lambda<0$.

2[0]) Число $N_1(\lambda,\nu)$ равно количеству корней ζ уравнения (51), для которых

$$\operatorname{Re}\zeta=\operatorname{Re}\left(z+\frac{1}{2}\right)<0, \tag{55}$$

и, таким образом, при $\nu>0$ $N_1(\lambda,\nu)$ совсем не зависит от λ:

$$N_1(\lambda,\nu)=N_1(\bar\lambda,\nu)=N_1(0,\nu),\quad(\nu>0), \tag{56}$$

причем

$$\left[\frac{n-\ell+1}{2}\right]\le N_1(\lambda,\nu)\leqslant n-\ell,\quad(\nu>0), \tag{57}$$

и в указанном промежутке $N_1(\lambda,\nu)$ $(\nu>0)$ может принимать любое (целочисленное) значение в зависимости от вещественных коэффициентов $P_{j,0}$ $(j=\ell,\dots,n;\ P_{\ell,0}\ne 0)$ и от $\nu>0$. Если же $\nu=0$, то

$$N_1(\lambda,0)=\left[\frac{n-\ell}{2}+\frac{1}{4}\left(1-\operatorname{sgn}(P_{\ell 0}\operatorname{Im}\lambda)\right)\right],\quad(\nu=0,\ \operatorname{Im}\lambda\ne 0), \tag{58}$$

независимо от остальных коэффициентов P_{jk}.

3[0]) Число $N_2(\lambda,\nu)$ представимо в виде суммы

$$N_2(\lambda,\nu)=\alpha(\lambda,\nu)+\beta(\lambda,\nu), \tag{59}$$

где $\alpha(\lambda,\nu)$ есть число корней μ_j уравнения (48), для которых

$$\operatorname{Re}\mu_j<0, \tag{60}$$

а $\beta(\lambda,\nu)$ есть число тех чисто мнимых корней μ_j уравнения (48), для которых формула (49) дает

$$\operatorname{Re} z_j<-\frac{1}{2} \tag{61}$$

(за исключением случая $n-\ell+\nu=0$, то есть $n-\ell=\nu=0$, предполагается, что многочлен $P_\ell(i\mu)$ (48) имеет лишь простые корни).

В случае $n=\ell$, $\nu=0$,

$$N_2(\lambda,0)=\left[\frac{n}{2}+\frac{1}{4}\left(1-\operatorname{sgn}(P_{00}\operatorname{Im}\lambda)\right)\right],\quad(\operatorname{Im}\lambda\ne 0). \tag{62}$$

В случае $n-\ell+\nu>1$ $(n-\ell\geqslant 0, \nu\geqslant 0)$ число $N_2(\lambda,\nu)$ совсем не зависит от λ:

$$N_2(\lambda,\nu)=N_2(\bar\lambda,\nu)=N_2(0,\nu), \quad (n-\ell+\nu>1). \tag{63}$$

При этом, если r означает количество чисто мнимых корней μ_j уравнения

$$P_\ell(i\mu)\equiv\sum_{j=0}^{\ell}P_{j0}(i\mu)^{\ell-j}=0, \tag{64}$$

то есть r – число вещественных корней $t_j=i\mu_j$ полинома $P_\ell(t)$ (64), то

$$N_2(\lambda,\nu)=\frac{\ell+r}{2}, \quad (n-\ell+\nu>1). \tag{65}$$

Таким образом,

$$\left[\frac{\ell+1}{2}\right]\leqslant N_2(\lambda,\nu)\leqslant\ell, \quad (n-\ell+\nu>1), \tag{66}$$

и в указанном промежутке $N_2(\lambda,\nu)$ может принимать (при $n-\ell+\nu>1$) любое целочисленное значение в зависимости от вещественных коэффициентов P_{j0} $(j=0,\dots,\ell)$ (и независимо от ν и λ).

Наконец, в случае $n-\ell+\nu=1$ имеем

а) $\nu=0$, $n-\ell=1$:

$$N_2(\lambda,0)=\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(P_{n-1,0}\,\mathcal{J}m\lambda)-\frac{1}{4}\left(1-(-1)^n\right)\operatorname{sgn}(P_{00}\,\mathcal{J}m\lambda), \quad (\mathcal{J}m\lambda\neq 0). \tag{67}$$

в) $\nu=1$, $n=\ell$

$$N_2(\lambda,1)=\left[\frac{1}{2}\left\{n+\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn}(P_{00}\,\mathcal{J}m\lambda)\right)\right\}\right], \quad (\mathcal{J}m\lambda\neq 0). \tag{68}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. I^0). Как видно из (20) и (5I), $N_1(\lambda,\nu)$ определяется условием (55) и является одновременно количеством принадлежащих $\mathcal{L}^2[0,\infty)$ линейно независимых решений уравнения

$$\tilde\ell[y]\equiv\sum_{k=0}^{n-\ell}i^k\ell_k[y]=\lambda y, \tag{69}$$

где $\ell_k[y]$ заданы формулами (43), (44), а входящие в них коэффициенты $P_\ell(x),\dots,P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ – те же, что и в уравнении (4I). Таким образом, значения $N_1(\lambda,\nu)$ при $\mathcal{J}m\lambda>0$ и $\mathcal{J}m\lambda<0$ совпадают с дефектными числами минимального симметрического оператора, порожденного в $\mathcal{L}^2[0,\infty)$ выражением $\tilde\ell[y]$ (69), а потому не зависят в этих полуплоскостях от λ. В силу (54) отсюда следует, что и $N_2(\lambda,\nu)$ не зависит от λ при $\mathcal{J}m\lambda>0$ и при $\mathcal{J}m\lambda<0$.

Утверждение I^0) доказано.

2^0) Условие (55) вытекает непосредственно из (20) и (5I) и уже использовалось нами при доказательстве предыдущей части леммы.

(56) следует из (55) и уравнения (5I).

(57) следует из условия (55) из того факта, что при $\nu>0$ корни ζ_j уравнения (5I) не зависят от λ и располагаются в ζ - плоскости симметрично относительно оси

$$Re\,\zeta=-\frac{\nu}{2}, \quad (\nu>0). \tag{70}$$

Последнее видно из того, что замена

$$\zeta+\frac{\nu}{2}=i\eta \tag{71}$$

превращает $F(\zeta,\nu)$ в многочлен от η с вещественными коэффициентами.

(58) следует из уравнения (5I) при $\nu=0$, если, учитывая I^0), заметить, что при больших значениях $|\lambda|$ корни уравнения (5I) находятся в первом приближении в вершинах правильного $(n-\ell)$ угольника, определенных уравнением

$$i^{n-\ell} P_{\ell,0} \zeta^{n-\ell} = \lambda, \quad (\Im \lambda \gtrless 0), \tag{72}$$

причем (72) не имеет чисто мнимых корней $(\Im \lambda \neq 0)$. Утверждение 2^0) доказано.

3^0). Представление (59), (60), (6I) следует из (I8), (48) и (49).

(62) следует из (59), (60) и (6I), если учесть, что при $n-\ell+\nu=0$ и достаточно больших $|\lambda|$ корни μ_j уравнения (48) расположены в первом приближении в вершинах правильного n - угольника, определенных уравнением

$$P_{00}(i\mu)^n = \lambda, \quad (\Im \lambda \gtrless 0), \tag{73}$$

причем при $\Im \lambda \neq 0$ ни (48), ни (73) чисто мнимых корней не имеют.

(63) следует из (59), (48) и (49) при $n-\ell+\nu>1$. Формула (65) следует из представления (59), (60), (6I), если учесть, что в силу (49) при $n-\ell+\nu>1$ и чисто мнимом μ_j будет

$$\operatorname{Re} z_j = -\frac{n-\ell+\nu}{2} < -\frac{1}{2}, \quad (\operatorname{Re}\mu_j = 0; \ n-\ell+\nu>1), \tag{74}$$

и поэтому в данном случае

$$\beta(\lambda,\nu) = z, \qquad \alpha(\lambda,\nu) = \frac{\ell-z}{2}. \tag{75}$$

(66) следует из (65).

Рассмотрим, наконец, случай $n-\ell+\nu=1$:

а) Пусть $\nu=0$, $\ell=n-1$. В этом случае уравнение (48) принимает вид (64) с $\ell=n-1$, а (49) дает при чисто мнимых μ_j

$$\operatorname{Re} z_j = -\frac{1}{2} + \frac{\Im \lambda}{i\mu_j P'_{n-1}(i\mu_j)} \cdot \quad (\nu=0, \ \ell=n-1). \tag{76}$$

Поэтому $\beta(\lambda,0)$ совпадает в этом случае в силу (6I) и (76) с числом вещественных корней $t_j = i\mu_j$ многочлена $P_{n-1}(t)$ таких, что

$$\operatorname{sgn} t_j P'_{n-1}(t_j) = -\operatorname{sgn} \Im \lambda. \tag{77}$$

Если n нечетное, то $P_{n-1}(t)$ имеет четное число вещественных корней $(=n-1-2\alpha)$ и если $P_{00}P_{n-1,0}>0$, то в силу формул Виета отрицательных корней тоже четное число (корни простые по условию). Значит, в этом случае

$$\beta(\lambda,0) = \frac{n-1-2\alpha}{2}, \qquad (\Im \lambda \neq 0),$$

то есть

$$N_2(\lambda,0) = \alpha+\beta = \frac{n-1}{2} \qquad (P_{00}P_{n-1,0}>0, \ \Im\lambda \neq 0),$$

что в данном случае совпадает с (67).

Если же $P_{00}P_{n-1,0}<0$, то отрицательных корней $P_{n-1}(t)$ имеет нечетное число и так как $P_{00}P'_{n-1}(t_\iota)<0$, где t_ι наименьший вещественный корень $P_{n-1}(t)$, то

$$\beta(\lambda,0) = \frac{n-1-2\alpha}{2} - \operatorname{sgn}(P_{00}\Im\lambda), \qquad (\Im\lambda \neq 0),$$

откуда

$$N_2(\lambda,0) = \alpha+\beta = \frac{n-1}{2} - \operatorname{sgn}(P_{00}\Im\lambda), \qquad (P_{00}P_{n-1,0}<0, \quad \Im\lambda \neq 0),$$

и для этого случая формула (67) тоже доказана.

Если же n четное, то $P_{n-1}(t)$ имеет нечетное число вещественных корней $(=n-1-2\alpha)$ и среди них четное или нечетное число отрицательных корней в зависимости от $sgn(P_{00}P_{n-1,0})$. Учитывая, что теперь $P_{00}P'_{n-1}(t_<) > 0$, а $P_{00}P_{n-1,0}>0$ в случае нечетного числа отрицательных корней, находим из (77)

$$\beta(\lambda,0) = \frac{n-1-2\alpha}{2} + \frac{1}{2} sgn(P_{00} Jm\lambda) \, sgn(P_{00}P_{n-1,0}) =$$
$$= \frac{n-1}{2} - \alpha + \frac{1}{2} sgn(P_{n-1,0} Jm\lambda).$$

Значит, в этом случае

$$N_2(\lambda,0) = \alpha+\beta = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} sgn(P_{n-1,0} Jm\lambda),$$

и формула (67) доказана полностью.

в) Пусть $\nu=1$, $n=\ell$. В этом случае уравнение (48) принимает вид (64) с $\ell=n$, а (49) дает при чисто мнимых μ_j

$$Re\, z_j = -\frac{1}{2} + \frac{Jm\lambda}{P'_n(i\mu_j)}. \qquad (78)$$

Поэтому $\beta(\lambda,1)$ в данном случае совпадает, в силу (6I) и (78), с числом вещественных корней $t_j=i\mu_j$ многочлена $P_n(t)$ таких, что

$$sgn\, P'_n(t_j) = -sgn\, Jm\lambda. \qquad (79)$$

С помощью соображений, подобных приведенным в пункте а) (и теперь даже более простых), устанавливаем формулу (68).

Лемма полностью доказана.

Т Е О Р Е М А 3. I^0) Пусть L_0 - минимальный оператор, порожденный в $\mathcal{L}^2[0,\infty)$ симметрическим дифференциальным выражением $\ell[y]$ (42) произвольного порядка n (четного или нечетного), имеющим комплекснозначные коэффициенты, которые непрерывны при $0 \le x < \infty$, а в некотором открытом секторе S правой x-полуплоскости, содержащем положительную полуось, голоморфны при $0<x_0\le|x|<\infty$ и обладают при $x\to\infty$ равномерными асимптотическими разложениями вида (45), (46), где $\nu\ge 0$ целое; $\ell\in[0,n]$.

Кроме того, пусть

$$P_0(x)\ne 0, \quad (0\le x<\infty),$$

а корни полинома $P_\ell(i\mu)$ (48) простые (за исключением случая $n-\ell+\nu=0$).

Тогда дефектные числа $\{N_+, N_-\}$ оператора L_0 в случае $n-\ell+\nu>1$ определяются (при $Jm\lambda>0$ или $Jm\lambda<0$ соответственно) как сумма количеств тех корней μ_k и ζ_k уравнений (48) и (5I), для которых

$$Re\,\mu_k \le 0, \quad Re\,\zeta_k<0, \quad (n-\ell+\nu>1). \qquad (80)$$

2^0) Дефектные числа оператора L_0 могут иметь любые равные значения $N_+=N_-$ в пределах

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] \le N_+ = N_- \le n, \qquad (8I)$$

а также любые значения, различающиеся на единицу $|N_+-N_-|=1$ в пределах

$$\left[\frac{n}{2}\right]+1 \le max\{N_+, N_-\} \le max\{1, n-1\}, \; (|N_+-N_-|=1). \qquad (82)$$

Никаких других значений индексы дефекта операторов рассматриваемого класса иметь не могут.

3^0) В зависимости от значений n, ℓ и $\nu\ge 0$ индексы дефекта $\{N_+, N_-\}$ оператора L_0 оказываются следующими:

а) Если

$$0\le n-\ell+\nu\le 1, \qquad P_{00}>0, \qquad (83')$$

то

$$\left\{ \mathcal{N}_+ , \mathcal{N}_- \right\} = \left\{ \left[\frac{n}{2}\right], \left[\frac{n+1}{2}\right] \right\}. \tag{83}$$

в) Если

$$n - \ell + \nu > 1, \quad \nu > 0, \tag{84'}$$

то $\mathcal{N}_+ = \mathcal{N}_-$ и могут принимать любые значения в пределах

$$\left[\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\left(3 - (-1)^{\ell}\right)\right] \leqslant \mathcal{N}_+ = \mathcal{N}_- \leqslant n \tag{84}$$

в зависимости от коэффициентов p_{j0} $(j = 0, \ldots, n)$.

с) Если $n - \ell + \nu > 1$, $\nu = 0$, то есть

$$n - \ell > 1, \quad \nu = 0, \tag{85'}$$

то

$$\mathcal{N}_{\pm} = \left[\frac{n+r}{2} + \frac{1}{4}\left(1 - \operatorname{sgn}\left(p_{\ell 0}\, \Im m\, \lambda\right)\right)\right], \quad (\Im m\, \lambda \gtrless 0), \tag{85}$$

где r – число вещественных корней полинома $P_\ell(t)$ (64). Таким образом, в этом случае

$$\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_- = \frac{1}{2}\left((-1)^{n-\ell} - 1\right) \operatorname{sgn} p_{\ell,0}, \tag{85''}$$

и возможны любые пары $\{\mathcal{N}_+, \mathcal{N}_-\}$, удовлетворяющие (85''), для которых

$$\begin{gathered} \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\left(1 - \operatorname{sgn} p_{00}\right)\right] \leqslant \mathcal{N}_+ \leqslant n-1, \\ \left[\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\left(1 + \operatorname{sgn} p_{00}\right)\right] \leqslant \mathcal{N}_- \leqslant n-1. \end{gathered} \tag{85'''}$$

Никаких других значений индексы дефекта в рассматриваемом случае иметь не могут.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Утверждение 1^0) следует из (54) и леммы I, в частности, из (55) и (75).

Утверждение 2^0) следует из утверждения 3^0) настоящей теоремы.

Рассмотрим утверждение 3^0). Случай а). Здесь возможны варианты $n - \ell = 0$, $\nu = 0,1$ или $n - \ell = 1$, $\nu = 0$. Если $n = \ell$, то $\mathcal{N}_{\pm} = \mathcal{N}_2(\lambda, \nu)$ при $\Im m \gtrless 0$, и числа $\mathcal{N}_{\pm}$ определяются формулами (62) или (68), которые при $p_{00} > 0$ приводят к (83). Если же $n - \ell = 1$, $\nu = 0$, то $\mathcal{N}_2(\lambda, 0)$ определяется формулами (67), а $\mathcal{N}_1(\lambda, 0)$ формулами (58), которые при $n - \ell = 1$ дают

$$\mathcal{N}_1(\lambda, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}\left(p_{n-1,0} \cdot \Im m\, \lambda\right).$$

В силу (54) снова получаем отсюда при $p_{00} > 0$ формулу (83).

Случай в). В этом случае формулы (54), (57), (66) дают

$$\left[\frac{n-\ell+1}{2}\right] + \left[\frac{\ell+1}{2}\right] \leqslant \mathcal{N}_+ = \mathcal{N}_- \leqslant n,$$

что эквивалентно (84). Легко видеть, что для $\mathcal{N}_{\pm}$ возможны любые значения, допускаемые этой формулой.

Случай с). В этом случае формула (85) для $\mathcal{N}_+$ и $\mathcal{N}_-$ вытекает непосредственно из (54), (58) и (65). Формула (85'') следует из (85) или, проще, из (54), (58), (63), которые дают

$$\mathcal{N}_+ - \mathcal{N}_- = \left(\left[\frac{n-\ell}{2}\right] - \left[\frac{n-\ell+1}{2}\right]\right) \operatorname{sgn} p_{\ell 0},$$

что эквивалентно (85''). Оценки (85''') следуют из (85): максимальные при $r = \ell = n-2$, минимальные при $r=0$. Так как $r=0$ возможно лишь при четном ℓ, то в этом случае $p_{\infty} p_{\ell o} > 0$, и мы получаем из (85) выражение для нижних граней в неравенствах (85''') в приведенной там форме.

Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть минимальный симметрический дифференциальный оператор L_o порожден в $\mathcal{L}^2[0,\infty)$ операцией (42), (43), (44)

$$\ell[y] \equiv \sum_{\kappa=0}^{n} i^{\kappa} \ell_{\kappa}[y] = \lambda y, \tag{42'}$$

где

$$\ell_{2r}[y] = (p_{n-2r}(t) y^{(r)}(t))^{(r)}, \tag{43'}$$

$$\ell_{2r+1}[y] = \frac{1}{2}\left\{ (p_{n-2r-1}(t) y^{(r)}(t))^{(r+1)} + (p_{n-2r-1}(t) y^{(r+1)}(t))^{(r)} \right\}, \tag{44'}$$

а коэффициенты $p_j(t)$ $(j=0,1,\dots,n)$ – непрерывны при $0 \leqslant t < \infty$, голоморфны в некоторой полосе S : $|\operatorname{Im} t| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ при $0 < t_o \leqslant \operatorname{Re} t < \infty$, и допускают в ней при $t \to \infty$ равномерные асимптотические разложения вида

$$\begin{aligned} p_j(t) &\sim e^{(-\ell+\nu+j)\gamma t} \sum_{\kappa=0}^{\infty} p_{j\kappa} e^{-\kappa\gamma t}, \quad (p_{oo} \neq 0;\ j=0,\dots,\ell-1), \\ p_j(t) &\sim e^{\nu\gamma t} \sum_{\kappa=0}^{\infty} p_{j\kappa} e^{-\kappa\gamma t}, \qquad (p_{\ell,o} \neq 0;\ j=\ell,\dots,n), \end{aligned} \tag{93}$$

где $\gamma = \text{const} > 0$, $\nu \geqslant 0$ – целое, $\ell \in [0,n]$, причем

$$p_o(t) \neq 0, \qquad (0 \leqslant t < \infty),$$

а корни μ_j полинома

$$P_{\ell}(s) = \sum_{\kappa=0}^{\ell} p_{\kappa o} s^{\ell-\kappa} \tag{94}$$

простые.

Тогда множество возможных значений индексов дефекта $\{N_+, N_-\}$ оператора L_o совпадает с множеством возможных индексов дефекта для оператора, рассмотренного в теореме 3.

При этом уравнение (42') имеет фундаментальную систему решений, содержащую ℓ решений, имеющих в S асимптотику вида

$$y_j(t) \sim \exp\{\mu_j e^{\gamma t} + z_j \gamma t\}\left(1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_{j\kappa} e^{-\kappa\gamma t}\right), \tag{95}$$

где $\mu_j \neq 0$ $(j=1,\dots,\ell)$ определяются уравнением

$$P_{\ell}(i\gamma\mu) = \lambda \cdot \delta_{o,n-\ell+\nu}, \quad (\lambda \neq p_{\ell,o}), \tag{96}$$

а соответствующие им z_j определяются формулой

$$\gamma z_j = -\frac{n-\ell+\nu-1}{2}\gamma - \frac{i\lambda(i\gamma\mu_j)^{\nu-1}}{P'_{\ell}(i\gamma\mu_j)} \delta_{\tau,n-\ell+\nu} + i\,\frac{\sum_{\kappa=0}^{\ell} p_{\kappa 1}(i\gamma\mu_j)^{\ell-\kappa+1} + p_{\ell+1,o}}{i\gamma\mu_j P'_{\ell}(i\gamma\mu_j)}. \tag{97}$$

Остальные $n-\ell$ решений, образующих фундаментальную систему, могут быть выбраны так, чтобы они при $t \to \infty$ имели асимптотику вида

$$y_{j+\ell}(t) \sim e^{z_{j+\ell}\gamma t}(\gamma t)^{s_{j+\ell}}\left(1 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} b_{j+\ell,\kappa} e^{-\kappa\gamma t}\right), \quad (j=1,\dots,n-\ell), \tag{98}$$

где $z_{j+\ell}$ определяются уравнением

$$F(z\gamma, \nu\gamma) \equiv \sum_{\kappa=0}^{n-\ell} i^{\kappa} p_{n-\kappa,o} Q_{\kappa}(z\gamma, \nu\gamma) = \lambda \cdot \delta_{\nu,o}, \tag{99}$$

причем

$$Q_{2z}(z,\nu) = \left\{ (z+\frac{\nu}{2})^2 - \frac{\nu^2}{4} \right\}^2, \quad Q_0 \equiv 1,$$

$$Q_{2z+1}(z,\nu) = (z+\frac{\nu}{2})\, Q_{2z}(z,\nu). \qquad (100)$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Асимптотические формулы (95), (98) вытекают из теоремы 2. Для того, чтобы решение вида (95) принадлежало $\mathcal{L}^2[0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы было либо

$$Re\,\mu_j < 0, \qquad (101)$$

либо

$$Re\,\mu_j = 0, \quad Re\,z_j < 0, \quad (j=1,\dots,\ell). \qquad (102)$$

Решение вида (98) принадлежит $\mathcal{L}^2[0,\infty)$ тогда и только тогда, когда

$$Re\,z_{j+\ell} < 0, \quad (j=1,\dots,n-\ell). \qquad (103)$$

Сопоставляя эти условия и уравнения (96), (97), (99) с аналогичными условиями и уравнениями теоремы 3, убеждаемся, что возможные значения индексов дефекта $\{N_+, N_-\}$ при условиях теоремы 3 и теоремы 4 совпадают. Теорема доказана.

ПРИМЕР. Упоминавшееся во введении уравнение Мак-Леода [4] имеет вид

$$e^{-pt}(e^{-pt}(e^{-pt}(e^{-pt}(e^{-pt}y)')')')' + i(y''' - 7p^2y') = \lambda y. \qquad (104)$$

и, как легко видеть, является частным случаем уравнения (42′). В форме (42′) оно записывается так:

$$(e^{-5pt}y'')'' + iy^{(3)} + 10p^2(e^{-5pt}y')' - 7p^2iy' + 24p^4e^{-5pt}y = \lambda y. \qquad (105)$$

Здесь $n=4$, $\ell=1$, $\nu=0$, $\gamma=5p$;

$$P_{00}=1; \quad P_{1,0}=-1; \quad P_{2,0}=0; \quad P_{3,0}=-7p^2; \quad P_{4,0}=0.$$

Уравнение (96) принимает вид

$$P_1(i\gamma\mu) \equiv 5ip\mu - 1 = 0$$

$$i\mu_1 = \frac{1}{5p}.$$

Формула (97) дает

$$Re\,z_1 = -5p.$$

Таким образом, независимо от λ одно решение при $t\to\infty$ допускает оценку

$$y_1(t) = O(e^{-25p^2t}) \in \mathcal{L}^2[0,\infty).$$

Уравнение (99) имеет вид

$$F(5pz, 0) = \lambda,$$

то есть

$$F(\zeta,0) = i\zeta^3 - i7p^2\zeta = \lambda, \qquad (106)$$

где $\zeta = 5pz$. При достаточно большом $|\lambda|$ корни уравнения (106) располагаются в окрестностях вершин правильного треугольника, определенных уравнением

$$i\zeta^3 = \lambda.$$

Отсюда легко видеть, беря, например, $\lambda = \pm i$, что если $Im\,\lambda > 0$, то для одного из корней z_k уравнения (106) будет $Re\,z_k > 0$, а для двух других корней $Re\,z_k < 0$. Поэтому $N_+ = 3$. Если же $Im\,\lambda < 0$, то $Re\,z_k < 0$ лишь для одного корня, и мы находим, что $N_- = 2$. Таким образом, для оператора Мак-Леода

$$\{N_+, N_-\} = \{3, 2\}$$

в полном соответствии с [4].

Отметим, что проводимые в [4] рассмотрения, связанные с этим интересным примером, основаны на конкретном виде уравнения (104) и носят весьма искусственный и частный характер.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность М.И.Берзинг и З.Н.Ивахтиной за тщательное и квалифицированное редактирование, а также И.А.Кисуленко за помощь в оформлении рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.М.Глазман, Об индексе дефекта дифференциальных операторов, ДАН СССР, 64, 151-154, 1949.
2. С.А.Орлов, Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, ДАН СССР, 92, 3, 1953.
3. М.В.Федорюк, Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов, Тр.Моск.математич.общества, 15, 296-345, 1966.
4. J.B.Mc Leod, The number of integrable-square solutions of ordinary differential equations, Quart.J.Math., Oxford, 17, No.67, 285-290, 1966.
5. Ф.Аткинсон, Дискретные и непрерывные граничные задачи, Мир, 1968.
6. В.И.Коган, Ф.С.Рофе-Бекетов, Об индексах дефекта дифференциальных операторов нечетного порядка с матричными коэффициентами, Материалы научно-технической конференции, ХПИ им. В.И.Ленина; ХГУ, вып. 7, 93-95, 1970.
7. W.N.Everitt, Integrable-square solutions of ordinary differential equations, Quart.J. Math., Oxford, I(2), 10, 145-155, 1959.
8. И.М.Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, АН УССР, Киев, 1954.
9. М.А.Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, М, 1969.
10. М.В.Федорюк, Асимптотические методы в теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Матем.сб., 79 (121), № 4 (8), 477-516, 1969.
11. В.Вазов, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, Мир, М, 1968.
12. Ф.А.Неймарк, Об индексе дефекта дифференциального оператора, УМН 17, 4 (106), 157-163, 1962.
13. Э.А.Коддингтон, Н.Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М, 1958.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

О МНОГОМЕРНЫХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНАХ, ИМЕЮЩИХ ТОЛЬКО БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ КОМПОНЕНТЫ

Л.З.Лившиц, И.В.Островский

Обозначим через I_{0n} класс n -мерных безгранично делимых законов, имеющих только безгранично делимые компоненты. Проблема описания этого класса не решена даже в случае $n=1$, хотя здесь, благодаря, в основном, исследованиям Крамера, Леви, А.Я.Хинчина, Д.А.Райкова и Ю.В.Линника, изложение которых можно найти в [1], получено много глубоких результатов. Многомерный случай изучен значительно слабее ([6 - 18]).

Одним из авторов было доказано [5], что класс I_{01} является плотным в смысле слабой сходимости в классе всех безгранично делимых законов. Цель настоящей работы - получить аналогичный результат для многомерного случая.

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ РЕЗУЛЬТАТОВ

В данной статье приняты следующие обозначения: R^n-вещественное, C^n-комплексное евклидовы пространства; $\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)$; $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$, ... - их векторы;

$$Re\,\vec{x}=(Re\,x_1,\dots,Re\,x_n),$$
$$Jm\,\vec{x}=(Jm\,x_1,\dots,Jm\,x_n),$$
$$\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k,\quad \vec{x},\vec{y}\in C^n;\quad |\vec{x}|=\sqrt{\langle\vec{x},\vec{x}\rangle},$$

если $\vec{x}\in R^n$; $|\vec{x}|=\sqrt{|Re\,\vec{x}|^2+|Jm\,\vec{x}|^2}$,

если $\vec{x}\in C^n$.

Пусть A и B - два множества в R^n, тогда через $A+B$ мы обозначаем множество

$$\{\vec{z}:\vec{z}=\vec{x}+\vec{y};\quad \vec{x}\in A,\ \vec{y}\in B\},$$

причем, если B состоит из единственной точки $\pm\vec{z}$, то вместо $A+B$ пишем $A\pm\vec{z}$. Для записи выражения

$$A^{(1)}+A^{(2)}+\dots+A^{(m)},\ \text{где}\quad A^{(1)}=A^{(2)}=\dots=A^{(m)}=A,$$

используем символ $(m)A$, полагая по определению $(0)A=\{\vec{0}\}$. Через $(-A)$ обозначим множество $\{\vec{x}:-\vec{x}\in A\}$.

Совокупность всех векторов, представимых в виде конечных линейных комбинаций с целыми коэффициентами векторов множества $A\subset R^n$, обозначим через $M(A)$ и назовем модулем, порожденным множеством A.

Все множества из R^n, которые встречаются в дальнейшем, являются борелевскими, и это специально не оговаривается.

Обозначим через V_+ класс вполне конечных мер, определенных на классе борелевских множеств в R^n. Если $P \in V_+$ и $P(R^n)=1$, то меру P будем называть законом распределения вероятностей (з.р.). Функцию множеств μ, представимую в виде $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1, μ_2 принадлежат V_+, будем называть зарядом.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е. Заряд μ называется сосредоточенным во множестве A, если для любого E такого, что $E \cap A = \Phi$, имеем $\mu(E)=0$.

Дискретным спектром заряда μ назовем множество

$$\mathcal{D}(\mu) = \{\vec{x} : \vec{x} \in R^n, \ \mu(\{\vec{x}\}) \neq 0\}.$$

Это множество, очевидно, не более чем счетно. Заряд, сосредоточенный на своем дискретном спектре, назовем дискретным.

Преобразованием Фурье заряда μ называем функцию $\varphi(\vec{t}; \mu)$, определенную при всех $\vec{t} \in R^n$ равенством

$$\varphi(\vec{t}; \mu) = \int_{R^n} e^{i\langle \vec{t}, \vec{x}\rangle} \mu(d\vec{x}).$$

Как известно, заряд однозначно определяется своим преобразованием Фурье. Преобразование Фурье от з.р. называется характеристической функцией (х.ф) этого з.р.

Свертку зарядов μ_1 и μ_2 обозначим через $\mu_1 * \mu_2$. Соотношение $\mu = \mu_1 * \mu_2$ эквивалентно соотношению

$$\varphi(\vec{t}; \mu) = \varphi(\vec{t}; \mu_1)\, \varphi(\vec{t}; \mu_2), \quad \vec{t} \in R^n.$$

Для записи выражения $\mu_1 * \mu_2 * \ldots * \mu_m$, где $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_m = \mu$, будем использовать обозначение μ^{m*}, считая по определению, что $\mu^{0*} = \varepsilon$, где ε – з.р., определяемый равенством $\varepsilon(E)=1$, если $\vec{0} \in E$.

Напомним, что закон P называется безгранично делимым законом (б.д.з.), если для каждого $m = 2, 3, \ldots$ существует з.р. P_m такой, что $P = P_m^{m*}$.

По теореме П.Леви [19, стр. 220] з.р. P является б.д.з. в том и только в том случае, когда его х.ф. $\varphi(\vec{t}; P)$ допускает представление

$$\varphi(\vec{t}; P) = \exp\Big\{ i\langle \vec{b}, \vec{t}\rangle - \sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k + \tag{1}$$
$$+ \int_{R^n} \Big(e^{i\langle \vec{t}, \vec{x}\rangle} - 1 - \frac{i\langle \vec{t}, \vec{x}\rangle}{1+|\vec{x}|^2}\Big) \omega_P(d\vec{x})\Big\}, \qquad (\vec{t} \in R^n),$$

где $\vec{b} \in R^n$, $\sum_{j,k=1}^{n} \gamma_{jk} t_j t_k$ – неотрицательная квадратичная форма, ω_P – вполне σ-конечная мера на классе борелевских множеств, удовлетворяющая условию

$$\int_{R^n} |\vec{x}|^2 (1+|\vec{x}|^2)^{-1} \omega_P(d\vec{x}) < \infty.$$

Сформулируем теперь основные результаты работы.

Т Е О Р Е М А 1. Класс I_{0n} б.д.з., имеющих лишь б.д. компоненты, является плотным в смысле слабой сходимости в классе всех n-мерных безгранично делимых законов.

Приведенное ниже доказательство теоремы 1 носит конструктивный характер: мы указываем подкласс класса I_{0n}, являющийся плотным в смысле слабой сходимости в классе всех n-мерных б.д.з. Описание этого подкласса составляет содержание теоремы 2. Прежде чем сформулировать последнюю, введем такое определение.

Множество $A \subset R^1$ называется множеством с линейно независимыми точками, если для любой конечной системы $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} \subset A$ линейная форма $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k$ с целыми коэффициентами равна нулю лишь при условии $\alpha_k = 0$, $k = 1, \ldots m$.

Т Е О Р Е М А 2. Пусть характеристическая функция n-мерного б.д. закона P имеет вид

$$\varphi(\vec{t}; P) = \exp\Big\{ i\langle \vec{b}, \vec{t}\rangle + \int_{R^n} (e^{i\langle \vec{t}, \vec{x}\rangle} - 1)\, \omega(d\vec{x})\Big\}, \tag{2}$$

где $\vec{b} \in R^n$, мера $\omega \in V_+$ сосредоточена в не более чем счетном множестве $\mathcal{D}$, и выполнены следующие условия:

а) для каждого $j=1,\ldots,n$ проекция множества $\mathcal{D}$ на j-ю координатную ось является множеством с линейно независимыми точками, причем различные точки множества $\mathcal{D}$ не могут иметь одинаковую проекцию;

б) для некоторого $K>0$ имеет место оценка

$$\int\limits_{|\vec{x}|>y} \omega(d\vec{x}) = O\left(e^{-Ky^2}\right), \quad y \to +\infty.$$

Тогда $P \in I_{on}$.

Теперь покажем, каким образом из теоремы 2 выводится теорема I.

Построим для каждого n-мерного безгранично делимого закона P последовательность $\{P_m\}$ законов, удовлетворяющих условиям теоремы 2, которая слабо сходится к P.

Можно считать, что квадратичная форма в представлении х.ф. $\varphi(\vec{t};P)$ формулой (I) имеет вид $\sum_{k=1}^{n} c_k t_k^2$, где $c_k \geq 0$, так как общий случай сводится к этому линейным преобразованием. Для каждого $m=1,2,3,\ldots$ и целочисленного вектора $\vec{q}$, $|\vec{q}|<m^2$ рассмотрим n-мерные полуинтервалы

$$\mathcal{U}^{(m,\vec{q})} = \left\{ \vec{x} \in R^n : \frac{q_i}{m} \leq x_i < \frac{q_i+1}{m}, \quad i=1,\ldots,n \right\}$$

и возьмем только те из них, которые лежат вне гиперкуба

$$\mathcal{U}^{(m)} = \left\{ \vec{x} \in R^n : |x_i| < \frac{1}{m}, \quad i=1,\ldots,n \right\}.$$

Выберем теперь внутри каждого из полуинтервалов $\mathcal{U}^{(m,\vec{q})}$, отвечающих фиксированному m, по одной точке $\vec{x}^{(m,\vec{q})}$, а также подберем n точек $\vec{x}^{(1)}=(x_1,0,\ldots,0)$,

$$\vec{x}^{(2)}=(0,x_2,\ldots,0),\ldots, \quad \vec{x}^{(n)}=(0,0,\ldots,x_n),$$

принадлежащих $\mathcal{U}^{(m)}$, таким образом, чтобы множество $\mathcal{D}$, составленное из этих точек, удовлетворяло условиям теоремы 2.

Введем в рассмотрение меру $\omega_P^{(m)}$, определив ее следующим образом:

$$\omega_P^{(m)}(E) = \sum_{\vec{x}^{(m,\vec{q})} \in E} \omega_P\left(\mathcal{U}^{(m,\vec{q})}\right) + \sum_{\vec{x}^{(k)} \in E} \frac{2c_k}{\left(x_k^{(k)}\right)^2}.$$

Очевидно, что при $m \to \infty$

$$\int\limits_{R^n \setminus \mathcal{U}^{(m)}} \left(e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle} - 1 - \frac{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}{1+|\vec{x}|^2}\right) \omega_P^{(m)}(d\vec{x}) \to \int\limits_{R^n \setminus \{\vec{0}\}} \left(e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle} - 1 - \frac{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}{1+|\vec{x}|^2}\right) \omega_P(d\vec{x}),$$

$$\int\limits_{\mathcal{U}^{(m)}} \left(e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle} - 1 - \frac{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}{1+|\vec{x}|^2}\right) \omega_P^{(m)}(d\vec{x}) \to -\sum_{k=1}^{n} c_k t_k^2,$$

причем сходимость равномерна по $\vec{t}$ на любом компакте пространства R^n.

Отсюда следует, что законы $P^{(m)}$ с характеристическими функциями

$$\varphi(\vec{t};P^{(m)}) = \exp\left\{ i\langle\vec{b},\vec{t}\rangle + \int\limits_{R^n} \left(e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle} - 1 - \frac{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}{1+|\vec{x}|^2}\right) \omega_P^{(m)}(d\vec{x}) \right\}$$

слабо сходятся к закону P. Так как эти законы, очевидно, удовлетворяют условиям теоремы 2, то они принадлежат I_{on}.

II. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Л Е М М А I. Пусть функция $f(\vec{t})$ аналитична в гиперполосе

$$\mathcal{Y}_\rho = \left\{ \vec{t} : \vec{t} \in C^n, \max_{1 \leq k \leq n} |\operatorname{Im} t_k| \leq \rho \right\} \tag{3}$$

и представима там абсолютно сходящимся рядом

$$f(\vec{t}) = \sum_{\vec{\lambda} \in M(\mathcal{D})} c(\vec{\lambda}) e^{i\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle}, \tag{4}$$

где конечное или счетное множество $\mathcal{D} \subset R^n$ удовлетворяет условию а) теоремы 2.

Если выполнено условие

$$\inf_{\vec{t} \in \mathcal{Y}_\rho} |f(\vec{t})| > 0, \tag{5}$$

то функция $f(\vec{t})$ допускает представление

$$f(\vec{t}) = \exp\left\{ i\langle \vec{\beta}, \vec{t} \rangle + \sum_{\vec{\lambda} \in M(\mathcal{D})} d(\vec{\lambda}) e^{i\langle \vec{\lambda}, \vec{t} \rangle} \right\}, \quad (\vec{t} \in \mathcal{Y}_\rho), \tag{6}$$

причем ряд в правой части сходится в $\mathcal{Y}_\rho$ абсолютно, $\vec{\beta} \in R^n$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Сначала рассмотрим случай, когда множество

$$\mathcal{D} = \{\vec{z}_k\}_{k=1}^{p}.$$

конечно. Тогда любой вектор $\vec{\lambda} \in M(\mathcal{D})$ однозначно представляется в виде

$$\vec{\lambda} = \sum_{k=1}^{p} n_k(\vec{\lambda}) \vec{z}_k,$$

где $n_k(\vec{\lambda})$ – целые числа.

Пусть $\vec{t} \in \mathcal{Y}_\rho$, $\vec{t} = \vec{\xi} + i\vec{\eta}$, где $\vec{\xi} \in R^n$,

$$\vec{\eta} \in Q_\rho \subset R^n, \quad Q_\rho = \{\vec{\eta} : \max_{1 \le k \le n} |\eta_k| \le \rho\}.$$

Положим

$$f_{\vec{\eta}}(\vec{\xi}) = f(\vec{\xi} + i\vec{\eta}), \quad \vec{\xi} \in R^n, \quad \vec{\eta} \in Q_\rho.$$

Очевидно, что

$$f_{\vec{\eta}}(\vec{\xi}) = \sum_{\vec{\lambda} \in M(\mathcal{D})} c(\vec{\lambda}, \vec{\eta}) e^{i\langle \vec{\lambda}, \vec{\xi} \rangle},$$

где

$$c(\vec{\lambda}, \vec{\eta}) = c(\vec{\lambda}) e^{-\langle \vec{\lambda}, \vec{\eta} \rangle}. \tag{7}$$

Рассматривая тригонометрическую функцию

$$P_{\vec{\eta}}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_p) = \sum_{\vec{\lambda} \in M(\mathcal{D})} c(\vec{\lambda}, \vec{\eta}) \exp i\{n_1(\vec{\lambda})\varsigma_1 + \dots + n_p(\vec{\lambda})\varsigma_p\}, \quad \vec{\eta} \in Q_\rho, \tag{8}$$

видим, что

$$f_{\vec{\eta}}(\vec{\xi}) = P_{\vec{\eta}}(\langle \vec{z}_1, \vec{\xi} \rangle, \dots, \langle \vec{z}_p, \vec{\xi} \rangle). \tag{9}$$

Заметим, что функция $P_{\vec{\eta}}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_p)$ не обращается в нуль при действительных $\varsigma_1, \dots, \varsigma_p$. В самом деле, в силу условия а) теоремы 2, которому удовлетворяют векторы $\vec{z}_1, \dots, \vec{z}_p$, и теоремы Кронекера-Вейля, система неравенств

$$|\varsigma_k - \langle \vec{z}_k, \vec{\xi} \rangle| < \varepsilon \ (\mathrm{mod}\, 2\pi),$$

состоящая из p неравенств с n неизвестными $\xi_1, \dots, \xi_n$, $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, имеет решение при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому из (9) следует, что множество значений функции $P_{\vec{\eta}}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_p)$,

$$-\infty < \varsigma_k < +\infty, \quad k = 1, \dots, p$$

является замыканием множества значений функции $f_{\vec{\eta}}(\vec{\xi})$, $\vec{\xi} \in R^n$. Так как для функции $f_{\vec{\eta}}(\vec{\xi})$, в силу (5), справедливо

$$\inf_{\vec{\xi} \in R^n} |f_{\vec{\eta}}(\vec{\xi})| > 0, \quad \text{то} \quad P_{\vec{\eta}}(\varsigma_1, \dots, \varsigma_p) \ne 0, \ -\infty < \varsigma_k < +\infty.$$

Рассмотрим ветвь $\arg P_{\vec{\eta}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)$, непрерывную при $-\infty<\zeta_k<+\infty$, $k=1,\ldots,p$. Положим

$$\arg P_{\vec{\eta}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{k-1},\zeta_k+2\pi,\ \zeta_{k+1},\ldots,\zeta_p)-\arg P_{\vec{\eta}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_{k-1},\zeta_k,\zeta_{k+1},\ldots,\zeta_p)=$$
$$=2\pi q_k(\zeta_1,\ldots,\zeta_p;\vec{\eta}),\qquad k=1,\ldots,p.$$

Так как функция $P_{\vec{\eta}}$ имеет период 2π по каждой из переменных $\zeta_1,\ldots,\zeta_p$, то $q_k=q_k(\zeta_1,\ldots,\zeta_p;\vec{\eta})$ может принимать лишь целые значения.

Заметим, что функция $P_{\vec{\eta}}$ является, как это видно из (7) и (8), непрерывной функцией параметра $\vec{\eta}\in Q_\rho$ и, разумеется, непрерывной функцией $\zeta_1,\ldots,\zeta_p$. Поэтому функции $q_k=q_k(\zeta_1,\ldots,\zeta_p;\vec{\eta})$ непрерывны по всем своим переменным и, следовательно, постоянны.

Рассмотрим теперь функцию

$$\Psi_{\vec{\eta}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)=\ln\Big\{P_{\vec{\eta}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)\exp\Big[-i\sum_{k=1}^{p}q_k\zeta_k\Big]\Big\}=$$
$$=\ln|P_{\vec{\eta}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)|+i\Big\{\arg P_{\vec{\eta}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)-\sum_{k=1}^{p}q_k\zeta_k\Big\}. \tag{10}$$

Эта функция имеет период 2π по каждой из своих переменных и, очевидно, аналитична при действительных $\zeta_1,\ldots,\zeta_p$. Поэтому она разлагается в ряд Фурье

$$\Psi_{\vec{\eta}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)=\sum_{s_1,\ldots,s_p=-\infty}^{+\infty}h_{s_1,\ldots,s_p}(\vec{\eta})\,e^{i\sum_{k=1}^{p}s_k\zeta_k}. \tag{11}$$

С помощью известных оценок коэффициентов Фурье заключаем, что этот ряд сходится абсолютно и, более того,

$$\sup_{\vec{\eta}}\sum_{s_1,\ldots,s_p=-\infty}^{+\infty}|h_{s_1,\ldots,s_p}(\vec{\eta})|<\infty,\quad \vec{\eta}\in Q_\rho. \tag{12}$$

В силу (11), из (10) следует, что

$$P_{\vec{\eta}}(\zeta_1,\ldots,\zeta_p)=\exp\Big\{i\sum_{k=1}^{p}q_k\zeta_k+\sum_{s_1,\ldots,s_p=-\infty}^{+\infty}h_{s_1,\ldots,s_p}(\vec{\eta})\,e^{i\sum_{k=1}^{p}s_k\zeta_k}\Big\}.$$

Учитывая равенство (9), получаем представление

$$f_{\vec{\eta}}(\vec{\xi})=\exp\Big\{i\langle\vec{\beta},\vec{\xi}\rangle+\sum_{\vec{\lambda}\in M(\mathcal{D})}d(\vec{\lambda},\vec{\eta})\,e^{i\langle\vec{\lambda},\vec{\xi}\rangle}\Big\}, \tag{13}$$

где обозначено

$$\vec{\beta}=\sum_{k=1}^{p}q_k\vec{z}_k;\quad d\Big(\sum_{k=1}^{p}s_k\vec{z}_k,\vec{\eta}\Big)=h_{s_1,\ldots,s_p}(\vec{\eta}), \tag{14}$$

и ряд сходится абсолютно.

Выясним зависимость коэффициентов $d(\vec{\lambda},\vec{\eta})$ от $\vec{\eta}$.

Функция $\ln f(\vec{t})=\ln f_{\vec{\eta}}(\vec{\xi})$ аналитична по $\vec{t}$ в области $\mathcal{Y}_\rho$. Поэтому, в силу (13), функция

$$\sum_{\vec{\lambda}\in M(\mathcal{D})}d(\vec{\lambda},\vec{\eta})\,e^{i\langle\vec{\lambda},\vec{\xi}\rangle}+\langle\vec{\beta},\vec{\eta}\rangle=\ln f(\vec{t})-i\langle\vec{\beta},\vec{t}\rangle \tag{15}$$

аналитична в $\mathcal{Y}_\rho$. Из (12) и (14) следует, что она ограничена в $\mathcal{Y}_\rho$. Умножим обе части (15) на $\exp(-i\langle\vec{\lambda}^{(0)},\vec{t}\rangle)$, $(\vec{\lambda}^{(0)}\in M(\mathcal{D}))$,

и проинтегрируем по каждой из комплексных переменных t_j, $(\vec{t}=(t_1,\ldots,t_n))$, по контуру прямоугольника $\Pi_j(T, \eta_j^{(0)})$ с вершинами в точках $-T, T, T+i\eta_j^{(0)}$, $-T+i\eta_j^{(0)}$, где $T>0$, а $\vec{\eta}^{(0)} = (\eta_1^{(0)}, \dots, \eta_n^{(0)}) \in Q_\rho$.

В силу теоремы Коши, получим

$$\int_{\Pi_1(T,\eta_1^{(0)})} \cdots \int_{\Pi_n(T,\eta_n^{(0)})} \Big\{ \sum_{\vec{\lambda} \in M(\mathcal{D})} d(\vec{\lambda}, \vec{\eta}) e^{i\langle \vec{\lambda}, \vec{\xi} \rangle} + \langle \vec{\beta}, \vec{\eta} \rangle \Big\} e^{-i\langle \vec{\lambda}^{(0)}, \vec{t} \rangle} dt_1 \dots dt_n = 0.$$

Разделим это равенство на T^n и перейдем к пределу при $T \to +\infty$. Учитывая ограниченность подынтегральной функции в $\mathcal{Y}_\rho$, получим

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^n} \int_{-T}^{T} \dots \int_{-T}^{T} \Big\{ \sum_{\vec{\lambda} \in M(\mathcal{D})} d(\vec{\lambda}, \vec{\eta}^{(0)}) e^{i\langle \vec{\lambda}, \vec{\xi} \rangle} + \langle \vec{\beta}, \vec{\eta}^{(0)} \rangle \Big\} e^{\langle \vec{\lambda}^{(0)}, \vec{\eta}^{(0)} \rangle} \times$$
$$\times e^{-i\langle \vec{\lambda}^{(0)}, \vec{\xi} \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T^n} \int_{-T}^{T} \dots \int_{-T}^{T} \Big\{ \sum_{\vec{\lambda} \in M(\mathcal{D})} d(\vec{\lambda}, \vec{0}) e^{i\langle \vec{\lambda}, \vec{\xi} \rangle} \Big\} \times \qquad (16)$$
$$\times e^{-i\langle \vec{\lambda}^{(0)}, \vec{\xi} \rangle} d\xi_1 \dots d\xi_n.$$

В силу известного соотношения

$$\lim \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} e^{i\mu t} dt = \begin{cases} 2 & \mu = 0 \\ 0 & \mu \neq 0 \end{cases},$$

из (16) следует, что

$$d(\vec{\lambda}^{(0)}, \vec{\eta}^{(0)}) e^{\langle \vec{\lambda}^{(0)}, \vec{\eta}^{(0)} \rangle} = d(\vec{\lambda}^{(0)}, \vec{0}), \quad \text{если} \quad \vec{\lambda}^{(0)} \neq \vec{0},$$
$$d(\vec{0}, \vec{\eta}^{(0)}) + \langle \vec{\beta}, \vec{\eta}^{(0)} \rangle = d(\vec{0}, \vec{0}). \qquad (17)$$

Полагая $d(\vec{\lambda}) = d(\vec{\lambda}, \vec{0})$, убеждаемся в справедливости представления (6).

Избавимся теперь от сделанного в начале доказательства предположения о конечности множества $\mathcal{D}$.

Пусть
$$K = \inf_{\vec{t}} |f(\vec{t})| \,(>0), \quad \vec{t} \in \mathcal{Y}_\rho.$$

Возьмем такое конечное подмножество $\mathcal{D}_1$ множества $\mathcal{D}$, что, полагая

$$f_1(\vec{t}) = \sum_{\vec{\lambda} \in M(\mathcal{D}_1)} c(\vec{\lambda}) e^{i\langle \vec{\lambda}, \vec{t} \rangle},$$

будем иметь

$$\sup_{\vec{t} \in \mathcal{Y}_\rho} |f(\vec{t}) - f_1(\vec{t})| < \frac{K}{2}.$$

Тогда, очевидно,

$$\inf_{\vec{t} \in \mathcal{Y}_\rho} |f_1(\vec{t})| > \frac{K}{2}.$$

Следовательно, к функции $f_1(\vec{t})$ применимо доказанное, и она допускает представление вида (6).

Запишем очевидное тождество

$$f(\vec{t}) = f_1(\vec{t}) \exp\Big\{ -\ln\Big(1 - \frac{f(\vec{t}) - f_1(\vec{t})}{f(\vec{t})}\Big) \Big\}.$$

Так как функция $f_1(t)$ допускает представление вида (6), то остается доказать, что функция

$$f_2(\vec{t}) = \ln\left(1 - \frac{f(\vec{t}) - f_1(\vec{t})}{f(\vec{t})}\right)$$

представляется абсолютно сходящимся рядом вида

$$f_2(\vec{t}) = \sum_{\vec{\lambda}\in M(\mathcal{D})} d_1(\vec{\lambda}) e^{i\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle}, \quad \vec{t}\in \mathcal{Y}_\rho.$$

Для этого мы воспользуемся такой теоремой из теории банаховых алгебр *).

Если функция $\Psi(\vec{\xi})$, $\vec{\xi}\in R^n$ представляется абсолютно сходящимся рядом

$$\Psi(\vec{\xi}) = \sum_{\vec{\lambda}\in A} h(\vec{\lambda}) e^{i\langle\vec{\lambda},\vec{\xi}\rangle},$$

где A - некоторое конечное или счетное множество, а функция $F(s)$ - однозначная аналитическая на замыкании множества значений $\Psi(\vec{\xi})$, $\vec{\xi}\in R^n$, то функция $F(\Psi(\vec{\xi}))$ представляется абсолютно сходящимся рядом

$$F(\Psi(\vec{\xi})) = \sum_{\vec{\lambda}\in M(A)} h_1(\vec{\lambda}) e^{i\langle\vec{\lambda},\vec{\xi}\rangle}. \tag{18}$$

Применяя эту теорему к функциям $\Psi(\vec{\xi}) = f(\vec{\xi} + i\vec{\eta})$ и $F(s) = 1/s$, а затем к функциям
$\Psi(\vec{\xi}) = \{f(\vec{\xi}+i\vec{\eta}) - f_1(\vec{\xi}+i\vec{\eta})\}/f(\vec{\xi}+i\vec{\eta})$ и $F(s) = \ln(1-s)$, убеждаемся, что функция $f_2(\vec{\xi}+i\vec{\eta})$ при каждом фиксированном $\vec{\eta}\in Q_\rho$ допускает абсолютно сходящееся представление вида (13). Коэффициенты этого представления зависят от $\vec{\eta}$, однако, учитывая аналитичность функции $f_2(\vec{t})$, $\vec{t}\in\mathcal{Y}_\rho$, нетрудно убедиться с помощью интегрирования по произведению прямоугольников (см. первую часть доказательства леммы), что эта зависимость имеет характер, аналогичный (17). Отсюда следует, что $f_2(\vec{t})$ допускает в $\mathcal{Y}_\rho$ представление вида (6), что и требовалось.

Перейдем к другим вспомогательным утверждениям.

Пусть $\varphi(\vec{t}; P)$ - характеристическая функция n-мерного з.р. P. Если $\varphi(\vec{t}; P)$ аналитически продолжается до целой функции в C^n, то продолженную функцию будем обозначать снова через $\varphi(\vec{t}; P)$ и будем говорить, что х.ф. $\varphi(\vec{t}; P)$ - целая функция в C^n.

Л Е М М А 2. [6, стр. 55]. Если х.ф. $\varphi(\vec{t}; P)$ - целая функция в C^n, то при всех $t\in C^n$ справедливо равенство

$$\varphi(\vec{t}; P) = \int_{R^n} e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle} P(d\vec{x}),$$

в котором интеграл сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в C^n. Имеет место неравенство ("свойство хребта"):

$$|\varphi(\vec{t}; P)| \le \varphi(i\,\mathrm{Im}\,\vec{t}; P), \quad \vec{t}\in C^n.$$

Л Е М М А 3. [6, стр 56]. Если х.ф. $\varphi(\vec{t}; P)$ n-мерного з.р. P является целой функцией в C^n, то и х.ф. любой компоненты з.р. P является целой функцией в C^n.

Л Е М М А 4 [9]. Если ω - мера, заданная на классе борелевских множеств пространства R^n и удовлетворяющая при некотором $K>0$ условию

$$\int_{|\vec{x}|>a} \omega(d\vec{x}) = O(e^{-Ka^2}), \quad a \to +\infty,$$

---

*) Теорему в приведенной ниже формулировке мы не нашли в литературе. В одномерном случае теорема имеется в [2, стр. 192] однако, без утверждения, что в представлении (18) суммирование можнб распространять только на $\vec{\lambda}\in M(A)$. В нашей формулировке теорема получается, если рассмотрения из [2, § 29] провести в банаховой алгебре, состоящей из комплекснозначных функций $x(\vec{\lambda})$, $\vec{\lambda}\in R^n$, удовлетворяющих условиям:
1) $x(\vec{\lambda})$ может отличаться от нуля лишь при $\vec{\lambda}\in M(A)$,
2) $\|x\| = \sum_{\vec{\lambda}\in M(A)} |x(\vec{\lambda})| < \infty$.

то интеграл

$$f(\vec{z}) = \int\limits_{|\vec{x}|>a} e^{\langle \vec{z},\vec{x}\rangle}\,\omega(d\vec{x}) \qquad (\vec{z}\in C^n)$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте пространства C^n и, следовательно, функция $f(\vec{z})$ является целой. Справедлива оценка ж)

$$|f(\vec{z})| \le Ke^{K|Re\,\vec{z}|^2}.$$

Л Е М М А 5. [6 , стр. 59] . Пусть заряды μ_1 и μ_2 сосредоточены соответственно во множествах $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ типа F_σ . Тогда заряд $\mu = \mu_1 * \mu_2$ сосредоточен во множестве

$$A = A^{(1)} + A^{(2)}.$$

Л Е М М А жж) 6. Если целая в пространстве C^n функция $g(\vec{\zeta})$ удовлетворяет условиям:

I) $|g(\vec{\zeta})| \le K(|\vec{\zeta}|+1)^K e^{K|Re\vec{\zeta}|^2}$

2) $|g(\vec{\zeta})| \le K$ при $Re\,\vec{\zeta} = \vec{0}$

3) $g(\vec{\zeta}) \le K$ при $Jm\,\vec{\zeta} = \vec{0}$,

то $g(\vec{\zeta}) \equiv const.$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Воспользуемся следующим следствием известного принципа Фрагмена-Линделефа [4, стр. 201] : если функция $f(z)$ $(z\in C^1)$ голоморфна в полуплоскости $Re\,z \ge 0$ и удовлетворяет условиям

а) $|f(z)| \le K|z+1|^K e^{K(Re z)^2}$ при $Re\,z \ge 0$;

в) $|f(x)| \le K$ при $x \ge 0$; с) $|f(iy)| \le K$ при $-\infty < y < \infty$, то

$|f(z)| \le K$ при $Re\,z \ge 0$. Применяя этот результат к функциям $f_{\vec{x}}(z) = g(z\vec{x})$ и $f_{\vec{x}}(-z) = g(-z\vec{x})$ $(\vec{x}\in R^n;\ z\in C^1,\ Re\,z \ge 0)$,

получим, что функция $f_{\vec{x}}(z)$ ограничена во всем пространстве C^1 . По теореме Лиувилля имеем $f_{\vec{x}}(z) = C(\vec{x})$, где $C(\vec{x})$ не зависит от z . Таким образом, $g(z\vec{x}) = C(\vec{x})$ для всех $z\in C^1$.

Положив здесь $z = 0$, найдем

$$g(z\vec{x}) = g(\vec{0}) \qquad (\vec{x}\in R^n,\ z\in C^1).$$

Функция, стоящая в левой части последнего равенства, является целой по $\vec{x}\in C^n$. Но тогда по теореме единственности аналитического продолжения имеем

$$g(z\vec{x}) \equiv g(\vec{0}) \quad \text{при} \quad \vec{x}\in C^n,\ z\in C^1.$$

Полагая здесь $z = 1$, получим утверждение леммы.

Л Е М М А 7. Пусть P – закон, х.ф. которого имеет вид

$$\varphi(\vec{t}; P) = exp\left\{i\langle\vec{a},\vec{t}\rangle + \int\limits_{R^n}(e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}-1)\,\nu(d\vec{x})\right\},$$

где $\vec{a}\in R^n$, заряд ν удовлетворяет при некотором $c>0$ условию

$$\int\limits_{|\vec{x}|>y} |\nu(d\vec{x})| = O(e^{-cy^2}), \quad y \to +\infty. \qquad (19)$$

ж) Буквой K здесь и в дальнейшем обозначены положительные постоянные, зависящие лишь от функции.

жж) В работе Р.Куппенса [16] сформулировано более сильное утверждение, однако, приведенное в этой работе доказательство не представляется нам убедительным.

Тогда х.ф. любой компоненты P_1 закона P представляется в виде

$$\varphi(\vec{t}; P) = exp\{g(\vec{t})\}, \tag{20}$$

где $g(\vec{t})$ – целая функция в C^n, принимающая при $Re\,\vec{t} = 0$ действительные значения и удовлетворяющая условиям

$$g(\vec{0}) = 0, \tag{21}$$

$$0 \le g(i\vec{\tau}) - Re\,g(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}) \le 2\int_{R^n} e^{-\langle\vec{\tau},\vec{x}\rangle} \sin^2\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{x}\rangle}{2}\,\nu(d\vec{x}); \quad \vec{\sigma}\in R^n, \quad \vec{\tau}\in R^n, \tag{22}$$

$$\left|\frac{\partial g(\vec{t})}{\partial t_k}\right| \le K\,exp\left\{K|Jm\,\vec{t}\,|^2\right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{23}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из условия (I9) и леммы 4 следует, что интеграл

$$\Psi(\vec{t}) = \int_{R^n} e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}\,\nu(d\vec{x})$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в C^n и допускает оценку

$$|\Psi(\vec{t})| = O(e^{K|Jm\,\vec{t}|^2}).$$

Поэтому х.ф. $\varphi(\vec{t}; P)$ является целой функцией без нулей. По лемме 3 х.ф. компонент P_1 и P_2 закона P – также целые функции без нулей, и везде в C^n справедливо равенство

$$\varphi(\vec{t}; P) = \varphi(\vec{t}; P_1)\,\varphi(\vec{t}; P_2).$$

Отсюда следует, что при $\vec{\sigma}\in R^n$, $\vec{\tau}\in R^n$

$$\left|\frac{\varphi(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}; P)}{\varphi(i\vec{\tau}; P)}\right| = \left|\frac{\varphi(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}; P_1)}{\varphi(i\vec{\tau}; P_1)}\right| \left|\frac{\varphi(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}; P_2)}{\varphi(i\vec{\tau}; P_2)}\right|. \tag{24}$$

В силу "свойства хребта" (лемма 2), из (24) следует неравенство

$$\left|\frac{\varphi(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}; P)}{\varphi(i\vec{\tau}; P)}\right| \le \left|\frac{\varphi(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}; P_1)}{\varphi(i\vec{\tau}; P_1)}\right| \le 1. \tag{25}$$

Полагая

$$g(\vec{t}) = \int_0^1 \left\{\left[\varphi(\vec{t}\tau; P_1)\right]^{-1} \sum_{k=1}^{n} t_k \frac{\partial\varphi(\vec{t}\tau; P_1)}{\partial t_k}\right\} d\tau,$$

видим, что функция $g(\vec{t})$ – целая в C^n и $g(\vec{0}) = 0$.

Очевидно, что

$$\varphi(\vec{t}; P_1) = exp\{g(\vec{t})\},$$

и при $Re\,\vec{t} = \vec{0}$ функция $g(\vec{t})$ принимает действительные значения.

С помощью функции $g(\vec{t})$ соотношение (25) можно переписать в виде

$$0 \le g(i\vec{\tau}) - Re\,g(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}) \le \Psi(i\vec{\tau}) - Re\,\Psi(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}) =$$
$$= 2\int_{R^n} e^{-\langle\vec{\tau},\vec{x}\rangle} \sin^2\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{x}\rangle}{2}\,\nu(d\vec{x}).$$

Тем самым соотношения (20), (2I) и (22) доказаны.

Для доказательства (23) положим

$$u(\vec{\sigma},\vec{\tau}) = Re\,g(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}).$$

Левая часть соотношения (22) показывает, что при фиксированном $\vec{\tau}$ функция $u(\vec{\sigma},\vec{\tau})$ в точке $\vec{\sigma}=\vec{0}$ достигает максимума, что влечет систему равенств $(\partial/\partial\sigma_j)\ u\ (\vec{\sigma},\vec{\tau})=0$ при $\vec{\sigma}=0\ (j=1,2,\dots,n)$. Но в таком случае неравенства (22) можно переписать в виде

$$0\le -\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u(\vec{\sigma},\vec{\tau})}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}\sigma_j\sigma_k+0\,(|\vec{\sigma}|^2)\le \le 2\int_{R^n}e^{-\langle\vec{\tau},\vec{x}\rangle}\sin^2\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{x}\rangle}{2}\,\nu(d\vec{x}). \tag{26}$$

Обозначим через $\vec{e}_j,\ j=1,2,\dots,n$, единичный вектор j-й координатной оси и положим в (26) $\vec{\sigma}=\varepsilon\vec{e}_j$, $\varepsilon>0$. Деля после этого на ε^2 и устремляя $\varepsilon\to 0$, получим

$$0\le -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma_j^2}\bigg|_{\vec{\sigma}=\vec{0}}\le\frac{1}{2}\int_{R^n}e^{-\langle\vec{\tau},\vec{x}\rangle}x_j^2\,\nu(d\vec{x}).$$

Рассмотрим заряд ν_j, определяемый равенством

$$\nu_j(E)=\int_E x_j^2\,\nu(d\vec{x}).$$

Из условия (19) леммы следует, что

$$\int_{|\vec{x}|>y}|\nu_j(d\vec{x})|=0\,(e^{-Ky^2}).$$

Используя для оценки интеграла

$$\int_{R^n}e^{-\langle\vec{\tau},\vec{x}\rangle}x_j^2\,\nu(d\vec{x})\equiv\int_{R^n}e^{-\langle\vec{\tau},\vec{x}\rangle}\nu_j(d\vec{x})$$

лемму 4, найдем, что

$$\frac{\partial^2 u(\vec{\sigma},\vec{\tau})}{\partial\sigma_j^2}\bigg|_{\vec{\sigma}=\vec{0}}=0\,(e^{K|\vec{\tau}|^2}).$$

Необходимо еще получить оценки для смешанных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}\bigg|_{\vec{\sigma}=\vec{0}}.$$

Пусть $\delta\in R^1$, $\varepsilon>0$. Положим в (26)

$$\vec{\sigma}=\delta\varepsilon\vec{e}_j+\varepsilon\vec{e}_k.$$

Деля на ε^2 и устремляя затем $\varepsilon\to 0$, из левой стороны (26) получим

$$0\le -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma_j^2}\delta^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}\delta+\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma_k^2}\right\}\bigg|_{\vec{\sigma}=\vec{0}}.$$

В силу известного условия неотрицательности квадратного трехчлена, отсюда следует, что

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}\right|_{\vec{\sigma}=\vec{0}}\le\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma_j^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma_k^2}\right\}^{1/2}\bigg|_{\vec{\sigma}=\vec{0}}=0\,(e^{K|\vec{\tau}|^2}). \tag{27}$$

Функция $u(\vec{\sigma},\vec{\tau})$, будучи действительной частью целой в C^n функции $g(\vec{t})=g(\vec{\sigma}+i\vec{\tau})$, является плюригармонической и, следовательно, удовлетворяет системе уравнений ([3 ,стр.278])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma_j\partial\sigma_k}+\frac{\partial^2 u}{\partial\tau_j\partial\tau_k}=0\quad (j,k=1,\dots,n).$$

Поэтому из оценок (27) следует

$$\frac{\partial^2 u(\vec{0},\vec{\tau})}{\partial\tau_j\partial\tau_k}=0\,(e^{K|\tau|^2}). \tag{28}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial u(\vec{0},\vec{\tau})}{\partial \tau_k} = \int_0^1 \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial}{\partial \tau_k} u(\vec{0}, s\vec{\tau})\Big) ds + \frac{\partial u(\vec{0},\vec{\tau})}{\partial \tau_k}\Big|_{\vec{\tau}=\vec{0}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \tau_j \int_0^1 \frac{\partial^2 u(\vec{0}, s\vec{\tau})}{\partial \tau_j \partial \tau_k} ds + \frac{\partial u(\vec{0},\vec{\tau})}{\partial \tau_k}\Big|_{\vec{\tau}=\vec{0}}.$$

Оценивая подынтегральное выражение с помощью (28), найдем

$$\frac{\partial u(\vec{0},\vec{\tau})}{\partial \tau_k} = O(e^{K|\vec{\tau}|^2}).$$

Аналогично получаем

$$u(\vec{0},\vec{\tau}) = \sum_{k=1}^{n} \tau_k \int_0^1 \frac{\partial u(\vec{0}, s\vec{\tau})}{\partial \tau_k} ds + u(\vec{0},\vec{0}) = O(e^{K|\vec{\tau}|^2}). \tag{29}$$

Заметим, что в силу (22) и леммы 4 имеем

$$0 \le u(\vec{0},\vec{\tau}) - u(\vec{\sigma},\vec{\tau}) \le 2\int_{R^n} e^{-\langle\vec{\tau},\vec{x}\rangle} |\nu(d\vec{x})| \le K e^{K|\vec{\tau}|^2}. \tag{30}$$

Так как

$$u(\vec{\sigma},\vec{\tau}) = u(\vec{0},\vec{\tau}) + \{u(\vec{\sigma},\vec{\tau}) - u(\vec{0},\vec{\tau})\},$$

то из (29) и (30) следует, что

$$|u(\vec{\sigma},\vec{\tau})| \le K e^{K|\vec{\tau}|^2}. \tag{31}$$

Положим

$$\Theta_k(\zeta) = g(\vec{t} + \vec{e}_k \zeta), \quad k = 1, \dots, n.$$

$\zeta \in C^1$. По формуле Шварца имеем

$$\Theta_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \Theta_k(e^{i\vartheta}) \frac{e^{i\vartheta}+\zeta}{e^{i\vartheta}-\zeta} d\vartheta + i \operatorname{Im} \Theta_k(0), \quad (|\zeta| < 1).$$

Дифференцируя по ζ и полагая затем $\zeta = 0$, получим

$$\Theta_k'(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \Theta_k(e^{i\vartheta}) e^{-i\vartheta} d\vartheta,$$

откуда

$$|\Theta_k'(0)| \le 2 \max_{0 \le \vartheta \le 2\pi} |\operatorname{Re} \Theta_k(e^{i\vartheta})|.$$

Это соотношение, в силу определения функции $\Theta_k(\zeta)$, можно переписать в виде

$$\left|\frac{\partial g(\vec{t})}{\partial t_k}\right| \le 2 \max_{0 \le \vartheta \le 2\pi} |u(\vec{\sigma} + \vec{e}_k \cos\vartheta, \vec{\tau} + \vec{e}_k \sin\vartheta)|.$$

Используя (31), найдем, что

$$\max_{0 \le \vartheta \le 2\pi} |u(\vec{\sigma} + \vec{e}_k \cos\vartheta, \vec{\tau} + \vec{e}_k \sin\vartheta)| \le K e^{K|\vec{\tau}|^2},$$

откуда

$$\left|\frac{\partial g(\vec{t})}{\partial t_k}\right| \le K e^{K|\operatorname{Im}\vec{t}|^2}.$$

Лемма доказана.

III. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

Без ограничения общности можно считать, что в (2) $\vec{b} = \vec{0}$. Имеем

$$\varphi(\vec{t};P)=\exp\left\{\int_{R^n}(e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}-1)\,\omega(d\vec{x})\right\}=e^{-\omega(\mathcal{D})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\times$$
$$\times\left\{\int_{R^n}e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}\,\omega(d\vec{x})\right\}^k=e^{-\omega(\mathcal{D})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{R^n}e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}\,\omega^{k*}(d\vec{x})=$$
$$=e^{-\omega(\mathcal{D})}\int_{R^n}e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega^{k*}}{k!}\right)(d\vec{x}).$$

Поэтому

$$P=e^{-\omega(\mathcal{D})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\omega^{k*}}{k!}.$$

Отсюда и из леммы 5 заключаем, что закон P сосредоточен во множестве $\bigcup_{m=0}^{\infty}(m)\mathcal{D}$ и, следовательно, является дискретным. Но тогда, как известно, компоненты P_1 и P_2 закона P также являются дискретными законами, и для их спектров справедливо соотношение

$$\mathcal{D}(P)=\mathcal{D}(P_1)+\mathcal{D}(P_2).$$

Без уменьшения общности будем считать, что $\vec{0}\in\mathcal{D}(P_2)$. Тогда из предыдущего равенства следует, что

$$\mathcal{D}(P_1)\subset\mathcal{D}(P)\subset\bigcup_{m=0}^{\infty}(m)\mathcal{D}\subset M(\mathcal{D}).$$

Заметим, что функция $\varphi(\vec{t};P)$ удовлетворяет условиям леммы 7 и поэтому является целой.

Поэтому х.ф. $\varphi(\vec{t};P_1)$ является целой и представляется в виде

$$\varphi(\vec{t};P_1)=\exp\{g(\vec{t})\},$$

где $g(\vec{t})$ - целая функция, для которой выполнены соотношения (2I)-(23), причем в (22) роль заряда ν играет мера ω.

В силу леммы 2, для $\varphi(\vec{t};P_1)$ во всем пространстве C^n имеет место представление

$$\varphi(\vec{t};P_1)=\int_{R^n}e^{i\langle\vec{t},\vec{x}\rangle}P_1(d\vec{x}),$$

где интеграл сходится равномерно на любом компакте в C^n. Учитывая, что закон P_1 дискретен и сосредоточен во множестве $M(\mathcal{D})$, можно это представление переписать в виде

$$\varphi(\vec{t};P_1)=\sum_{\vec{\mu}\in M(\mathcal{D})}P_1(\{\vec{\mu}\})\,e^{i\langle\vec{\mu},\vec{t}\rangle},\quad \vec{t}\in C^n, \tag{32}$$

где ряд сходится абсолютно.

Пусть $\mathcal{Y}_\rho$ - множество, определяемое соотношением (3), $0<\rho<\infty$. Из выражения (2) легко получаем, что для любого $\rho>0$ существует константа $C_1(\rho)$ такая, что $|\varphi(\vec{t};P)|>C_1(\rho)$ при $\vec{t}\in\mathcal{Y}_\rho$. С другой стороны, по "свойству хребта" леммы 2 имеем $|\varphi(\vec{t};P_2)|\le C_2(\rho)$. Отсюда следует, что

$$|\varphi(\vec{t};P_1)|=\frac{|\varphi(\vec{t};P)|}{|\varphi(\vec{t};P_2)|}\ge\frac{C_1(\rho)}{C_2(\rho)}>0,\quad \vec{t}\in\mathcal{Y}_\rho. \tag{33}$$

Применим теперь к функции $\varphi(\vec{t};P_1)$ лемму I. Учитывая, что $\varphi(\vec{t};P_1)=\exp\{g(\vec{t})\}$, получаем для целой функции $g(\vec{t})$ представление

$$g(\vec{t})=i\langle\vec{a},\vec{t}\rangle+\sum_{\vec{\mu}\in M(\mathcal{D})}h(\vec{\mu})(e^{i\langle\vec{\mu},\vec{t}\rangle}-1), \tag{34}$$

где ряд сходится абсолютно в $\mathcal{Y}_\rho$ при любом $\rho>0$ и, следовательно, абсолютно сходится в C^n. Теорема будет доказана, если мы установим, что $h(\vec{\mu})\ge 0$ для любого $\vec{\mu}\in M(\mathcal{D})$.

Пусть $\vec{\pi}$ - произвольная точка множества $\mathcal{D}$. Построим последовательность $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \ldots$ конечных подмножеств множества $\mathcal{D}$ такую, что $\vec{\pi} \in \mathcal{D}_1$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}_m = \mathcal{D}$.

По условию б) теоремы 2 проекции различных точек множества $\mathcal{D}$ на каждую из координатных осей различны, и, кроме того, проекция множества $\mathcal{D}$ на каждую из осей является множеством с линейно независимыми точками. Отсюда с помощью теоремы Кронекера-Вейля заключаем, что существует последовательность векторов $\{\vec{\sigma}^{(m)}(\vec{\pi})\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_j^{(m)}(\vec{\pi}) = +\infty \qquad (j=1,\ldots,n), \tag{35}$$

$$|\langle\vec{\pi},\vec{\sigma}^{(m)}(\vec{\pi})\rangle - 1| < \frac{1}{m} (\mathrm{mod}\, 2\pi);$$

$$|\langle\vec{\mu},\vec{\sigma}^{(m)}(\vec{\pi})\rangle| < \frac{1}{m} (\mathrm{mod}\, 2\pi), \ \vec{\mu}\neq\vec{\pi}, \ \vec{\mu}\in\mathcal{D}_m. \tag{36}$$

Положим

$$q(\vec{\sigma},\vec{\tau}) = g(i\vec{\tau}) - \mathrm{Re}\, g(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}), \ \vec{\sigma}\in R^n, \ \vec{\tau}\in R^n, \tag{37}$$

где функция $g(\vec{t})$ определяется выражением (34).

В силу (34), имеем

$$q(\vec{\sigma},\vec{\tau}) = 2\sum_{\vec{\mu}\in M(\mathcal{D})} h(\vec{\mu}) e^{-\langle\vec{\mu},\vec{\tau}\rangle} \sin^2\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\mu}\rangle}{2}. \tag{38}$$

Ряд в правой части (38) сходится абсолютно при всех $\vec{\sigma}\in R^n$, $\vec{\tau}\in R^n$. Отсюда заключаем, что при фиксированном $\vec{\sigma}\in R^n$ этот ряд сходится абсолютно на любом компакте комплексного $\vec{\tau}$ - пространства C^n. Таким образом, $q(\vec{\sigma},\vec{\tau})$ при фиксированном $\vec{\sigma}\in R^n$ является целой по $\vec{\tau}$ функцией в C^n.

Покажем, что при любом $\vec{\tau}\in C^n$ существует предел

$$q_{\vec{\pi}}(\vec{\tau}) = \lim_{m\to\infty} q(\vec{\sigma}^{(m)}(\vec{\pi}),\vec{\tau}). \tag{39}$$

Каждый вектор $\vec{\mu}\in M(\mathcal{D})$ единственным образом представляется конечной линейной комбинацией векторов множества $\mathcal{D}$ с целыми коэффициентами. Обозначим через $S_z(\vec{\pi})$ $(z=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ множество тех $\vec{\mu}\in M(\mathcal{D})$, в представление которых такой комбинацией вектор $\vec{\pi}$ входит с коэффициентом z. Из (35), (36) следует, что при $\vec{\mu}\in S_z(\vec{\pi})$ выполняется

$$\lim_{m\to\infty} \sin^2\frac{\langle\vec{\mu},\vec{\sigma}^{(m)}(\vec{\pi})\rangle}{2} = \sin^2\frac{z}{2}. \tag{40}$$

Поэтому существует предел (39), из чего заключаем, что

$$q_{\vec{\pi}}(\vec{\tau}) = 2\sum_{z=-\infty}^{+\infty} \sin^2\frac{z}{2} \sum_{\vec{\mu}\in S_z(\vec{\pi})} h(\vec{\mu}) e^{-\langle\vec{\mu},\vec{\tau}\rangle}. \tag{41}$$

Так как ряд в правой части (41) сходится абсолютно, то $q_{\vec{\pi}}(\vec{\tau})$ - целая функция от $\vec{\tau}$. Покажем, что для функции $q_{\vec{\pi}}(\vec{\tau})$ имеет место оценка

$$|q_{\vec{\pi}}(\vec{\tau})| \leq K(1+|\vec{\tau}|) e^{K|\mathrm{Re}\,\vec{\tau}|^2}. \tag{42}$$

Предварительно докажем справедливость этой оценки для $q(\vec{\sigma},\vec{\tau})$, причем постоянная K не зависит от $\vec{\sigma}$.

Сравнивая (38) и (34), видим, что

$$q(\vec{\sigma},\vec{\tau}) = g(i\vec{\tau}) - \frac{1}{2}\{g(\vec{\sigma}+i\vec{\tau}) + g(-\vec{\sigma}+i\vec{\tau})\}, \ \vec{\sigma}\in R^n, \ \vec{\tau}\in C^n.$$

Поэтому

$$\frac{\partial q(\vec{\sigma},\vec{\tau})}{\partial\tau_k} = i\frac{\partial g(i\vec{\tau})}{\partial\tau_k} - \frac{i}{2}\left\{\frac{\partial g(\vec{\sigma}+i\vec{\tau})}{\partial\tau_k} + \frac{\partial g(-\vec{\sigma}+i\vec{\tau})}{\partial\tau_k}\right\}.$$

Как отмечалось в начале доказательства, для функции $g(\vec{t})$ справедливы оценки (21)-(23). Используя (23), найдем

$$\left|\frac{\partial q(\vec{\sigma},\vec{\tau})}{\partial \tau_k}\right| \leq K\exp\left\{K|Re\,\vec{\tau}|^2\right\},$$

где K не зависит от $\vec{\sigma}$.

Далее,

$$q(\vec{\sigma},\vec{\tau}) = q(\vec{\sigma},\vec{0}) + \int_0^1 \frac{d}{ds} q(\vec{\sigma}, s\vec{\tau})\,ds = q(\vec{\sigma},\vec{0}) + \sum_{k=1}^{n} \tau_k \int_0^1 \frac{\partial q(\vec{\sigma}, s\vec{\tau})}{\partial \tau_k}\,ds,$$

откуда

$$|q(\vec{\sigma},\vec{\tau})| \leq |q(\vec{\sigma},\vec{0})| + K|\vec{\tau}|e^{K|Re\,\vec{\tau}|^2}.$$

Из абсолютной сходимости ряда в (38) вытекает, что $|q(\vec{\sigma},\vec{0})| < K$, где K не зависит от $\vec{\sigma}$.

Таким образом, для функции $q(\vec{\sigma},\vec{\tau})$ требуемая оценка доказана. Полагая теперь $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^{(m)}(\vec{\lambda}),\ m \to \infty$, получим (42).

Используем теперь то обстоятельство, что функция $q(\vec{\tau})$ удовлетворяет неравенству (22), где роль ν играет мера ω. Так как мера ω сосредоточена на множестве $\mathcal{D}$, то (22) можно переписать в виде

$$0 \leq q(\vec{\sigma},\vec{\tau}) \leq 2\sum_{\vec{\lambda}\in\mathcal{D}} \Omega(\vec{\lambda})e^{-\langle\vec{\lambda},\vec{\tau}\rangle}\sin^2\frac{\langle\vec{\sigma},\vec{\lambda}\rangle}{2}, \quad \vec{\tau}\in R^n,$$

где $\Omega(\vec{\lambda}) = \omega(\{\vec{\lambda}\}) \geq 0.$

Положим в этом неравенстве $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^{(m)}(\vec{\lambda})$ и перейдем к пределу при $m \to \infty$. Воспользовавшись соотношением (40), имеем

$$0 \leq q_{\vec{\lambda}}(\vec{\tau}) \leq 2\Omega(\vec{\lambda})e^{-\langle\vec{\lambda},\vec{\tau}\rangle}\sin^2\frac{1}{2}, \quad (\vec{\tau}\in R^n). \tag{43}$$

Из (41) видно, что $|q_{\vec{\lambda}}(\vec{\tau})| < K$ при $Re\,\vec{\tau} = \vec{0}$. (44)

Учитывая (42)-(44), применим теперь лемму 6 к функции

$$f(\vec{\tau}) = q_{\vec{\lambda}}(\vec{\tau})e^{\langle\vec{\lambda},\vec{\tau}\rangle}.$$

В силу этой леммы, $f(\vec{\tau})$ постоянна.

Таким образом,

$$q_{\vec{\lambda}}(\vec{\tau}) = c(\vec{\lambda})e^{-\langle\vec{\lambda},\vec{\tau}\rangle}, \tag{45}$$

где $c(\vec{\lambda})$ зависит только от $\vec{\lambda}$.

Из (43) заключаем, что $c(\vec{\lambda}) \geq 0$.

Положим в равенствах (41) и (45) $\vec{\tau} = -i\vec{x},\ x\in R^n$.

Правые части этих равенств после такой подстановки можно рассматривать как преобразования Фурье некоторых зарядов. Используя теорему единственности для преобразований Фурье, заключаем, что справедливо равенство

$$2\sin^2\frac{z}{2}\cdot h(\vec{\mu}) = \begin{cases} 0 & \text{при } \vec{\mu}\neq\vec{\lambda}, \\ c(\vec{\lambda}) & \text{при } \vec{\mu}=\vec{\lambda}. \end{cases} \tag{46}$$

Поэтому из (46) заключаем, что $h(\vec{\mu}) \geq 0$, если $\vec{\mu}\in S_z(\vec{\lambda}),\ z\neq 0.$

Для завершения доказательства заметим, что для каждой точки $\vec{\mu}\in M(\mathcal{D})$ можно подобрать точку $\vec{\lambda}\in\mathcal{D}$ такую, что $\vec{\mu}\in S_z(\vec{\lambda})$ при $z\neq 0$.

Выражаем глубокую благодарность Б.Я.ЛЕВИНУ за внимание к работе и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ю.В.Линник, Разложения вероятностных законов, ЛГУ, Л, I960.
2. И.М.Гельфанд, Д.А.Райков, Г.Е.Шилов,Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М, I960.
3. Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ, Наука, М, I969.
4. И.В.Островский, Труды матем.ин-та им. В.А.Стеклова, 79, I98-235, I965.
5. И.В.Островский, Изв. АН СССР, сер.матем., 34, 923-944, I970.
6. И.В.Островский, Вестник ХГУ, 32, 5I-72, I966.
7. И.В.Островский, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 2, I69-I77, I966.
8. И.В.Островский, Теория вероятностей и ее применения,10,742-745,I965,I2,586-587,I967.
9. Л.З.Лившиц, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, I2, I970.
I0. H.Gramer, Math.Zeitschr.,41, 405-414,1936.
II. H.Teicher, Scand.Actuarietidskr.,No.1-2, 1-9, 1954.
I2. R.Cuppens, Comptes rendus,266, 726-729, 1958.
I3. R.Cuppens, Comptes rendus, 267, 899-901, 1968.
I4. R.Cuppens, Comptes rendus, 268, 605-608, 1969.
I5. R.Cuppens, Ann.Math.Stat.,40, 434-444, 1969.
I6. R.Cuppens, Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Geb.,12,59-72, 1969.
I7. R.Cuppens, Comptes rendus, 270, 1182-1185, 1970.
I8. R.Cuppens, Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Geb.,15, 144-156, 1970.
I9. P.Lévy, Theorie de l'addition des variables aleatoires, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

I97I выпуск П

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ПРОДЫРЯВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.А. Львов, Е.Я. Хруслов

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе проводится исследование решения второй краевой задачи для уравнения

$$\Delta u(x) - \lambda^2 u(x) = f(x) \tag{I}$$

в области, граница которой состоит из большого числа продырявленных гладких поверхностей $\sum_\kappa$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, n)$. Такая модель описывает диффузию частиц через систему отражающих экранов с малыми дырками.

Аналогичная задача изучалась ранее в работе [I] для случая, когда граница состоит из одной продырявленной поверхности $\sum$. В этой работе было найдено асимпотическое поведение решения такой задачи, когда диаметры дырок стремятся к нулю, а число их неограниченно растет. Было показано, что решение задачи сходится к некоторой функции, удовлетворяющей вне поверхности $\sum$ тому же уравнению, а на всей поверхности – определенным граничным условиям [I].

Такая же задача ставится и в данной работе: дать описание асимптотического поведения решения задачи, когда число поверхностей $\sum_\kappa$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, n)$ и число дырок на каждой поверхности растет, а диаметры дырок и расстояния между соседними поверхностями стремятся к нулю.

В работе показано, что при определенных условиях решение задачи сходится в метрике пространства L_2 к функции $u(x)$, которая в слое, где лежат поверхности $\sum_\kappa$, удовлетворяет некоторому новому дифференциальному уравнению вида

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right] - \lambda^2 u(x) = f(x). \tag{2}$$

Аналогичные вопросы для первой краевой задачи рассматривались ранее в [3 - 7] . Из результатов этих работ следует, что, в случае нулевого граничного условия, предельное уравнение образуется путем прибавления к исходному уравнению некоторого дополнительного члена вида $-q(x)u(x)$, где функция $q(x)$ (потенциал) учитывает эффективное влияние границы , в то время как главная часть уравнения (производные высших порядков) остается неизменной.

В случае второй краевой задачи предельное уравнение образуется путем изменения главной части исходного уравнения, что и показано в данной работе на том частном случае границы, который рассматривается в ней.

То, что этот результат качественно должен иметь место, можно было заключить, отправляясь от работ [I] и [2] . Однако из этих работ не следует, в каком соотношении между собой должны находиться диаметры дырок, расстояния между ними и расстояния между соседними поверхностями при предельном переходе. В данной работе эти соотношения установлены. Найдены достаточные условия, при которых имеет место сходимость, и вычислены коэффициенты предельного уравнения (2).

Данная задача была поставлена проф. В.А.Марченко. Авторы выражают ему признательность за постоянное внимание к работе и ряд полезных советов.

§ I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим в трехмерном пространстве R_3 семейство замкнутых гладких поверхностей $\{\Gamma_k\}$ $(k=0,1,\dots,n)$, образованное поверхностями уровня некоторой однозначной функции $F(x)$, $x=(x_1,x_2,x_3)\in R_3$. Пусть каждая из поверхностей Γ_k определяется уравнением $F(x)=\alpha+hk=d_k^{(h)}$, $h=\frac{\beta-\alpha}{n}$, где $0<\alpha<\beta$ и фиксированны.

Удалив из каждой поверхности Γ_k конечное число непересекающихся открытых и связных множеств (кусков) $S_{k,i}$ $(i=1,\dots,p_k)$, ограниченных гладкими кривыми, получим продырявленную поверхность $\sum_k$. Введем обозначения:

$$\sum=\bigcup_{k=0}^{n}\sum\nolimits_k,\quad S_k=\bigcup_{i=1}^{p_k}S_{k,i},\quad S=\bigcup_{k=0}^{n}S_k.$$

Область, являющуюся дополнением $\sum$ ко всему пространству R_3, обозначим через D.

В дальнейшем внутреннюю область по отношению к поверхности Γ_k будем отмечать знаком (+), внешнюю - знаком (-). Соответственно предельные значения функций и их нормальных производных с одной и другой стороны поверхности отметим знаками (+) и (-). Нормаль ν к поверхности Γ_k имеет направление из области, отмеченной знаком (+), в область, отмеченную знаком (-).

В области D рассмотрим краевую задачу для уравнения

$$\Delta u(x)-\lambda^2u(x)=f(x),\qquad\text{где}\quad\Delta=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2},\tag{I.I}$$

при граничном условии на $\sum$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}=0\tag{I.2}$$

и условии на бесконечности

$$u(x)\to0\qquad\text{при}\quad|x|\to\infty.\tag{I.3}$$

Для простоты предположим, что $f(x)$ - произвольная финитная функция с носителем, расположенным в области внутренней по отношению к поверхности Γ_0, и $f(x)\in L_2(R_3)$.

Решением краевой задачи (I.I) - (I.3) назовем функцию $u(x)\in W_2^1(D)\cap W_2^2$ (лок.), удовлетворяющую уравнению (I.I) и граничному условию (I.2) на множестве $\sum$ в следующем смысле. Пусть Φ_ε гладкие поверхности, лежащие в области D и охватывающие множество $\sum$, причем при $\varepsilon\to0$ все точки Φ_ε стремятся к $\sum$. Тогда для любой функции $\zeta(x)\in W_2^1(D)$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Phi_\varepsilon}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\zeta(x)\,dS_x=0.\tag{I.2'}$$

Как известно [8], решение такой задачи существует и единственно.

Нас интересует приближенное описание этого решения, когда число дырок $S_{k,i}$ и число поверхностей Γ_k велико, а диаметры дырок и расстояния между соседними поверхностями малы.

Чтобы найти это описание, рассмотрим последовательность областей $D^{(h)}$ с границами $\sum^{(h)}=\bigcup_{k=0}^{n}\sum_k^{(h)}$ и соответствующие им решения $u^{(h)}(x)$ краевых задач (I.I)-(I.3) при $h\to0$ $(n\to\infty)$. Будем считать, что при стремлении h к нулю число поверхностей $\sum_k^{(h)}$ стремится к бесконечности, и, сближаясь, они заполняют некоторый слой B, заключенный между фиксированными поверхностями $\Gamma_\alpha=\Gamma_0$ и $\Gamma_\beta=\Gamma_n$, которые определяются уравнениями $F(x)=\alpha$ и $F(x)=\beta$. При этом диаметры удаляемых из поверхностей $\Gamma_k^{(h)}$ кусков $S_{k,i}^{(h)}$ стремятся к нулю, а их число p_k - к бесконечности.

Величины дырок $S_{k,i}^{(h)}$ мы будем характеризовать ньютоновой емкостью множеств $S_{k,i}^{(h)}$.

Напомним, что ньютоновой емкостью множества $S^{(h)}_{k,i}$ ($S^{(h)}_{k,i}$ - кусок поверхности $\Gamma^{(h)}_k$, ограниченный гладкой кривой) называется величина [9]

$$C^{(h)}_{k,i} = \int_{S^{(h)}_{k,i}} \mu(\xi)\, dS_\xi ,$$

где функция $\mu(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int_{S^{(h)}_{k,i}} \frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|}\, dS_\xi = 1 , \quad x \in S^{(h)}_{k,i} .$$

Следующая теорема дает описание главного члена асимптотики решения задачи при $h \to 0$.

Т Е О Р Е М А I. Пусть каждую из поверхностей $\sum^{(h)}_{k}$ можно разбить на некоторое число кусков $\Gamma^{(h)}_{k,i}$ диаметром $\delta^{(h)}_{k,i}$ таких, что:

I) Внутри каждого куска $\Gamma^{(h)}_{k,i}$ расположена только одна дырка $S^{(h)}_{k,i}$, причем так, что расстояние от $S^{(h)}_{k,i}$ до границы $\Gamma^{(h)}_{k,i}$ больше, чем $c_1\delta$, где $\delta = \max\limits_{k,i} \delta^{(h)}_{k,i}$ и $c_1 > 0$;

2) Диаметры $\Gamma^{(h)}_{k,i}$ не превышают $c_2 h^{2+\varepsilon}$, т.е. $\delta \le c_2 h^{2+\varepsilon}$, где $c_2 > 0$ и $\varepsilon > 0$.

3) Для любого куска $\Gamma^{(h)}_{k,i}$ выполнено условие

$$C^{(h)}_{k,i} = \int_{\Gamma^{(h)}_{k,i}} \frac{dS_x}{h\varphi(x)}\left[1 + O\left(\frac{\delta}{h}\right)\right],$$

где $C^{(h)}_{k,i}$ - ньютонова емкость множества $S^{(h)}_{k,i}$, а $\varphi(x)$ - некоторая положительная гладкая функция, заданная в слое B .

Тогда при $h \to 0$ последовательность $u^{(h)}(x)$ решений краевых задач (I.I) - (I.3) сходится в метрике пространства $L_2(R_3)$ к функции $u(x)$, удовлетворяющей всюду в слое B уравнению

$$\Delta u(x) - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{|\nabla F(x)|\varphi(x)}{1+|\nabla F(x)|\varphi(x)} \frac{\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}}{|\nabla F(x)|^2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right] - \lambda^2 u(x) = 0, \tag{I.4}$$

а вне слоя B - исходному уравнению (I.I).

На поверхностях Γ_α и Γ_β функция $u(x)$ удовлетворяет таким условиям сопряжения:

$$\begin{aligned} &u^+(x) = u^-(x) \\ &\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)^+ = \left(\frac{1}{1+|\nabla F(x)|\varphi(x)} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)^- \qquad x \in \Gamma_\alpha , \end{aligned} \tag{I.5}$$

$$\begin{aligned} &u^-(x) = u^+(x) \\ &\left(\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)^- = \left(\frac{1}{1+|\nabla F(x)|\varphi(x)} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right)^+ \qquad x \in \Gamma_\beta , \end{aligned}$$

а на бесконечности выполняется условие (I.3).

При этом для всех точек x , находящихся на положительном расстоянии от слоя B , сходимость равномерная.

Отметим, что из (I.4) - (I.5) следует, что предельная функция $u(x)$ является решением уравнения

$$\Delta u(x) - \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{|\nabla F(x)|\bar\varphi(x)}{1+|\nabla F(x)|\bar\varphi(x)} \frac{\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}}{|\nabla F(x)|^2} \frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right] - \lambda^2 u(x) = f(x),$$

где

$$\bar{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , x \in B \\ 0 & , x \in B \end{cases},$$

т.е. для любой функции $\zeta(x) \in W_2^1(R_3)$ справедливо равенство

$$\int\limits_{R_3}\Big[\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\frac{\partial \zeta(x)}{\partial x_j} + \lambda^2 u(x)\zeta(x) + f(x)\zeta(x)\Big]d\tau_x = 0,$$

где

$$a_{ij}(x) = \delta_{i,j} - \frac{|\nabla F(x)|\bar{\varphi}(x)}{1+|\nabla F(x)|\bar{\varphi}(x)}\frac{\frac{\partial F(x)}{\partial x_i}\frac{\partial F(x)}{\partial x_j}}{|\nabla F(x)|^2},$$

а $\delta_{i,j}$ - символ Кронекера.

Строгое доказательство этой теоремы приведено в §§ 2-4. Здесь мы дадим лишь краткую схему.

I. В § 2 строится функция $W^{(h)}(x)$, аппроксимирующая при малых h решение краевой задачи (I.4) - (I.5) в метрике пространства $L_2(R_3)$, т.е.

$$\lim_{h\to 0}\|W^{(h)}(x) - u(x)\|_{L_2(R_3)} = 0. \tag{I.6}$$

Введение такой функции подсказано работами [I, 2].

Функция $W^{(h)}(x)$ вне множества $\bigcup_{k=0}^{n}\Gamma_k$ всюду удовлетворяет уравнению (I.I) с правой частью, близкой к функции $f(x)$, а на множестве $\bigcup_{k=0}^{n}\Gamma_k$ выполняются граничные условия типа сопряжения, рассмотренные в [I, 2].

2. В § 3 по функции $W^{(h)}(x)$ строится функция $V^{(h)}(x)$, которая является "почти" решением краевой задачи (I.I) - (I.3). А именно, $V^{(h)}(x)$ удовлетворяет в $D^{(h)}$ уравнению (I.I) с правой частью, близкой к $f(x)$, а на $\sum^{(h)}$ имеет нулевую нормальную производную. При переходе через множество $S_{k,i}^{(h)}$ $V^{(h)}(x)$ имеет скачок, который, однако, при малых h, в силу свойств функции $W^{(h)}(x)$, оказывается малым. С другой стороны, в этом же параграфе показано, что функция $V^{(h)}(x)$ близка к функции $W^{(h)}(x)$ в метрике пространства $L_2(R_3)$, т.е.

$$\lim_{h\to 0}\|W^{(h)}(x) - V^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)} = 0. \tag{I.7}$$

Схема построения этой функции и методы оценок аналогичны соответствующим приемам работы [6].

3. В § 4 дается оценка разности между решением краевой задачи (I.I) - (I.3) и функцией $V^{(h)}(x)$

$$Z^{(h)}(x) = u^{(h)}(x) - V^{(h)}(x).$$

Очевидно, функция $Z^{(h)}(x)$ должна компенсировать скачки функции $V^{(h)}(x)$ на множестве . и невязку в правой части уравнения. Построение функции $Z^{(h)}(x)$ проводится вариационным методом. Оказывается, что

$$\lim_{h\to 0}\|Z^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)} = 0 \tag{I.8}$$

Таким образом, из (I.6) - (I.8) следует

$$\lim_{h\to 0}\|u(x) - u^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)} = 0,$$

что и доказывает теорему I.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ $W^{(h)}$.

Предварительно введем некоторые обозначения, используемые в этом параграфе.

При каждом фиксированном h трехмерное пространство R_3 разбивается семейством замкнутых поверхностей $\{\Gamma_\kappa\}$ $(\kappa=0,1,\dots,n)$ на $n+2$ связные части, а именно: область D_0^+, внутреннюю по отношению к Γ_0; область D_n^-, внешнюю по отношению к Γ_n, и слои B_κ, заключенные между поверхностями Γ_κ и $\Gamma_{\kappa+1}$ $(\kappa=0,1,\dots,n-1)$. Область, внутреннюю по отношению к Γ_κ $(\kappa=0,1,\dots,n)$, обозначим D_κ^+, а область внешнюю – D_κ^-.

Функцию $W^{(h)}(x)$, которая при малых h должна быть близка к решению $u(x)$ краевой задачи (I.4) – (I.5), будем искать в следующем виде:

$$W^{(h)}(x)=\begin{cases} u(x) & x\in D_0^+ \\ a_\kappa^{(h)}(x_\kappa)+[F(x)-d_\kappa^{(h)}]\,b_\kappa^{(h)}(x_\kappa)+ & \\ +[F(x)-d_\kappa^{(h)}]^2 c_\kappa^{(h)}(x_\kappa) & (\kappa=0,1,\dots,n-1)\quad x\in B_\kappa \\ u(x)+hR^{(h)}(x_n)\chi(x) & x\in D_n^- \end{cases},\tag{2.I}$$

где $x\in R_3$, а x_κ есть точка пересечения с поверхностью Γ_κ линии, проходящей через точку x и ортогональной к семейству $\{\Gamma_\kappa\}$. Функции $a_\kappa^{(h)}$, $b_\kappa^{(h)}$, $c_\kappa^{(h)}$ и $R^{(h)}$ выберем постоянными вдоль линии, ортогональной к семейству $\{\Gamma_\kappa\}$, и равными

$$a_\kappa^{(h)}(x_\kappa)=u(x)\Big|_{x=x_0}+\sum_{i=0}^{\kappa}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\frac{h}{|\nabla F(x)|}\Big|_{x=x_i}-$$

$$-\frac{h}{2}\Bigg[\frac{1}{|\nabla F(x)|(1+|\nabla F(x)|\varphi(x))}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\Big|_{x=x_0}+$$

$$+\frac{1}{|\nabla F(x)|(1+|\nabla F(x)|\varphi(x))}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\Big|_{x=x_\kappa}\Bigg]\quad(\kappa=0,1,\dots,n-1);$$

$$b_\kappa^{(h)}(x_\kappa)=\frac{1}{|\nabla F(x)|(1+|\nabla F(x)|\varphi(x))}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\Big|_{x=x_\kappa}\quad(\kappa=0,1,\dots,n);\tag{2.2}$$

$$c_\kappa^{(h)}(x_\kappa)=\frac{1}{2h}\Bigg[\frac{1}{|\nabla F(x)|(1+|\nabla F(x)|\varphi(x))}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\Big|_{x=x_{\kappa+1}}-$$

$$-\frac{1}{|\nabla F(x)|(1+|\nabla F(x)|\varphi(x))}\frac{\partial u(x)}{\partial\nu}\Big|_{x=x_\kappa}\Bigg]\quad(\kappa=0,1,\dots,n-1);$$

$$R^{(h)}(x_n)=\Big[\varphi(x)\frac{\partial W^{(h)}(x)}{\partial\nu}\Big]^+_{x=x_n}+\frac{1}{h}\Big[W^{(h)}(x)-u(x)\Big]^+_{x=x_n}.$$

Гладкая срезающая функция $\chi(x)$ выбирается равной единице в области, внутренней по отношению к поверхности $F(x)=d_n^{(h)}+c$ ($c>0$ и фиксированно), равной нулю в области, внешней по отношению к поверхности $F(x)=d_n^{(h)}+2c$ и постоянной на каждой поверхности уровня функции $F(x)$.

Учитывая равенства (2.I) – (2.2) и свойства функции $\chi(x)$, нетрудно проверить, что функция $W^{(h)}(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta W^{(h)}(x)-\varkappa^2 W^{(h)}(x)=f^{(h)}(x),\qquad x\in R_3\setminus\bigcup_{\kappa=0}^{n}\Gamma_\kappa,$$

$$\Big[\Big(\frac{\partial W^{(h)}(x)}{\partial\nu}\Big)^- -\Big(\frac{\partial W^{(h)}(x)}{\partial\nu}\Big)^+\Big]_{x\in\bigcup_{\kappa=0}^{n}\Gamma_\kappa}=0,\tag{2.3}$$

$$\Big[\big(W^{(h)}(x)\big)^- -\big(W^{(h)}(x)\big)^+\Big]_{x\in\bigcup_{\kappa=0}^{n}\Gamma_\kappa}=h\Big[\varphi(x)\frac{\partial W^{(h)}(x)}{\partial\nu}\Big]_{x\in\bigcup_{\kappa=0}^{n}\Gamma_\kappa},$$

$$W^{(h)}(x) \to 0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Пользуясь методом работ [2 и 10], можно установить также следующие неравенства, которые имеют основное значение для дальнейшего:

$$\| W^{(h)}(x) - u(x) \|_{L_2(R_3)} \leqslant ch, \tag{2.4}$$

$$\| f^{(h)}(x) - f(x) \|_{L_2(R_3)} \leqslant ch, \tag{2.5}$$

где константа c не зависит от параметра h.

Построим теперь разбиение единицы области $D^{(h)}$, обладающее следующими свойствами:

1. $0 \leqslant \zeta_\kappa(x) \leqslant 1$ и $\zeta_\kappa(x) \in C^\infty(R_3)$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, n)$;

2. $\sum\limits_{\kappa=0}^{n} \zeta_\kappa(x) = 1$ $x \in R_3$;

3. функция $\zeta_\kappa(x)$ $(\kappa = 1, \ldots, n-1)$ равна нулю вне слоя, заключенного между поверхностями, определяемыми уравнениями $F(x) = d_\kappa^{(h)} + \frac{2}{3}h$, $F(x) = d_\kappa^{(h)} - \frac{2}{3}h$, и равна единице в слое, заключенном между поверхностями $F(x) = d_\kappa^{(h)} + \frac{h}{3}$, $F(x) = d_\kappa^{(h)} - \frac{h}{3}$. Функция $\zeta_0(x)$ равна нулю в области, внешней по отношению к поверхности $F(x) = d_0^{(h)} + \frac{2}{3}h$, и равна единице в области, внутренней по отношению к поверхности $F(x) = d_0^{(h)} + \frac{h}{3}$, а функция $\zeta_n(x)$ равна единице в области, внешней по отношению к поверхности $F(x) = d_n^{(h)} - h/3$, и равна нулю в области, внутренней по отношению к поверхности $F(x) = d_n^{(h)} - \frac{2}{3}h$.

4. $|\nabla \zeta_\kappa(x)| \leqslant \frac{c}{h}$ и $|\Delta \zeta_\kappa(x)| \leqslant \frac{c}{h^2}$, где константа c не зависит от κ и h.

С помощью $W^{(h)}(x)$ образуем функции $W_\kappa^{(h)}(x) = W^{(h)}(x)\zeta_\kappa(x)$. Очевидно, $\sum\limits_{\kappa=0}^{n} W_\kappa^{(h)}(x) = W^{(h)}(x)$. Нетрудно проверить, что $W^{(h)}(x)$ удовлетворяет уравнению (см. (2.3)

$$\Delta W_\kappa^{(h)}(x) - \lambda^2 W_\kappa^{(h)}(x) = f_\kappa^{(h)}(x) \qquad x \in R_3 \setminus \Gamma_\kappa, \tag{2.6}$$

где

$$f_\kappa^{(h)}(x) = W^{(h)}(x)\Delta\zeta_\kappa(x) + 2\left(\nabla W^{(h)}(x), \nabla\zeta_\kappa(x)\right) + f^{(h)}(x)\zeta_\kappa(x), \tag{2.7}$$

а на поверхности Γ_κ, в силу свойств функции $\zeta_\kappa(x)$, выполняются условия

$$\left[\left(\frac{\partial W_\kappa^{(h)}(x)}{\partial \nu}\right)^- - \left(\frac{\partial W_\kappa^{(h)}(x)}{\partial \nu}\right)^+\right]_{x \in \Gamma_\kappa} = 0, \tag{2.8}$$

$$\left[\left(W_\kappa^{(h)}(x)\right)^- - \left(W_\kappa^{(h)}(x)\right)^+\right]_{x \in \Gamma_\kappa} = h\left[\varphi(x)\frac{\partial W_\kappa^{(h)}(x)}{\partial \nu}\right]_{x \in \Gamma_\kappa}. \tag{2.9}$$

Пользуясь формулами (2.6) - (2.8) и учитывая, что $W_\kappa^{(h)} \to 0$ при $|x| \to 0$, можно получить такое представление для функции $W_\kappa^{(h)}$:

$$N_\kappa^{(h)}(x) = \begin{cases} -\int\limits_{D_\kappa^+} N_\kappa^+(x,\xi;\lambda) f_\kappa^{(h)}(\xi)\, d\tau_\xi + \int\limits_{\Gamma_\kappa} N_\kappa^+(x,\xi;\lambda)\sigma_\kappa(\xi)\, dS_\xi, & x \in D_\kappa^+, \\ -\int\limits_{D_\kappa^-} N_\kappa^-(x,\xi;\lambda) f_\kappa^{(h)}(\xi)\, d\tau_\xi - \int\limits_{\Gamma_\kappa} N_\kappa^-(x,\xi;\lambda)\sigma_\kappa(\xi)\, dS_\xi, & x \in D_\kappa^-, \end{cases} \tag{2.10}$$

где $N_\kappa^+(x,\xi;\lambda)$ и $N_\kappa^-(x,\xi;\lambda)$ – функции Грина второй краевой задачи для областей D_κ^+ и D_κ^-, а $\sigma_\kappa(x) = \left.\frac{\partial W^{(h)}(x)}{\partial \nu}\right|_{x \in \Gamma_\kappa}$.

Кроме этого, из (2.9) следует, что функция $\sigma_\kappa(x)$ есть решение такого интегрального уравнения:

$$h\varphi(x)\sigma_\kappa(x) + \int\limits_{\Gamma_\kappa}\left[N_\kappa^+(x,\xi;\lambda) + N_\kappa^-(x,\xi;\lambda)\right]\sigma_\kappa(\xi)\, dS_\xi =$$
$$= \int\limits_{D_\kappa^+} N_\kappa^+(x,\xi;\lambda) f_\kappa^{(h)}(\xi)\, d\tau_\xi - \int\limits_{D_\kappa^-} N_\kappa^-(x,\xi;\lambda) f_\kappa^{(h)}(\xi)\, d\tau_\xi, \quad x \in \Gamma_\kappa. \tag{2.11}$$

В дальнейшем будем пользоваться явным видом функции Грина второй краевой задачи при $\xi \in \Gamma_\kappa$ [I]

$$\mathcal{N}_\kappa^+(x,\xi;\lambda) = \frac{e^{-\lambda|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\kappa} \frac{e^{-\lambda|x-\eta|}}{|x-\eta|} g(\eta,\xi;\lambda)\,dS_\eta -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\kappa} \frac{e^{-\lambda|x-\eta|}}{|x-\eta|} \int\limits_{\Gamma_\kappa} R_\kappa^+(\eta,\zeta;\lambda)\, g(\zeta,\xi;\lambda)\,dS_\zeta\, dS_\eta ,$$

$$\mathcal{N}_\kappa^-(x,\xi;\lambda) = \frac{e^{-\lambda|x-\xi|}}{2\pi|x-\xi|} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\kappa} \frac{e^{-\lambda|x-\eta|}}{|x-\eta|} g(\eta,\xi;\lambda)\,dS_\eta + \tag{2.12}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\kappa} \frac{e^{-\lambda|x-\eta|}}{|x-\eta|} \int\limits_{\Gamma_\kappa} R_\kappa^-(\eta,\zeta;\lambda)\, g(\zeta,\xi;\lambda)\,dS_\zeta\, dS_\eta .$$

Здесь

$$g(\eta,\xi;\lambda) = 2\,\frac{e^{-\lambda|\eta-\xi|}\,(\lambda|\eta-\xi|+1)}{|\eta-\xi|^2}\cos\gamma ,$$

где γ - угол между вектором, проведенным из точки ξ в точку η, и вектором нормали ν_ξ. Ядра $R_\kappa^+(\eta,\zeta;\lambda)$, $R_\kappa^-(\eta,\zeta;\lambda)$ непрерывны при $\eta \neq \zeta$ и имеют при $\eta \to \zeta$ особенности порядка $\frac{1}{|\eta-\zeta|}$.

§ 3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ $V^{(h)}$.

В данном параграфе будет построена функция $V^{(h)}(x)$, которая при малых h дает хорошее приближение к $u^{(h)}(x)$, а именно:

$$u^{(h)}(x) = V^{(h)}(x) + z^{(h)}(x),$$

где функция $z^{(h)}(x)$ в метрике пространства $L_2(R_3)$ стремится к нулю при $h \to 0$. Построение и оценка функции $z^{(h)}$ будут проведены в следующем параграфе.

Рассмотрим систему функций $\eta_\kappa(x)$ $(\kappa=0,1,\dots,n)$, обладающую такими свойствами:

I. $0 \leqslant \eta_\kappa(x) \leqslant 1$ и $\eta_\kappa(x) \in C^\infty(R_3)$ $(\kappa=0,1,\dots,n)$;

2. функция $\eta_\kappa(x)$ $(\kappa=1,\dots,n-1)$ равна нулю вне слоя, заключенного между поверхностями, определяемыми уравнениями $F(x)=d_\kappa^{(h)}+\frac{3}{4}h$ $F(x)=d_\kappa^{(h)}-\frac{3}{4}h$, и равна единице в слое, заключенном между поверхностями $F(x)=d_\kappa^{(h)}+\frac{2}{3}h$ $F(x)=d_\kappa^{(h)}-\frac{2}{3}h$. Функция $\eta_0(x)$ равна нулю в области, внешней по отношению к поверхности $F(x)=d_0^{(h)}+\frac{3}{4}h$, и равна единице в области, внутренней по отношению к поверхности $F(x)=d_0^{(h)}+\frac{2}{3}h$, а функция $\eta_n(x)$ равна единице в области, внешней по отношению к поверхности $F(x)=d_n^{(h)}-\frac{2}{3}h$, и равна нулю в области, внутренней по отношению к поверхности $F(x)=d_n^{(h)}-\frac{3}{4}h$;

3. $|\nabla\eta_\kappa(x)| \leqslant \frac{c}{h}$ и $|\Delta\eta_\kappa(x)| \leqslant \frac{c}{h^2}$. Постоянная c не зависит от κ и h.

Функцию $V^{(h)}(x)$ будем искать в таком виде:

$$V^{(h)}(x) = \sum_{\kappa=0}^{n} V_\kappa^{(h)}(x)\,\eta_\kappa(x), \tag{3.1}$$

где функцию $V_\kappa^{(h)}$ определяем следующим образом:

$$V_\kappa^{(h)}(x)=\begin{cases} -\int\limits_{D_\kappa^+} N_\kappa^+(x,\xi;\lambda) f_\kappa^{(h)}(\xi)\,d\tau_\xi + \int\limits_{S_\kappa^{(h)}} N_\kappa^+(x,\xi;\lambda)\mu_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi\,, \quad x\in D_\kappa^+, \\ -\int\limits_{D_\kappa^-} N_\kappa^-(x,\xi;\lambda) f_\kappa^{(h)}(\xi)\,d\tau_\xi - \int\limits_{S_\kappa^{(h)}} N_\kappa^-(x,\xi;\lambda)\cdot\mu_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi, \quad x\in D_\kappa^-, \end{cases} \tag{3.2}$$

Функции N_κ^+ , N_κ^- и $f_\kappa^{(h)}$ те же, что и в (2.10)

На каждом куске $S_{\kappa,i}^{(h)}$ ($S_\kappa^{(h)} = \bigcup\limits_{i=1}^{p_\kappa} S_{\kappa,i}^{(h)}$) функцию $\mu_\kappa^{(h)}$ выбираем так, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \frac{\mu_\kappa^{(h)}(\xi)}{|x-\xi|}\,dS_\xi = \frac{m_{\kappa,i}^{(h)}}{c_{\kappa,i}^{(h)}}\,, \qquad x\in S_{\kappa,i}^{(h)}\,, \tag{3.3}$$

где $c_{\kappa,i}^{(h)}$ - ньютонова емкость множества $S_{\kappa,i}^{(h)}$, $m_{\kappa,i}^{(h)} = \int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}} \sigma_\kappa(\xi)\,dS_\xi$, а $\sigma_\kappa(x) = \frac{\partial W^{(h)}(x)}{\partial\nu}\Big|_{x=x_\kappa}$ - решение уравнения (2.11) (доказательство существования функции $\mu_\kappa^{(h)}$ см. в [9, 11]).

Отметим, что, в силу принципа максимума, всюду имеет место неравенство

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \frac{\mu_\kappa^{(h)}(\xi)}{|x-\xi|}\,dS_\xi \leqslant \frac{m_{\kappa,i}^{(h)}}{c_{\kappa,i}^{(h)}}\,. \tag{3.4}$$

Функция $\mu_\kappa^{(h)}$ положительна на $S_{\kappa,i}^{(h)}$ [9, 11] и растет при подходе к краю $S_{\kappa,i}^{(h)}$.

Из определения ньютоновой емкости следует равенство

$$m_{\kappa,i}^{(h)} = \int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}} \sigma_\kappa(\xi)\,dS_\xi = \int\limits_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \mu_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi\,, \tag{3.5}$$

откуда легко получаем

$$\int\limits_{S_{\kappa,i}^{(h)}} |\mu_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi = \int\limits_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \mu_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi \leqslant c\,\mathrm{mes}\,\Gamma_{\kappa,i}^{(h)} \leqslant c\delta^2, \tag{3.5'}$$

где δ - максимальный диаметр кусков $\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}$. Здесь и в дальнейшем буквой c обозначены постоянные, не зависящие от h .

Из формулы (3.2) следует, что функция $V_\kappa^{(h)}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta V_\kappa^{(h)}(x) - \lambda^2 V_\kappa^{(h)}(x) = f_\kappa^{(h)}(x)\,, \qquad x\bar{\in}\,\Gamma_\kappa^{(h)} \tag{3.6}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial V_\kappa^{(h)}(x)}{\partial\nu}\Big|_{x\in\Sigma_\kappa^{(h)}} = 0. \tag{3.7}$$

При переходе через $S_{\kappa,i}^{(h)}$ предельные значения нормальной производной функции V_k^h с разных сторон от $\Gamma_\kappa^{(h)}$ совпадают, а сама функция имеет скачок

$$q_\kappa^{(h)}(x) = \left(V_\kappa^{(h)}(x)\right)^+ - \left(V_\kappa^{(h)}(x)\right)^- \qquad x\in S_{\kappa,i}^{(h)}\,. \tag{3.8}$$

Оценим этот скачок. Из (3.2) следует, что

$$q_\kappa^{(h)}(x) = \int_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \left[N_\kappa^+(x,\xi;\lambda) + N_\kappa^-(x,\xi;\lambda) \right] \mu_\kappa^{(h)}(\xi)\, dS_\xi +$$
$$+ \sum_{j\neq i} \int_{S_{\kappa,j}^{(h)}} \left[N_\kappa^+(x,\xi;\lambda) + N_\kappa^-(x,\xi;\lambda) \right] \mu_\kappa^{(h)}(\xi)\, dS_\xi - \tag{3.9}$$
$$- \int_{D_\kappa^+} N_\kappa^+(x,\xi;\lambda) f_\kappa^{(h)}(\xi)\, d\tau_\xi + \int_{D_\kappa^-} N_\kappa^-(x,\xi;\lambda) f_\kappa^{(h)}(\xi)\, d\tau_\xi .$$

Пользуясь формулами (2.I2), при $x, \xi \in \Gamma_\kappa^{(h)}$ получаем представление

$$N_\kappa^+(x,\xi;\lambda) + N_\kappa^-(x,\xi;\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{e^{-\lambda|x-\xi|}}{|x-\xi|} + \Phi_\kappa(x,\xi;\lambda), \tag{3.I0}$$

где функция

$$\Phi_\kappa(x,\xi;\lambda) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\kappa} \frac{e^{-\lambda|x-\eta|}}{|x-\xi|} \int_{\Gamma_\kappa} \left[R_\kappa^+(\eta,\zeta;\lambda) - R_\kappa^-(\eta,\zeta;\lambda) \right] g(\zeta,\xi;\lambda)\, dS_\zeta\, dS_\eta$$

непрерывна и удовлетворяет следующим неравенствам:

$$|\Phi_\kappa(x_1,\xi;\lambda) - \Phi_\kappa(x_2,\xi;\lambda)| \leqslant c\, |x_1 - x_2|\, |\ln|x_1 - x_2||, \tag{3.II}$$

$$|\Phi_\kappa(x,\xi_1;\lambda) - \Phi_\kappa(x,\xi_2;\lambda)| \leqslant c\, |\xi_1 - \xi_2|\, |\ln|\xi_1 - \xi_2||. \tag{3.I2}$$

Эти оценки вытекают из теоремы о композиции ядер со слабой особенностью [I2] и свойств ядер резольвент $R_\kappa^+(\eta,\zeta;\lambda)$, $R_\kappa^-(\eta,\zeta;\lambda)$.

Учитывая (3.I0), первое слагаемое в правой части (3.9) можем переписать так:

$$\frac{1}{\pi} \int_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \frac{\mu_\kappa^{(h)}(\xi)}{|x-\xi|}\, dS_\xi + \frac{1}{\pi} \int_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \left[\frac{e^{-\lambda|x-\xi|} - 1}{|x-\xi|} + \pi \Phi_\kappa(x,\xi;\lambda) \right] \mu_\kappa^{(h)}(\xi)\, dS_\xi .$$

Из ограниченности функции Φ_κ и оценки (3.5′) получаем, что

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \left[\frac{e^{-\lambda|x-\xi|} - 1}{|x-\xi|} + \pi \Phi_\kappa(x,\xi;\lambda) \right] \mu_\kappa^{(h)}(\xi)\, dS_\xi \right| \leq c\delta^2. \tag{3.I3}$$

Принимая во внимание равенство (3.3) и условие 3) теоремы I, можем записать

$$\frac{1}{\pi} \int_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \frac{\mu_\kappa^{(h)}(\xi)}{|x-\xi|}\, dS_\xi = \frac{\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}} \sigma_\kappa(\xi)\, dS_\xi}{\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}} \frac{dS_\xi}{h\varphi(\xi)} \left[1 + O\left(\frac{\delta}{h}\right) \right]}, \quad x \in S_{\kappa,i}^{(h)} .$$

В виду того, что функции $\sigma_\kappa(x)$ и $\varphi(x)$ гладкие, и в силу условий I)–2) теоремы I, получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \frac{\mu_\kappa^{(h)}(\xi)}{|x-\xi|}\, dS_\xi = h\varphi(x)\sigma_\kappa(x) + O(\delta), \quad x \in S_{\kappa,i}^{(h)} . \tag{3.I4}$$

Из (3.4) и условия 2) теоремы I всюду имеет место оценка

$$\frac{1}{\pi} \int_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \frac{\mu_\kappa^{(h)}(\xi)}{|x-\xi|}\, dS_\xi \leqslant ch. \tag{3.I5}$$

Таким образом, отсюда и из оценки (3.I3) следует

$$\int_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \left[N_\kappa^+(x,\xi;\lambda) + N_\kappa^-(x,\xi;\lambda) \right] \mu_\kappa^{(h)}(\xi)\, dS_\xi = h\varphi(x)\sigma_\kappa(x) + O(\delta) \tag{3.I6}$$

при $x \in S^{(h)}_{\kappa,i}$

Учитывая (3.16) и интегральное уравнение (2.11), равенство (3.9) перепишем так:

$$q^{(h)}_{\kappa}(x) = -\int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}} \left[\mathcal{N}^{+}_{\kappa}(x,\xi;\lambda) + \mathcal{N}^{-}_{\kappa}(x,\xi;\lambda)\right] \sigma_{\kappa}(\xi)\, dS_{\xi} - \tag{3.17}$$
$$- \sum_{j\neq i} \Big\{ \int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,j}} \left[\mathcal{N}^{+}_{\kappa}(x,\xi;\lambda) + \mathcal{N}^{-}_{\kappa}(x,\xi;\lambda)\right] \sigma_{\kappa}(\xi)\, dS_{\xi} -$$
$$- \int_{S^{(h)}_{\kappa,j}} \left[\mathcal{N}^{+}_{\kappa}(x,\xi;\lambda) + \mathcal{N}^{-}_{\kappa}(x,\xi;\lambda)\right] \mu^{(h)}_{\kappa}(\xi)\, dS_{\xi} \Big\} + O(\delta).$$

Первый интеграл в правой части есть величина порядка $O(\delta)$. Это следует из ограниченности функции $\sigma_{\kappa}(x)$ и равенства (3.10)

Остается оценить второе слагаемое, стоящее в правой части (3.17). Положим

$$\bar{\mu}^{(h)}_{\kappa}(x) = \begin{cases} \mu^{(h)}_{\kappa}(x), & x \in S^{(h)}_{\kappa} \\ 0, & x \in \Gamma_{\kappa} \setminus S^{(h)}_{\kappa} \end{cases}$$

и введем функцию

$$\vartheta^{(h)}_{\kappa}(x) = \sigma_{\kappa}(x) - \bar{\mu}^{(h)}_{\kappa}(x), \tag{3.18}$$

определенную на всей поверхности Γ_{κ}. Из (3.5) и ограниченности σ_{κ} следует, что $\vartheta^{(h)}_{\kappa}$ суммируема на всей поверхности Γ_{κ}, кроме того, из равенства (3.5) вытекает, что для любого куска $\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}$

$$\int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}} \vartheta^{(h)}_{\kappa}(x)\, dS_{x} = 0. \tag{3.19}$$

Пользуясь равенством (3.10) и принимая во внимание (3.19), сумму в (3.17) можно представить в виде

$$\sum_{j\neq i} \Big\{ \int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,j}} \left[\mathcal{N}^{+}_{\kappa}(x,\xi;\lambda) + \mathcal{N}^{-}_{\kappa}(x,\xi;\lambda)\right] \sigma_{\kappa}(\xi)\, dS_{\xi} -$$
$$- \int_{S^{(h)}_{\kappa,j}} \left[\mathcal{N}^{+}_{\kappa}(x,\xi;\lambda) + \mathcal{N}^{-}_{\kappa}(x,\xi;\lambda)\right] \mu^{(h)}_{\kappa}(\xi)\, dS_{\xi} \Big\} = \varepsilon^{(1)}_{\kappa}(x) + \varepsilon^{(2)}_{\kappa}(x) + \varepsilon^{(3)}_{\kappa}(x),$$

где

$$\varepsilon^{(1)}_{\kappa}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{j\neq i} \int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,j}} \left[\frac{1}{|x-\xi|} - \frac{1}{|x-\xi_j|}\right] \vartheta^{(h)}_{\kappa}(\xi)\, dS_{\xi},$$

$$\varepsilon^{(2)}_{\kappa}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{j\neq i} \int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,j}} \left[\frac{e^{-\lambda|x-\xi|}-1}{|x-\xi|} - \frac{e^{-\lambda|x-\xi_j|}-1}{|x-\xi_j|}\right] \vartheta^{(h)}_{\kappa}(\xi)\, dS_{\xi},$$

$$\varepsilon^{(3)}_{\kappa}(x) = \sum_{j\neq i} \int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,j}} \left[\Phi_{\kappa}(x,\xi;\lambda) - \Phi(x,\xi_j;\lambda)\right] \vartheta^{(h)}_{\kappa}(\xi)\, dS_{\xi}.$$

Здесь ξ_j – некоторая фиксированная точка, принадлежащая множеству $\Gamma^{(h)}_{\kappa,j}$.

Так как функция $[exp(-\lambda|x-\xi|)-1]|x-\xi|^{-1}$ удовлетворяет условию Липшица, то, учитывая оценку (3.5′), получаем

$$|\varepsilon^{(2)}_{\kappa}(x)| \leqslant c\delta. \tag{3.20}$$

Аналогично, из оценок (3.5′) и (3.12) следует

$$|\varepsilon^{(3)}_{\kappa}(x)| \leqslant c\delta\, |\ln \delta|. \tag{3.21}$$

Перейдем к оценке $\varepsilon^{(1)}_{\kappa}(x)$. Так как нам в дальнейшем придется неоднократно оценивать суммы вида

$$\sum_{j\neq i}\int_{\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}\left[\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi_j|}\right]\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)dS_\xi, \tag{3.22}$$

где точка x находится на некотором расстоянии от множества, по которому берутся интегралы. Проведем эту оценку подробно.

Нетрудно видеть, что

$$|\varepsilon_\kappa^{(1)}(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\sum_j{}'\int_{\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}\left|\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi_j|}\right||\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi+$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_j{}''\int_{\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}\ldots+\frac{1}{\pi}\sum_j{}'''\int_{\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}\ldots\,.$$

Здесь сумма $\sum'$ распространяется на все те значения индекса j ($j\neq i$), при которых кусок $\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}$ (либо его часть) лежит внутри шара $K(x,2\delta)$ радиуса 2δ с центром в точке x. Сумма $\sum''$ распространена на те значения индекса j, при которых кусок $\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}$ лежит строго внутри шарового слоя $K(x,\rho)\setminus K(x,2\delta)$, где $\rho>0$ и фиксированно. Сумма $\sum'''$ распространена на все остальные значения индекса j.

Очевидно, что сумма $\sum'''$, в силу оценки

$$\left|\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi_j|}\right|\leqslant\frac{\delta}{(\rho-\delta)^2}$$

и суммируемости функции $\vartheta_\kappa^{(h)}(x)$, при малых δ не превосходит $c\delta$.

В силу условий 1)–2) теоремы 1 сумма $\sum'$ содержит число слагаемых, ограниченное сверху величиной, не зависящей от h. Поэтому, воспользовавшись грубой оценкой

$$\left|\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi_j|}\right|\leqslant\frac{c}{\delta}$$

и оценкой (3.5′), получаем, что сумма $\sum'$ не превосходит величины $c\delta$.

Оценим сумму $\sum''$.

$$\frac{1}{\pi}\sum_j{}''\int_{\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}\left|\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi_j|}\right||\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta}{\pi}\sum_j{}''\int_{\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}\frac{|\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)|}{|x-\xi||x-\xi_j|}dS_\xi\leqslant c\delta\sum_j{}''\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}{r_j^2}\,.$$

Здесь r_j – расстояние от точки x до куска $\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}$, а $\operatorname{mes}\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}$ –площадь $\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}$.

Поскольку $r_j>|x-\xi|-\delta>0$, то

$$\delta\sum_j{}''\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}{r_j^2}\leqslant\delta\sum_j{}''\int_{\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}\frac{dS_\xi}{(|x-\xi|-\delta)^2}\leqslant\delta\int_{(K(x,\rho)\setminus K(x,2\delta))\cap\Gamma_\kappa}\frac{dS_\xi}{(|x-\xi|-\delta)^2}.$$

Так как поверхность Γ_κ регулярна, то в окрестности точки x она описывается уравнением $z=z(r,\varphi)$, причем $z(r,\varphi)\sim c(\varphi)r^2$ и $c(\varphi)$ ограничена.

Отсюда следует, что

$$\int_{(K(x,\rho)\setminus K(x,2\delta))\cap\Gamma_\kappa}\frac{dS_\xi}{(|x-\xi|-\delta)^2}=\int_0^{2\pi}\int_{f(2\delta,\varphi)}^{f(\rho,\varphi)}\frac{\sqrt{1+z^2(r,\varphi)}\,r\,dr}{(\sqrt{r^2+z^2(r,\varphi)}-\delta)^2}\cdot d\varphi\,,$$

где $f(x,\varphi)\sim x$ при малых x. Оценивая полученный интеграл, при малых δ получаем

$$\int\limits_{(K(x,\rho)\setminus K(x,2\delta))\cap\Gamma_\kappa} \frac{dS_\xi}{(|x-\xi|-\delta)^2} \leqslant c\,|\ln\delta|.$$

Таким образом, из рассмотренных оценок следует, что

$$|\varepsilon_\kappa^{(1)}(x)| \leqslant c\delta\,|\ln\delta|.$$

Отсюда и из (3.20) - (3.2I) находим, что второе слагаемое в правой части (3.I7)имеет порядок $O(\delta|\ln\delta|)$.

Окончательно получаем следующую оценку для скачка функции $V_\kappa^{(h)}$ при переходе из области D_κ^+ в область D_κ^- через кусок $S_{\kappa,i}^{(h)}$:

$$|q_\kappa^{(h)}(x)| \leqslant c\delta\,|\ln\delta| \qquad (\kappa=0,1,\dots,n). \tag{3.23}$$

В дальнейшем, кроме оценки абсолютной величины $q_\kappa^{(h)}(x)=\left[(V_\kappa^{(h)}(x))^+-(V_\kappa^{(h)}(x))^-\right]_{x\in S_{\kappa,i}^{(h)}}$, нам понадобится оценка колебания функции $q_\kappa^{(h)}$ на множестве $S_{\kappa,i}^{(h)}$.

Метод,которым будет установлена оценка колебания,сходен с методом оценки скачка,а именно при этом используется интегральное уравнение (2.II) и свойство (3.I9) функции $\vartheta_\kappa^{(h)}$.

Из равенств (3.9) - (3.IO) и свойства (3.3) функции $\mu_\kappa^{(h)}$ следует, что

$$q_\kappa^{(h)}(x_1)-q_\kappa^{(h)}(x_2)=\frac{1}{\pi}\int_{S_{\kappa,i}^{(h)}}\left[\frac{e^{-\lambda|x_1-\xi|}-1}{|x_1-\xi|}-\frac{e^{-\lambda|x_2-\xi|}-1}{|x_2-\xi|}\right]\mu_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi+$$
$$+\int_{S_{\kappa,i}^{(h)}}\left[\Phi_\kappa(x_1,\xi;\lambda)-\Phi_\kappa(x_2,\xi;\lambda)\right]\mu_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi+$$
$$+\sum_{j\neq i}\int_{S_{\kappa,j}^{(h)}}\left\{\left[N_\kappa^+(x_1,\xi;\lambda)+N_\kappa^-(x_1,\xi;\lambda)\right]-\left[N_\kappa^+(x_2,\xi;\lambda)+N_\kappa^-(x_2,\xi;\lambda)\right]\right\}\mu_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi-$$
$$-\int_{D_\kappa^+}\left[N_\kappa^+(x_1,\xi;\lambda)-N_\kappa^+(x_2,\xi;\lambda)\right]f_\kappa^{(h)}(\xi)\,d\tau_\xi+\int_{D_\kappa^-}\left[N_\kappa^-(x_1,\xi;\lambda)-N_\kappa^-(x_2,\xi;\lambda)\right]f_\kappa^{(h)}(\xi)\,d\tau_\xi,$$

где $x_1,\ x_2\in S_{\kappa,i}^{(h)}$ одновременно.

Отсюда, из уравнения (2.II) и свойств функции $\vartheta_\kappa^{(h)}$ получаем, что

$$q_\kappa^{(h)}(x_1)-q_\kappa^{(h)}(x_2)=\varepsilon_\kappa^{(1)}(x_1,x_2)+\varepsilon_\kappa^{(2)}(x_1,x_2)+\varepsilon_\kappa^{(3)}(x_1,x_2)+$$
$$+\ \varepsilon_\kappa^{(4)}(x_1,x_2),$$

где

$$\varepsilon_\kappa^{(1)}(x_1,x_2)=-h\left[\varphi(x_1)\sigma_\kappa(x_1)-\varphi(x_2)\sigma_\kappa(x_2)\right]-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_\kappa}\left[\frac{e^{-\lambda|x_1-\xi|}-1}{|x_1-\xi|}-\frac{e^{-\lambda|x_2-\xi|}-1}{|x_2-\xi|}\right]\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi,$$

$$\varepsilon_\kappa^{(2)}(x_1,x_2)=-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}\left[\frac{1}{|x_1-\xi|}-\frac{1}{|x_2-\xi|}\right]\sigma_\kappa(\xi)\,dS_\xi,$$

$$\varepsilon_\kappa^{(3)}(x_1,x_2)=-\int_{\Gamma_\kappa}\left[\Phi_\kappa(x_1,\xi;\lambda)-\Phi_\kappa(x_2,\xi;\lambda)\right]\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi,$$

$$\varepsilon_\kappa^{(4)}(x_1,x_2)=-\frac{1}{\pi}\sum_{j\neq i}\int_{\Gamma_{\kappa,j}^{(h)}}\left[\frac{1}{|x_1-\xi|}-\frac{1}{|x_2-\xi|}\right]\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi.$$

Так как функция $[\exp(-\lambda|x-\xi|)-1]|x-\xi|^{-1}$ удовлетворяет условию Липшица, а функции $\varphi(x)$ и $\sigma_\kappa(x)$ гладкие, то

$$|\varepsilon_\kappa^{(1)}(x_1,x_2)|\leqslant c\,|x_1-x_2|. \tag{3.24}$$

В силу теоремы о композиции ядер со слабой особенностью и ограниченности $\sigma_\kappa(x)$, получаем также, что

$$\left|\varepsilon_\kappa^{(2)}(x_1,x_2)\right| \leqslant c\left|x_1-x_2\right|\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}} \frac{|\sigma_\kappa(\xi)|}{|x_1-\xi||x_2-\xi|}\,dS_\xi \leqslant \leqslant c\,|x_1-x_2||\ln|x_1-x_2||. \tag{3.25}$$

Из оценки (3.II) и суммируемости функции $\vartheta_\kappa^{(h)}$ следует

$$\left|\varepsilon_\kappa^{(3)}(x_1,x_2)\right| \leqslant c\,|x_1-x_2||\ln|x_1-x_2||. \tag{3.26}$$

Оценка слагаемого $\varepsilon_\kappa^{(4)}$ проводится аналогично оценке выражения (3.22) и имеет вид

$$\left|\varepsilon_\kappa^{(4)}(x_1,x_2)\right| \leqslant c\,|x_1-x_2||\ln\delta|. \tag{3.27}$$

Учитывая (3.24) - (3.27), окончательно получаем, что

$$\left|q_\kappa^{(h)}(x_1)-q_\kappa^{(h)}(x_2)\right| \leqslant c\,|x_1-x_2||\ln|x_1-x_2||, \quad (\kappa=0,1,\dots,n) \tag{3.28}$$

для двух произвольных точек x_1 и x_2, принадлежащих множеству $S_{\kappa,i}^{(h)}$. Константа c не зависит от h, κ и точек x_1, x_2.

Перейдем теперь к оценкам разности между $V_\kappa^{(h)}$ и функцией $W_\kappa^{(h)}$, построенной в § 2.

Л Е М М А I. В области G_δ, расстояние от которой до поверхности Γ_κ больше, чем 2δ, для функции $W_\kappa^{(h)}(x)-V_\kappa^{(h)}(x)$ справедливы следующие оценки:

$$\left|W_\kappa^{(h)}(x)-V_\kappa^{(h)}(x)\right| \leqslant c\delta|\ln\delta|, \tag{3.29}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[W_\kappa^{(h)}(x)-V_\kappa^{(h)}(x)\right]\right| \leqslant c\,\frac{\delta|\ln\delta|}{r}, \quad (m=1,2,3), \tag{3.30}$$

где r ($r>2\delta$) - расстояние от точки x до поверхности Γ_κ, а константы c не зависят от κ, h и точки x.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Предположем, что $x\in D_\kappa^+\cap G_\delta$. Тогда из (2.I0) и (3.2) получаем

$$W_\kappa^h(x)-V_\kappa^h(x)=\sum_{i=1}^{p_\kappa}\left[\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}} \mathcal{N}_\kappa^+(x,\xi;\lambda)\sigma_\kappa(\xi)\,dS_\xi-\int_{S_{\kappa,i}^{(h)}} \mathcal{N}_\kappa(x,\xi;\lambda)\mu_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi\right]. \tag{3.3I}$$

Вводя функцию $\vartheta_\kappa^{(h)}$, определенную равенством (3.I8) и обладающую свойством (3.I9), равенство (3.3I) можно переписать так

$$W_\kappa^{(h)}(x)-V_\kappa^{(h)}(x)=\sum_{i=1}^{p_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}\left[\mathcal{N}_\kappa^+(x,\xi;\lambda)-\mathcal{N}_\kappa^+(x,\xi_i;\lambda)\right]\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)\,dS_\xi, \tag{3.32}$$

где $\xi_i\in\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}$ и наиболее удалена от точки x.

Воспользовавшись (2.I2), получаем, что

$$\begin{aligned}\left|W_\kappa^{(h)}(x)\ \ V_\kappa^{(h)}(x)\right| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{p_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}\left|\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi_i|}\right||\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi + \\ &+\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{p_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}\left|\frac{e^{-\lambda|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}-\frac{e^{-\lambda|x-\xi_i|}-1}{|x-\xi_i|}\right||\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi + \\ &+\sum_{i=1}^{p_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}\left|\Psi_\kappa(x,\xi;\lambda)-\Psi_\kappa(x,\xi_i;\lambda)\right||\vartheta_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi,\end{aligned} \tag{3.33}$$

где для краткости обозначаем

$$\begin{aligned}\Psi_\kappa(x,\xi;\lambda)=&-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\kappa}\frac{e^{-\lambda|x-\eta|}}{|x-\eta|}\,g(\eta,\xi;\lambda)\,dS_\eta - \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_\kappa}\frac{e^{-\lambda|x-\eta|}}{|x-\eta|}\int_{\Gamma_\kappa}R_\kappa^+(\eta,\zeta;\lambda)\,g(\zeta,\xi;\lambda)\,dS_\zeta\,dS_\eta.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Функция $[\exp(-\lambda|x-\xi|)-1]|x-\xi|^{-1}$ по ξ удовлетворяет условию Липшица равномерно относительно x. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{P_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}\left|\frac{e^{-\lambda|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}-\frac{e^{-\lambda|x-\xi_i|}-1}{|x-\xi_i|}\right||\nu_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi \leqslant c\delta. \tag{3.35}$$

Так как точка x находится на расстоянии $r>2\delta$ от поверхности Γ_κ, то оценка первого слагаемого в (3.33) проводится подобно оценке выражения (3.22)

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{P_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}\left|\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi_i|}\right||\nu_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi \leqslant c\delta|\ln\delta|. \tag{3.36}$$

Используя (3.34), легко убедится, что

$$|\Psi_\kappa(x,\xi;\lambda)-\Psi_\kappa(x,\xi_i;\lambda)| \leqslant c|\xi-\xi_i|\int_{\Gamma_\kappa}\frac{dS_\eta}{|\eta-x||\eta-\xi||\eta-\xi_i|}. \tag{3.37}$$

В дальнейшем понадобятся некоторые оценки для интегралов вида

$$\mathcal{J}_\alpha(x,\xi,\xi_i)=\int_S\frac{dS_\eta}{|\eta-x|^\alpha|\eta-\xi||\eta-\xi_i|},$$

где S – некоторая ограниченная поверхность в R_3. В данном случае достаточны следующие грубые оценки:

$$|\mathcal{J}_\alpha(x,\xi;\xi_i)|\leqslant\frac{c}{|x-\xi|}\Big[1+|\ln|\xi-\xi_i||+|\ln|x-\xi_i||\Big], \tag{3.38}$$

когда $\alpha=1$ и $x,\xi,\xi_i\in S$;

$$|\mathcal{J}_\alpha(x,\xi;\xi_i)|\leqslant\frac{c}{|x-\xi|^2}\left[1+|\ln|\xi-\xi_i||+\frac{|x-\xi|}{|x-\xi_i|}\left|\ln\frac{|x-\xi_i|}{r}\right|\right], \tag{3.39}$$

когда $\alpha=2$, $\xi,\xi_i\in S$ и точка x находится на расстоянии r от поверхности S.

Учитывая (3.37) и (3.38), получим

$$\sum_{i=1}^{P_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}|\Psi_\kappa(x,\xi;\lambda)-\Psi_\kappa(x,\xi_i;\lambda)||\nu_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi\leqslant c\delta|\ln\delta|\int_{\Gamma_\kappa}\frac{|\nu_\kappa^{(h)}(\xi)|}{|x-\xi|^{1+\varepsilon_1}}\,dS_\xi, \tag{3.40}$$
$$(0<\varepsilon_1<1).$$

Повторяя рассуждения при установлении оценки для (3.22), придем к выводу, что интеграл, стоящий в правой части (3.40), есть величина, ограниченная равномерно по x.

Отсюда, учитывая еще (3.35) – (3.36), получаем оценку (3.29).

Действуя оператором дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_m}$ $(m=1,2,3)$ на правую и левую часть равенства (3.32) и принимая во внимание (2.12), получаем

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[W_\kappa^{(h)}(x)-V_\kappa^{(h)}(x)\right]\right|&\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{P_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}&\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi_i|}\right]\right||\nu_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi+\\ +\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{P_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}&\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[\frac{e^{-\lambda|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}-\frac{e^{-\lambda|x-\xi_i|}-1}{|x-\xi_i|}\right]\right||\nu_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi+\\ +\sum_{i=1}^{P_\kappa}\int_{\Gamma_{\kappa,i}^{(h)}}&\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[\Psi_\kappa(x,\xi;\lambda)-\Psi_\kappa(x,\xi_i;\lambda)\right]\right||\nu_\kappa^{(h)}(\xi)|\,dS_\xi,\end{aligned} \tag{3.41}$$

где Ψ_κ определяется из (3.34).

Воспользовавшись оценками

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[\frac{1}{|x-\xi|}-\frac{1}{|x-\xi_i|}\right]\right|\leqslant c\frac{\delta}{|x-\xi|^3},$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[\frac{e^{-\lambda|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}-\frac{e^{-\lambda|x-\xi_i|}-1}{|x-\xi_i|}\right]\right|\leqslant c\frac{\delta}{|x-\xi|^2}$$

и проведя рассуждения, аналогичные установлению оценки для (3.22), получим, что две первые суммы в (3.4I) не превосходят величины $c\delta\left[\,|\ln r| + \frac{1}{r}\right]$.

Рассмотрим третью сумму из (3.4I). Используя (3.34) и оценку (3.39), можно показать, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[\Psi_\kappa(x,\xi;\lambda) - \Psi_\kappa(x,\xi_i;\lambda)\right]\right| \leqslant c\,\frac{|\xi-\xi_i|}{|x-\xi_i|}\left[1 + |\ln|\xi-\xi_i|| + \frac{|x-\xi|}{|x-\xi_i|}\left|\ln\frac{|x-\xi_i|}{r}\right|\right].$$

Отсюда, поскольку $|x-\xi| \leqslant |x-\xi_i|$ и $1 \leqslant \frac{|x-\xi_i|}{r} \leqslant c$, получаем, что

$$\sum_{i=1}^{p_\kappa}\int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}}\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[\Psi_\kappa(x,\xi;\lambda) - \Psi_\kappa(x,\xi_i;\lambda)\right]\right||\vartheta^{(h)}_\kappa(\xi)|\,dS_\xi \leqslant c\delta\,|\ln r|\left[1 + |\ln\delta|\right].$$

Таким образом, из (3.4I) окончательно имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_m}\left[W^{(h)}_\kappa(x) - V^{(h)}_\kappa(x)\right]\right| \leqslant c\,\frac{\delta|\ln\delta|}{r} \qquad (m = 1,2,3),$$

где константа C не зависит от κ, h и точки x.

Доказательство леммы, в случае $x \in D^-_\kappa \cap G_\delta$, проводится точно так же. Лемма доказана.

Л Е М М А 2. Для функции $W^{(h)}_\kappa(x) - V^{(h)}_\kappa(x)$ $(\kappa = 0,1,\ldots,n)$ во всем пространстве R_3 имеет место следующая оценка:

$$\sup_{x\in R_3}|W^{(h)}_\kappa(x) - V^{(h)}_\kappa(x)| \leqslant ch. \tag{3.42}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из леммы I следует, что оценку (3.42) достаточно получить в некотором слое T_κ, содержащем внутри себя поверхность Γ_κ и образованном эквидистантными поверхностями к поверхности Γ_κ (каждая из эквидистант находится на расстоянии 2δ от Γ_κ).

Таким образом, для установления оценки (3.42) требуется показать, что

$$\max_{x\in T_\kappa}|W^{(h)}_\kappa(x) - V^{(h)}_\kappa(x)| \leqslant ch \qquad (\kappa = 0,1,\ldots,n). \tag{3.43}$$

Для определенности считаем, что $x \in (D^+_\kappa \cup \Gamma_\kappa)\cap T_\kappa$. Имеем

$$W^{(h)}_\kappa - V^{(h)}_\kappa(x) = \sum_{i=1}^{p_\kappa}\int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}} N^+_\kappa(x,\xi;\lambda)\,\vartheta^{(h)}_\kappa(\xi)\,dS_\xi.$$

Как и прежде, разобъем эту сумму на две части

$$\sum_i{}'\int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}} N^+_\kappa(x,\xi;\lambda)\,\vartheta^{(h)}_\kappa(\xi)\,dS_\xi + \sum_i{}''\int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}} N^+_\kappa(x,\xi;\lambda)\,\vartheta^{(h)}_\kappa(\xi)\,dS_\xi.$$

Первая сумма распространена на все те значения индекса i, при которых кусок $\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}$ лежит внутри шара $K(x,2\delta)$ радиуса 2δ с центром в точке x. Вторая сумма распространена на все остальные значения индекса i.

Так как в сумме $\sum''$ точка x находится на расстоянии 2δ от множества, по которому проводится интегрирование, то оценка для $\sum''$ следует из леммы I и имеет вид

$$\left|\sum_i{}''\int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}} N^+_\kappa(x,\xi;\lambda)\,\vartheta^{(h)}_\kappa(\xi)\,dS_\xi\right| \leqslant c\delta\,|\ln\delta|.$$

Сумму $\sum'$ рассмотрим более подробно:

$$\left|\sum_i{}'\int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}} N^+_\kappa(x,\xi;\lambda)\,\vartheta^{(h)}_\kappa(\xi)\,dS_\xi\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\sum_i{}'\int_{\Gamma^{(h)}_{\kappa,i}} N^+_\kappa(x,\xi;\lambda)\,\sigma_\kappa(\xi)\,dS_\xi\right| + \left|\sum_i{}'\int_{S^{(h)}_{\kappa,i}} N^+_\kappa(x,\xi;\lambda)\,\mu^{(h)}_\kappa(\xi)\,dS_\xi\right|.$$

Первая сумма, стоящая в правой части, не превосходит по модулю $c\delta$. Это следует из (2.12) и ограниченности функции $\sigma_\kappa(x)$. Для второй суммы можно дать такую оценку:

$$\left|\sum_i{}' \int_{S^{(h)}_{\kappa,i}} N^+_\kappa(x,\xi;\lambda)\mu_\kappa^{(h)}(\xi)dS_\xi\right| \leqslant \left|\varepsilon^{(1)}_\kappa(x)\right| + \left|\varepsilon^{(2)}_\kappa(x)\right| + \left|\varepsilon^{(3)}_\kappa(x)\right|,$$

где

$$\varepsilon^{(1)}_\kappa(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_i{}'\int_{S^{(h)}_{\kappa,i}} \frac{\mu^{(h)}_\kappa(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi,$$

$$\varepsilon^{(2)}_\kappa(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_i{}'\int_{S^{(h)}_{\kappa,i}} \frac{e^{-\lambda|x-\xi|}-1}{|x-\xi|}\mu^{(h)}_\kappa(\xi)dS_\xi,$$

$$\varepsilon^{(3)}_\kappa(x) = \sum_i{}'\int_{S^{(h)}_{\kappa,i}} \Psi_\kappa(x,\xi;\lambda)\mu^{(h)}_\kappa(\xi)dS_\xi.$$

Так как число слагаемых в сумме $\sum'$ ограничено сверху константой, не зависящей от h, то, учитывая оценку (3.15), получаем

$$\left|\varepsilon^{(1)}_\kappa(x)\right| \leqslant c\max_i\left|\int_{S^{(h)}_{\kappa,i}}\frac{\mu^{(h)}_\kappa(\xi)}{|x-\xi|}dS_\xi\right| \leqslant ch. \tag{3.44}$$

В силу ограниченности функции $[exp(-\lambda|x-\xi|)-1]|x-\xi|^{-1}$ и оценки (3.5′), имеем

$$\left|\varepsilon^{(2)}_\kappa(x)\right| \leqslant c\delta^2.$$

Из неравенства $|\Psi_\kappa(x,\xi;\lambda)| \leqslant \frac{c}{|x-\xi|}$, знакопостоянства функции $\mu^{(h)}_\kappa$ и оценки (3.44) следует, что

$$\left|\varepsilon^{(3)}_\kappa(x)\right| \leqslant ch.$$

Тем самым установлена оценка (3.43), а вместе с ней и оценка (3.42). Лемма доказана.

Теперь можно установить близость между функцией $W^{(h)}$, построенной в § 2, и функцией $V^{(h)}$.

Л Е М М А 3. Построенная функция $V^{(h)}$ близка в метрике пространства $L_2(R_3)$ к функции $W^{(h)}$, т.е.

$$\|W^{(h)}(x) - V^{(h)}(x)\|^2_{L_2(R_3)} \leqslant ch^{2+\varepsilon}, \tag{3.45}$$

где константа c не зависит от параметра h.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из определения функций $W^{(h)}$ и $V^{(h)}$ следует, что

$$W^{(h)}(x) - V^{(h)}(x) = \sum_{\kappa=0}^{n}\left[W^{(h)}_\kappa(x) - V^{(h)}_\kappa(x)\,\eta_\kappa(x)\right].$$

Так как функция $\eta_\kappa(x)$ на множестве $\{x : x\in supp W^{(h)}_\kappa(x)\}$ равна единице, то

$$W^{(h)}(x) - V^{(h)}(x) = \sum_{\kappa=0}^{n}\left[W^{(h)}_\kappa(x) - V^{(h)}_\kappa(x)\right]\eta_\kappa(x).$$

В силу свойств функций $\eta_\kappa(x)$, имеем

$$\left[W^{(h)}_\kappa(x) - V^{(h)}_\kappa(x)\right]\eta_\kappa(x)\cdot\left[W^{(h)}_i(x) - V^{(h)}_i(x)\right]\eta_i(x) = 0,$$

когда $i \neq \kappa-1,\ \kappa,\ \kappa+1$.

Отсюда получаем, что

$$|W^{(h)}(x) - V^{(h)}(x)|^2 \leqslant 3\sum_{\kappa=0}^{n}|W^{(h)}_\kappa(x) - V^{(h)}_\kappa(x)|^2\eta^2_\kappa(x)$$

и, следовательно,

$$\|W^{(h)}(x)-V^{(h)}(x)\|^2_{L_2R_3} \leqslant 3\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{G_\kappa}|W^{(h)}_\kappa(x)-V^{(h)}_\kappa(x)|^2 d\tau_x ,$$

где $G_\kappa = \{x : x \in \operatorname{supp} \eta_\kappa(x)\}$.

Используя лемму 2, получим, что

$$\|W^{(h)}(x)-V^{(h)}(x)\|^2_{L_2(R_3)} \leqslant ch\sum_{\kappa=0}^{n}\int_{G_\kappa}|W^{(h)}_\kappa(x)-V^{(h)}_\kappa(x)|\, d\tau_x . \qquad (3.46)$$

На основании равенства (3.32) имеем

$$\int_{G_\kappa}|W^{(h)}_\kappa(x)-V^{(h)}_\kappa(x)|d\tau_x \leqslant \int_{\Gamma_\kappa}\int_{G_\kappa}|\mathcal{N}^{\pm}_\kappa(x,\xi;\lambda)-\mathcal{N}^{\pm}_\kappa(x,\xi;\lambda)|d\tau_x\,|\vartheta^{(h)}_\kappa(\xi)|dS_\xi .$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_{G_\kappa}|\mathcal{N}^{\pm}_\kappa(x,\xi;\lambda)-\mathcal{N}^{\pm}_\kappa(x,\xi_i;\lambda)|\,d\tau_x \leqslant c\delta. \qquad (3.47)$$

Следовательно,

$$\int_{G_\kappa}|W^{(h)}_\kappa(x)-V^{(h)}_\kappa(x)|d\tau_x \leqslant c\delta.$$

Таким образом, из оценок (3.46)- (3.47), учитывая, что в сумме (3.46) число слагаемых есть величина порядка $O(h^{-1})$, получаем

$$\|W^{(h)}(x)-V^{(h)}(x)\|^2_{L_2(R_3)} \leqslant c\delta.$$

Но $\delta = O(h^{2+\varepsilon})$ и, следовательно, имеем (3.45). Лемма доказана.

§ 4. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (I.I) - (I.3) И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.

В § 3 построена функция $V^{(h)}(x)$, которая, в силу оценки (2.4) и леммы 3 при малых h, в метрике пространства $L_2(R_3)$ близка к функции $u(x)$, являющейся решением краевой задачи (I.4) - (I.5), т.е.

$$\|V^{(h)}(x)-u(x)\|_{L_2(R_3)} \leqslant ch, \qquad (4.I)$$

где константа c не зависит от параметра h.

С другой стороны будет показано, что функция $V^{(h)}(x)$ аппроксимирует при малых значениях параметра h решение исходной краевой задачи (I.I) - (I.3), т.е.

$$u^{(h)}(x) = V^{(h)}(x)+z^{(h)}(x), \qquad (4.2)$$

где функция в метрике $L_2(R_3)$ стремится к нулю при $h\to 0$.

Учитывая равенства (I.I) - (I.3), (2.7), (3.I), (3.6)-(3.8), нетрудно видеть, что функция $z^{(h)}$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\Delta z^{(h)}(x)-\lambda^2 z^{(h)}(x) = F^{(h)}(x) \qquad x\in R_3\setminus\bigcup_{\kappa=0}^{n}\Gamma_\kappa ; \qquad (4.3)$$

$$\left.\frac{\partial z^{(h)}(x)}{\partial\nu}\right|_{x\in\Sigma_\kappa} = 0 \qquad (\kappa=0,1,\dots,n); \qquad (4.4)$$

$$\left[\left(\frac{\partial z^{(h)}(x)}{\partial\nu}\right)^{-}-\left(\frac{\partial z^{(h)}(x)}{\partial\nu}\right)\right]_{x\in S^{(h)}_\kappa} = 0 \qquad (\kappa=0,1,\dots,n); \qquad (4.5)$$

$$\left[(z^{(h)}(x))^{+}-(z^{(h)}(x))^{-}\right]_{x\in S^{(h)}_\kappa} = -q^{(h)}_\kappa(x) \qquad (\kappa=0,1,\dots,n); \qquad (4.6)$$

и $z^{(h)}(x)\to 0$, когда $|x|\to\infty$.

Здесь

$$F^{(h)}(x)=f(x)-\sum_{\kappa=0}^{n}\Big\{\big[W^{(h)}(x)\Delta\zeta_\kappa(x)+2\,(\nabla W^{(h)}(x),\,\nabla\zeta_\kappa(x))+ \qquad (4.7)$$

$$+f^{(h)}(x)\zeta_\kappa(x)\big]\eta_\kappa(x)+2\,(\nabla V_\kappa^{(h)}(x),\,\nabla\eta_\kappa(x))+V_\kappa^{(h)}(x)\Delta\eta_\kappa(x)\Big\}.$$

Нам в дальнейшем понадобится оценка функции $F^{(h)}(x)$ в метрике пространства $L_2(R_3)$.

Прежде всего отметим, что выражение

$$\sum_{\kappa=0}^{n} f^{(h)}(x)\zeta_\kappa(x)\eta_\kappa(x),$$

стоящее в правой части равенства (4.7), в силу свойств функций $\eta_\kappa(x)$ и $\zeta_\kappa(x)$, равно $f^{(h)}(x)$.

Покажем, что сумма

$$\sum_{\kappa=0}^{n}\big[W^{(h)}(x)\Delta\zeta_\kappa(x)+2\,(\nabla W^{(h)}(x),\,\nabla\zeta_\kappa(x))\big]\,\eta_\kappa(x)$$

равна нулю.

Так как функция $\eta_\kappa(x)$ на множестве $\{x: x\in supp\,\zeta_\kappa(x)\}$ равна единице, то эту сумму можно переписать так:

$$\sum_{\kappa=0}^{n}\big[W^{(h)}(x)\Delta\zeta_\kappa(x)+2\,(\nabla W^{(h)}(x),\nabla\zeta_\kappa(x)\big]=$$

$$=W^{(h)}(x)\cdot\Delta\Big[\sum_{\kappa=0}^{n}\zeta_\kappa(x)\Big]+2\Big(\nabla W^{(h)}(x),\nabla\Big[\sum_{\kappa=0}^{n}\zeta_\kappa(x)\Big]\Big).$$

Учитывая свойство 2) функции ζ_κ , убеждаемся в том, что действительно это выражение тождественно равно нулю.

Отсюда получаем, что $F^{(h)}$ имеет следующий вид:

$$F^{(h)}(x)=\big[f(x)-f^{(h)}(x)\big]-\sum_{\kappa=0}^{n}V_\kappa^{(h)}(x)\Delta\eta_\kappa(x)-2\sum_{\kappa=0}^{n}(\nabla V_\kappa^{(h)}(x),\nabla\eta_\kappa(x))$$

или, учитывая тот факт, что функция $W_\kappa^{(h)}(x)$ на множествах $\{x: x\in supp\,\Delta\eta_\kappa(x)\}$ и $\{x: x\in supp\,\nabla\eta_\kappa(x)\}$ равна нулю, перепишем это выражение так:

$$F^{(h)}(x)=\varepsilon_1^{(h)}(x)+\varepsilon_2^{(h)}(x)+\varepsilon_3^{(h)},$$

где

$$\varepsilon_1^{(h)}=f(x)-f^{(h)}(x),$$

$$\varepsilon_2^{(h)}=\sum_{\kappa=0}^{n}\big[W_\kappa^{(h)}(x)-V_\kappa^{(h)}(x)\big]\Delta\eta_\kappa(x),$$

$$\varepsilon_3^{(h)}=2\sum_{\kappa=0}^{n}\big(\nabla\big[W_\kappa^{(h)}(x)-V_\kappa^{(h)}(x)\big],\,\nabla\eta_\kappa(x)\big).$$

В силу оценки (2.5)

$$\|\varepsilon_1^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)}\leqslant ch.$$

Принимая во внимание лемму I и свойства функции $\eta_\kappa(x)$, получаем

$$\max_{x\in R_3}|\varepsilon_2^{(h)}(x)|\leqslant c\,\frac{\delta|\ln\delta|}{h^2},\qquad \max_{x\in R_3}|\varepsilon_3^{(h)}(x)|\leqslant c\,\frac{\delta|\ln\delta|}{h^2}.$$

Отсюда, в силу финитности функций $\varepsilon_2^{(h)}$, $\varepsilon_3^{(h)}$ и условия 2) теоремы I, следует, что

$$\|\varepsilon_2^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)} \leqslant ch^{\varepsilon_1}, \qquad \|\varepsilon_3^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)} \leqslant ch^{\varepsilon_1},$$

где $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$.

Окончательно получаем такую оценку для функции $F^{(h)}(x)$

$$\|F^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)} \leqslant ch^{\varepsilon_1} \qquad (0 < \varepsilon_1 \leqslant 1), \tag{4.8}$$

где константа c не зависит от параметра h.

Рассмотрим прямое произведение

$$\prod_{\kappa=0}^{n} W_2^1(B_{\kappa+1})\, W_2^1(D_0^+)\, W_2^1(D_n^-) = W_2^1(D')$$

пространств $W_2^1(B_{\kappa+1})$, $W_2^1(D_0^+)$, $W_2^1(D_n^-)$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, n)$,

где $D' = \bigcup_{\kappa=0}^{n-1} B_{\kappa+1} \cup D_0^+ \cup D_n^-$.

Элементами пространства $W_2^1(D')$ будут вектор-функции $u = \{u_1, \ldots, u_n, u_0^+, u_n^-\}$, для которых каждая из компонент принадлежит соболевскому пространству W_2^1 в соответствующей области $B_{\kappa+1}$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, n-1)$, D_0^+, D_n^-.

Введем норму в $W_2^1(D')$.

$$\|u(x)\|^2_{W_2^1(D')} = \sum_{\kappa=0}^{n-1} \int_{B_{\kappa+1}} \left[|\nabla u_{\kappa+1}(x)|^2 + |u_{\kappa+1}(x)|^2\right] d\tau_x +$$

$$+ \int_{D_0^+} \left[|\nabla u_0^+(x)|^2 + |u_0^+(x)|^2\right] d\tau_x + \int_{D_n^-} \left[|\nabla u_n^-(x)|^2 + |u_n^-(x)|^2\right] d\tau_x. \tag{4.9}$$

Выделим в $W_2^1(D')$ класс функций $Q(D')$, которые на множестве $S_\kappa^{(h)}$ имеют разность предельных значений, равную $-q_\kappa^{(h)}(x)$ $(\kappa = 0, 1, \ldots, n)$. В силу теорем вложения этот класс замкнут относительно нормы (4.9). Очевидно также, что $Q(D')$ – выпуклое множество в $W_2^1(D')$. В дальнейшем показано, что этот класс не пуст.

В пространстве $W_2^1(D')$ рассмотрим функционал

$$J^{(h)}(x) = \int_{D'} \left[|\nabla u(x)|^2 + \lambda^2 |u(x)|^2 + 2F^{(h)}(x) u(x)\right] d\tau_x. \tag{4.10}$$

Функцию $z^{(h)}$ будем искать как минимум этого функционала в классе $Q(D')$. Обычным способом нетрудно показать, что

$$J^{(h)}(u) \geqslant \left(\|u(x)\|_\lambda - \frac{1}{\lambda}\|F^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}\|F^{(h)}(x)\|^2_{L_2(R_3)}, \tag{4.11}$$

где

$$\|u(x)\|_\lambda = \left\{\int_{D'} \left[|\nabla u(x)|^2 + \lambda^2 |u(x)|^2\right] d\tau_x\right\}^{1/2}.$$

Откуда

$$J^{(h)}(u) \geqslant -\frac{1}{\lambda^2}\|F^{(h)}(x)\|^2_{L_2(R_3)}.$$

Из ограниченности $J^{(h)}(u)$ вытекает существование такой минимизирующей последовательности u_κ, что

$$\lim_{\kappa\to\infty} J^{(h)}(u_\kappa) = \min_{u \in Q(D')} J^{(h)}(u).$$

Можно показать, что последовательность $u_\kappa(x)$ сходится в метрике пространства $W_2^1(D')$ к функции $z^{(h)} \in Q(D')$ [8].

Обычным образом нетрудно доказать, что функция $z^{(h)}(x)$ в каждой из областей

$B_{\kappa+1}$ $(\kappa = 0,1,\dots,n-1), D_0^+, D_n^-$ удовлетворяет уравнению (4.3), а граничные условия (4.4) - (4.5) выполняются в следующем смысле. Пусть $\zeta(x)$ - произвольная функция из $W_2^1(D')$, имеющая на $S_\kappa^{(h)}$ одинаковые предельные значения и равная нулю вне слоя, лежащего между $\Gamma_{\kappa-1}$ и $\Gamma_{\kappa+1}$, а $\Gamma_\kappa^{\pm\varepsilon}$ - гладкие поверхности, параллельные Γ_κ и лежащие на расстоянии ε по разные стороны от Γ_κ. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\Gamma_\kappa^{+\varepsilon}} \frac{\partial z^{(h)}(x)}{\partial \nu}\zeta(x)\,dS_x - \int \frac{\partial z^{(h)}(x)}{\partial\nu}\zeta(x)\,dS_x\right\} = 0.$$

Это условие означает, что граничные условия (4.4) - (4.5) выполняются в обобщенном смысле, т.е. нормальные производные от $z^{(h)}$ в точках Σ_κ в обобщенном смысле равны нулю, а в точках $S_\kappa^{(h)}$ - совпадают.

Условие (4.6) выполнено в силу замкнутости класса $Q(D')$.

Пользуясь указанными свойствами функции $z^{(h)}$, можно показать, что функция $u^{(h)}(x) = V^{(h)}(x) + z^{(h)}(x)$ есть решение краевой задачи (I.I) - (I.3).

Докажем, что функция $z^{(h)}$ стремится к нулю в метрике пространства $L_2(R_3)$ при $h \to 0$.

Поскольку $z^{(h)}$ дает минимум функционалу $J^{(h)}(u)$, то для произвольной функции $u \in Q(D')$

$$J^{(h)}(u) \leqslant J^{(h)}(z^{(h)}).$$

Принимая во внимание оценку (4.II), получаем

$$J^{(h)}(u) \geqslant J^{(h)}(z^{(h)}) \geqslant \left(\|z^{(h)}\|_\lambda - \frac{1}{\lambda}\|F^{(h)}\|_{L_2(R_3)}\right)^2 - \frac{1}{\lambda^2}\|F^{(h)}\|^2_{L_2(R_3)}.$$

Отсюда следует, что

$$\|z^{(h)}\|_\lambda \leqslant \|F^{(h)}\|_{L_2(R_3)} + \left\{J^{(h)}(u) + \frac{1}{\lambda^2}\|F^{(h)}\|^2_{L_2(R_3)}\right\}^{1/2}. \tag{4.I2}$$

Таким образом, если мы оценим величину функционала $J^{(h)}$ на функциях из $Q(D')$, то, используя оценку (4.8), получим оценку для функции $z^{(h)}$.

Прежде всего рассмотрим функции $q_\kappa^{(h)}(x)$ $(\kappa=0,1,\dots,n)$, определенные на множествах $S_\kappa^{(h)}$. Каждая из этих функций удовлетворяет неравенствам (3.23), (3.28). В силу условий I) - 2) теоремы I, каждую функцию $q_\kappa^{(h)}(x)$ можно продолжить на всю поверхность Γ_κ так, чтобы уже для продолженной функции $\bar q_\kappa^{(h)}$ выполнялись неравенства (3.23), (3.28) [I3].

На функциях, определенных на поверхности Γ_κ, введем норму [I4].

$$\|u(x)\|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_\kappa)} = \int_{\Gamma_\kappa}\int_{\Gamma_\kappa} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|^2}{|x_1 - x_2|^3}\,dS_{x_1}\,dS_{x_2} + \int_{\Gamma_\kappa}|u(x)|^2 dS_x.$$

Полученное пространство функций обозначим через $W_2^{1/2}(\Gamma_\kappa)$. Тогда, используя неравенства (3.23) и (3.28) для продолженной функции $\bar q_\kappa^{(h)}(x)$, получим

$$\|\bar q_\kappa^{(h)}(x)\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_\kappa)} \leqslant$$

$$\leqslant c(\delta|\ln\delta|)^{1-\varepsilon_2}\iint_{\Gamma_\kappa\,\Gamma_\kappa} \frac{|x_1 - x_2|^{1+\varepsilon_2}\,|\ln|x_1 - x_2||^{1+\varepsilon_2}}{|x_1 - x_2|^3}\,dS_{x_1}\,dS_{x_2} + \|\bar q_\kappa^{(h)}(x)\|^2_{L_2(R_3)}.$$

Выбирая ε_2 $(\varepsilon_2 > 0)$ достаточно малым и учитывая условие 2) теоремы I, получаем, что

$$\|\bar q_\kappa^{(h)}(x)\|^2_{W_2^{1/2}(\Gamma_\kappa)} \leqslant ch^{2+\varepsilon_1} \qquad (0 < \varepsilon_1 < \varepsilon) \quad (\kappa = 0,1,\dots,n), \tag{4.I3}$$

где константа c не зависит от k и h.

В силу известной теоремы о продолжении [I4], функции $q_k^{(h)} \in W_2^{1/2}(\Gamma_k)$ можно продолжить в области D_k^+ так, чтобы их продолжения $\tilde{q}_k^{(h)} \in W_2^1(D_k^+)$ и выполнялись неравенства

$$\| \tilde{q}_k^{(h)}(x) \|_{W_2^1(D_k^+)} \leqslant c \| \bar{q}_k^{(h)}(x) \|_{W_2^{1/2}(\Gamma_k)} \qquad (k=0,1,\ldots,n). \tag{4.I4}$$

Это продолжение не единственно. Среди всех возможных продолжений выберем такое $\hat{q}_k^{(h)}(x)$, которое дает минимум функционалу

$$J_k(u) = \int_{D_k^+} \left[|\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \right] d\tau_x = \|u\|^2_{W_2^1(D_k^+)}.$$

в классе функций из $W_2^1(D_k^+)$, принимающих на Γ_k значения $\tilde{q}_k^{(h)}(x)$.

Как известно, функция, дающая минимум этому функционалу, удовлетворяет в D_k^+ уравнению $\Delta u - u = 0$, и для нее имеет место принцип максимума. Поэтому, учитывая оценку (3.23), имеем

$$\max_{x \in D_k^+} |\hat{q}_k^{(h)}(x)| \leqslant \max_{x \in \Gamma_k} |\hat{q}_k^{(h)}(x)| \leqslant c\delta\, |\ln \delta|. \tag{4.I5}$$

Очевидно, $\hat{q}_k^{(h)}$ удовлетворяет также неравенству (4.I4). Отсюда, в силу (4.I3), получаем

$$\| \hat{q}_k^{(h)}(x) \|^2_{W_2^1(D_k^+)} \leqslant c h^{2+\varepsilon_1} \qquad (k=0,1,\ldots,n), \tag{4.I6}$$

где константа c не зависит от k и h.

Введем в рассмотрение функции $\hat{q}_k^{(h)}(x)\,\zeta_k(x)$ $(k=0,1,\ldots,n)$, где ζ_k выбираются так же, как в § 2. Тогда, очевидно, функция

$$q^{(h)}(x) = \begin{cases} -\hat{q}_0^{(h)}(x) & x \in D_0^+ \\ -\hat{q}_k^{(h)}(x)\,\zeta_k(x) \quad (k=1,\ldots,n) & x \in B_{k-1} \\ 0 & x \in D_n^- \end{cases} \tag{4.I7}$$

принадлежит множеству $Q(D')$.

Оценим величину $J^{(h)}(q^{(h)})$. Из равенств (4.I0) и (4.I7) получаем, что

$$|J^{(h)}(q^{(h)})| \leqslant \varepsilon_1^{(h)} + \varepsilon_2^{(h)} + \varepsilon_3^{(h)} + \varepsilon_4^{(h)},$$

где

$$\varepsilon_1^{(h)} = \int_{D_0^+} \left[|\nabla \hat{q}_0^{(h)}(x)|^2 + \varkappa^2 |\hat{q}_0^{(h)}(x)|^2 \right] d\tau_x,$$

$$\varepsilon_2^{(h)} = 2 \int_{D_0^+} |F^{(h)}(x)\, \hat{q}_0^{(h)}(x)|\, d\tau_x,$$

$$\varepsilon_3^{(h)} = \sum_{k=1}^{n} \int_{B_{k-1}} \left\{ |\nabla[\hat{q}_k^{(h)}(x)\,\zeta_k(x)]|^2 + \varkappa^2 |\hat{q}_k^{(h)}(x)\,\zeta_k(x)|^2 \right\} d\tau_x,$$

$$\varepsilon_4^{(h)} = 2 \sum_{k=1}^{n} \int_{B_{k-1}} |F^{(h)}(x)\, \hat{q}_k^{(h)}(x)\,\zeta_k(x)|\, d\tau_x.$$

Из эквивалентности норм $\|\ldots\|_{\lambda}$, $\|\ldots\|_{W_2^1(D')}$ и оценки (4.I6) следует, что

$$\varepsilon_1^{(h)} \leqslant c h^{2+\varepsilon_1}. \tag{4.I8}$$

Используя неравенство Шварца, оценки (4.8) и (4.I5), получаем

$$\varepsilon_2^{(h)} \leqslant c h^{2+\varepsilon}. \tag{4.I9}$$

Аналогично, учитывая свойства функций $\zeta_\kappa(x)$, имеем

$$\varepsilon_4^{(h)} \leqslant c h^{2+\varepsilon}. \tag{4.20}$$

Для $\varepsilon_3^{(h)}$ можно дать такую оценку

$$\varepsilon_3^{(h)} \leqslant c\left\{\sum_{\kappa=1}^{n}\int_{B_{\kappa-1}}\left[|\nabla\hat{q}_\kappa^{(h)}(x)|^2+\lambda^2|\hat{q}_\kappa^{(h)}(x)|^2\right]d\tau_x+\right.$$

$$\left.+\sum_{\kappa=1}^{n}\int_{B_{\kappa-1}}|\hat{q}_\kappa^{(h)}(x)|^2|\nabla\zeta_\kappa(x)|^2 d\tau_x\right\}.$$

Для первой суммы, учитывая, что число входящих в нее членов имеет порядок $O(h^{-1})$, эквивалентность норм $\|\ldots\|_{\lambda}$, $\|\ldots\|_{W_2^1(D')}$ и оценку (4.I6), получаем, что

$$\sum_{\kappa=1}^{n}\int_{B_{\kappa-1}}\left[|\nabla\hat{q}_\kappa^{(h)}(x)|^2+\lambda^2|\hat{q}_\kappa^{(h)}(x)|^2\right]d\tau_x \leqslant c h^{1+\varepsilon_1}.$$

Аналогично, вторая сумма, в силу свойств функций $\zeta_\kappa(x)$ и оценки (4.I5), не превосходит величины $c h^{2+\varepsilon_1}$.

Отсюда получаем, что

$$\varepsilon_3^{(h)} \leqslant c h^{1+\varepsilon_1}. \tag{4.2I}$$

Таким образом, учитывая оценки (4.I8) - (4.2I), получим, что

$$|J^{(h)}(q^{(h)})| \leqslant c h^{1+\varepsilon_1},$$

где константа c не зависит от параметра h .

Отсюда, в силу (4.8), (4.I2), следует, что

$$\|z^{(h)}(x)\|_{\lambda} \leqslant c h^{\varepsilon_1} \qquad (0<\varepsilon_1<\varepsilon\leqslant 1)$$

и значит

$$\|z^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)} \leqslant c h^{\varepsilon_1}, \tag{4.22}$$

где константа c не завист от h .

Таким образом, из оценки (4.I), представления решения (4.2) и оценки (4.22) окончательно получаем

$$\|u(x)-u^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)} \leqslant$$

$$\leqslant \|u(x)-V^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)}+\|z^{(h)}(x)\|_{L_2(R_3)} \leqslant c h^{\varepsilon_1}, \quad (0<\varepsilon_1<\varepsilon\leqslant 1),$$

где константа c не зависит от h .

Здесь $u^{(h)}(x)$ - решение исходной краевой задачи (I.I)-(I.3), а $u(x)$ - решение предельной задачи (I.4)-(I.5). Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. В.А.Марченко, Г.В.Сузиков, Вторая краевая задача в областях со сложной границей, Математический сборник, 69, (III):I, 1966.

2. В.А.Львов, Предельное уравнение для решения одной краевой задачи в многослойной области, Сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, в. I4,ХГУ, Харьков, 1970 (в печати)

3. В.А.Марченко, Е.Я.Хруслов, Краевые задачи с мелкозернистой границей, Матем. сб., 65, (I07):3, I964.

4. Е.Я.Хруслов, Первая краевая задача в областях со сложной границей, Зап.мех.-матем. ф-та ХГУ и ХМО, 32, Харьков, I966.

5. Е.Я.Хруслов, Об условиях сходимости последовательности решений первой краевой задачи, Сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, в. II, ХГУ, Харьков, I970.

6. Е.Я.Хруслов, Задача Дирихле в области со случайной границей, Вестник Харьковского университета № 5, С. механико-матем., в. 34, ХГУ, Харьков, I970.

7. В.Г.Михайленко, Краевые задачи с мелкозернистой границей для эллиптических дифференциальных операторов второго порядка, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, в. 6, ХГУ, Харьков, I968.

8. С.Л.Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, Л, I950.

9. Н.С.Ландкоф, Основы современной теории потенциала, Наука, М., I966.

I0. В.А.Львов, Предельный случай одной краевой задачи в области с многослойной границей, Сб. Математическая физика и функциональный анализ, в. I,ФТИНТ АН УССР, Харьков, I969.

II. С.Заремба, Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа,УМН I,в.3-4 (I3-I4), I946.

I2. В.И.Смирнов, Курс высшей математики, 5, сер.физмат., I959.

I3. Г.В.Сузиков, Е.Я.Хруслов, О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое, сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения,в. 5, ХГУ, Харьков, I967.

I4. С.М.Никольский, О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных, УМН I6,5, 63-II4, I96I.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА

Д.Ш.Лундина

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим систему уравнений Дирака порядка

$$By' + mTy + \Omega(x)y = \lambda y, \tag{1}$$

где $\Omega(x)$ - эрмитовая матричная функция порядка $2n$ канонического вида, определенная на полуоси $(0, \infty)$

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} P(x) & Q(x)I \\ IQ(x) & -IP(x)I \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$P(x) = P^*(x), \quad Q(x) = Q^*(x), \quad I = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix};$$

y - вектор функции с $2n$ компонентами

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

а матрицы B и T определены следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Присоединим к уравнению (1) граничные условия

$$y_1(0) = \ldots y_n(0) = 0 \tag{5}$$

и рассмотрим граничную задачу (1)-(5).

Обозначим через $L_2^{(2n)}(0,\infty)$ множество всех вектор-функций с $2n$ компонентами, принадлежащими $L_2(0,\infty)$, и введем в $L_2^{2n}(0,\infty)$ скалярное произведение

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{2n} (f_i, g_i).$$

Приведем факты, полученные в работе [1], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Пусть евклидовы нормы матриц $P(x)$, $Q(x)$ удовлетворяют условиям

$$\|P(x)\| \leqslant \frac{C}{(1+x)^{2+\varepsilon}}, \qquad \|Q(x)\| \leqslant \frac{C}{(1+x)^{1+\varepsilon}}. \tag{6}$$

Тогда граничная задача (1)-(5) является самосопряженной и имеет непрерывный спектр, заполняющий интервалы $(-\infty, -m)$ и (m, ∞), и конечное число дискретных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ интервала $(-m, m)$.

Нормированные решения матричного уравнения (I) порядка $(2n, n)$, столбцы которых являются решениями граничной задачи (I)-(5), удовлетворяют при $x \to \infty$ следующим асимптотическим равенствам:

$$\mathcal{U}(x,\lambda) = \frac{1}{2i}\left\{\begin{pmatrix} \frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n \\ -iI \end{pmatrix} e^{i\kappa x} + \begin{pmatrix} \frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n \\ iI \end{pmatrix} e^{-i\kappa x}\cdot S(\lambda)\right\}[1+O(1)]; \quad (|\lambda|>m); \tag{7}$$

и

$$\mathcal{U}(x,x_j) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m+\lambda_j}{m-\lambda_j}}\cdot E_n \\ -iI \end{pmatrix} e^{-\sqrt{m^2-\lambda_j^2}}\cdot M_j[1+O(1)]; \qquad (|\lambda_j|<m), \tag{8}$$

где $\kappa = \lambda\sqrt{1-\frac{m^2}{\lambda^2}}$; $M_1, \ldots\ldots\ldots, M_p$ – неотрицательные матрицы n-ного порядка, ранг которых совпадает с кратностью соответствующего собственного значения, а $S(\lambda)$ – матрица рассеяния.

Совокупность величин $S(\lambda)$; $\{\lambda_\kappa\}$, $\{M_\kappa\}$ называется данными рассеяния граничной задачи (I)-(5). Обратная задача теории рассеяния состоит в отыскании неизвестной потенциальной матрицы $\Omega(x)$ по известным данным рассеяния.

В работе (I) показано, что при выполнении условий (6), уравнение (I) имеет матричное решение $E(x,\lambda)$ порядка $(2n, n)$, которое представимо в виде

$$E(x,\lambda) = f(x,\lambda) + \int_x^\infty K(x,t)\, f(t,\lambda)\, dt, \tag{9}$$

где

$$f(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n \\ -iI \end{pmatrix} e^{i\kappa x}, \tag{10}$$

а $K(x,t)$ – ядро оператора преобразования — матричная функция порядка $2n$, которая связана с матрицей $\Omega(x)$ соотношением

$$\Omega(x) = BK(x,x) - K(x,x)B. \tag{11}$$

При этом матрица рассеяния $S(\lambda)$ выражается через решение следующим образом:

$$S(\lambda) = \widetilde{P(0,\lambda)}\cdot[P^x(0,\lambda)]^{-1}$$

($P(0,\lambda)$ – матрица, составленная из первых n строк матрицы $E(0,\lambda)$, "$\sim$" – знак транспонирования).

Ядро оператора преобразования $K(x,y)$ при каждом фиксированном $x \geqslant 0$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mathcal{F}(x+y) + K(x,y) + \int_x^\infty K(x,t)\,\mathcal{F}(t+y)\,dt = 0, \quad (0 \le x \le y < \infty), \tag{12}$$

где

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{j=1}^{p}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m+\lambda_j}{m-\lambda_j}}\cdot E_n \\ I \end{pmatrix}\cdot M_j^2\left(\sqrt{\frac{m+\lambda_j}{m-\lambda_j}}\cdot E_n\cdot I\right)e^{-x\sqrt{m^2-\lambda_j^2}} + \tag{13}$$

$$+\int_{|\lambda|>m} L(\lambda)e^{-i\kappa x}d\lambda + \int_{|\lambda|>m} L^x(\lambda)e^{i\kappa x}d\lambda;$$

$$L(\lambda) = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} \frac{\lambda+m}{\kappa}E_n \\ iI \end{pmatrix}\cdot[E_n - S(\lambda)]\cdot\left(\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n\cdot iI\right)\frac{\kappa}{\lambda+m}. \tag{14}$$

Уравнение (I2) имеет единственное решение.

Итак, для восстановления потенциальной матрицы $\Omega(x)$ необходимо знать все данные рассеяния. В действительности рассеяние наблюдается лишь в конечном интервале энергий. Поэтому возникает вопрос : с какой точностью можно восстановить потенциальную матрицу и нормированные собственные матрицы-функции, если данные рассеяния известны лишь на конечном интервале энергий. Аналогичный вопрос для краевой задачи

$$-y'' + v(x)y = \lambda^2 y, \qquad y(0)=0, \quad \int_0^\infty x \|v(x)\| dx < \infty$$

был рассмотрен в работах [2-3].

§ I. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим две граничные задачи (I)-(5), определяемые потенциальными матрицами $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$. Предположим, что данные рассеяния этих краевых задач совпадают при $|\lambda| < N$. Переходя к матричным уравнениям, рассмотрим множество $L_2^{(2n,2n)}(x,\infty)$ всех матриц-функций порядка $2n$ с элементами, принадлежащими $L_2(x,\infty)$. Введем в $L_2^{(2n,2n)}(x,\infty)$ скалярное произведение

$$\left(A(x), B(x)\right) = \sum_{i,k=1}^{2n} \left(a_{ik}(x), b_{ik}(x)\right).$$

В пространстве $L_2^{(2n,2n)}(x,\infty)$ рассмотрим операторы

$$\begin{aligned} (I+K_x)A(y) &= A(y) + \int_y^\infty K(y,t)A(t)\,dt, \\ (I+\overset{\circ}{K}_x)A(y) &= A(y) + \int_x^y K^x(t,y)A(t)\,dt, \\ (I+F_x)A(y) &= A(y) + \int_x^\infty F(t+y)A(t)\,dt. \end{aligned} \tag{I5}$$

Л Е М М А I. При любом $x \geqslant 0$

$$(I+F_x)^{-1} = (I+\overset{\circ}{K}_x)(I+K_x). \tag{I6}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Операторы, определяемые формулами (I5), имеют ограниченные обратные операторы вольтерровского типа. Пусть

$$(I+K_x)^{-1} = I + H_x,$$

где H_x - интегральный оператор с ядром $\mathcal{H}(t,y)$ $(t \geqslant x, y \geqslant x)$. Как показано в работе [I], для всех $t \geqslant x$, $y \geqslant x$ выполняется равенство

$$\mathcal{F}(t+y) + K(t,y) + \int_t^\infty K(t,\xi)\,\mathcal{F}(\xi+y)\,d\xi = H^x(y,t).$$

Отсюда, переходя к операторам, определяемым формулами (I5), получим тождество

$$(I+K_x)(I+F_x) = (I+\overset{\circ}{K}_x)^{-1},$$

эквивалентное доказываемому тождеству (I6).

Т Е О Р Е М А I. Если данные рассеяния двух граничных задач (I)-(5) совпадают в интеграле энергий $|\lambda| < N$, то справедливы формулы

$$\Omega_1(x) - \Omega_2(x) = B\left[T_1(x) + \overline{T_1(x)}\right] + \left[T_1(x) + \overline{T_1(x)}\right]B \tag{I7}$$

и

$$E_1^{x}(x,\mu)-E_2^{x}(x,\mu)=E_1^{x}(x,\mu)B[T_2(x,\mu)+\overline{T_2(x,\mu)}],\quad (|\mu|<N); \tag{I8}$$

где

$$T_1(x)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\lambda|<N}\overline{E_1(x,\lambda)}\,[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\cdot E_2^{x}(x,\lambda)\frac{\kappa}{\lambda+m}\,d\lambda, \tag{I9}$$

$$T_2(x,\mu)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{\overline{E_1(x,\lambda)}\cdot[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\cdot E_2^{x}(x,\lambda)}{\lambda-\mu}\,\frac{\kappa}{\lambda+m}\cdot d\lambda. \tag{20}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Составляя для каждой граничной задачи основное уравнение и вычитая из одного уравнения другое, получим

$$K_{1,2}(x,y)+\mathcal{F}_{1,2}(x+y)+\int\limits_x^{\infty}K_{1,2}(x,t)\,\mathcal{F}(t+y)\,dt+\int\limits_x^{\infty}K_2(x,t)\,\mathcal{F}_{1,2}(t+y)\,dt=0, \tag{2I}$$

где

$$\begin{aligned}K_{1,2}(x,y)&=K_1(x,y)-K_2(x,y),\\ \mathcal{F}_{1,2}(x+y)&=\mathcal{F}_1(x+y)-\mathcal{F}_2(x+y).\end{aligned} \tag{22}$$

Переходя в уравнении (2I) к сопряженным матрицам и пользуясь самосопряженностью матрицы $\mathcal{F}_{1,2}(x)$, получим уравнение

$$K_{1,2}^{x}(x,y)+F_{1,2}(x+y)+\int\limits_x^{\infty}F_1(t+y)K_{1,2}^{x}(x,t)\,dt+\int\limits_x^{\infty}F_{1,2}(t+y)K_2^{x}(x,t)\,dt=0.$$

Перепишем это уравнение в операторной форме и воспользуемся тождеством (I6)

$$K_{1,2}^{x}(x,y)=-(I+\mathring{K}_{1x})(I+K_{1x})\left\{F_{1,2}(x+y)+\int\limits_x^{\infty}F_{1,2}(t+y)K_2^{x}(x,t)\,dt\right\}. \tag{I6}$$

Так как данные рассеяния двух рассматриваемых краевых задач совпадают при $|\lambda|<N$, то, согласно (I3),

$$F_{1,2}(x+y)=\frac{1}{4\pi}\Big[\int\limits_{|\lambda|>N}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n\\ iI\end{pmatrix}\cdot[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\cdot\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n\\ iI\end{pmatrix}e^{-i\kappa(x+y)}\cdot\frac{\kappa}{\lambda+m}\cdot d\lambda+$$

$$+\int\limits_{|\lambda|>N}\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n\\ -iI\end{pmatrix}\cdot[S_2^{x}(\lambda)-S_1^{x}(\lambda)]\cdot\left(\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n-iI\right)e^{i\kappa(x+y)}\cdot\frac{\kappa}{\lambda+m}\cdot d\lambda\Big].$$

В силу (9-I0)

$$(I+K_{1x})\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n\\ iI\end{pmatrix}e^{-i\kappa y}=\overline{E_1(y,\lambda)},$$

поэтому, учитывая, что $S^{x}(\lambda)=\overline{S(\lambda)}$, получим

$$(I+K_{1x})F_{1,2}(x,+y)=\frac{1}{4\pi}\Big[\int\limits_{|\lambda|>N}E_1(y,\lambda)[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\cdot\left(\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n\cdot iI\right)e^{-i\kappa x}\cdot\frac{\kappa}{\lambda+m}\,d\lambda+$$

$$+\int\limits_{|\lambda|>N}E_1(y,\lambda)\cdot[\overline{S_2(\lambda)}-\overline{S_1(\lambda)}]\cdot\left(\frac{\lambda+m}{\kappa}E_n-iI\right)e^{i\kappa x}\cdot\frac{\kappa}{\lambda+m}\cdot d\lambda\Big].$$

Отсюда следует, что

$$(I+K_{1x})\cdot\left\{F_{1,2}(x+y)+\int\limits_x^{\infty}F_{1,2}(t+y)\,K_2^{x}(x,t)\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\Big[\int\limits_{|\lambda|>N}E_1(y,\lambda)\cdot[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\cdot E_2^{x}(x,\lambda)\cdot\frac{\kappa}{\lambda+m}\,d\lambda+$$

$$+\int\limits_{|\lambda|>N} E_1(y,\lambda)\left[\overline{S_2(\lambda)}-\overline{S_1(\lambda)}\right]\cdot\widetilde{E_2(x,\lambda)}\cdot\frac{\kappa}{\lambda+m}\,d\lambda\Big]=\Phi(x,y). \qquad (24)$$

В силу (23) находим

$$K^x_{1,2}(x,y)=-\left(I+\mathring{K}_{1x}\right)\Phi(x,y). \qquad (25)$$

Полагая $y=x$, получим

$$K_{1,2}(x,x)=-\Phi(x,x)=\left[T_1(x)+\overline{T_1(x)}\right].$$

Возвращаясь к формуле (II), приходим к представлению (I7).

Далее,

$$E^x_1(x,\mu)-E^x_2(x,\mu)=\int\limits_x^\infty f^x(t,\mu)\,K^x_{1,2}(x,t)\,dt=$$

$$=-\int\limits_x^\infty f^x(t,\mu)\left(I+\mathring{K}_{1x}\right)\Phi(x,t)\,dt=-\int\limits_0^\infty E^x_1(t,\mu)\,\Phi(x,t)\,dt. \qquad (25)$$

Заметим, что в этом соотношении число μ мы считаем комплексным с небольшой отрицательной мнимой частью, так что $e^{-it\mu}$ экспоненциально убывает при $t\to\infty$.

Меняя порядок интегрирования в соотношении (25), получим

$$E^x_1(x,\mu)-E^x_2(x,\mu)=-\frac{1}{4\pi}\Big[\int\limits_{|\lambda|>N}\int\limits_x^\infty E^x_1(t,\lambda)\left[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)\right]E^x_2(x,\lambda)\,\frac{\kappa}{\lambda+m}\,dt\,d\lambda+ \qquad (26)$$

$$+\int\limits_{|\lambda|>N}\int\limits_x^\infty E^x_1(t,\mu)\,E_1(t,\lambda)\left[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)\right]\widetilde{E_2(x,\lambda)}\,\frac{\kappa}{\lambda+m}\,dt\,d\lambda\Big].$$

Из уравнений, которым удовлетворяют матрицы $E^x_1(t,\mu)$, $\widetilde{E_1(t,\lambda)}$, $E_1(t,\lambda)$, следует, что

$$\int\limits_x^\infty E^x_1(t,\mu)\,E_1(t,\lambda)\,dt=-\frac{1}{\lambda-\mu}E^x_1(x,\mu)\,BE_1(x,\lambda),$$

$$\int\limits_x^\infty E^x_1(t,\mu)\,E_1(t,\lambda)\,dt=-\frac{1}{\lambda-\mu}E^x_1(x,\mu)\,BE_1(x,\lambda).$$

Подставляя эти выражения в формулу (26) и устремляя μ к любому из чисел интервала $(-N,-N)$, приходим к представлению (I8).

Теорема доказана.

§ 2. ОЦЕНКА ЯДРА ОПЕРАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим матричное уравнение Штурма-Лиувилля порядка $2n$

$$-Y''+v(x)\,Y=\lambda^2 Y \qquad (27)$$

и предположим, что эвклидова норма потенциальной матрицы $v(x)$, которую мы предполагаем самосопряженной, удовлетворяет условию

$$\max_{\xi\geq x}\left\|\int\limits_\xi^\infty v(t)\,dt\right\|\leq\alpha(x), \qquad (28)$$

где $\alpha(x)$ - произвольная неотрицательная невозрастающая и суммируемая на полуоси $(0,\infty)$ функция, т.е.

$$\alpha_1(x)=\int\limits_x^\infty\alpha(t)\,dt. \qquad (29)$$

В работе [4] показано, что существует решение $E_1(x,\lambda)$ уравнения (27), которое представимо в виде

$$E_1(x,\lambda)=e^{i\lambda x}E_{2n}+\int_x^\infty K_1(x,y)e^{i\lambda y}dy. \tag{30}$$

Оценим норму ядра оператора преобразования $K_1(x,y)$.

ЛЕММА 2. Если потенциальная матрица $\vartheta(x)$ удовлетворяет условиям (28)-(29), то эвклидова норма ядра оператора преобразования $K_1(x,y)$ оценивается неравенством

$$\|K_1(x,y)\|\leqslant\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{x+y}{2}\right)e^{2\alpha_1(x)} \tag{31}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в работе [2], ядро $K_1(x,y)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$K_1(x,y)=\frac{1}{2}\int_{\frac{x+y}{2}}^\infty\vartheta(t)dt+\int_{\frac{x+y}{2}}^\infty d\xi\int_0^{\frac{y-x}{2}}\vartheta(\xi-\eta)K_1(\xi-\eta,\xi+\eta)d\eta. \tag{32}$$

Положим

$$\frac{x+y}{2}=u,\quad \frac{y-x}{2}=v, \qquad K_1(u-v,\ u+v)=H(u,v), \tag{33}$$

$$\sigma(t)=\int_t^\infty\vartheta(\xi)d\xi. \tag{34}$$

Тогда уравнение (32) перепишется в виде

$$H(u,v)=\frac{1}{2}\sigma(u)-\int_u^\infty d\xi\int_0^v\sigma'(\xi-\eta)H(\xi,\eta)d\eta. \tag{35}$$

Пусть $H_1(u,v)$ и $H_2(u,v)$ – матрицы, определяемые уравнениями

$$H_1(u,v)=\frac{1}{2}\sigma(u)-\int_u^\infty d\xi\int_0^v\sigma'(\xi-\eta)H_2(\xi,\eta)d\eta, \tag{36}$$

$$H_2(u,v)=-\int_u^\infty d\xi\int_0^v\sigma'(\xi-\eta)H_1(\xi,\eta)d\eta. \tag{37}$$

Матрица

$$H(u,v)=H_1(u,v)+H_2(u,v)$$

является решением уравнения (35).

Положим

$$A(u,v)=\frac{\partial}{\partial v}H_1(u,v),\qquad B(u,v)=\frac{\partial}{\partial u}H_2(u,v) \tag{38}$$

и продифференцируем уравнение (36) по v, а уравнение (37) – по u

$$A(u,v)=-\int_u^\infty\sigma'(\xi-v)H_2(\xi,v)d\xi,$$

$$B(u,v)=\int_0^v\sigma'(u-\eta)H_1(u,\eta)d\eta.$$

Интегрируя по частям, получим отсюда систему уравнений

$$A(u,v)=\sigma(u-v)\,H_2(u,v)+\int_u^\infty \sigma(\xi-v)\,B(\xi,v)\,d\xi,$$
$$B(u,v)=-\sigma(u-v)\,H_1(u,v)+\sigma(u)H_1(u,0)+\int_0^v \sigma(u-\eta)\,A(u,\eta)\,d\eta.$$

Пользуясь обозначениями (38), находим

$$A(u,v)=\int_u^\infty[\sigma(\xi-v)-\sigma(u-v)]\;B(\xi,v)\,d\xi, \tag{39}$$

$$B(u,v)=[\sigma(u)-\sigma(u-v)]\,H_1(u,0)+\int_0^v[\sigma(u-\eta)-\sigma(u-v)]A(u,\eta)\,d\eta. \tag{40}$$

Подставляя в уравнение (40) выражение (39), приходим к интегральному уравнению

$$B(u,v)=[\sigma(u)-\sigma(u-v)]\cdot\tfrac{1}{2}\sigma(u)+\int_0^v[\sigma(u-\eta)-\sigma(u-v)]\,d\eta\;\times$$
$$\times\int_u^\infty[\sigma(\xi-\eta)-\sigma(u-\eta)]\cdot B(\xi,\eta)\,d\xi.$$

Меняя порядок интегрирования в последнем интеграле, получим уравнение

$$B(u,v)=\tfrac{1}{2}\sigma(u)[\sigma(u)-\sigma(u-v)]+\int_u^\infty d\xi\int_0^v[\sigma(u-\eta)-\sigma(u-v)]\;\times \tag{41}$$
$$\times[\sigma(\xi-\eta)-\sigma(u-\eta)]\cdot B(\xi,\eta)\,d\eta.$$

Покажем, что это уравнение можно решить методом последовательных приближений, и оценим эвклидову норму его решения $B(u,v)$. Положим

$$B_0(u,v)=\tfrac{1}{2}\sigma(u)[\sigma(u)-\sigma(u-v)],$$
$$B_n(u,v)=\int_u^\infty d\xi\int_0^v[\sigma(u-\eta)-\sigma(u-v)]\cdot[\sigma(\xi-\eta)-\sigma(u-\eta)]\cdot B_{n-1}(\xi,\eta)\,d\eta.$$

Очевидно, что

$$\|B_0(u,v)\|\leqslant\alpha(u)\alpha(u-v).$$

Предположим, что

$$\|B_n(u,v)\|\leqslant\alpha(u)\alpha(u-v)\,\frac{[2\alpha_1(u-v)]^{2n}}{(2n)!},$$

тогда

$$\|B_{n+1}(u,v)\|\leqslant 4\alpha(u)\alpha(u-v)\int_0^v\alpha(u-\eta)\int_0^\infty\frac{[2\alpha_1(\xi-\eta)]^{2n}}{(2n)!}\,\alpha(\xi-\eta)\,d\xi\,d\eta=$$
$$=\alpha(u)\alpha(u-v)\,\frac{[2\alpha_1(u-\eta)]^{2n+2}}{(2n+2)!}\Bigg|_0^v\leqslant$$
$$\leqslant\alpha(u)\alpha(u-v)\,\frac{[2\alpha_1(u-v)]^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{K=0}^{\infty}\|B_K(u,v)\|$ сходится, матрица $B(u,v)=\sum\limits_{K=0}^{\infty}B_K(u,v)$ является единственным решением уравнения (41) и

$$\|B(u,v)\|\leqslant\alpha(u)\alpha(u-v)\,\mathrm{ch}\,2\alpha_1(u-v). \tag{42}$$

Пользуясь полученным неравенством, из уравнения (39) находим, что

$$\|A(u,v)\|\leqslant\int_u^\infty|\sigma(\xi-v)-\sigma(u-v)|\,\alpha(\xi)\,\alpha(\xi-v)\,\mathrm{ch}\,2\alpha_1(\xi-v)\,d\xi\leqslant$$
$$\leqslant 2\alpha(u)\alpha(u-v)\int_u^\infty\alpha(\xi-v)\,\mathrm{ch}\,2\alpha_1(\xi-v)\,d\xi=$$
$$=\alpha(u)\alpha(u-v)\,\mathrm{ch}\,2\alpha_1(u-v). \tag{43}$$

Оценим нормы матриц $H_1(u,v)$ и $H_2(u,v)$. Так как

$$H_1(u,v)=\int_0^v A(u,\eta)\,d\eta+H_1(u,0),$$
$$H_2(u,v)=\int_u^\infty B(\xi,v)\,d\xi,$$

то, в силу неравенств (42)-(43),

$$\|H_1(u,v)\|\leqslant\frac{1}{2}\alpha(u)\Big[2\int_0^v\alpha(\xi-v)\,sh2\alpha_1(\xi-v)\,d\xi+1\Big]\leqslant\frac{1}{2}\alpha(u)\,ch2\alpha_1(u-v),$$

а

$$\|H_2(u,v)\|\leqslant\alpha(u)\int_0^\infty\alpha(\xi-v)\,ch2\alpha_1(\xi-v)\,d\xi=\frac{1}{2}\alpha(u)\,sh2\alpha_1(u-v).$$

Отсюда следует, что

$$\|H(u,v)\|\leqslant\frac{1}{2}\alpha(u)e^{2\alpha_1(u-v)}$$

и, следовательно, в силу (33)

$$\|K_1(x,y)\|\leqslant\frac{1}{2}\alpha\Big(\frac{x+y}{2}\Big)e^{2\alpha_1(x)}. \qquad (3I)$$

Лемма доказана.

Предположим, что потенциальная матрица $\widetilde{\Omega(x)}$ в матричном уравнении Дирака (I) абсолютно непрерывна, т.е. имеет абсолютно непрерывные элементы. Тогда, дифференцируя уравнение (I) по x и подставляя выражение для первой производной матрицы-решения из исходной системы в полученное уравнение второго порядка, приходим к уравнению Штурма-Лиувилля

$$-y''+\Big\{\big[T\widetilde{\Omega(x)}+\widetilde{\Omega(x)}T\big]+\widetilde{\Omega}^2(x)+B\Omega'(x)\Big\}y=(\lambda^2-m^2)\,y \qquad (44)$$

с матрицей-потенциалом

$$v(x)=m\big[T\widetilde{\Omega(x)}+\widetilde{\Omega(x)}T\big]+\widetilde{\Omega}^2(x)+B\widetilde{\Omega}'(x).$$

Если предположить, что эвклидова норма матрицы $v(x)$ удовлетворяет условиям (28)-(29), то эвклидова норма оператора преобразования $\widetilde{K}(x,y)$ оценится неравенством (3I).

Определим теперь класс матриц $V_{\alpha(x)}$, в который входят все матрицы канонического вида, удовлетворяющие условиям (6) и такие, что

$$\max_{\xi\geqslant x}\Big\|\int_\xi^\infty\big[m(T\Omega+\Omega T)+\Omega^2\big]dt-B\Omega(\xi)\Big\|\leqslant\alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – некоторая фиксированная функция. Следовательно, функция $\alpha(x)$ неотрицательна, не возрастает и в силу условий (6) суммируема на полуоси $(0,\infty)$.

Л Е М М А 3. Если матрица $\Omega(x)$ принадлежит классу $V_{\alpha(x)}$, то ядро оператора преобразования $K(x,y)$ удовлетворяет неравенству

$$\|K(x,y)\|\leqslant\frac{1}{2}\alpha\Big(\frac{x+y}{2}\Big)e^{2\alpha_1(x)},$$

где

$$\alpha_1(x)=\int_x^\infty\alpha(t)\,dt.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Матрица

$$\Omega_h(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \Omega(t)\,dt$$

имеет, очевидно, непрерывно дифференцируемые элементы, причем для матрицы

$$\vartheta_h(x) = m\left[T\Omega_h(x) - \Omega_h(x)T\right] + \Omega_h^2(x) - B\Omega'_h(x)$$

после перемены порядка интегрирования будем иметь

$$\int_x^\infty \vartheta_h(\xi)\,d\xi = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\left\{\int_\xi^\infty \left[m(T\Omega + \Omega T) + \Omega^2\right]dt - B\Omega(\xi)\right\}d\xi +$$
$$+\int_x^\infty \left[\frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h}\Omega^2(t)\,dt - \left\{\frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h}\Omega(t)\,dt\right\}^2\right]d\xi .$$

Поэтому, полагая

$$\beta(x,h) = \sup_{x\le y<\infty}\left\|\int_y^\infty\left[\frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h}\Omega^2(t)\,dt - \left\{\frac{1}{h}\int_\xi^{\xi+h}\Omega(t)\,dt\right\}^2 d\xi\right\|,$$

получим

$$\sup_{x\le\tau<\infty}\left\|\int_\tau^\infty \vartheta_h(\xi)\,d\xi\right\| \le \alpha(x) + \beta(x,h).$$

Из ограничений (6), наложенных на матрицу $\Omega(x)$, следует, что

$$\lim_{h\to 0}\beta(x,h) = 0, \qquad \lim_{h\to 0}\int_0^\infty \beta(x,h)\,dx = 0.$$

Следовательно, согласно предыдущему, для ядра $K_h(x,y)$, построенного по непрерывно дифференцируемой матрице $\Omega_h(x,y)$ выполняется неравенство

$$\|K_h(x,y)\| \le \frac{1}{2}\left[\alpha\left(\frac{x+y}{2}\right) + \beta\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]e^{2[\alpha_1(x)+\beta_1(x)]}$$

Устремляя в этом неравенстве h к нулю для ядра $K(x,y)$, построенного по исходной матрице $\Omega(x)$, получим нужную оценку. Лемма доказана.

§ 3. ОЦЕНКА РАЗНОСТИ СОБСТВЕННЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Как показано в § I для всех $|\mu| \le N$ справедлива формула

$$E_1^x(x,\mu) - E_2^x(x,\mu) = E_1^x(x,\mu)B\left[T_2(x,\mu) + \overline{T_2(x,\mu)}\right], \tag{18}$$

где

$$T_2(x,\mu) = \frac{1}{4\pi}\int_{|x|>N}\frac{E_1(x,\lambda)\left[S_2(\lambda) - S_1(\lambda)\right]E_2^x(x,\lambda)}{\lambda-\mu}\,\frac{\kappa}{\lambda+m}\,d\lambda . \tag{20}$$

Напомним, что

$$E(x,\lambda) = \begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n\\ -iI\end{pmatrix}e^{i\kappa x} + \int_x^\infty K(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n\\ -iI\end{pmatrix}e^{i\kappa t}\,dt.$$

Положим

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{\kappa}\cdot E_n\\ -iI\end{pmatrix} \tag{44}$$

$$g_i(x,\lambda)=\int_x^{\infty} K_i(x,t)\begin{pmatrix}\frac{\lambda+m}{k}\cdot E_n\\ -iI\end{pmatrix}e^{ikt}dt.$$

Пользуясь этими обозначениями, перепишем формулу (20) в следующем виде:

$$T_2(x,\mu)=T_{21}(x,\mu)+T_{22}(x,\mu)+T_{23}(x,\mu)+T_{24}(x,\mu), \tag{45}$$

где

$$T_{21}(x,\mu)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\lambda|>N}\frac{\overline{(\lambda)}[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\,C^{\times}(\lambda)}{\lambda-\mu}e^{-2ikx}\cdot\frac{k}{\lambda+m}\,d\lambda\,; \tag{46}$$

$$T_{22}(x,\mu)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\lambda|>N}\frac{\overline{g_1(x,\lambda)}\,[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\,C^{\times}(\lambda)}{\lambda-\mu}e^{-ikx}\cdot\frac{k}{\lambda+m}\,d\lambda\,; \tag{47}$$

$$T_{23}(x,\mu)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\lambda|>N}\frac{\overline{C(\lambda)}\,[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\,C^{\times}(\lambda)}{\lambda-\mu}\cdot\frac{k}{\lambda+m}\,d\lambda\,; \tag{48}$$

$$T_{24}(x,\mu)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\lambda|>N}\frac{g_1(x,\lambda)\,[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\,g_2^{\times}(x,\lambda)}{\lambda-\mu}\,\frac{k}{\lambda+m}\cdot d\lambda. \tag{49}$$

Оценим матрицы $T_{2i}(x,\mu)$ в метрике пространства $L_2^{(2n,2n)}(0,\infty)$. Заметим, что при $|\lambda|>N$

$$\|C(\lambda)\|^2\le\frac{2nN}{N-m}, \tag{50}$$

$$\left|\frac{k}{\lambda+m}\right|\le\frac{N+m}{N-m}. \tag{51}$$

В формуле (46) под знаком интеграла положим $k=\lambda N$

$$T_{21}(x,\mu)=\frac{1}{4\pi}\int_{|k|>\sqrt{N^2-m^2}}\frac{C(k\sqrt{1+\frac{m^2}{k^2}})[S_2-S_1]\,C^{\times}(k\sqrt{1+\frac{m^2}{k^2}})}{k\sqrt{1+\frac{m^2}{k^2}}-\mu}\,e^{-2ikx}\frac{1}{k\sqrt{1+\frac{m^2}{k^2}}+m}\,\frac{dk}{\sqrt{1+\frac{m^2}{k^2}}}$$

Применяя равенство Парсеваля и пользуясь неравенствами (50), (5I), а также унитарностью матриц $S(\lambda)\,(\|S(\lambda)\|^2=n)$, получим

$$\int_0^{\infty}\|T_{21}(x,\mu)\|^2dx\leqslant\frac{2}{\pi}\,\frac{n^3N^2(N+m)}{(N-m)^3}\,\frac{N^2}{(N-|\mu|)^2}\,\frac{1}{\sqrt{N^2-m^2}}\,. \tag{52}$$

Далее рассмотрим матрицу

$$T_{22}(x,\mu)=\frac{1}{4\pi}\int_{|\lambda|>N}\frac{g_1(x,\lambda)[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\,C^{\times}(\lambda)}{\lambda-\mu}\,e^{-ikx}\frac{k}{\lambda+m}\,d\lambda.$$

Пользуясь неравенством Коши-Буняковского и учитывая неравенства (50), (5I), находим, что

$$\|T_{22}(x,\mu)\|\leqslant\frac{1}{\pi}\,\frac{n\sqrt{N(N+m)}}{N-m}\cdot\frac{N}{N-|\mu|}\,\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\int_{|\lambda|>N}\|g_1(x,\lambda)\|^2d\lambda}\,. \tag{53}$$

Но, согласно обозначениям (44),

$$g(x,\lambda)=\widetilde{K(x,k)}\cdot C(\lambda),$$

где матрица $\widetilde{K(x,k)}$ при каждом $x\geqslant 0$ есть преобразование Фурье матрицы $K(x,t)$.

Предположим, что потенциальные матрицы $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, порождающие две рассматриваемые краевые задачи, принадлежат классу $V_{\alpha(x)}$, определенному в предыдущем параграфе. Тогда для ядра оператора преобразования $K(x,t)$ имеет место оценка (3I). Следовательно,

$$\int\limits_{|\lambda|>N} \|g_1(x,\lambda)\|^2 d\lambda \leqslant \frac{2nN}{N-m}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\int\limits_x^\infty \alpha^2\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{4\alpha_1(x)}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\pi nN}{N-m}\cdot\alpha(x)\alpha_1(x)e^{4\alpha_1(x)}. \tag{54}$$

Возвращаясь к формуле (53), получим неравенство

$$\int\limits_0^\infty \|T_{22}(x,\mu)\|^2 dx \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{n^3\cdot N^2(N+m)}{(N-m)^3}\cdot\frac{N^2}{(N-|\mu|)^2}\cdot\frac{1}{N}\left[e^{4\alpha_1(0)}-1\right]. \tag{55}$$

Матрица $T_{23}(x,\mu)$, определенная формулой (48), оценивается так же.

Рассмотрим матрицу

$$T_{24}(x,\mu)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{\overline{g_1(x,\lambda)}\,[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\,g_2^\times(x,\lambda)}{\lambda-\mu}\cdot\frac{\kappa}{\lambda+m}\cdot d\lambda.$$

Пользуясь неравенством (54), получим

$$\|T_{24}(x,\mu)\| \leqslant \frac{n\sqrt{n}\cdot N(N+m)}{(N-m)^2}\cdot\frac{1}{N-|\mu|}\cdot\alpha(x)\alpha_1(x)e^{4\alpha_1(x)}.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^\infty \|T_{24}(x,\mu)\|^2 dx \leqslant \frac{1}{8}\cdot\frac{n^3N^2(N+m)^2}{(N-m)^4}\cdot\alpha(0)\alpha_1^2(0)\cdot\left[e^{8\alpha_1(0)}-1\right]\cdot\frac{1}{(N-|\mu|)^2}. \tag{56}$$

На основании оценок (52), (55) и (56) приходим к неравенству

$$\left\{\int\limits_0^\infty \|T_2(x,\mu)\|^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant \frac{nN}{N-m}\cdot\sqrt{\frac{n(N+m)}{N-m}}\cdot\frac{N}{N-|\mu|}\,\frac{1}{\sqrt{N}}\times \tag{57}$$
$$\times\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{N^2}}}+\sqrt{\frac{\alpha_1(0)\cdot[e^{4\alpha_1(0)}-1]}{2\pi}}+\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{1}{8}\cdot\frac{N+m}{N-m}\cdot\alpha(0)\alpha_1^2(0)\cdot[e^{8\alpha_1(0)}-1]}\right\}.$$

Непосредственным следствием этого неравенства является

Т Е О Р Е М А 2. Пусть данные рассеяния двух граничных задач (I)-(5) с потенциальными матрицами $\Omega_1(x)$ и $\Omega_2(x)$, принадлежащими классу $V_{\alpha(x)}$, совпадают при всех $|\lambda|<N>m$.

Тогда при $|\mu|<N$

$$E_1^\times(x,\mu)-E_2^\times(x,\mu)=E_1^\times(x,\mu)\cdot\Delta(x,\mu), \tag{58}$$

причем

$$\int\limits_0^\infty \|\Delta(x,\mu)\|^2 dx \leqslant \left[\frac{C_1}{\sqrt{N}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{\mu^2}{N^2}}}+\frac{C_2}{\sqrt{N}}\right)\right]^2, \tag{59}$$

где
$$C_1=\frac{2\sqrt{2}\cdot n^2\cdot N}{N-m}\cdot\sqrt{\frac{N+m}{N-m}}\cdot\frac{N}{N-|\mu|};$$

$$C_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot \alpha_1(0) \cdot \left[e^{4\alpha_1(0)} - 1\right]} + \sqrt{\frac{1}{8} \frac{N+m}{N-m} \alpha(0) \alpha_1^2(0) \left[e^{8\alpha_1(0)} - 1\right]}. \tag{60}$$

В заключение выражаю искреннюю благодарность В.А.Марченко за внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М.Г.Гасымов, Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$, Труды Московского математического общества, 19, 41-112, 1968.
2. В.А.Марченко, Устойчивость обратной задачи теории рассеяния, Матем. сб., 77 (119), 139-162, 1968.
3. Д.Ш.Лундина, О точности восстановления собственных функций по неполным данным рассеяния, Математическая физика и функциональный анализ, ФТИНТ АН УССР, в. I, 72-83, 1969.
4. З.С.Агранович, В.А.Марченко, Обратная задача теории рассеяния, ХГУ, Харьков,1960.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

САМОУСРЕДНЯЕМОСТЬ ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СЛУЧАЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Л.А. Пастур

Рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\Delta\psi + q\psi = \lambda\psi \tag{1}$$

в кубе V N - мерного евклидового пространства R^N с такими условиями на его границе ∂V

$$a(x)\frac{\partial\psi}{\partial n} + b(x)\psi\Big|_{\partial V} = 0, \quad ab > 0 \tag{2}$$

и предположим, что потенциал $q(x)$ - случайная функция координаты. Для каждой реализации потенциала определим величину

$$N_a(\lambda, V) = \frac{1}{|V|}\sum_{\lambda_i^a < \lambda} 1, \tag{3}$$

где λ_i^a, $i = 1,2,3,\ldots$ - собственные значения задачи (1) - (2), $|V|$ - объем куба V. Нас будут интересовать свойства этой функции в пределе $V \to \infty$.

Такая задача возникает, например, в квантовой теории твердых тел при изучении некоторых модулей неупорядоченных систем (подробнее в [1-2]). Из физических соображений следует, что при $V \to \infty$ $N_a(\lambda, V)$ стремится к некоторой предельной функции $N(\lambda)$, которая уже не является случайной. Это свойство функции $N_a(\lambda, V)$ принято называть самоусредняемостью.

В работе [3] самоусредняемость $N_a(\lambda, V)$, а также некоторых других величин, построенных из собственных функций и собственных значений задачи (1)-(2), была доказана для потенциалов, являющихся эргодическими случайными полями, у которых $M e^{-tq(x)} < \infty$ при всех $t > 0$ [1]. Метод этого доказательства основан на изучении оператора $e^{-tH_a(V)}$ ($H_a(V)$ - оператор, определяемый формулами (1)- (2) в $\mathcal{L}_2(V)$) и потому не позволяет рассмотреть потенциалы, которые могут быть, грубо говоря, "сильно отрицательными".

В настоящей работе, используя специфические свойства функции $N_a(\lambda, V)$, покажем, что ее самоусредняемость имеет место при несколько иных условиях на $q(x)$. Эти условия хотя и не являются прямым ослаблением условий работы [3], все же позволяют рассматривать потенциалы, которые в определенном смысле являются " более отрицательными". Применяемый при этом метод доказательства в основных чертах (разбиение на кубы и использование вариационных неравенств) является обобщением рассуждений, с помощью которых подобная теорема была установлена в работе [4] для одного специального класса ограниченных потенциалов.

Итак, пусть потенциал $q(x)$ является стационарным и метрически транзитивным случайным полем (соответствующие определения см., например, в [5]), почти все реализации которого являются кусочно непрерывными функциями. Положим

$$q_-(x) = \max\{0, -q(x)\},$$

1) Символом $M\ldots$ здесь и ниже обозначена операция усреднения по реализациям потенциала.

а
$$Q(v) = \sup_{x \in v} q_-(x),$$

где v - некоторый куб в R^N. Предположим, что выполнено следующее условие: существует куб v в R^N такой, что $Q(v)$ имеет конечный момент порядка выше, чем $\frac{N(N+1)}{2}$, т.е.

$$M|Q(v)|^{\frac{N(N+1)}{2}+\delta} < \infty, \quad \delta > 0. \tag{4}$$

В силу стационарности $q(x)$ фигурирующее в (4) среднее не зависит от положения v в R^N, и потому без ограничения общности можно считать, что его центр совпадает с началом координат. Кроме того, легко убедиться, что из (4) следует конечность $M|Q(\mathcal{D})|^p$, где $p < \frac{N(N+1)}{2}+\delta$ и $\mathcal{D}$ - любая ограниченная область в R^N.

Обозначим через P некоторый прямоугольный параллелепипед в R^N. Из вариационных принципов следует, что $N_a(\lambda\, P)$ является невозрастающей функцией потенциала и удовлетворяет таким неравенствам [6] ($N_0(\lambda\, P)$ $N_1(\lambda\, P)$ - функции $N_\alpha(\lambda\, P)$ задач Дирихле и Неймана соответственно):

$$N_0(\lambda,P) \le N_a(\lambda,P) \le N_1(\lambda,P) \tag{5}$$

$$|P|\,N_1(\lambda,P) \le |P_1|\,N_1(\lambda,P_1) + |P_2|\,N_2(\lambda,P_2) \tag{6а}$$

$$|P|\,N_0(\lambda,P) \ge |P_1|\,N_0(\lambda,P_1) + |P_2|\,N_0(\lambda,P_2), \tag{6в}$$

где $P = P_1 \cup P_2$, $P_1 \cap P_2 = 0$.

Л Е М М А I. Пусть потенциал $q(x)$ в параллелепипеде P ограничен снизу константой $-A$. Тогда

$$|P|\,N_a(\lambda,P) \le C\prod_{i=1}^{N}\left({}_+\sqrt{\frac{\lambda+A}{2\pi}}\;L_i + 1\right),^{*)} \tag{7}$$

где ${}_+\sqrt{x} = \sqrt{\max\{x,0\}}$, L_i - длины ребер P.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. В силу (5) неравенство (7) достаточно доказать для функции $N_1(\lambda\, P)$. Поскольку последняя не убывает с уменьшением потенциала, то можно заменить $q(x)$ на $-A$. В результате получим задачу Неймана для оператора Лапласа в P с $\lambda + A$ в качестве спектрального параметра. Собственные значения этой задачи хорошо известны (например, [6]), откуда после несложных преобразований получается (7).

Л Е М М А 2. $M\{N_a^\alpha(\lambda\, P)\}$ при фиксированном P ограничено сверху равномерно по P $(|P|>0)$ и $\alpha < \frac{N+1}{2}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Параллелепипед P можно представить как объединение некоторого числа σ одинаковых непересекающихся перелледепипедов P_i с ребрами длиной, не меньшей, чем $\ell/2$, и не большей, чем ℓ (ℓ - длина ребра куба v, фигурирующего в условии (4)). Применяя (6а) к такому разбиению и пользуясь неравенством Гельдера, получим

$$N_1^\alpha(\lambda\, P) \le \frac{1}{\sigma}\sum_i N_1^\alpha(\lambda, P_i),$$

откуда после усреднения с учетом стационарности потенциала имеем

$$M\{N_1^\alpha(\lambda,P)\} \le M\{N_1^\alpha(\lambda,P_1)\}.$$

---

*) Буквой C обозначены величины, возможно различные, которые во всем рассмотрении можно считать постоянными.

Но, согласно лемме I,

$$N_1^{\alpha}(\lambda, P_i) \le C\left({}_+\sqrt{\frac{\lambda+Q(v)}{2\pi}}+\frac{2}{\ell}\right)^{2N}.$$

Отсюда и из (4) следует справедливость леммы.

Л Е М М А 3. Пусть $q(x) \geqslant -A$, $x \in V$, $A > 0$. Тогда

$$\hat N(\lambda, V) \equiv \int_{-A}^{\lambda}\{N_1(\mu, V) - N_0(\mu, V)\}\,d\mu \le C\,\frac{\lambda+A}{L}\left({}_+\sqrt{\frac{\lambda+A}{2\pi}}+\frac{1}{L}\right)^{N-1}, \tag{8}$$

где L – длина ребра куба V.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Очевидно, лемму достаточно доказать для $A = 0$, поскольку общий случай получается из этого сдвигом по λ. Обозначим $N_1(\lambda, V) - N_0(\lambda, V)$ через $\vartheta(\lambda, V)$. Согласно (5), $\vartheta(\lambda, V)$ – неотрицательная функция. В [3] было показано, что

$$0 \le \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, d\vartheta(\lambda, V) \le \frac{C}{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}+\frac{1}{L}\right)^{N-1}, \quad t > 0.$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, d\vartheta(\lambda, V) = t\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,\vartheta(\lambda, V)\,d\lambda - N_1(0, V) \geqslant$$
$$\geqslant t\int_0^{1/t} e^{-\lambda t}\,\vartheta(\lambda, V)\,d\lambda - \frac{1}{|V|} \geqslant te^{-1}\hat N\left(\frac{1}{t}, V\right) \quad \frac{1}{|V|}.$$

Поэтому

$$\hat N\left(\frac{1}{t}, V\right) \le \frac{C}{L}t^{-1}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}+\frac{1}{L}\right)^{N-1}+\frac{1}{L^{N-1}}\right],$$

откуда, взяв $\lambda = \frac{1}{t}$, получаем (8).

Л Е М М А 4. Если потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию (4), то

$$\lim_{l \to \infty} M\{N_1(\lambda, V) - N_0(\lambda, V)\} = 0.$$

Из (6а), (6в) и леммы 2 видно, что при доказательстве можно ограничиваться случаем кубов V, построенных из кубиков v_i, конгруэнтных основному кубику v из формулы (4). Пусть $\bar I_{A,V}$ –индикатор события $\{\sup_{x\in V} q_-(x) \le A\}$, а $I_{A,V}$ – индикатор дополнительного события. Обозначая, как и в предыдущей лемме, $N_1(\lambda, V) - N_0(\lambda, V) = \vartheta(\lambda, V)$, имеем

$$M\{\vartheta(\lambda, V)\} \leqslant M\{\vartheta(\lambda, V)\,\bar I_{A,V}\} + M\{N_1(\lambda, V)\, I_{A,V}\},$$

откуда после применения ко второму слагаемому неравенства Гельдера и леммы 2 получим

$$M\{\vartheta(\lambda, V)\} \leqslant M\{\vartheta(\lambda, V)\,\bar I_{A,V}\} + F^{1/q}(\lambda)\, M^{1/p}\{I_{A,V}\}, \tag{9}$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $q < \frac{N+1}{2}$, $F(\lambda)$ –мажоранта $M\{N_1^q(\lambda, V)\}$, существование которой следует из леммы 2. Но

$$\left\{\sup_{x\in V} q_-(x) \geqslant A\right\} \subset \bigcup_{v_i \subset V}\left\{\sup_{x\in v_i} q_-(x) \geqslant A\right\}$$

и потому с учетом стационарности процесса $q(x)$ и (4) имеем

$$M\{I_{A,V}\} = P_r\left\{\sup_{x\in V} q_-(x) \geqslant A\right\} \leqslant \frac{|V|}{|v|}P_r\left\{\sup_{x\in v} q_-(x) \geqslant A\right\} \leqslant \frac{|V|}{|v|}\,\frac{M\{Q^{\alpha}(v)\}}{A^{\alpha}}, \tag{10}$$

где $\alpha = \frac{N(N+1)}{2} + \delta$.

Проинтегрируем теперь неравенство (9) по λ в пределах $-\infty < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2 < \infty$. В первом члене можно поменять порядок интегрирования и усреднения (все положительно), после чего под знаком среднего будет стоять величина, не превосходящая

$$I_{A,V}\,\hat N(\lambda_2, V), \quad \text{где} \quad \hat N(\lambda, V) = \int_{-A}^{\lambda}\vartheta(\mu, V)\,d\mu.$$

Для оценки этого выражения можно воспользоваться леммой 3, а для оценки второго слагаемого - неравенством (10). В результате получим

$$M\{\hat N(\lambda,V)\} \le C_1 \frac{(\lambda+A)}{L}\left(_+\sqrt{\frac{\lambda+A}{2\pi}}+\frac{1}{L}\right)^{N-1}+C_2\left(\frac{L^N}{A^\alpha}\right)^{1/p},$$

где L - длина ребра куба V. При фиксированном λ правая часть этого неравенства имеет порядок

$$C_1\frac{A^{\frac{N+1}{2}}}{L}+C_2\left(\frac{L^N}{A^\alpha}\right)^{1/p}$$

и может быть сделана сколь угодно малой соответствующим подбором A. Для этого достаточно, например, взять $A=L^x$, где $\frac{N}{\alpha}<x<\frac{2}{N+1}$.

Таким образом, получаем, что для любых $\lambda_1<\lambda_2$

$$\lim_{V\to\infty}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M\{\hat N(\lambda,V)\}\,d\lambda=0.$$

Под знаком интеграла здесь стоит неотрицательная функция, которая вместе со своей вариацией ограничена в любом конечном интервале. Этот факт, а также произвольность λ_1,λ_2 дают основание утверждать, что при любом фиксированном λ

$$\lim_{V\to\infty} M\{N_1(\lambda,V)-N_0(\lambda,V)\}=0,$$

что и требовалось доказать.

<u>Замечание</u>. Используя неравенства (6а) и (6в), можно показать, что пределы

$$\lim_{V\to\infty} M\{N_1(\lambda,V)\},\quad \lim_{V\to\infty} M\{N_0(\lambda,V)\}$$

существуют и каждый в отдельности.

Т Е О Р Е М А. Пусть потенциал $q(x)$ является стационарным метрическим транзитивным (эргодическим) случайным полем, все реализации которого являются кусочно непрерывными функциями и которое удовлетворяет условию (4). Тогда существует неслучайная, неубывающая функция $N(\lambda)$, что при каждом λ с вероятностью 1

$$\lim N_a(\lambda,V)=N(\lambda),$$

и этот предел не зависит от a, т.е. от вида граничных условий (2) *).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Напомним, прежде всего, что стационарное случайное поле $q(x,\omega)$ (ω - точка пространства реализаций Ω) называется метрически транзитивным, если соответствующий ему оператор сдвига T_y, действующий в Ω по формуле $T_y q(x,\omega)=q(x+y,\omega)$, не имеет нетривиальных инвариантных множеств. Согласно эргодической теореме из [5], для всякого поля $f(x,\omega)$, порожденного оператором T_y ($f(x,\omega)=T_x f(\omega)$, где $f(\omega)$ - некоторая измеримая функция на Ω), и такого, что $M\{f\}<\infty$ с вероятностью 1

$$\lim_{V\to\infty}\frac{1}{|V|}\int_V f(x,\omega)\,dx=M\{f\}.$$

Вышеизложенное с очевидными изменениями справедливо и для случайных полей целочисленного аргумента.

Представим все пространство R^N как решетку из кубиков v_i, конгруэнтных v (см. условие (4)), и пусть V_0 - куб с центром в начале координат, содержащий m^N кубиков v_i (т.е. $L_0=m\ell$, где L_0 -длина ребра V_0). Возьмем произвольный куб V с центром в начале координат и представим его в виде $V=V^n\cup\tilde V$, где V^n - содержащийся в V куб максимальных размеров, который можно составить из кубов V_i, конгруэнтных V_0, (индекс n показывает, что V^n состоит из n^N кубов V_i);

*) Аналогичная теорема в одномерном случае ($N=1$) верна в предположении $M|q|<\infty$ (см. [7]).

$\tilde V = V \setminus V^n$ и, очевидно, является кубическим слоем, состоящим не более чем из $m^N[(n+2)^N - n^N]$ параллелепипедов P_i, причем длины всех ребер каждого из них не превосходят ℓ. Поэтому, согласно (6а),

$$N_1(\lambda,V) \le \frac{1}{n^N}\sum_{V_i\subset V^n} N_1(\lambda,V_i) + \frac{1}{|V^n|}\sum_{P_i\subset\tilde V}|P_i|\,N_1(\lambda,P_i), \tag{II}$$

Из леммы I следует, что второе слагаемое в правой части этого неравенства имеет мажоранту

$$\frac{|\vartheta|}{|V^n|}\sum_{\vartheta_k\subset\tilde V} g(\vartheta_k) \le \frac{1}{(m\,n)^N}\sum_{\vartheta_k\subset V^{n+2}\setminus V^n} g(\vartheta_k), \tag{I2}$$

где $g(\vartheta) = \left(+\sqrt{\frac{\lambda+Q(\vartheta)}{2\pi}}+\frac{1}{\ell}\right)^N$.

В силу свойств $q(x)$, величины $q(\vartheta_k)$ образуют стационарное метрически транзитивное поле целочисленного аргумента [5], которое, согласно (4), имеет конечное математическое ожидание. Поэтому по эргодической теореме с вероятностью I

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(m\,n)^N}\sum_{\vartheta_k\subset V^n} g(\vartheta_k) < \infty,$$

значит, правая часть неравенства (I2) с вероятностью I стремится к нулю при $n\to\infty$.

Величины $N_1(\lambda,V_i)$, стоящие под знаком суммы в первом слагаемом справа в (II) в силу свойств потенциала $q(x)$, также образуют стационарное, метрически транзитивное поле [5]. Поэтому с вероятностью I1

$$\overline{\lim_{V\to\infty}}\, N_1(\lambda,V) \le M\{N_1(\lambda,V_0)\}. \tag{I3}$$

С другой стороны, согласно (6в)

$$N_0(\lambda,V) \ge \frac{1}{n^N}\sum_{V_i\subset V^n} N_0(\lambda,V_i),$$

и, значит, с вероятностью I

$$\underline{\lim_{V\to\infty}}\, N_0(\lambda,V) \ge M\{N_0(\lambda,V_0)\}. \tag{I4}$$

Так как m произвольно, то из (I3) и (I4) с учетом (5) и леммы 4 получаем утверждение теоремы.

В заключение приведем примеры потенциалов, удовлетворяющих условию (4).

I). Пусть $\varphi(x)$ – финитная и непрерывная функция с носителем диаметра d, $\xi_{\vec n}$ – стационарное, метрически транзитивное поле целочисленного векторного аргумента $\vec n$ из R^N. Положим

$$q(x) = \sum_{\vec n}\xi_{\vec n}\,\varphi(x-\vec n). \tag{I5}$$

Очевидно, что

$$|q(x)| \le C\sum_{|x-\vec n|\le d}|\xi_{\vec n}|.$$

С помощью неравенства Гельдера можно показать, что

$$|q(x)|^\alpha \le C\sum_{|x-n|\le d}|\xi_{\vec n}|^\alpha$$

$\alpha = \frac{N(N+1)}{2}+\delta$. Отсюда следует, что

$$\sup_{x\in\vartheta} q^\alpha_-(x) \le \sup_{x\in\vartheta}|q(x)|^\alpha \le C\sum_{x\in\vartheta_d}|\xi_{\vec n}|^2;$$

где ϑ_d – куб, получаемый из ϑ наращиванием со всех сторон кубического слоя "толщиной" d. Поэтому, если $M|\xi_{\bar{n}}|^{\alpha} < \infty$, то $q(x)$ вида (I5) удовлетворяет (4).

Если взять $\varphi \geqslant 0$, $\xi_{\bar{n}} \leqslant 0$ и $Me^{-\xi_{n}} = \infty$, то очевидно,

$$Me^{-tq(x)} = \infty$$

и, следовательно, среди потенциалов типа (I5) есть и такие, которые не удовлетворяют условию $Me^{-tq(x)} < \infty$ из работы [3].

2) Рассмотрим стационарный процесс, реализации которого являются достаточно гладкими функциями. Для простоты выкладок будем считать, что $N = 2$. В этом случае достаточно предполагать, что реализации поля $q(x)$ имеют непрерывные производные $\partial q/\partial x_i$, $i = 1,2$ и $\partial^2 q/\partial x_1 \partial x_2$, причем все эти производные имеют момент порядка $p = [\alpha] + 1$.

Из формулы

$$q(x_1, x_2) = q(0,0) + \int_0^{x_1} \frac{\partial q(\xi_1, 0)}{\partial \xi_1} d\xi_1 - \int_0^{x_2} \frac{\partial q(0, \xi_2)}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} \frac{\partial^2 q}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} d\xi_1 d\xi_2$$

с помощью элементарного неравенства

$$\left|\sum_1^n a_i\right|^r \leqslant n^{r-1} \sum_1^n |a_i|^r$$

получаем

$$|q(x_1, x_2)| \leqslant 4^{p-1}\Big\{|q(0,0)|^p + \Big(\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Big|\frac{\partial q(\xi_1, 0)}{\partial \xi_1}\Big| d\xi_1\Big)^p +$$

$$+ \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \Big|\frac{\partial q(0, \xi_2)}{\partial \xi_2}\Big|^p d\xi_2 + \Big(\iint_{-\ell/2} \Big|\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|^p dx_1 dx_2\Big)^p,$$

где ℓ – длина ребра некоторого квадрата ϑ с центром в начале координат.

Так как левая часть последнего неравенства не зависит от x при $x \in \vartheta$, то она является мажорантой для

$$\sup_{x \in \vartheta} |q(x)|^p.$$

Но для любого стационарного поля имеет место следующая цепочка неравенств:

$$M\Big(\int_{\mathcal{D}} f(x)\, dx\Big)^p = \int_{\mathcal{D}} M\{f(x_1) \ldots f(x_p)\}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_p \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\mathcal{D}} \prod_1^p M^{1/p} |f(x_i)|^p\, dx_1 \ldots dx_p = |\mathcal{D}|^p M\{f(0)\}^p.$$

Поэтому

$$M\{\sup_{x \in \vartheta} |q(x)|^p\} \leqslant 4^{p-1}\Big[M|q(0,0)|^p + \ell^p M\Big|\frac{\partial q}{\partial x_1}\Big|^p +$$

$$+ \ell^p M\Big|\frac{\partial q}{\partial x_2}\Big|^p + \ell^{2p} M\Big|\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}\Big|^p < \infty.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. И.М.Лифшиц, УФН, 83, 6I7, I96I.
2. Н.Мотт, Электроны в неупорядоченных структурах, Мир, М., I969.
3. Л.А.Пастур, Теоретическая и математическая физика (в печати).
4. И.М.Сливняк, Ж. выч.матем. и матем.физики, 6, II04, I960.
5. Д.Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, М., I956.
6. Р.Курант, Д.Гильберт, Методы математической физики, ГИТТЛ, М, I, I952.
7. М.М. Бендерский, Л.А.Пастур, Матем. сборник, 82, № 2, 6, I970.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

О ГЛОБАЛЬНОЙ ПРИВОДИМОСТИ ПСЕВДОПОЛИНОМОВ

Л.И.Ронкин

Известно, *) что псевдополином, приводимый в кольце ростков функций, аналитических в точке $a \in C^n$, является при некоторых естественных условиях приводимым и в кольце ростков псевдополиномов.

Для функций двух переменных глобальный вариант этого утверждения был получен М.Ф. Зуевым [2]. Именно им была доказана следующая

Т Е О Р Е М А 1. Пусть псевдополином

$$P(z,w) = a_0(z)w^m + \ldots + a_m(z), \quad (z \in C^1, w \in C^1),$$

коэффициенты которого $a_0(z), \ldots, a_m(z)$ – целые функции, не обращающиеся одновременно в нуль, представим в виде

$$P(z,w) = F_1(z,w)\, F_2(z,w),$$

где $F_1(z,w)$ и $F_2(z,w)$ – целые функции в C^2. Тогда существуют псевдополиномы $P_1(z,w)$ и $P_2(z,w)$ и целые функции $f_1(z,w)$ и $f_2(z,w)$ такие, что

$$F_j(z,w) = P_j(z,w)\, e^{f_j(z,w)}, \quad j = 1,2$$

и

$$P(z,w) = P_1(z,w)\, P_2(z,w).$$

Здесь эта теорема распространяется на случай псевдополиномов произвольного числа переменных, вообще говоря, не являющихся целыми функциями по совокупности переменных. Используемый нами для этого метод отличен от метода М.Ф.Зуева и является в некотором смысле упрощенным вариантом метода построения аналогов произведения Вейерштрасса, рассмотренного в [3].

Т Е О Р Е М А 2. Пусть псевдополином

$$P(z,w) = a_0(z)w^m + a_1(z)w^{m-1} + \ldots + a_m(z) \qquad (z \in C^n, w \in C^1)$$

с коэффициентами $a_0(z) \not\equiv 0, a_1(z), \ldots, a_m(z)$, аналитическими в некоторой области $\mathcal{D} \subset C^n$ и такими, что

$$|a_0(z)| + \ldots + |a_m(z)| > 0 \quad \forall z \in \mathcal{D},^{**)} \tag{1}$$

представим в виде

$$P(z,w) = F_1(z,w)\, F_2(z,w),$$

*) См., например, [1].
**) Теорема верна и при отсутствии условия (1). Доказательство этого требует нежелательного, по нашему мнению, для данной заметки привлечения некоторых неэлементарных фактов из теории аналитических множеств.

где $F_j(z,w)$, $j=1,2$, – функции, аналитические в произведении $\mathcal{D}\times C^1_{(w)}$.

Тогда существуют псевдополиномы

$$P_j(z,w)=\sum_{\ell=0}^{m_j} a_\ell^{(j)} w^{m_j-\ell}, \quad j=1,2, \tag{2}$$

с коэффициентами, аналитическими в области $\mathcal{D}$, и такие аналитические в $\mathcal{D}\times C^1_{(w)}$ функции $f_j(z,w)$, $j=1,2$, что

$$F_j(z,w)=P_j(z,w)e^{f_j(z,w)}, \quad j=1,2, \tag{3}$$

и

$$P(z,w)=P_1(z,w)P_2(z,w). \tag{4}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Обозначим через $w_{1,j}(z),\dots,w_{q,j}(z)$, $j=1,2$ корни функции $F_j(z,w)$ при фиксированном $z\in\mathcal{D}$, занумерованные с учетом кратности. Число q, которое зависит от z и j, очевидно, не превосходит степени m псевдополинома $P(z,w)$. Обозначим также

$$\mathcal{D}'=\{z: z\in\mathcal{D},\ a_m(z)\neq 0\}.$$

При этом, естественно, предполагается, что $a_m(z)\not\equiv 0$. Это предположение не нарушает общности. Отметим, что

$$F_j(z,0)\neq 0 \quad \forall z\in\mathcal{D}', \quad j=1,2.$$

При любом $z\in\mathcal{D}'$ имеет место очевидное равенство

$$F_j(z,w)=F_j(z,0)\left(1-\frac{w}{w_{1,j}}\right)\dots\left(1-\frac{w}{w_{q,j}}\right)e^{h_j(z,w)}, \quad j=1,2, \tag{5}$$

где функция $h_j(z,w)$ является целой функцией переменного w. Покажем, что функция $h_j(z,w)$ голоморфна в области $\mathcal{D}'\times C^1_{(w)}$ и, более того, голоморфно продолжается на область $\mathcal{D}\times C^1_{(w)}$.

Из (5), как нетрудно видеть, следует, что

$$\frac{1}{k!}\frac{d^k h_j}{dw^k}\bigg|_{w=0}=\frac{1}{k!}\frac{d^k \ln F_j}{dw^k}\bigg|_{w=0}+ \tag{6}$$
$$+\frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{q}\frac{1}{w_{\ell,j}^k(z)}=\frac{1}{2k\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{(F_j(z,\zeta))'_\zeta}{\zeta^k F_j(z,\zeta)}\,d\zeta,$$

где число R $(R=R(z))$ – любое, удовлетворяющее условию

$$R>\max_{1\le\ell\le q}|w_{\ell,j}(z)|. \tag{7}$$

Отсюда, используя разложение функции $h_j(z,w)$ в ряд по степеням w, заключаем, что в области $\mathcal{D}'\times C^1_{(w)}$

$$h_j(z,w)\equiv H_j(z,w), \quad j=1,2, \tag{8}$$

где

$$H_j(z,w)=-\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{(F_j(z,\zeta))'_\zeta}{F_j(z,\zeta)}\ln\left(1-\frac{w}{\zeta}\right)d\zeta. \tag{9}$$

Фигурирующий здесь предел существует при любых $z \in \mathcal{D}$ и $w \in C^1_{(w)}$, поскольку при значениях R, удовлетворяющих условию (7) и условию $R > |w|$, функция

$$H_j(z,w;R) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R} \frac{(F_j(z,\zeta))'_\zeta}{F_j(z,\zeta)}\, \ln\left(1-\frac{w}{\zeta}\right) d\zeta \tag{10}$$

не зависит от R. Таким образом, функция $H_j(z,w)$ $(j=1,2)$ определена во всей области $\mathcal{D} \times C^1_{(w)}$ и представима в виде

$$H_j(z,w) = H_j(z,w;R_j(z,w)), \tag{11}$$

где $R_j(z,w)$ – любая функция, удовлетворяющая условию

$$R_j(z,w) > \max\left\{|w|, \max_{1\le \ell \le q} |w_{\ell,j}(z)|\right\}.$$

Сформулированное выше утверждение о голоморфности функции $h_j(z,w)$ будет, очевидно, доказано, если мы докажем голоморфность функции $H_j(z,w)$ в области $\mathcal{D}\times C^1_{(w)}$.

Заметим, прежде всего, что при фиксированном $z \in \mathcal{D}$ и R, удовлетворяющем условию (7), функция $H_j(z,w;R)$ является, очевидно, аналитической функцией переменного w в круге $|w| < R$. Следовательно, функция $H_j(z,w)$ – целая функция переменного w при любом $z \in \mathcal{D}$ (а не только при $z \in \mathcal{D}'$, как это следует из (8)). Докажем теперь, что при любом фиксированном w° функция $H_j(z,w^\circ)$ является голоморфной функцией переменного z в области $\mathcal{D}$. Вначале докажем ее голоморфность в области

$$\mathcal{D}'' = \left\{ z : z \in \mathcal{D},\ a_0(z)\, a_m(z) \neq 0 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}''$ имеет место неравенство

$$\sup_{\substack{z\in\mathcal{K}\\ 1\le \ell\le q,\ j=1,2}} |w_{\ell,j}(z)| < \infty.$$

Следовательно, в представлении (11) функцию $R_j(z,w^\circ)$ можно выбрать так, чтобы в некоторой окрестности ω указанного компакта она была тождественно равна некоторой константе $z_0^{(j)} < \infty$. Тогда

$$H_j(z,w^\circ) = H_j(z,w^\circ; z_0^{(j)}) \quad \forall\, z \in w, \quad j=1,2.$$

Функции $F_j(z,\zeta)$ не обращаются в нуль при $z \in \omega$, $|\zeta| = R_j(z,w^\circ) = z_0^{(j)}$. Поэтому функции $H_j(z,w;z_0^{(j)})$ *), а значит, и функции $H_j(z,w^\circ)$, голоморфны в указанной окрестности компакта $\mathcal{K}$. Вследствие произвольности компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{D}''$, заключаем далее, что функции $H_j(z,w^\circ)$ голоморфны в области $\mathcal{D}''$.

Как следует из определения области $\mathcal{D}''$, множество $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}''$ – аналитическое. Известно,**) что аналитическое множество является множеством устранимых особенностей. Поэтому для завершения доказательства голоморфности функций $H_j(z,w^\circ)$ в области $\mathcal{D}$ достаточно показать, что эти функции непрерывны в области $\mathcal{D}$.

Пусть точка $z^\circ \in \mathcal{D}$. По произвольно заданному $\varepsilon > 0$ выберем число $z_1^{(j)}$ $(j=1,2)$, удовлетворяющее условиям

$$z_1^{(j)} > \max_{1\le \ell\le q} |w_{\ell,j}(z^\circ)|,$$

$$z_1^{(j)} > |w^\circ|$$

---

*) Напомним, что функции $H_j(z,w;R)$ определены равенством (10).

**) См., например, [4].

и
$$m \ln \frac{z_1^{(j)}}{z_1^{(j)} - |w^\circ|} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{I2}$$

При таком выборе числа $z_1^{(j)}$ функция $H_j(z, w^\circ; z_1^{(j)})$ как функция переменного z, непрерывна в точке z°. Следовательно, в некоторой окрестности ω_j точки z° выполняется неравенство

$$|H_j(z, w^\circ; z_1^{(j)}) - H_j(z^\circ, w^\circ; z_1^{(j)})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall z \in \omega_j. \tag{I3}$$

Оценим колебание функции $H_j(z, \omega^\circ)$ в окрестности точки z°. При $z \in \omega_j$, учитывая (I0), (II) и (I2), имеем

$$|H_j(z, w^\circ) - H_j(z^\circ, w^\circ)| = |H_j(z, w^\circ; R_j(z, w^\circ)] - H_j(z^\circ, w^\circ; R_j(z^\circ, w^\circ))| =$$

$$= |H_j(z, w^\circ; R_j(z, w^\circ)) - H_j(z^\circ, w^\circ; z_1^{(j)})| \leqslant |H_j(z, w^\circ; R_j(z, w^\circ)) -$$

$$- H_j(z, w^\circ; z_1^{(j)})| + |H_j(z, w^\circ; z_1^{(j)}) - H_j(z^\circ, w^\circ; z_1^{(j)})| =$$

$$= \Big| - \sum_{|w_{\ell,j}| > z_1^{(j)}} \ln \Big(1 - \frac{w^\circ}{w_{\ell,j}(z)}\Big) \Big| +$$

$$+ |H_j(z, w^\circ; z_1^{(j)}) - H_j(z^\circ, w^\circ; z_1^{(j)})| \leqslant$$

$$\leqslant m \ln \frac{1}{1 - \frac{|w^\circ|}{z_1^{(j)}}} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, функция $H_j(z, w^\circ)$ – непрерывна в области $\mathcal{D}$. Тем самым голоморфность функции $H_j(z, w^\circ)$, $j=1,2$, в области $\mathcal{D}'$ доказана.

Как известно, из голоморфности по каждой переменной в отдельности следует голоморфность по совокупности переменных. Поэтому функции $H_j(z, w)$, $j = 1,2$, голоморфны в области $\mathcal{D} \times C^1_{(w)}$.

Из (5) и (8) следует, что при $z \in \mathcal{D}'$ и $w \in C^1_{(w)}$

$$F_j(z, 0)\Big(1 - \frac{w}{w_{1,j}}\Big) \dots \Big(1 - \frac{w}{w_{q,j}}\Big) = F_j(z, w) e^{-H_j(z,w)}.$$

Таким образом, голоморфные в области $\mathcal{D} \times C^1_{(w)}$ функции

$$P_j^*(z, w) = F_j(z, w) e^{-H_j(z,w)}, \quad j = 1,2 \tag{I4}$$

при всех $z \in \mathcal{D}'$ (а, значит, и при всех $z \in \mathcal{D}$) являются относительно переменного w полиномом степени не выше m. Следовательно, функции $P_j^*(z, w)$ – псевдополиномы вида (2).

Из (4) и (I4) следует, что

$$P(z, w) = P_1^*(z, w)\, P_2^*(z, w)\, e^{H_1(z,w) + H_2(z,w)}.$$

Отсюда, поскольку $P_1^*(z, w)$ и $P_2^*(z, w)$ – псевдополиномы, заключаем, что функция $H_1(z, w) + H_2(z, w)$ не зависит от w, и значит, $H_1(z, w) + H_2(z, w) = \gamma(z)$, где $\gamma(z)$ – некоторая функция, голоморфная в $\mathcal{D}$. Произведение $P_1^*(z, w) e^{\gamma(z)}$ снова есть псевдополином. Поэтому представления (3) и (4) имеют место с функциями

$$P_1(z,w) = P_1^*(z,w)e^{\gamma(z)}$$
$$P_2(z,w) = P_2^*(z,w)$$
$$f_1(z,w) = H_1(z,w) - \gamma(z)$$
$$f_2(z,w) = H_2(z,w).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. Б.А.Фукс, Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных, Физматгиз, М, I962.

2. М.Ф.Зуев, О делителях целых псевдополиномов, Смоленский матем.сб. 3, 20-32,I970.

3. Л.И.Ронкин, Об аналоге канонического произведения Вейерштрасса для целых функций многих комплексных переменных. Труды Московского математического общества I8, I05-I46, I968.

4. М. Эрве, Функции многих комплексных переменных, Мир, М, I965.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

I97I выпуск П

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАССЕЯНИЕМ НА ВЫСОКОСИНГУЛЯРНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

Ф.С.Рофе-Бекетов, Е.Х.Христов

С О Д Е Р Ж А Н И Е

В В Е Д Е Н И Е

В настоящей работе исследован ряд асимптотических и аналитических свойств решений радиального уравнения Шредингера

$$y'' + [k^2 - V(x)]\,y = 0, \quad 0 < x < \infty \tag{0.I}$$

для случая рассеяния на потенциале с высокой сингулярностью отталкивающего характера, то есть на потенциале, который, грубо говоря, стремится к $+\infty$ в начале координат быстрее, чем x^{-2}. Таким образом, точка $x=0$ является существенно особой точкой для уравнения (0.I). Данная работа является математической. Однако заметим, что вопросы рассеяния на сингулярных потенциалах близки с некоторыми аспектами взаимодействия частиц в релятивистской теории поля, как это отмечено, например, в монографиях Р.Ньютона [I,гл.I2,§4], а также В. де Альфаро и Т.Редже [2,гл.I3,§2]. Этим объясняется внимание, которое проявляют к этим вопросам физики.

По вопросам рассеяния на потенциалах без особенностей имеется обширная литература. Кроме [I] и [2], назовем здесь книгу З.С.Аграновича и В.А.Марченко [3], в которой содержатся основополагающие результаты по обратной задаче теории рассеяния, и обзорную статью Л.Д.Фаддеева [4]. Рассеяние в случае комплексного потенциала исследовано В.Э.Лянце [5].

Ряд результатов по вопросам рассеяния на высокосингулярных потенциалах был установлен в работах Лимича [6,7]. Им, в частности, при условиях, близких к нашим, было построено регулярное при $x \to 0$ решение $\varphi(x, k)$ уравнения (0.I), определены для такого уравнения функция Йоста $f(k)$ и функция рассеяния $S(k)$. Более подробные литературные указания по этим вопросам содержатся в [I].

Отметим, однако, что ряд простых и в то же время важных свойств решений уравнения (0.I), известных для случая потенциала без особенностей, или хотя бы аналоги этих свойств, не были установлены для уравнений с высокосингулярным потенциалом. Это связано, в какой-то мере, с большой трудоемкостью соответствующих исследований. Трудности, возникающие в этих вопросах, отмечались рядом авторов и, в частности, в [I, стр.367].

Настоящая работа состоит из четырех глав.

Г Л А В А I посвящена изучению поведения решений уравнения (0.I) при $x \to 0$, когда параметр k фиксирован или ограничен. В ней установлено также, что при фиксированном $x > 0$ регулярное решение $\varphi(x,k)$ является целой функцией от k экспоненциального типа x.

Г Л А В А 2 является наиболее трудоемкой. Она содержит асимптотические формулы и оценки при $k \to +\infty$ для регулярного решения $\varphi(x, k)$ и основного решения задачи рассеяния $f(x, k)$, которое $\sim e^{ikx}$ при $x \to \infty$. Для получения этих оценок и асимптотик равномерно по x в окрестности начала координат или на всей x-оси потребовалось обобщить метод ВКБ-Лангера [8] применительно к рассматриваемому случаю потенциалов сколь угодно большой скорости роста при $x \to 0$. В отличие от случая потенциала без особенностей, здесь необходимо учитывать наличие точки поворота в окрестности $x = 0$ при сколь угодно больших k^2, а главные члены асимптотики нельзя получить из уравнения $y'' + k^2 y = 0$ так как они зависят от потенциала.

Из асимптотики $f(x, k)$ при $x \to 0$, $k \to +\infty$ выводится асимптотика функции Йоста $f(k)$ и функции рассеяния $S(k)$. В отличие от случая потенциала без особенностей, теперь $S(k)$ при $k \to +\infty$ оказывается медленно осциллирующей. В §6 гл.П установлена простая связь асимптотики $S(k)$ при $k \to \infty$ и потенциала при $x \to 0$. Этот результат соприкасается с обратной задачей теории рассеяния, так как дает возможность по асимптотике $S(k)$ легко восстанавливать асимптотику потенциала $(x \to 0)$, в предположении, что потенциал принадлежит к некоторому достаточно широкому классу, характеризующемуся определенной регулярностью поведения при $x \to 0$.

Существенную роль в обратной задаче теории рассеяния и в ряде других вопросов играют операторы преобразования, "привязанные к бесконечности". Они были введены Б.Я.Левиным [9] и затем глубоко изучены в работах З.С.Аграновича и В.А.Марченко [10,3].

Г Л А В А 3 посвящена исследованию ядер операторов преобразования $\mathcal{K}(x,t)$ при $x \to 0$ в случае сингулярного потенциала. Оказывается, что для выражающейся через потенциал заданным образом функции $\gamma(x)$ $(\gamma \to \infty$ при $x \to 0)$ существует

$$\lim_{x\to 0} \mathcal{K}(x,t)/\gamma(x) = \mathcal{K}(t), \quad 0 \le t < \infty, \tag{0.2}$$

причем $\mathcal{K}(t)$ -бесконечно дифференцируемая функция $\not\equiv 0$.

Как показал Н.И.Ахиезер [II,I2], известная теорема Винера-Пэли о представимости функций экспоненциального типа интегралом Фурье от финитных функций допускает обобщение на случай интеграла Фурье-Бесселя по функциям J_ν произвольного индекса $\nu \geq -\frac{1}{2}$ (при полуцелых ν см.[I3,I4]). Функции $\sqrt{x}\, J_\nu(kx)$ являются, как известно, решениями уравнения (0.I) с потенциалом, имеющим при $x \to 0$ особенность вида Cx^{-2}.

Г Л А В А 4 содержит аналог теоремы Винера-Пэли - условия представимости функции $G(k)$ в виде

$$G(k) = \int_0^\sigma g(x)\varphi(x, k)\,dx, \quad (\sigma < \infty), \tag{0.3}$$

где $g(x) \in L^2(0,\sigma)$, $\varphi(x, k)$ - регулярное решение уравнения (0.I) с высокосингулярным потенциалом. Эта теорема дает затем возможность построить операторы преобразования, связывающие между собою регулярные решения двух уравнений вида (0.I) с сингулярными потенциалами $V_1(x)$, $V_2(x)$, имеющими одинаковую главную часть при $x \to 0$

$$\varphi_2(x,k) = \varphi_1(x,k) + \int_0^x \mathcal{K}_{21}(x,t)\,\varphi_1(t,k)\,dt. \tag{0.4}$$

Отметим, что операторы преобразования вида (0.4), хорошо известные, начиная с работ А.Я.Повзнера, Б.М.Левитана, В.М.Марченко для случая непрерывного потенциала, были затем для уравнения с бесселевской особенностью построены в работах В.В.Сташевской [I3,I4] и В.Я.Волка [I5].

Основные результаты настоящей работы анонсированы в заметках [I6,I7].

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую признательность Н.И.Ахиезеру за проявленное к работе внимание.

Глава I.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С ВЫСОКОСИНГУЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

§ I. РАССМАТРИВАЕМЫЙ КЛАСС ПОТЕНЦИАЛОВ

Мы рассматриваем уравнение

$$y'' + [k^2 - V(x)]y = 0, \quad 0 < x < \infty \tag{I.I.I}$$

с вещественным потенциалом $V(x)$, о котором всегда предполагаем, не оговаривая, что при любых $0 < \varepsilon < a < \infty$

$$\int_\varepsilon^a |V(x)|\,dx < \infty. \tag{I.I.2}$$

Считаем, что потенциал $V(x)$ представим в виде

$$V(x) = W(x) + U(x), \tag{I.I.3}$$

где $W(x) \to +\infty$ достаточно быстро при $x \to 0$, а $U(x)$ относительно малое возмущение. Точнее, пусть выполнены условия A, B_δ, C:

A) $W(x) \to +\infty$ монотонно при $x \to 0$ и имеет монотонную, абсолютно непрерывную производную $W'(x)$ в некоторой правой окрестности нуля $0 < x \le h$. Очевидно, что при $x \to 0$, $W'(x) \to -\infty$, $W''(x) \geq 0$.

Не ограничивая общности *), считаем $W(h) = W'(h) = 0$, $W(x) \equiv 0$ при $x > h$ и положим $h = 1$.

B_δ) При некоторых $M > 0$ и δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}$,

$$|W'(x)| \le M W^{\frac{3}{2}-\delta}(x), \quad 0 < x \le \frac{1}{2}. \tag{I.I.4}$$

C) Добавка $U(x)$ измерима и

$$\int_0^{1/2} |U(x)|\,W^{-\frac{1}{2}}(x)\,dx < \infty. \tag{I.I.5}$$

Условия A и B_δ выполняются, например, для функций вида Cx^{-p} при $C > 0$, $p > 2$ (со своим δ для каждого p), $e^{1/x}$, $\exp\{e^{1/x}\}$ и т.д.

Из условий A и B_δ следует, что

$$W(x) \geq \frac{C}{x^{2+\varepsilon}}, \quad 0 < x \le \frac{1}{2}, \tag{I.I.6}$$

где
$$\varepsilon = \frac{4\delta}{1-2\delta}, \qquad C > 0.$$

---

*) Действительно, всегда можно взять такую точку h_1, $0 < h_1 < h$, что $p = -[W'(h_1)/W(h_1)](h-h_1) > 2$ и затем, если нужно, заменить $W(x)$ при $h_1 < x < h$ на $W(h_1)\cdot\left(\frac{h-x}{h-h_1}\right)^p$. (В качестве h можно взять любое положительное число, например, $h = 1$).

В этом легко убедиться, интегрируя от 0 до x неравенство

$$W'(x)\, W^{-\frac{3}{2}+\delta}(x) \leq M.$$

З А М Е Ч А Н И Е. Из условий B_δ и А вытекает сходимость интегралов

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{W'^2(x)}{W^{5/2}(x)}\, dx \leq -M \int\limits_0^{1/2} \frac{W'(x)\, dx}{W^{1+\delta}(x)} = \frac{M}{\delta} W^{-\delta}\left(\tfrac{1}{2}\right) < \infty, \tag{I.I.7}$$

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{W''(x)}{W^{3/2}(x)}\, dx = \frac{W'(1/2)}{W^{3/2}(1/2)} + \frac{3}{2} \int\limits_0^{1/2} \frac{W'^2(x)}{W^{5/2}(x)}\, dx < \infty. \tag{I.I.8}$$

Многие из наших рассмотрений с соответствующими изменениями остаются в силе при замене условия B_δ (I.I.4) условием сходимости интегралов (I.I.7) и (I.I.8).

§ 2. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ $x \to 0$.

Обозначим при $0 < x \leq h_0 < 1$

$$\gamma(x) = 2^{-1/2} W^{-1/4}(x) \exp\left\{ \int\limits_x^1 \sqrt{W(t)}\, dt \right\}, \tag{I.2.I}$$

$$\gamma_0(x) = 2^{-1/2} W^{-1/4}(x) \exp\left\{ -\int\limits_x^1 \sqrt{W(t)}\, dt \right\}. \tag{I.2.2}$$

Число $h_0 > 0$ выберем достаточно малым так, чтобы при $0 < x \leq h_0$ было $\gamma'(x) < 0$. Это всегда можно сделать в силу условия B_δ. После этого продолжим на интервал $h_0 < x < \infty$ функции $\gamma_0(x)$, $\gamma(x)$, $\gamma_0'(x)$, $\gamma'(x)$, не меняя обозначений, константами $\gamma_0(h_0)$, $\gamma(h_0)$, $\gamma_0'(h_0)$, $\gamma'(h_0)$, что не приведет к недоразумениям.

Легко видеть, что

$$\gamma(x) \to +\infty, \quad \gamma_0(x) \to 0, \quad (x \to 0). \tag{I.2.3}$$

Л Е М М А I.2.I. Если $W(x)$ удовлетворяет условиям А и B_δ, (§I), то при некоторых постоянных $C_1, C_1', C_2, C_2' > 0$

$$\gamma(x) \geq C_1' \exp\{C_1 W^\delta(x)\}, \quad 0 < x \leq h_0, \tag{I.2.4}$$

$$\gamma_0(x) \leq C_2' \exp\{-C_2 W^\delta(x)\}, \quad 0 < x \leq h_0. \tag{I.2.5}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О следует из неравенства, которое получаем, используя (I.I.4), при $0 < x < 1/4$:

$$\int\limits_x^{1/2} \sqrt{W(t)}\, dt \geq \frac{-1}{M} \int\limits_x^{1/2} \frac{W'(t)}{W^{1-\delta}(t)}\, dt \geq C W^\delta(x). \tag{I.2.6}$$

Т Е О Р Е М А I.2.I. ж) При условиях А, B_δ, С уравнение (I.I.I) имеет единственное решение $\varphi(x, k)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x,k)}{\gamma_0(x)} = 1. \tag{I.2.7}$$

Сходимость к пределу здесь и в равенстве

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi'(x,k)}{\gamma_0'(x)} = 1. \tag{I.2.8}$$

ж) Решение $\varphi(x, k)$ построено в [6,7] при условиях, близких к нашим.

равномерна по k в каждой конечной области G. При любом $x>0$ $\varphi(x,k)$ и $\varphi'(x,k)$ являются целыми четными функциями от k.

При $\alpha>0$ условия

$$\psi(\alpha,k)=\frac{\varphi'(\alpha,k)}{\varphi^2(\alpha,k)+\varphi'^2(\alpha,k)}, \quad \psi'(\alpha,k)=\frac{-\varphi(\alpha,k)}{\varphi^2(\alpha,k)+\varphi'^2(\alpha,k)} \tag{I.2.9}$$

определяют решение $\psi(x,k)$ уравнения (I.I.I), аналитическое по k при всех вещественных k^2. При этом для любой конечной области G в k - плоскости найдется $\alpha=\alpha(G)>0$ такое, что $\psi(x,k)$ аналитично по $k\in G$ при каждом $x>0$ и такое, что равномерно по $k\in G$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x,k)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\psi'(x,k)}{\gamma'(x)}=1, \tag{I.2.I0}$$

причем вронскиан

$$W\{\psi(x,k),\varphi(x,k)\}=\psi\varphi'-\psi'\varphi\equiv 1. \tag{I.2.II}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Заметим, что функции $\gamma(x)$ и $\gamma_0(x)$ при $0<x\le h_0$ образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$y''-(W(x)+Q(x))y=0, \quad 0<x\le h_0, \tag{I.2.I2}$$

где

$$Q(x)=\frac{5}{16}\left(\frac{W'(x)}{W(x)}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{W''(x)}{W(x)}, \tag{I.2.I3}$$

причем

$$W\{\gamma(x),\gamma_0(x)\}\equiv 1, \tag{I.2.I4}$$

$$\lim_{x\to 0}2\gamma_0'(x)\gamma(x)=-\lim_{x\to 0}2\gamma_0(x)\gamma'(x)=1. \tag{I.2.I5}$$

Запишем уравнение (I.I.I) в виде

$$y''-(W(x)+Q(x))y=(-k^2-Q(x)+U(x))y, \quad 0<x\le h_0,$$

где $Q(x)$ определено (I.2.I3). Отсюда получаем для $\varphi(x,k)$ интегральное уравнение

$$\varphi(x,k)=\gamma_0(x)+\int_0^x \mathcal{K}(x,t;k)\varphi(t,k)dt, \quad 0<x\le h_0, \tag{I.2.I6}$$

где

$$\mathcal{K}(x,t;k)=[\gamma_0(x)\gamma(t)-\gamma_0(t)\gamma(x)][U(t)-k^2-Q(t)]. \tag{I.2.I7}$$

Полагая

$$\Phi(x,k)=\frac{\varphi(x,k)}{\gamma_0(x)}, \tag{I.2.I8}$$

уравнение (I.2.I6) запишем в виде

$$\Phi(x,k)=1+\int_0^x R(x,t;k)\Phi(t,k)\,dt, \tag{I.2.I9}$$

где

$$R(x,t;k)=\mathcal{K}(x,t;k)\frac{\gamma_0(t)}{\gamma_0(x)}. \tag{I.2.20}$$

При $0\le t\le x\le h_0$ в силу (I.I.5), (I.I.7), (I.I.8) имеем

$$|R(x,t;k)|\le\frac{1}{\sqrt{W(t)}}\left\{|U(t)|+|k|^2+|Q(t)|\right\}\in L(0,h_0). \tag{I.2.2I}$$

Поэтому к уравнению (I.2.I9) применима следующая известная лемма *), из которой вытекает существование и единственность решения $\Phi(x,k)$, а, значит, и $\varphi(x,k)$.

Л Е М М А I.2.A. Уравнение

$$f(x) = p(x) + \int_0^x \mathcal{K}(x,t) f(t)\,dt\,, \quad 0 \leq x \leq a$$

при

$$|p(x)| \leq C \quad (0 \leq x \leq a); \quad |\mathcal{K}(x,t)| \leq K(t) \in L(0,a), \ (0 \leq t \leq x \leq a)$$

однозначно разрешимо, и для его решения $f(x)$ справедлива оценка

$$|f(x)| \leq C \cdot exp\left\{\int_0^x K(t)\,dt\right\}, \quad 0 \leq x \leq a. \tag{I.2.22}$$

Отсюда видим, что равномерно по $k \in G$ при $0 < x \leq h_0$ $|\Phi(x,k)| \leq const$. Подставляя это в правую часть (I.2.I9) с учетом (I.2.2I), получаем

$$\Phi(x,k) = 1 + o_x(1)\,, \quad (x \to 0), \tag{I.2.23}$$

равномерно по k в любой ограниченной области G , что дает (I.2.7).

Дифференцируя (I.2.I6) по x и деля на $\gamma_0'(x)$, получаем

$$\frac{\varphi'(x,k)}{\gamma_0'(x)} = 1 + \int_0^x S(x,t;k)\,\Phi(t,k)\,dt, \tag{I.2.24}$$

где

$$S(x,t;k) = \mathcal{K}_x'(x,t;k)\,\frac{\gamma_0(t)}{\gamma_0'(x)}.$$

Для $|S(x,t;k)|$ $(k \in G)$ справедлива оценка (I.2.2I), что и дает (I.2.8).

Аналитичность $\varphi(x,k)$, $\varphi'(x,k)$ по k при $0 < x \leq \frac{1}{2}$ усматривается непосредственно из уравнений (I.2.I9), (I.2.24), а при $x > \frac{1}{2}$ из того, что $\varphi(x,k)$ можно рассматривать как решение (I.I.I) с аналитическими данными Коши $\varphi(\frac{1}{2},k)$, $\varphi'(\frac{1}{2},k)$.

Рассмотрим решение $\psi(x,k)$. Так как (I.2.II) следует сразу из (I.2.9), докажем (I.2.I0). Выберем $\alpha(G) > 0$ настолько малым, что $\varphi(x,k) \neq 0$ при $k \in \overline{G}$, $x \in (0,\alpha]$ и $\varphi^2(\alpha,k) + \varphi'^2(\alpha,k) \neq 0$ $(k \in \overline{G})$. Это возможно в силу равномерной сходимости (I.2.7), (I.2.8).

Тогда при $0 < x \leq \alpha$

$$\psi(x,k) = \tilde{\psi}(x,k) + C\varphi(x,k), \tag{I.2.25}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{\psi}(x,k) = \varphi(x,k)\int_x^\alpha \frac{dt}{\varphi^2(t,k)}, \\ C = \frac{\varphi'(\alpha,k)/\varphi(\alpha,k)}{\varphi^2(\alpha,k) + \varphi'^2(\alpha,k)}. \end{gathered} \tag{I.2.25'}$$

В силу (I.2.I7) из (I.2.25) получаем при $x \to 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(x,k) &= \gamma_0(x)[1 + o_x(1)]\int_x^\alpha \frac{[1 + o_t(1)]}{\gamma_0^2(t)}\,dt = \\ &= \gamma_0(x)\int_x^\alpha \frac{dt}{\gamma_0^2(t)}[1 + o_x(1)] = \gamma(x)[1 + o(1)], \end{aligned} \tag{I.2.26}$$

а дифференцируя (I.2.25$^{\mathrm{I}}$) по x , аналогично находим асимптотику $\tilde{\psi}'(x,k)$ при $x \to 0$, используя (I.2.7) и (I.2.8). Теорема доказана.

Т Е О Р Е М А I.2.2. I) Для любого решения $y(x,k)$ уравнения (I.I.I) существуют равные конечные пределы

$$\lim_{x \to 0}\frac{y(x,k)}{\gamma(x)} = \lim_{x \to 0}\frac{y'(x,k)}{\gamma'(x)} = y(k) = W\{y(x,k), \varphi(x,k)\}, \tag{I.2.27}$$

---

*) См., например, [8, т.I, стр125] или [2I, стр. 54] .

причем $y(k)=0$ тогда и только тогда, когда $y(x,k)=C\varphi(x,k)$, и в этом случае

$$\lim_{x\to 0}\frac{y'(x,k)}{\gamma_0'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{y(x,k)}{\gamma_0(x)}. \tag{I.2.28}$$

2) Если при некотором $x_0>0$ $y(x_0,k)$ и $y'(x_0,k)$ ограничены в некоторой ограниченной области G изменения k, то (I.2.27) справедливо равномерно по $k\in G$, а если $y(x_0,k)$ и $y'(x_0,k)$ аналитические (непрерывные) функции от k в некоторой области, то в той же области аналитичен (непрерывен) и предел $y(k)$.

3) Если существуют $\dot y(x_0,k)$, $\dot y'(x_0,k)$, $(k\in G)$, то существует $\dot y(k)$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dot y(x,k)}{\gamma(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dot y'(x,k)}{\gamma'(x)}=\dot y(k)$$

равномерно по $k\in G$.

Если при некотором $k=k_0$ $y(k_0)=\dot y(k_0)=0$, то существуют еще

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dot y(x,k_0)}{\gamma_0(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\dot y'(x,k_0)}{\gamma_0'(x)}=\frac{d}{dk}W\{\psi,y\}\Big|_{k=k_0}.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Так как $\varphi(x,k)$ и $\psi(x,k)$ - два линейно независимых решения уравнения (I.I.I), то любое решение $y(x,k)$ представимо в виде

$$y(x,k)=A(k)\psi(x,k)+B(k)\varphi(x,k), \tag{I.2.29}$$

где ввиду (I.2.II)

$$A(k)=W\{y(x,k),\varphi(x,k)\}, \tag{I.2.30}$$

$$B(k)=W\{\psi(x,k),y(x,k)\}. \tag{I.2.3I}$$

Отсюда в силу теоремы I.2.I утверждения I) и 2) следуют непосредственно. Для второго отметим только, что в правых частях (I.2.30), (I.2.3I) можно подставить $x=x_0$.

Утверждение 3) получаем из представления (I.2.29) с учетом теоремы I.2.I и следующей леммы.

Л Е М М А I.2.2. Равномерно по k в любой ограниченной области G имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dot\varphi(x,k)}{\gamma_0(x)}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\dot\varphi'(x,k)}{\gamma_0'(x)}=0, \tag{I.2.32}$$

и при $\alpha\in(0,\alpha(G)]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dot\psi(x,k)}{\gamma(x)}=0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\dot\psi'(x,k)}{\gamma'(x)}=0. \tag{I.2.33}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Продифференцируем по k уравнение (I.2.I9)

$$\dot\Phi(x,k)=\int_0^x\dot R(x,t;k)\Phi(t,k)\,dt+\int_0^x R(x,t;k)\dot\Phi(t,k)\,dt. \tag{I.2.34}$$

Из (I.2.20) следует, что

$$\dot R(x,t;k)=-2k\left[\gamma(t)\gamma_0(t)-\frac{\gamma(x)}{\gamma_0(x)}\gamma_0^2(t)\right],$$

и из (I.2.I), (I.2.2) получаем

$$|\dot R(x,t;k)|\leqslant 2\frac{|k|}{\sqrt{W(t)}},\qquad 0\leqslant t\leqslant x\leqslant h_0. \tag{I.2.35}$$

Поэтому из (I.2.34) в силу леммы I.2.A следует $|\Phi(x,k)| \leqslant const$ при $k \in G$, $0 < x \leqslant h_0$. Значит, правая часть (I.2.34) стремится к нулю при $x \to 0$. Первое из равенств (I.2.32) доказано. Аналогично получаем второе, дифференцируя по k (I.2.24). Равенства (I.2.33) получаем непосредственно из (I.2.25) с учетом (I.2.32).

Лемма и теорема доказаны.

СЛЕДСТВИЕ I. Для любого решения $y(x,k)$ уравнения (I.I.I)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{W(x)}} \frac{y'(x,k)}{y(x,k)} = \mp 1,$$

причем знак + имеет место тогда и только тогда, когда $y(x,k) = C\varphi(x,k)$.

§ 3. АСИМПТОТИКА $\varphi(x,k)$ ПРИ $k \to i\infty$ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ОЦЕНКА В k – ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим уравнение (I.I.I) при $k = i\rho$, $\rho > 0$. Обозначим при $0 < x < \infty$

$$\gamma(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\rho^2 + W(x))^{1/4}} \exp\left\{\int_x^1 (\rho^2 + W(t))^{1/2} dt\right\}, \tag{I.3.I}$$

$$\gamma_0(x,\rho) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\rho^2 + W(x))^{1/4}} \exp\left\{-\int_x^1 (\rho^2 + W(t))^{1/2} dt\right\}, \tag{I.3.2}$$

$$\mu(x,\rho) = \rho^2 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{W(t)+\rho^2} + \sqrt{W(t)}}. \tag{I.3.3}$$

Отметим, что

$$\mu(x,\rho) = x\rho\,[1 + o(1)], \quad \rho \to \infty \tag{I.3.4}$$

равномерно по $x \in [\varepsilon, \infty]$ при любом $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА I.3.I. При условиях § I равномерно по $0 \leqslant x \leqslant a < \infty$ справедлива асимптотика при $\rho \to \infty$

$$\varphi(x,i\rho) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{(\rho^2 + W(x))^{1/4}} \exp\left\{\mu(x,\rho) - \int_x^1 \sqrt{W(t)}\,dt\right\}, \tag{I.3.5}$$

причем равномерно по $x \in [\varepsilon, a]$ $(\varepsilon > 0, a < \infty)$ имеем

$$\varphi(x,i\rho) = e^{\rho x[1+o(1)]}, \quad \rho \to \infty. \tag{I.3.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя методу ВКБ [8.п.22.26], запишем (I.I.I) при $k = i\rho$ в виде

$$y'' - (\rho^2 + W(x) + Q(x,\rho))y = (\mathcal{U}(x) - Q(x,\rho))y, \quad 0 < x < \infty, \tag{I.3.7}$$

где

$$Q(x,\rho) = \frac{5}{16} \frac{W'^2(x)}{(\rho^2 + W(x))^2} - \frac{1}{4} \frac{W''(x)}{\rho^2 + W(x)}.$$

$\gamma(x,\rho)$ и $\gamma_0(x,\rho)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (I.3.7) без правой части, причем

$$W\{\gamma(x,\rho), \gamma_0(x,\rho)\} \equiv 1, \quad \lim_{x\to 0} e^{\mu(1,\rho)} \gamma_0(x,\rho) / \gamma_0(x) = 1.$$

Следовательно, функция

$$\Phi(x,\rho) = \frac{\varphi(x,i\rho)}{\gamma_0(x,\rho)} e^{-\mu(1,\rho)} \tag{I.3.8}$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Phi(x,\rho)=1+\int_0^x R(x,t;\rho)\,\Phi(t,\rho)\,dt, \tag{I.3.9}$$

где

$$R(x,t;\rho)=\left[\gamma_0(t,\rho)\gamma(t,\rho)-\frac{\gamma(x,\rho)}{\gamma_0(x,\rho)}\gamma_0^2(t,\rho)\right]\left[U(t)-Q(t,\rho)\right].$$

В силу (I.3.1), (I.3.2) при $0\le t\le x$

$$|R(x,t;\rho)|\le\frac{5}{16}\frac{W'^2(t)}{(\rho^2+W(t))^{5/2}}+\frac{1}{4}\frac{W''(t)}{(\rho^2+W(t))^{3/2}}+ \tag{I.3.10}$$

$$+\frac{|U(t)|}{(\rho^2+W(t))^{1/2}}\ \overset{def}{=\!=}\ F(t,\rho).$$

При $\rho>1$ имеем $F(t,\rho)\le F(t,1)\in L(0,a)$ для любого $a>0$ (см. (I.I.7), (I.I.8)) и, очевидно,

$$\lim_{\rho\to\infty}\int_0^a F(t,\rho)\,dt=0 \qquad (0<a<\infty). \tag{I.3.11}$$

Поэтому в силу леммы I.2.A. из (I.3.9) получаем $\Phi(x,\rho)=1+o(1)$ при $\rho\to\infty$, то есть

$$\varphi(x,i\rho)=\gamma_0(x,\rho)e^{\mu(1,\rho)}[1+o(1)],\quad(\rho\to\infty)$$

равномерно по $x\in[0,a]$, $a<\infty$. В силу (I.3.2), (I.3.3) это эквивалентно (I.3.5). Наконец, (I.3.6) следует из (I.3.5) в силу (I.3.4). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Равномерно по $0\le x\le a\le\infty$, $0<\rho<\infty$

$$|\varphi(x,i\rho)|\le M(a)e^{\rho x}\gamma_0(x). \tag{I.3.13}$$

Это вытекает из (I.3.5), так как

$$0\le\mu(x,\rho)\le\rho(x),\qquad 0\le\rho,x<\infty.$$

ТЕОРЕМА I.3.2. При условиях § I решение $\varphi(x,k)$ при каждом $x>0$ есть целая, четная функция от k экспоненциального типа x и при всех k

$$|\varphi(x,k)|\le C(a)\gamma_0(x)e^{x|k|},\quad 0\le x\le a, \tag{I.3.14}$$

где $C(a)>0$ постоянная, зависящая лишь от длины интервала. Если, в частности, потенциал $V(x)$ таков *), что $|\varphi(x,k)|\le M$ при $-\infty<k<\infty$, $(M=M(x)>0)$, то

$$|\varphi(x,k)|\le C(a)\gamma_0(x)e^{x|\operatorname{Im}k|},\quad 0\le x\le a. \tag{I.3.15}$$

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

ЛЕММА I.3.I. Пусть $\varphi_\varepsilon(x,k)$ – решение (I.I.I), определенное начальными условиями

$$\varphi_\varepsilon(\varepsilon,k)=0,\qquad \varphi'_\varepsilon(\varepsilon,k)=2\gamma'_0(\varepsilon). \tag{I.3.16}$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left|\frac{\varphi_\varepsilon(x,k)}{\gamma_0(x)}-\frac{\varphi(x,k)}{\gamma_0(x)}\right|=0, \tag{I.3.17}$$

*) Например, при условиях A_2), B_δ), C_2) из § I гл. II (см. теорему 2.5.2).

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\frac{\varphi_\varepsilon'(x,k)}{\gamma_0'(x)}-\frac{\varphi'(x,k)}{\gamma_0'(x)}\right|=0, \qquad (I.3.18)$$

причем сходимость равномерна по $k\in G$ и по $x\in[\delta(\varepsilon),a]$, $a<\infty$, где область G ограничена, а $\delta(\varepsilon)>\varepsilon$ выбрано так, что

$$\varepsilon<\delta(\varepsilon)\to 0,\quad \int_\varepsilon^{\delta(\varepsilon)}\sqrt{W(t)}\,dt\to\infty \text{ при } \varepsilon\to 0. \qquad (I.3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (I.2.29) - (I.2.31)

$$\varphi_\varepsilon(x,k)=A_\varepsilon(k)\psi(x,k)+B_\varepsilon(k)\varphi(x,k), \qquad (I.3.20)$$

где

$$A_\varepsilon(k)=W\{\varphi_\varepsilon,\varphi\}=-2\gamma_0'(\varepsilon)\varphi(\varepsilon,k),$$

$$B_\varepsilon(k)=W\{\psi,\varphi_\varepsilon\}=2\psi(\varepsilon,k)\gamma_0'(\varepsilon).$$

Поэтому

$$\frac{\varphi_\varepsilon(x,k)}{\gamma_0(x)}-\frac{\varphi(x,k)}{\gamma_0(x)}=A_\varepsilon(k)\frac{\gamma(x)}{\gamma_0(x)}\frac{\psi(x,k)}{\gamma(x)}+[B_\varepsilon(k)-1]\frac{\varphi(x,k)}{\gamma_0(x)}. \qquad (I.3.21)$$

Из выбора $\delta(\varepsilon)$ (I.3.19) и из теоремы I.2.I следует, что равномерно по $\delta(\varepsilon)\leqslant x\leqslant a<\infty$ и $k\in G$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}A_\varepsilon(k)\gamma(x)/\gamma_0(x)=0,$$

а учитывая и (I.2.I5), получаем равномерно по $k\in G$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}B_\varepsilon(k)=1.$$

В силу последних двух равенств, (I.3.I7) вытекает непосредственно из (I.3.2I), так как $|\psi(x,k)/\gamma(x)|$ и $|\varphi(x,k)/\gamma_0(x)|$ равномерно ограничены по $0\leqslant x\leqslant a$ и $k\in G$. Аналогично выводится и (I.3.I8). Лемма доказана.

ЛЕММА I.3.2 ж) Пусть $y(x)$ и $z(x)$ соответственно решения уравнений

$$y''-p(x)y=0,\qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

$$z''-q(x)y=0,\qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

с начальными условиями в точке $x=a$, удовлетворяющими неравенствам

$$y(a)\geqslant|z(a)|,\qquad y'(a)\geqslant|z'(a)|.$$

Если $p(x)$ и $q(x)$ суммируемы на интервале (a,b) и

$$p(x)\geqslant|q(x)|,\qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

то

$$y(x)\geqslant|z(x)|,\qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы вытекает из почленного сравнения итерационных рядов, отвечающих интегральным уравнениям для $y(x)$ и $z(x)$, например,

$$y(x)=y(a)+(x-a)y'(a)+\int_a^x(x-t)p(t)y(t)\,dt.$$

ж) Это частный случай неравенств С.А.Чаплыгина.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы I.3.2. В теореме I.2.I было показано, что $\varphi(x,k)$ при каждом $x>0$ есть целая, четная функция от k. Докажем оценку (I.3.I4). Обозначим через $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,i\rho)$ решение уравнения (I.I.I) с потенциалом

$$\tilde{V}(x) = W(x) + |U(x)|$$

при $k=i\rho$ и начальных данных (I.3.I6).

Так как при $|k|\leqslant\rho$

$$|V(x)-k^2|\leqslant W(x)+|U(x)|+\rho^2=\tilde{V}(x)+\rho^2, \quad 0<x<\infty,$$

то к $\varphi_\varepsilon(x,k)$ и $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,i\rho)$ на интервале $[\varepsilon,a], a<\infty$ применима лемма I.3.2 и, следовательно,

$$\frac{|\varphi_\varepsilon(x,k)|}{\gamma_0(x)}\leqslant\frac{\tilde{\varphi}_\varepsilon(x,i\rho)}{\gamma_0(x)}, \quad (\varepsilon\leqslant x\leqslant a, \ |k|\leqslant\rho).$$

Из леммы I.3.I следует, что это неравенство сохраняется и в пределе при $\varepsilon=0$, что вместе с оценкой (I.3.I3) доказывает справедливость (I.3.I4). При условиях теоремы оценка (I.3.I5) следует из (I.3.I4) в силу неравенства Бернштейна [II]. Теорема доказана.

§ 4. ФУНКЦИЯ ЙОСТА И СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ

Подчиним потенциал $V(x)$ в уравнении (I.I.I) дополнительному условию *)

$$L). \qquad \int_\varepsilon^\infty x|V(x)|\,dx<\infty, \quad \varepsilon>0. \tag{I.4.I}$$

Основное решение $f(x,k)$ уравнения рассеяния (I.I.I) определяется условием

$$\lim_{x\to\infty} f(x,k)e^{-ikx}=1, \quad (\mathrm{Jm}\,k\geqslant 0). \tag{I.4.2}$$

Функция Йоста $f(k)$ и функция рассеяния $S(k)$ для уравнения с высокосингулярным потенциалом определяются следующими формулами (см. [6]):

$$f(k)=W\{f(x,k),\varphi(x,k)\}, \quad (\mathrm{Jm}\,k\geqslant 0), \tag{I.4.3}$$

$$S(k)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,-k)}{f(x,k)}=\frac{f(-k)}{f(k)}. \tag{I.4.4}$$

В силу (I.2.27) справедливо также и другое представление функции Йоста

$$f(k) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,k)}{\gamma(x)}. \tag{I.4.5}$$

Приведем здесь некоторые утверждения о свойствах функции Йоста и о спектральных свойствах задачи рассеяния при условиях § I и L (I.4.I), нужные для дальнейшего. Эти факты, как и их доказательства (с использованием результатов § 2), вполне аналогичны тем, которые известны для случая непрерывного при $x\to 0$ потенциала [I-4]. Поэтому доказательства здесь в большинстве случаев опущены.

При вещественных $k\neq 0$ $f(x,k)$ и $\overline{f(x,k)}=f(x,-k)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (I.I.I), причем

$$\varphi(x,k)=\frac{1}{2ik}\left\{f(-k)f(x,k)-f(k)f(x,-k)\right\}, \quad (\mathrm{Jm}\,k=0). \tag{I.4.6}$$

Отсюда, в частности, видно, что $f(k)\neq 0$ при вещественных $k\neq 0$.

Т Е О Р Е М А I.4.I. Функция Йоста $f(k)$ аналитична в верхней полуплоскости

*) В ряде случаев вместо (I.4.I) достаточно требовать лишь, чтобы было $V(x)\in L(\varepsilon,\infty)$, $\varepsilon>0$. Определения $f(x,k)$, $f(k)$ и $S(k)$ при этом остаются в силе, если $k\neq 0$.

$\operatorname{Im} k > 0$ и непрерывна вплоть до вещественной оси. $\dot f(k)$ непрерывна вплоть до вещественной оси, за исключением, может быть, точки $k = 0$, причем $k \dot f(k)$ непрерывна вплоть до нуля.

При $\operatorname{Im} k \geqslant 0$ $f(k)$ может обращаться в нуль только на мнимой оси. Если при некотором $k_0 = i\tau_0$ $(\tau_0 > 0)$ $f(k_0) = 0$, то $\dot f(k_0) \neq 0$, $\varphi(x, k_0) = B(k_0) f(x, k_0)$ и

$$\int_0^\infty \varphi^2(x, k_0)\, dx = \frac{-\dot f(k_0)}{2k_0 B(k_0)}, \tag{I.4.7}$$

где

$$B(k_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, k_0)}{\gamma_0(x)}. \tag{I.4.8}$$

Заметим, что при $k = 0$ решение $\varphi(x, 0)$ имеет не более конечного числа корней на полуоси $0 < x < \infty$, так как при $x \to 0$ $\varphi(x, 0) \sim \gamma_0(x)$, а при $x \to \infty$ в силу условия L $\varphi(x, 0) \sim Ax + B$, где $A^2 + B^2 > 0$.

Т Е О Р Е М А I.4.2. Пусть регулярное решение $\varphi(x, 0)$ имеет точно n нулей на интервале $(0, \infty)$. Тогда существуют ровно n точек $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < 0$ таких, что

$$\varphi(x, \sqrt{\lambda_j}) \in L^2(0, \infty) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Решение $\varphi(x, \sqrt{\lambda_j})$ имеет точно $j - 1$ нуль на интервале $(0, \infty)$.

Доказательство может быть получено известным методом, основанным на теореме осцилляции Штурма (см. [I8, стр.276-277] или [I9]).

Л Е М М А I.4.I. Пусть $V(x)$ удовлетворяет условиям § I, тогда при любых $\varepsilon > 0$, $0 < \sigma < \infty$ найдется $\beta \in [0, \varepsilon]$ такое, что для потенциала

$$V_\sigma = V_{\sigma\beta}(x) = \begin{cases} V(x), & 0 < x \leqslant \sigma, \\ 1, & \sigma < x < \sigma + \beta, \\ 0, & \sigma + \beta \leqslant x < \infty, \end{cases} \tag{I.4.9}$$

отсутствует виртуальный уровень, то есть $f_\sigma(0) \neq 0$, где $f_\sigma(k)$ -отвечающая $V_\sigma(x)$ функция Йоста.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Равенство $f_\sigma(0) = 0$ означает, что $f_\sigma(x, 0) = C\varphi(x, 0)$, $(0 \leqslant x \leqslant \sigma)$ и, следовательно,

$$\frac{\varphi'(\sigma, 0)}{\varphi(\sigma, 0)} = -\operatorname{th}\beta, \tag{I.4.I0}$$

так как $f_\sigma(x, 0) = \operatorname{ch}(x - \beta - \sigma)$ при $\sigma \leqslant x \leqslant \sigma + \beta$. Ясно, что (I.4.I0) не имеет места ни при каком β, кроме, быть может, одного. Лемма доказана.

В следующей теореме поведение потенциала при $x \to \infty$ не ограничивается.

Т Е О Р Е М А I.4.3. При условиях § I для краевой задачи

$$-y'' + V(x) = \lambda y, \quad 0 < x < \infty, \tag{I.4.II}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x, \sqrt{\lambda})}{\gamma_0(x)} = 1 \tag{I.4.I2}$$

существует (возможно, не единственная) неубывающая спектральная функция $\rho(\lambda)$, порождающая формулы обращения

$$F(\lambda) = \underset{N \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^N f(x) \varphi(x, \sqrt{\lambda})\, dx, \tag{I.4.I3}$$

$$f(x)=\underset{M,N\to\infty}{l.i.m.}\int\limits_{-M}^{N}F(\lambda)\varphi(x,\sqrt{\lambda})\,d\rho(\lambda), \tag{I.4.14}$$

где $f(x)\in L^2(0,\infty)$, интегралы сходятся в $L^2_\rho(-\infty,\infty)$ и $L^2(0,\infty)$ соответственно. При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int\limits_0^\infty|f(x)|^2dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2d\rho(\lambda). \tag{I.4.15}$$

Среди спектральных функций задачи (I.4.11), (I.4.12) всегда имеются ортогональные спектральные функции.

Доказательство теоремы может быть получено известными методами [20,21].

Т Е О Р Е М А I.4.4. Пусть $V(x)$ удовлетворяет условиям § I и условию L (I.4.1). Тогда спектр краевой задачи (I.4.11), (I.4.12) непрерывен при $0\leqslant\lambda<\infty$, а при $\lambda<0$ исчерпывается конечным числом простых собственных чисел

$$\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<0,\quad (n\geqslant 0),$$

совпадающих с множеством $\{-\tau_j^2\}_{j=1}^n$ квадратов корней $i\tau_j$ функции Йоста $f(k)$ при $\operatorname{Im}k>0$.

Спектральная функция $\rho(\lambda)$ в этом случае единственна и ортогональна, то есть отображает взаимно-однозначно $L^2(0,\infty)$ на всё $L^2_\rho(-\infty,\infty)$. При этом

$$\frac{d}{dk}\rho(k^2)=\frac{2}{\pi}\frac{k^2}{|f(k)|^2},\qquad (0<k<\infty), \tag{I.4.16}$$

и равенство Парсеваля (I.4.15) принимает следующий вид:

$$\int\limits_0^\infty|f(x)|^2dx=\sum_{j=1}^{n}M_j|F(\lambda_j)|^2+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty|F(k^2)|^2\frac{k^2dk}{|f(k)|^2}, \tag{I.4.17}$$

где $F(\lambda)$ определено (I.4.13), а

$$M_j=\left\{\int\limits_0^\infty\varphi^2(x,\sqrt{\lambda_j})\,dx\right\}^{-1} \tag{I.4.18}$$

и может быть найдено по формулам (I.4.7), (I.4.8).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О этой теоремы при близких условиях получено в основном в [7] методом контурного интегрирования. Другое доказательство может быть получено методом предельного перехода от конечного интервала [21] или предельным переходом при $\varepsilon\to 0$ от краевой задачи без особенностей на интервале $[\varepsilon,\infty)$, спектральные свойства которой хорошо известны. Приведем их в удобной для предельного перехода форме в следующей лемме.

Л Е М М А I.4.2. При условии (I.4.1) спектр краевой задачи

$$y''+(\lambda-V(x))y=0,\qquad 0<\varepsilon\leqslant x<\infty, \tag{I.4.19}$$

$$\varphi_\varepsilon(\varepsilon,\sqrt{\lambda})=0,\qquad \varphi'_\varepsilon(\varepsilon,\sqrt{\lambda})=2\gamma'_0(\varepsilon) \tag{I.4.20}$$

непрерывен при $0\leqslant\lambda<\infty$, а при $\lambda<0$ состоит не более, чем из конечного числа собственных значений $\lambda_j^{(\varepsilon)}$, $j=1,2,\ldots,n_\varepsilon<\infty$, для которых $f(\varepsilon,k_j^{(\varepsilon)})=0$, где $k_j^{(\varepsilon)}=i\sqrt{|\lambda_j^{(\varepsilon)}|}$. Спектральная функция $\rho_\varepsilon(\lambda)$ единственна и ортогональна, а порождаемое ею равенство Парсеваля имеет следующий вид:

$$\int\limits_\varepsilon^\infty|f(x)|^2dx=\sum_{j=1}^{n_\varepsilon}M_j^{(\varepsilon)}|F_\varepsilon(\lambda_j^{(\varepsilon)})|^2+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty|F_\varepsilon(k^2)|^2\frac{k^2dk}{|2\gamma'_0(\varepsilon)f(\varepsilon,k)|^2}, \tag{I.4.21}$$

где $f(x) \in L^2(\epsilon, \infty)$,

$$F_\varepsilon(\lambda) = \underset{N \to \infty}{l.i.m.} \int_\varepsilon^N f(x) \varphi_\varepsilon(x, \sqrt{\lambda})\, dx, \tag{I.4.22}$$

$$M_j^{(\varepsilon)} = \left\{ \int_\varepsilon^\infty \varphi_\varepsilon^2(x, k_j^{(\varepsilon)})\, dx \right\}^{-1} = \frac{-k_j^{(\varepsilon)} f'(\varepsilon, k_j^{(\varepsilon)})}{2\gamma_0'^{\,2}(\varepsilon) \dot{f}(\varepsilon, k_j^{(\varepsilon)})} . \tag{I.4.23}$$

Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в лемме I.4.2 дает теорему I.4.4, если учесть, что сходимость (I.4.5) равномерна по k в каждой конечной части полуплоскости $\Im m\, k \geqslant 0$, а также теоремы I.4.I, I.4.2 и следующую лемму.

Л Е М М А I.4.3. При условиях теоремы I.4.4. для задач (I.4.II), (I.4.I2) и (I.4.I9), (I.4.20) при всех достаточно малых $\epsilon > 0$ имеем $n_\varepsilon = n$, причем

$$\lambda_j^{(\varepsilon)} \to \lambda_j, \quad (\varepsilon \to 0), \quad j = 1, \dots, n; \tag{I.4.24}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \varphi_\varepsilon^2(x, k_j^{(\varepsilon)})\, dx = \int_0^\infty \varphi^2(x, k_j)\, dx, \tag{I.4.25}$$

то есть $M_j^{(\varepsilon)} \longrightarrow M_j$ при $\varepsilon \to 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Равенство $n_\varepsilon = n$ при малых ε следует из теоремы I.4.2 и аналогичной теоремы для задачи (I.4.I9), (I.4.20), если учесть, что число корней $\varphi(x, 0)$ $(0 < x < \infty)$ и $\varphi_\varepsilon(x, 0)$ $(\varepsilon < x < \infty)$ при малых ε одно и то же в силу их перемежаемости и равномерной сходимости $\varphi_\varepsilon(x, 0) \to \varphi(x, 0)$ при $\varepsilon \leqslant x \leqslant a$, $\varepsilon \to 0$, для любого $a < \infty$ (см. лемму I.3.I).

(I.4.24) следует теперь из равномерной сходимости $f(\varepsilon, k)/\gamma(\varepsilon) \to f(k)$ в любой конечной части полуплоскости $\Im m\, k \geqslant 0$. (См. теорему I.2.2).

Наконец, (I.4.25) вытекает непосредственно из (I.4.7), (I.4.8), (I.4.23), так как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f'(\varepsilon, k_j^{(\varepsilon)})}{2\gamma_0'(\varepsilon)} = B(k_j) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, k_j)}{\gamma_0(x)} .$$

Лемма доказана.

Г л а в а II

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ $\varphi(x, k)$, $f(x, k)$, ФУНКЦИИ ЙОСТА И S-ФУНКЦИИ ПРИ $k \to +\infty$.

§ I. ОГРАНИЧЕНИЯ НА ПОТЕНЦИАЛ. ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ К $\varphi(x, k)$ и $f(x, k)$.

Теперь подчиним потенциал $V(x) = W(x) + U(x)$ более жестким условиям, чем до сих пор, а именно:

A_2) $W(x)$ удовлетворяет условию A (§I) и, кроме того, в некотором интервале $0 < x \leqslant h_0$ $W(x)$ трижды непрерывно дифференцируема, $W'(x)$ и $W''(x)$ монотонны и при некоторых $\beta > 1$, $\beta_1 > 1$

$$|W''(x)/W'(x)| \leqslant \beta\, |W'(x)/W(x)|, \quad 0 \leqslant x \leqslant h_0, \tag{2.I.I}$$

$$|W'''(x)/W''(x)| \leqslant \beta_1\, |W'(x)/W(x)|, \quad 0 \leqslant x \leqslant h_0. \tag{2.I.2}$$

B_σ) - прежнее (I.I.4)

C_2) Добавка $U(x)$ представима в виде

$$U(x) = p(x) + r(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \tfrac{1}{2}, \tag{2.I.3}$$

где

$$\int_0^{1/2} |p(x)|\, |W'(x)|^{-1/3}\, dx < \infty \tag{2.I.4}$$

и при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sup_{0 \leq x \leq \frac{1}{2}} \frac{|z(x)| x^{1-\varepsilon}}{\sqrt{W(x)}} < \infty. \tag{2.I.5}$$

Заметим, что если выполнено C_2, то справедливо и C (I.I.5) в силу (I.I.4).

При рассмотрении решения $f(x, k)$ будем подчинять потенциал условию L (I.4.I) или более слабому условию $V(x) \in L(\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon > 0$.

В настоящей главе будут изучены асимптотические свойства и получен ряд оценок для решений уравнения (I.I.I) при вещественных $k \to +\infty$. В этом исследовании мы воспользуемся методом, близким к методу Лангера, изложенному в [8, п.22.27] в связи с изучением асимптотики решений уравнения вида (I.I.I) с потенциалом степенного роста при $x \to \infty$. Наш случай, однако, требует более сложных рассмотрений.

В качестве первоначального приближения к изучаемым функциям мы используем ВКБ-приближение для решений уравнения

$$y'' + [k^2 - W(x)]\, y = 0 \tag{2.I.6}$$

с точкой поворота $X = X(k)$, определяемой условием

$$W(X(k)) = k^2. \tag{2.I.7}$$

Это приближение дается формулой (см., например, [22, стр. 94-95])

$$Y(x,k) = \sqrt{\frac{\zeta(x,k)}{q(x,k)}} \left\{ A J_{1/3}(\zeta(x,k)) + B J_{-1/3}(\zeta(x,k)) \right\}. \tag{2.I.8}$$

Здесь A и B – произвольные константы, $J_{\pm\frac{1}{3}}(\zeta)$ – функции Бесселя порядка $\pm\frac{1}{3}$,

$$q(x,k) = \{k^2 - W(x)\}^{1/2}, \quad \arg q = \begin{cases} 0, & x \geq X(k), \\ \pi/2, & x < X(k), \end{cases} \tag{2.I.9}$$

$$\zeta(x,k) = \int_{X(k)}^{x} (k^2 - W(t))^{1/2} dt, \quad \arg \zeta = \begin{cases} 0, & x \geq X(k), \\ 3\pi/2, & x < X(k), \end{cases} \tag{2.I.10}$$

причем указанный выбор значений $\arg q$ и $\arg \zeta$ обеспечивает непрерывность $Y(x,k)$ и $Y'(x,k)$ при переходе через точку поворота.

Как известно, $Y(x,k)$ при вещественных $k \neq 0$ является общим решением уравнения

$$Y'' + [q^2(x,k) - R(x,k)]\, Y = 0, \qquad 0 < x < \infty, \tag{2.I.11}$$

где

$$R(x,k) = -\frac{5}{36} \frac{q^2(x,k)}{\zeta^2(x,k)} + \frac{1}{4} \frac{W''(x)}{q^2(x,k)} + \frac{5}{16} \frac{W'^2(x)}{q^4(x,k)}. \tag{2.I.12}$$

Особый интерес для нас представляют два специальным образом выбранных частных решения (2.I.12), которые обозначим $h^{(1)}_{1/3}(x,k)$, $z_{1/3}(x,k)$:

$$h^{(1)}_{1/3}(x,k) = \sqrt{\frac{\zeta(x,k)}{q(x,k)}}\, H^{(1)}_{1/3}(\zeta(x,k)), \tag{2.I.13}$$

$$z_{1/3}(x,k) = \sqrt{\frac{\zeta(x,k)}{q(x,k)}} \left\{ J_{1/3}(\zeta(x,k)) + J_{-1/3}(\zeta(x,k)) \right\}. \tag{2.I.14}$$

(Здесь $H^{(1)}_{1/3}(\zeta)$ – функция Ханкеля). Первое из этих решений имеет при $x \to \infty$ асимптотику вида $C(k)e^{ikx}$, а второе регулярно при $x \to 0$.

ЛЕММА 2.I.I. При любом $k > 0$ справедливы асимптотики

$$h^{(1)}_{1/3}(x,k) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k}}\, e^{i(\alpha(k) - \frac{5\pi}{12})} e^{ikx}, \qquad (x \to \infty), \tag{2.I.15}$$

$$h^{(1)}_{1/3}(x,k)\sim\sqrt{\frac{2k}{\pi}}\,\omega^{-1}(k)\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}\gamma(x),\qquad (x\to 0),\tag{2.I.16}$$

$$z_{1/3}(x,k)\sim\sqrt{\frac{6}{\pi k}}\,\omega(k)\,\gamma_0(x),\qquad (x\to 0),\tag{2.I.17}$$

где

$$\alpha(k)=-k+\int_{X(k)}^{1}\left\{k^2-W(t)\right\}^{1/2}dt,\tag{2.I.18}$$

$$\omega(k)=\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2}\exp\left\{\int_{X(k)}^{1}\sqrt{W(t)}\,dt+k^2\int_0^{X(k)}\frac{dt}{\sqrt{W(t)-k^2}+\sqrt{W(t)}}\right\}\tag{2.I.19}$$

и при некоторых $C,\ C_1>0$ справедлива оценка

$$\omega^{-1}(k)\leqslant C_1e^{-C|k|^{2\delta}},\quad 1\leqslant k<\infty.\tag{2.I.20}$$

($\omega(k)$ непрерывна и $\omega(0)=0$)

Значение вронскиана $h^{(1)}_{1/3}$ и $z_{1/3}$ равно

$$W\left\{h^{(1)}_{1/3}(x,k),\ z_{1/3}(x,k)\right\}=\frac{2\sqrt3}{\pi}\,e^{-\frac{2\pi i}{3}}.\tag{2.I.21}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О следует из известной асимптотики [23] цилиндрических функций для больших $|z|$ при $|\arg z|\leqslant\pi-\varepsilon,\ \varepsilon>0$

$$H^{(1)}_\nu(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}e^{i(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})}\left[1+O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right],\tag{2.I.22}$$

$$H^{(2)}_\nu(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}e^{-i(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})}\left[1+O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right],\tag{2.I.23}$$

$$J_\nu(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos\left(z-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right].\tag{2.I.24}$$

При $x<X(k)$ имеем $\arg\zeta=\frac{3\pi}{2}$ и непосредственно использовать эти асимптотики нельзя, однако, можно предварительно воспользоваться вытекающими из соотношения

$$J_\nu(ze^{2\pi i})=e^{2\pi\nu i}J_\nu(z),\quad (|\arg z|<\pi)$$

тождествами

$$H^{(1)}_{1/3}(\zeta)=\frac{2}{\sqrt3}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}\left\{J_{1/3}(\zeta e^{-2\pi i})+J_{-1/3}(\zeta e^{-2\pi i})\right\},\quad \pi<\arg\zeta<3\pi;\tag{2.I.25}$$

$$J_{1/3}(\zeta)+J_{-1/3}(\zeta)=\frac{\sqrt3}{2}\,e^{i\frac{5\pi}{6}}H^{(2)}_{1/3}(\zeta e^{-2\pi i}).\tag{2.I.26}$$

Асимптотика (2.I.15) вытекает непосредственно из (2.I.22) при $\nu=\frac13$; (2.I.16) следует из (2.I.25) и (2.I.24) при $\nu=\frac13$ и $\nu=-\frac13$; (2.I.17) - из (2.I.26) и (2.I.23). Вронскиан (2.I.21) можно найти, например, из асимптотик (2.I.16), (2.I.17), которые допускают дифференцирование. Наконец, оценка (2.I.20) следует из (2.I.19),(I.2.6) и (2.I.7). Лемма доказана.

§ 2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $W(x)$.ОБЛАСТИ D_α И D_η .

Всюду ниже предполагаются выполненными условия A_2 и B_σ, а формулируемые свойства $W(x)$ - относящимися к интервалу $0<x\leqslant h_0$, чего не оговариваем каждый раз.

Л Е М М А 2.2.I. Для любых x_1, $x_2 \in (0, h_0)$ справедливы неравенства при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$

$$1 \leqslant W'(x)/W'(x_2) \leqslant \left(W(x_1)/W(x_2)\right)^{\beta}, \tag{2.2.I}$$

$$1 \leqslant W''(x)/W''(x_2) \leqslant \left(W(x_1)/W(x_2)\right)^{\beta_1}. \tag{2.2.2}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из (2.I.I), учитывая монотонность $W(x)$ и $W'(x)$, получаем при $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$

$$0 \leqslant \ln \frac{W'(x)}{W'(x_2)} = -\int_x^{x_2} \frac{W''(t)}{W'(t)}\,dt \leqslant -\beta \int_x^{x_2} \frac{W'(t)}{W(t)}\,dt \leqslant \beta \ln \frac{W(x_1)}{W(x_2)}.$$

Точно так же, из (2.I.2) получаем второе неравенство.

Л Е М М А 2.2.2. Пусть $\eta > 0$,

$$W(x_1)/W(x_2) = 1 + \eta, \quad 0 < x_1 < x_2. \tag{2.2.3}$$

Тогда справедливы оценки

$$\frac{\eta}{(1+\eta)^{\beta}} \frac{W(x_2)}{|W'(x_2)|} \leqslant x_2 - x_1 \leqslant \eta \frac{W(x_2)}{|W'(x_2)|}, \tag{2.2.4}$$

$$\frac{\eta}{1+\eta} \frac{W(x_1)}{|W'(x_1)|} \leqslant x_2 - x_1 \leqslant \frac{\eta}{(1+\eta)^{1-\beta}} \frac{W(x_1)}{|W'(x_1)|}. \tag{2.2.5}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из (2.2.3) получаем

$$W(x_1) - W(x_2) = \eta W(x_2),$$

т.е.

$$W'(\xi)(x_1 - x_2) = \eta W(x_2), \quad \xi \in (x_1, x_2).$$

В силу монотонности $W'(x)$, отсюда следует

$$\eta \frac{W(x_2)}{|W'(x_1)|} \leqslant x_2 - x_1 \leqslant \eta \frac{W(x_2)}{|W'(x_2)|}. \tag{2.2.6}$$

Но из (2.2.I), (2.2.3) имеем

$$|W'(x_1)| \leqslant (1+\eta)^{\beta} |W'(x_2)|. \tag{2.2.7}$$

Подставляя это в левую часть (2.2.6), получаем (2.2.4). (2.2.5) доказывается аналогично.

Л Е М М А 2.2.3. Справедливо неравенство

$$|W'(x)| \geqslant C \frac{W(x)}{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant h_0 < 1, \tag{2.2.8}$$

где $C = C(\beta) > 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из левой части неравенства (2.2.4) при $\eta = 1$ получаем, если учесть, что $x_2 - x_1 < x_2$:

$$|W'(x)| \geqslant 2^{-\beta} \frac{W(x)}{x}, \quad 0 \leqslant x \leqslant h_0.$$

Лемма доказана.

Зафиксируем $\eta > 0$ и $\alpha > 0$. Положим

$$W_{\eta}^{-}(x) = \frac{W(x)}{1+\eta}, \quad 0 < x < 1, \tag{2.2.9}$$

$$W^+_\eta(x) = (1+\eta)W(x), \quad 0 < x < 1. \tag{2.2.10}$$

Определим $x^-_\eta = x^-_\eta(x)$ $(< x)$ и $x^+_\eta = x^+_\eta(x)$ $(> x)$ соответственно из уравнений

$$W^-_\eta(x^-_\eta) = W(x), \quad W^+_\eta(x^+_\eta) = W(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2.2.11}$$

которые в силу строгой монотонности $W(x)$ однозначно разрешимы.

Пусть

$$x_{+\alpha} \equiv x_{+\alpha}(x) = x + \alpha \frac{1}{|W'(x)|^{1/3}}, \quad 0 < x < 1. \tag{2.2.12}$$

Так как $|W'(x)| > 0$ при $0 < x < 1$, $|W'(x)| \to \infty$ строго монотонно при $x \to 0$, то $x_{+\alpha}(x) > x$, $(0 < x < 1)$ и $x_{+\alpha}(x) \to 0$ строго монотонно при $x \to 0$. Следовательно, уравнение

$$x = x_{-\alpha} + \alpha \frac{1}{|W'(x_{-\alpha})|^{1/3}}, \quad 0 < x < 1 \tag{2.2.13}$$

однозначно определяет $x_{-\alpha} = x_{-\alpha}(x)$, где $x_{-\alpha}(x) < x$ и $x_{-\alpha}(x) \to 0$ при $x \to 0$ (строго монотонно).

По $x_{+\alpha}(x)$ и $x_{-\alpha}(x)$ определим

$$W_{-\alpha}(x) = W(x_{+\alpha}(x)), \quad 0 < x < 1, \tag{2.2.14}$$

$$W_{+\alpha}(x) = W(x_{-\alpha}(x)), \quad 0 < x < 1. \tag{2.2.15}$$

Отметим, что

$$W_{-\alpha}(x_{-\alpha}(x)) = W_{+\alpha}(x_{+\alpha}(x)) = W(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2.2.16}$$

так как

$$x_{+\alpha}(x_{-\alpha}(x)) = x_{-\alpha}(x_{+\alpha}(x)) = x, \quad 0 < x < 1.$$

Л Е М М А 2.2.4. Пусть $h_0 \in (0,1)$ выбрано так, чтобы

$$\alpha(1+\eta)\eta^{-1} M^{2/3} W^{-2\delta/3}(h_0) < 1. \tag{2.2.17}$$

(β, M и δ те же, что и в (2.I.I) и (I.I.4)). Тогда

$$x^-_\eta(x) < x_{-\alpha}(x) < x < x_{+\alpha}(x) < x^+_\eta(x), \quad 0 < x \leqslant h_0; \tag{2.2.18}$$

т.е. $W^-_\eta(x) < W_{-\alpha}(x) < W(x) < W_{+\alpha}(x) < W^+_\eta(x)$, $0 < x \leqslant h_0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из (2.2.12) и (2.2.13) с учетом (2.2.4),(2.2.5) и условия B_δ, получаем при $0 < x \leqslant h_0$

$$x_{+\alpha} - x \leqslant \frac{\alpha(1+\eta)}{\eta} \frac{|W'(x)|^{2/3}}{W(x)} (x^+_\eta - x) \leqslant \frac{\alpha(1+\eta)}{\eta} M^{2/3} W^{-2\delta/3}(x)(x^+_\eta - x),$$

$$x - x_{-\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{|W'(x)|^{1/3}} \leqslant \frac{\alpha}{\eta} M^{2/3} W^{-2\delta/3}(x)(x - x^-_\eta).$$

Лемма доказана.

Л Е М М А 2.2.5. При условии (2.2.17), для $x^-_\eta(x)$, $x^+_\eta(x)$, $x_{+\alpha}(x)$ и $x_{-\alpha}(x)$ справедливы соотношения

$$\frac{\eta}{(1+\eta)^\beta} \frac{W(x)}{|W'(x)|} \leqslant x - x^-_\eta \leqslant \eta \frac{W(x)}{|W'(x)|}, \quad 0 \leqslant x \leqslant h_0, \tag{2.2.19}$$

$$\frac{\eta}{1+\eta} \frac{W(x)}{|W'(x)|} \leqslant x^+_\eta - x \leqslant \frac{\eta}{(1+\eta)^{1-\beta}} \frac{W(x)}{|W'(x)|}, \quad 0 \leqslant x \leqslant h_0, \tag{2.2.20}$$

$$x_{+\alpha}-x=\alpha\frac{1}{|W'(x)|^{1/3}},\quad 0\leq x\leq h_0, \tag{2.2.21}$$

$$\frac{\alpha}{(1+\eta)^{\beta/3}}\frac{1}{|W'(x)|^{1/3}}\leq x-x_{-\alpha}\leq\alpha\frac{1}{|W'(x)|^{1/3}},\quad 0\leq x\leq h_0. \tag{2.2.22}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Полагая в (2.2.4) $x_2=x,\ x_1=x_\eta^-$, получаем (2.2.19), полагая в (2.2.5) $x_2=x_\eta^+$, $x_1=x$, получаем (2.2.20). (2.2.21) есть иная запись (2.2.12). Правое неравенство в (2.2.22) следует непосредственно из (2.2.13) с учетом монотонности $W'(x)$. Из (2.2.1) следует $|W'(t)|\leq(1+\eta)^{\beta}|W'(x)|$ при $x_\eta^-\leq t\leq x$, что с учетом (2.2.18) дает левое неравенство в (2.2.22) в силу (2.2.13). Лемма доказана.

Пусть $h_0\in(0,1)$ выбрано так, чтобы выполнялись неравенства (2.2.18). Обозначим $W(h_0)=W_0$,

$$D=\{x,k^2\,|\,0\leq x<\infty,\ W_0\leq k^2<\infty\}, \tag{2.2.23}$$

$$X_\eta^+=x_\eta^+(X(k)),\quad X_\eta^-=x_\eta^-(X(k)),\quad X_{\pm\alpha}=x_{\pm\alpha}(X(k)), \tag{2.2.24}$$

где $X=X(k)$ определено (2.1.6). При заданных $\eta>0$, $\alpha>0$ область D (2.2.23) разбивается на шесть частей кривыми $k^2=W_\eta^\pm(x)$, $k^2=W(x)$, $k^2=W_{\pm\alpha}(x)$:

$$\begin{aligned}
D_1&=\{x,k^2\,|\,0\leq x\leq X_\eta^-;\ W_0\leq k^2<\infty\},\\
D_\eta^-&=\{x,k^2\,|\,X_\eta^-\leq x\leq X_{-\alpha},\ W_0\leq k^2<\infty\},\\
D_{-\alpha}&=\{x,k^2\,|\,X_{-\alpha}\leq x\leq X,\ W_0\leq k^2<\infty\},\\
D_{+\alpha}&=\{x,k^2\,|\,X\leq x\leq X_{+\alpha},\ W_0\leq k^2<\infty\},\\
D_\eta^+&=\{x,k^2\,|\,X_{+\alpha}\leq x\leq X_\eta^+,\ W_0\leq k^2<\infty\},\\
D_2&=\{x,k^2\,|\,X_\eta^+\leq x<\infty,\quad W_0\leq k^2<\infty\}.
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Обозначим еще

$$D_\alpha=D_{+\alpha}\cup D_{-\alpha}=\{x,k^2\,|\,X_{-\alpha}\leq x\leq X_{+\alpha},\ W_0\leq k^2<\infty\}, \tag{2.2.26}$$

$$D_\eta=D_\eta^-\cup D_\alpha\cup D_\eta^+=\{x,k^2\,|\,X_\eta^-\leq x\leq X_\eta^+,\ W_0\leq k^2<\infty\}. \tag{2.2.27}$$

Отметим, что, в силу (2.2.18), $D_\alpha\subset D_\eta$. При $(x,k^2)\in D_\eta$ (2.2.27) величины $W(x)$ и $W(X)=k^2$, также $W'(x)$ и $W'(X)$, $W''(x)$ и $W''(X)$ одного и того же порядка, как показывает следующая лемма.

Л Е М М А 2.2.5. Справедливы неравенства

$$(1+\eta)^{-1}\leq\frac{W(x)}{k^2}\leq 1+\eta,\qquad (x,k^2)\in D_\eta, \tag{2.2.28}$$

$$(1+\eta)^{-\beta}\leq\frac{W'(x)}{W'(X)}\leq(1+\eta)^{\beta},\quad (x,k^2)\in D_\eta, \tag{2.2.29}$$

$$(1+\eta)^{-\beta_1}\leq\frac{W''(x)}{W''(X)}\leq(1+\eta)^{\beta_1},\quad (x,k^2)\in D_\eta, \tag{2.2.30}$$

а также

$$\frac{W(x)}{k^2} \geqslant 1+\eta\ , \qquad (x,k^2)\in D_1, \tag{2.2.31}$$

$$\frac{W(x)}{k^2} \leqslant (1+\eta)^{-1}, \qquad (x,k^2)\in D_2. \tag{2.2.32}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О вытекает непосредственно из определения областей D_η , D_1 , D_2 , если учесть (2.2.11) и лемму 2.1.1. Лемма доказана.

§ 3. ОЦЕНКИ ДЛЯ $q(x,k)$, $\zeta(x,k)$ и $R(x,k)$.

Л Е М М А 2.3.1. Для $q(x,k)$ (2.1.9) справедливы неравенства

$$(1+\eta)^{-\beta/2}\sqrt{|W'(X)|}\,|x-X|^{1/2} \leqslant |q(x,k)| \leqslant (1+\eta)^{\beta/2}\sqrt{|W'(X)|}\,|x-X|^{1/2},\ (x,k^2)\in D_\eta; \tag{2.3.1}$$

$$\sqrt{\frac{\eta}{1+\eta}}\cdot\sqrt{W(x)} \leqslant |q(x,k)| \leqslant \sqrt{W(x)}, \quad (x,k^2)\in D_1; \tag{2.3.2}$$

$$\sqrt{\frac{\eta}{1+\eta}}\sqrt{W(X)} \leqslant |q(x,k)| \leqslant \sqrt{W(X)}, \quad (x,k^2)\in D_2. \tag{2.3.3}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Неравенства (2.3.1) вытекают из (2.2.29), если заметить, что при некотором $\xi\in(X_\eta^-, X_\eta^+)$

$$|q(x,k)| = \sqrt{|W'(\xi)|}\,|x-X|^{1/2}, \quad (x,k^2)\in D_\eta.$$

Неравенства (2.3.2) и (2.3.3) получаем соответственно из (2.2.31) и (2.2.32).

Л Е М М А 2.3.2. Для $\zeta(x,k)$ (2.1.10) справедливы оценки

$$|\zeta(x,k)| \leqslant \frac{2}{3}(1+\eta)^{\beta/2}\alpha^{3/2}, \quad (x,k^2)\in D_\alpha, \tag{2.3.4}$$

$$|\zeta(x,k)| \geqslant \frac{2}{3}(1+\eta)^{-\beta}\alpha^{3/2}, \quad (x,k^2)\in D\setminus D_\alpha, \tag{2.3.5}$$

$$\frac{2}{3}(1+\eta)^{-\beta/2}\sqrt{|W'(X)|}\,|x-X|^{3/2} \leqslant |\zeta(x,k)| \leqslant \frac{2}{3}(1+\eta)^{\beta/2}\sqrt{|W'(X)|}\,|x-X|^{3/2}, \quad (x,k^2)\in D_\eta, \tag{2.3.6}$$

$$|\zeta(x,k)| \geqslant C_1 W^{\delta}(x), \qquad (x,k^2)\in D_1, \tag{2.3.7}$$

$$|\zeta(x,k)| \geqslant C_2 |k|^{2\delta}, \qquad (x,k^2)\in D_2, \tag{2.3.8}$$

где $C_1>0,\ C_2>0.\ \ (C_i = C_i(\eta,\beta,M)).$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Учитывая, что

$$|\zeta(x,k)| = \left|\int_X^x |q(t,k)|\,dt\right| \tag{2.3.9}$$

неравенства (2.3.6) получаем, интегрируя (2.3.1) от X до x . Из монотонности $W(x)$ следует

$$|\zeta(x_1,k)| > |\zeta(x_2,k)|, \quad \text{если } x_1 < x_2 \leqslant X(k), \ \text{либо } x_1 > x_2 \geqslant X(k), \tag{2.3.10}$$

$$|\zeta(x,k_1)| > |\zeta(x,k_2)|, \quad \text{если } k_1^2 > k_2^2 \geqslant W(x), \ \text{либо } k_1^2 < k_2^2 \leqslant W(x). \tag{2.3.11}$$

Так как $D_\alpha \subset D_\eta$, оценку (2.3.4) получаем из (2.3.6) при $x=X_{\pm\alpha}$ и (2.2.21), (2.2.22) при $x=X$, $x_{\pm\alpha}=X_{\pm\alpha}$. Из (2.3.10), (2.3.11) следует, что достаточно получить оценку (2.3.5) при $(x,k^2)\in D_\eta\setminus D_\alpha$, а в этой области она выводится так же, как и оценка (2.3.4). Неравенство (2.3.8) вытекает из неравенств

$$|\zeta(x,k)|\geq|\zeta(X_\eta^+,k)|\geq\frac{2}{3}(1+\eta)^{-\beta/2}\sqrt{|W'(X)|}|X_\eta^+-X|^{3/2}\geq$$

$$\geq\frac{2}{3}\frac{\eta^{3/2}}{(1+\eta)^{\beta/2+3/2}}\frac{W^{3/2}(X)}{|W'(X)|}\geq\frac{2}{3}\frac{\eta^{3/2}}{M(1+\eta)^{\beta/2+3/2}}W^{\delta}(X),\quad(x,k^2)\in D_2.$$

Здесь последовательно использованы неравенства (2.3.10), (2.3.6), (2.2.20) и условие B_δ.

Оценку (2.3.7) получаем аналогично. Лемма доказана.

Л Е М М А 2.3.3. При всех достаточно малых $\eta>0$

$$|R(x,k)|\leq C_\eta\left|\frac{W'(X)}{W(X)}\right|^2,\quad(x,k^2)\in D_\eta,\tag{2.3.12}$$

где $R(x,k)$ задано (2.1.12), $C_\eta>0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Так как из условий (2.1.1), (2.1.2) и леммы 2.2.6 следует, что при $(x,k^2)\in D_\eta$ справедлива оценка

$$\left|\frac{W'''(x)}{W'(X)}\right|=\left|\frac{W'''(x)}{W''(x)}\right|\left|\frac{W''(x)}{W'(X)}\right|\leq\beta\beta_1(1+\eta)^{\beta+\beta_1+1}\left|\frac{W'(X)}{W(X)}\right|^2,$$

то разлагая $W(x)$ в ряд Тейлора около точки $x=X(k)$, получаем в силу (2.1.9)

$$-q^2(x,k)=W'(X)(x-X)\left\{1+\frac{W''(X)}{W'(X)}\frac{x-X}{2}+S(x,k)\right\},\tag{2.3.13}$$

где

$$|S(x,k)|\leq\frac{1}{6}\beta\beta_1(1+\eta)^{\beta+\beta_1+1}\left|\frac{W'(X)}{W(X)}\right|^2|x-X|^2,\quad(x,k^2)\in D_\eta.\tag{2.3.14}$$

Из условия (2.1.1), где $\beta>1$, и неравенств (2.2.19), (2.2.20) (при $x=\dot{X}$, $x_\eta^\pm=X_\eta^\pm$) следует, что при $(x,k^2)\in D_\eta$

$$\left|\frac{W''(X)}{W'(X)}\right||x-X|\leq\beta\left|\frac{W'(X)}{W(X)}\right||x-X|\leq\beta\eta(1+\eta)^{\beta-1}.\tag{2.3.15}$$

Пусть $\eta>0$ выбрано так, чтобы было

$$\beta(1+\eta)^{\beta-1}\eta\leq\frac{1}{4},\qquad\beta^3\beta_1(1+\eta)^{3\beta+\beta_1-1}\eta^2\leq\frac{1}{4},\tag{2.3.16}$$

тогда по формуле разложения бинома Ньютона из (2.3.13) с учетом (2.3.14), (2.3.15) имеем равномерно по $(x,k^2)\in D_\eta$

$$\frac{1}{q^2(x,k)}=\frac{1}{|W'(X)|(x-X)}\left\{1-\frac{1}{2}\frac{W''(X)}{W'(X)}(x-X)+O\left\{\left|\frac{W'(X)}{W(X)}\right|^2(x-X)^2\right\}\right\},$$

$$\frac{1}{\zeta^2(x,k)}=\frac{9}{4}\frac{1}{|W'(X)|(x-X)^3}\left\{1-\frac{3}{10}\frac{W''(X)}{W'(X)}(x-X)+O\left\{\left|\frac{W'(X)}{W(X)}\right|(x-X)^2\right\}\right\}.$$

Эти разложения вместе с (2.3.13), (2.3.14), подставляем в выражение для $R(x,k)$(2.1.12) и после приведения подобных членов получаем оценку (2.3.12),если учесть,что при $(x,k^2)\in D_\eta$

$$W'(x)=W'(X)\left\{1+\frac{W''(X)}{W'(X)}(x-X)+O\left\{\left|\frac{W'(X)}{W(X)}\right|(x-X)^2+O\left\{\left|\frac{W'(X)}{W(X)}\right|(x-X)^2\right\}\right\}\right\},$$

$$W''(x)=W''(X)\left\{1+O\left\{\left|\frac{W'(X)}{W(X)}\right||x-X|\right\}\right\}.$$

(Вывод этих разложений аналогичен выводу (2.3.13), (2.3.14). Лемма доказана.

§ 4. РАВНОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ $h^{(1)}_{1/3}(x,k)$ И $z_{1/3}(x,k)$ (2.I.I3), (2.I.I4)

Т Е О Р Е М А 2.4.I. Пусть $W(x)$ удовлетворяет условиям A_2 и B_σ (§I гл.П). Тогда

I) при некоторых $C_i > 0$ для $(x,k^2)\in\mathcal{D}$ (2.2.23) справедливы оценки

$$C_1 M(x,k) \leqslant |h^{(1)}_{1/3}(x,k)| \leqslant C_2 M(x,k), \tag{2.4.I}$$

$$\left|\frac{d}{dx} h^{(1)}_{1/3}(x,k)\right| \leqslant C_3 L^{-1}(x,k), \tag{2.4.2}$$

$$|z_{1/3}(x,k)| \leqslant C_4 L(x,k), \tag{2.4.3}$$

$$\left|\frac{d}{dx} z_{1/3}(x,k)\right| \leqslant C_5 M^{-1}(x,k), \tag{2.4.4}$$

где положено

$$L(x,k)=\begin{cases} |q(x,k)|^{-1/2}\exp\{-|\zeta(x,k)|\}, & (x,k^2)\in\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_\eta^-\\ |W'(X(k))|^{-1/6}, & (x,k^2)\in\mathcal{D}_\alpha,\\ q^{-1/2}(x,k), & (x,k^2)\in\mathcal{D}_\eta^+\cup\mathcal{D}_2,\end{cases} \tag{2.4.5}$$

$$M(x,k)=\begin{cases} |q(x,k)|^{-1/2}\exp\{|\zeta(x,k)|\}, & (x,k^2)\in\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_\eta^-\\ |W'(X)|^{-1/6}, & (x,k^2)\in\mathcal{D}_\alpha,\\ q^{-1/2}(x,k), & (x,k^2)\in\mathcal{D}_\eta^+\cup\mathcal{D}_2.\end{cases} \tag{2.4.6}$$

(определение областей $\mathcal{D}_\alpha$ и др. см. (2.2.25) - (2.2.27)).

2) $h^{(1)}_{1/3}(x,k)$ и $\frac{d}{dx}h^{(1)}_{1/3}(x,k)$ не имеют нулей при $0<x<\infty$ $(k\neq 0,\ \mathrm{Im}\,k=0)$.

3) Если $\alpha>0$ достаточно мало, то $z_{1/3}(x,k)$ не имеет нулей при $0<x\leqslant X_{+\alpha}(k)$, и здесь

$$|z_{1/3}(x,k)| \geqslant C_6 L(x,k). \tag{2.4.7}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Утверждение 2) вытекает из того факта, что $\overline{h^{(1)}_{1/3}(x,k)}$ и $h^{(1)}_{1/3}(x,k)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (2.I.II).

Переходим к выводу (2.4.I). Заметим, что из лемм 2.3.I и 2.3.2 следует, что при некоторых $C_\eta,\ C'_\eta>0$

$$C_\eta |W'(X)|^{-1/6} \leqslant \frac{\zeta^{1/6}(x,k)}{q^{1/2}(x,k)} \leqslant C'_\eta |W'(X)|^{-1/6},\quad (x,k^2)\in\mathcal{D}_\eta. \tag{2.4.8}$$

Отсюда и из утверждения 2) следует, что

$$C_1(\alpha)|W'(X)|^{-1/6} \leqslant |h^{(1)}_{1/3}(x,k)| \leqslant C_2(\alpha)|W'(X)|^{-1/6},\quad (x,k^2)\in\mathcal{D}_\alpha,$$

при любом $\alpha>0$, так как, с одной стороны, $\mathcal{D}_\alpha\subset\mathcal{D}_\eta$, а с другой, при $(x,k^2)\in\mathcal{D}_\alpha$ $|\zeta(x,k)|\leqslant C_\alpha$ в силу (2.3.4). Из оценки (2.3.5) следует, что при любом сколь угодно большом $M>0$ всегда можно взять $\alpha>0$ настолько большое, что $|\zeta(x,k)|\geqslant M$ при $(x,k^2)\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_\alpha$. Тогда, если $M>0$ достаточно велико, то величины $O(|\zeta|^{-1})$ в асимптотических равенствах (2.I.22) - (2.I.24) можно сделать меньше I/2 при $\nu=\pm 1/3$. Учитывая, что при $x\geqslant X$ $\arg\zeta=0$, а при $x<X(k)$ справедливо представление (2.I.25), получаем оценку (2.4.I) и в области $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}_\alpha$.

Оценки (2.4.3) и (2.4.7) получаются аналогично.

Оценки (2.4.2) и (2.4.4) вытекают из соотношений

$$\frac{d}{dx} h^{(1)}_{1/3}(x,k) = q(x,k)\, e^{\frac{2\pi i}{3}} h^{(1)}_{2/3}(x,k) + p(x,k)\, h^{(1)}_{1/3}(x,k), \tag{2.4.9}$$

$$\frac{d}{dx} z_{1/3}(x,k) = q(x,k)\, z_{2/3}(x,k) + p(x,k)\, z_{1/3}(x,k), \tag{2.4.10}$$

где положено

$$h^{(1)}_{2/3}(x,k) = \sqrt{\frac{\xi}{q}}\, H^{(1)}_{2/3}(\xi),$$

$$z_{2/3}(x,k) = \sqrt{\frac{\xi}{q}} \left\{ J_{2/3}(\xi) - J_{-2/3}(\xi) \right\},$$

$$p(x,k) = \frac{1}{6} \frac{q(x,k)}{\xi(x,k)} + \frac{1}{4} \frac{W'(x)}{q^2(x,k)},$$

если воспользоваться следующей леммой.

Л Е М М А 2.4.I. Пусть $\eta > 0$ удовлетворяет неравенствам (2.3.I6). Тогда

$$|p(x,k)| \leqslant C_\eta \left| \frac{W'(X)}{W(X)} \right|, \quad (x, k^2) \in D_\eta, \tag{2.4.II}$$

$$|p(x,k)| \leqslant C'_\eta \max \left\{ W^{\frac{1}{2}-\delta}(x),\ W^{\frac{1}{2}-\delta}(X) \right\}, \quad (x, k^2) \in D \setminus D_\eta. \tag{2.4.I2}$$

Здесь неравенство (2.4.II) выводится из соответствующих разложений, полученных в доказательстве леммы 2.3.3. Последнее неравенство следует непосредственно из лемм 2.3.I и 2.3.2 с учетом условия B_δ.

Лемма и теорема доказаны.

§ 5. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ $\varphi(x,k)$, $f(x,k)$ И ФУНКЦИИ ЙОСТА $f(k)$ ПРИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ $k \to +\infty$.

Т Е О Р Е М А 2.5.I. Пусть $V = U + W$ удовлетворяет условиям A_2, B_δ, C_2 (§I, гл.2) и $V(x) \in L(1, \infty)$. Тогда для решения $f(x,k)$ равномерно по $0 < x < \infty$ справедлива асимптотика при $k \to +\infty$

$$f(x,k) = \sqrt{\frac{\pi k}{2}}\, e^{i\left(\frac{5\pi}{12} - \alpha(k)\right)} h^{(1)}_{1/3}(x,k) \left[1 + o_k(1)\right], \tag{2.5.I}$$

где $\alpha(k)$ определено (2.I.I8), $h^{(1)}_{1/3}(x,k)$ - (2.I.I3) *), и при $0 < x < \infty$, $k^2 \geqslant 1$ имеют место оценки

$$C_1 \sqrt{k}\, M(x,k) \leqslant |f(x,k)| \leqslant C_2 \sqrt{k}\, M(x,k), \tag{2.5.2}$$

где $C_1, C_2 > 0$, $M(x,k)$ определено (2.4.6).

Для функции Йоста $f(k)$ справедливы асимптотика

$$f(k) \sim \frac{k}{\omega(k)} \exp\left\{ -i\left(\frac{\pi}{4} + \alpha(k)\right) \right\}, \quad k \to +\infty, \tag{2.5.3}$$

где $\omega(k)$ дается (2.I.I9), и оценки

$$C'_1 \frac{k}{\omega(k)} \leqslant |f(k)| \leqslant C'_2 \frac{k}{\omega(k)}, \quad 1 \leqslant k < \infty, \tag{2.5.4}$$

$$|f(k)| \leqslant C_1 \exp\left\{ -C |k|^{2\delta} \right\}, \quad 1 \leqslant \pm k < \infty, \tag{2.5.5}$$

(*) Отметим, что равномерно по x при $0 < \varepsilon \leqslant x < \infty$ при $k \to +\infty$

$$f(x,k) = e^{ikx}\left[1 + o(1)\right], \quad (0 < \varepsilon \leqslant x < \infty). \tag{2.5.I'}$$

где C_1', C_2', C_1, $C>0$ – некоторые постоянные. Если еще выполнено и условие L (I.4.I), то оценка (2.5.5) справедлива при $-\infty<k<\infty$ *).

При доказательстве теоремы воспользуемся следующей леммой (см.,например, [3] стр.60).

Л Е М М А 2.5.А. Пусть $f(x)\geqslant 0$ и $g(x)\geqslant 0$ в интервале $a\leqslant x<b\leqslant\infty$ и $f(x)$ и $f(x)g(x)$ суммируемые в этом промежутке. Если при этом

$$f(x)\leqslant C+\int_x^b f(t)g(t)dt, \quad a\leqslant x<b,$$

где C – положительная постоянная, то

$$f(x)\leqslant C\exp\left\{\int_x^b g(t)dt\right\}, \quad a\leqslant x<b.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы. Запишем уравнение (I.I.I) в виде

$$y''+(q^2(x,k)-R(x,k))y=(U(x)-R(x,k))y, \quad 0<x<\infty,$$

где $q(x,k)$ задано (2.I.9), $R(x,k)$ – (2.I.I2). Так как $z_{1/3}(x,k)$ (2.I.I4) и $h_{1/3}^{(1)}(x,k)$ (2.I.I3) удовлетворяют уравнению (2.I.II), то в силу (2.I.I5), (2.I.2I) находим, что $f(x,k)$ при $k>0$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(x,k)=P(x,k)+\int_x^\infty \mathcal{K}(x,t;k)f(t,k)dt, \quad 0<x<\infty, \qquad (2.5.6)$$

где

$$P(x,k)=\sqrt{\frac{\pi k}{2}}\,e^{i\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha(k)\right)}h_{1/3}^{(1)}(x,k), \qquad (2.5.7)$$

$$K(x,t;k)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\left\{h_{1/3}^{(1)}(x,k)z_{1/3}(t,k)-z_{1/3}(x,k)h_{1/3}^{(1)}(t,k)\right\}\left[U(t)-R(t,k)\right]. \qquad (2.5.8)$$

Так как при $k>0$ и $0<x<\infty$ $h_{1/3}^{(1)}(x,k)\neq 0$, можем разделить (2.5.6) на $P(x,k)$. Полагая

$$\Phi(x,k)=\frac{f(x,k)}{P(x,k)}, \qquad (2.5.9)$$

получаем

$$\Phi(x,k)=1+\int_x^\infty S(x,t;k)\,\Phi(t,k)\,dt, \qquad (2.5.10)$$

где

$$S(x,t;k)=\mathcal{K}(x,t;k)h_{1/3}^{(1)}(t,k)/h_{1/3}^{(1)}(x,k). \qquad (2.5.11)$$

Из оценок (2.4.I), (2.4.3) следует, что равномерно по $0\leqslant x\leqslant t<\infty$ и $1\leqslant k<\infty$

$$|S(x,t;k)|\leqslant CF(t,k)\{|U(t)|+|R(t,k)|\}, \qquad (2.5.12)$$

где

$$F(x,k)=\begin{cases}|q(x,k)|^{-1}, & (x,k^2)\in D\setminus D_\alpha,\\ |W'(X(k))|^{-1/3}, & (x,k^2)\in D_\alpha.\end{cases} \qquad (2.5.13)$$

Ниже будет показано (см. леммы 2.7.2 и 2.7.3), что

$$\int_0^\infty F(t,k)\{|U(t)|+|R(t,k)|\}dt\leqslant C, \quad 1\leqslant k<\infty, \qquad (2.5.14)$$

---

*) Оценка (2.5.5) справедлива и при $\mathrm{Im}\,k>0$, что можно показать, используя принцип Фрагмена-Линделефа.

$$\int\limits_0 F(t,k)\{|U(t)|+|R(t,k)|\}dt \to 0, \quad k \to +\infty. \tag{2.5.15}$$

Из (2.5.12) и (2.5.14) следует, что к уравнению (2.5.10) применима лемма 2.5.A, которая дает

$$|\Phi(x,k)| \leqslant C, \qquad (x,k^2)\in D. \tag{2.5.16}$$

Подставляя это неравенство в правую часть (2.5.10), с учетом (2.5.12) и (2.5.15), имеем равномерно по $0 \leqslant x < \infty$

$$\Phi(x,k) = 1 + o(1), \quad k \to \infty.$$

Асимптотика (2.5.1) доказана в силу (2.5.9), (2.5.7). Деля (2.5.1) на $\gamma(x)$, устремляя $x \to 0$ и учитывая (2.1.16), получаем (2.5.3). Так как $f(k) \neq 0$ при $k>0$ (§ 4, гл.I), то из (2.5.3) непосредственно следуют оценки (2.5.4).

Оценки (2.5.2) следуют из асимптотики (2.5.1) и оценок (2.4.1).

Из (2.5.4) с учетом (2.1.20) получаем (2.5.5).

Теорема доказана.

С Л Е Д С Т В И Е 1. Пусть $V(x)$ удовлетворяет условиям A_2, B_6 и C_2 (§I,гл.2). Тогда равномерно по $x\in[\varepsilon,a]$, $0<\varepsilon<a<\infty$ при $k\to\infty$

$$\varphi(x,k) = \omega^{-1}(k)\left\{\sin\left(kx+\alpha(k)+\frac{\pi}{4}\right)+o(1)\right\}, \tag{2.5.17}$$

где $\alpha(k)$ определено (2.1.18), $\omega(k)$ – (2.1.19).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Заменим $V(x)$ на $V_a(x)$

$$V_a(x) = \begin{cases} V(x), & 0 < x \leqslant a, \\ 0, & a < x < \infty. \end{cases} \tag{2.5.18}$$

и воспользуемся представлением (1.4.6), применительно к задаче с $V_a(x)$. Асимптотика (2.5.3) вместе с (2.5.1′) дает (2.5.17).

Т Е О Р Е М А 2.5.2. Пусть $V(x)$ удовлетворяет условиям A_2, B_6 и C_2 (§I,гл.2). Тогда равномерно по $0\leqslant x\leqslant a<\infty$ справедливы асимптотики при $k\to+\infty$

$$\varphi(x,k) = \sqrt{\frac{\pi k}{6}}\,\omega^{-1}(k)\,z_{1/3}(x,k) + O_K\left\{\frac{\sqrt{k}\,L(x,k)}{\omega(k)}\right\}, \tag{2.5.19}$$

$$\varphi'(x,k) = \sqrt{\frac{\pi k}{6}}\,\omega^{-1}(k)\,\frac{d}{dx}z_{1/3}(x,k) + O_K\left\{\frac{\sqrt{k}}{\omega(k)}\,M^{-1}(x,k)\right\}, \tag{2.5.19′}$$

где $z_{1/3}(x,k)$ определено (2.1.14), $\omega(k)$ – (2.1.19), $L(x,k)$ – (2.4.5), $M(x,k)$ – (2.4.6).

При $0\leqslant x\leqslant a<\infty$ и $1\leqslant k^2<\infty$ справедливы оценки

$$|\varphi(x,k)| \leqslant C(a)\sqrt{k}\,\omega^{-1}(k)\,L(x,k), \tag{2.5.20}$$

$$|\varphi'(x,k)| \leqslant C_1(a)\sqrt{k}\,\omega^{-1}(k)\,M^{-1}(x,k). \tag{2.5.20′}$$

Если при этом $V(x)\in L(1,\infty)$, то теорема верна и при $a=\infty$ *).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Следуя выводу уравнения (2.5.10) и учитывая (2.1.17), получаем, что при $k>0$ $\varphi(x,k)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\varphi(x,k) = Q(x,k) - \int\limits_0^x \mathcal{K}(x,t;k)\,\varphi(t,k)\,dt, \quad 0\leqslant x<\infty, \tag{2.5.21}$$

---

*) Таким образом, в силу (2.5.19)
$$\varphi(x,k) \approx \sqrt{\pi}\left(\frac{k\zeta}{6}\right)^{1/2}\omega^{-1}(k)\,(k^2 - W(x))^{-1/4}\left\{J_{1/3}(\zeta) + J_{-1/3}(\zeta)\right\}.$$
В этой формуле в нашей заметке [17] вместо коэффициента $\sqrt{\pi}$ ошибочно напечатано $\pi/2$.

где
$$Q(x,k)=\sqrt{\frac{\pi k}{6}}\ \omega^{-1}(k)z_{1/3}(x,k), \tag{2.5.22}$$

а $\mathcal{K}(x,t;k)$ определено (2.5.8). Из оценок (2.4.I) и (2.4.3) вытекает при $0<x<\infty$, $k^2\geqslant W_0$ (2.2.23):
$$\frac{|Q(x,k)|\omega(k)}{\sqrt{k}\,L(x,k)}\leqslant C, \tag{2.5.23}$$
$$|K(x,t;k)|\frac{L(t,k)}{L(x,k)}\leqslant CF(t,k)\{|\mathcal{U}(t)|+|R(t,k)|\}, \tag{2.5.24}$$

где $F(t,k)$ определено (2.5.I3). Из лемм 2.7.2 и 2.7.3 (см. ниже § 7) следует, что при любом $a<\infty$ и $1\leqslant k^2<\infty$
$$\int_0^a F(t,k)\{|\mathcal{U}(t)|+|R(t,k)|\}dt\leqslant C(a), \tag{2.5.25}$$
и
$$\int_0^a F(t,k)\{|\mathcal{U}(t)|+|R(t,k)|\}dt\to 0,\quad k\to\infty. \tag{2.5.26}$$

Применяя лемму I.2.A к уравнению (2.5.2I), разделенному на $L(x,k)$, из оценок (2.5.23) - (2.5.25) получаем оценку (2.5.20). Отсюда и из (2.5.26) в силу (2.5.2I) следует (2.5.I9).

Оценка (2.5.20′) и асимптотика (2.5.I9′) выводятся аналогично (2.5.20) и (2.5.I9) из уравнения (2.5.2I) и оценок, полученных в теореме 2.4.I. Последнее утверждение теоремы следует из (2.5.I4) и (2.5.I5). Теорема доказана.

С Л Е Д С Т В И Е 2. Пусть $C(x,t;k)$ является по x решением уравнения (I.I.I) с начальными данными при $x=t$
$$C(t,t;k)=0,\qquad C'_x(x,t;k)\big|_{x=t}=1. \tag{2.5.27}$$

Тогда при условиях теоремы 2.5.2 для $0<t\leqslant x\leqslant a<\infty$, $1\leqslant k^2<\infty$ справедлива оценка
$$|C(x,t;k)|\leqslant C(a)M(t,k)L(x,k). \tag{2.5.28}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О вытекает из представления
$$C(x,t;k)=\frac{1}{f_a(k)}\{f_a(t,k)\varphi(x,k)-f_a(x,k)\varphi(t,k)\}, \tag{2.5.29}$$

(в качестве $f_a(x,k)$, $f_a(k)$ взяты решения (I.I.I) $(0<t,\ x\leqslant a)$ с потенциалом $V_a(x)$ (2.5.I8) и соответствующая функция Йоста) и из оценок (2.5.2), (2.5.4), (2.5.20).

Л Е М М А 2.5.I. Пусть $V(x)$ удовлетворяет условиям A_2, B_δ, C_2 и L (§I,гл.2). Справедлива оценка
$$\left|k\frac{d}{dk}f(k)\right|\leqslant C_1\exp\{-C|k|^{2\delta}\},\quad -\infty<k<\infty, \tag{2.5.30}$$

где $C_1, C>0$ - некоторые постоянные.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из теоремы I.4.I следует, что достаточно показать, что
$$|\dot{f}(k)|\leqslant C_1\exp\{-C|k|^{2\delta}\},\quad 1\leqslant k^2<\infty. \tag{2.5.3I}$$

Обозначим
$$z(x,k)=\dot{f}(x,k)-ixe^{ikx} \tag{2.5.32}$$

Отметим, что при условии L (I.4.I)

$$|f(x,k)-e^{ikx}| \leqslant \frac{C(\varepsilon)}{|k|}\int_x^\infty |V(t)|\,dt, \qquad 0<\varepsilon\leqslant x<\infty. \tag{2.5.33}$$

При $k\neq 0$ $z(x,k)$ (2.5.32) удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}z(x,k)+(k^2-V(x))z=g(x,k), \tag{2.5.34}$$

где

$$g(x,k)=ixV(x)e^{ikx}-2k\,(f(x,k)-e^{ikx}), \tag{2.5.35}$$

причем $z(\infty,k)=0$. Следовательно,

$$\dot f(x,k)=ixe^{ikx}+\frac{f(x,k)}{f(k)}\int_x^\infty \varphi(t,k)g(t,k)\,dt-\frac{\varphi(x,k)}{f(k)}\int_x^\infty f(t,k)g(t,k)\,dt. \tag{2.5.36}$$

Покажем, что при $k>0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x,k)}{\gamma(x)}\int_x^\infty f(t,k)g(t,k)\,dt=0. \tag{2.5.37}$$

Действительно, из (2.5.33) вытекает

$$\int_{1/2}^\infty |f(t,k)g(t,k)|\,dt\leqslant C\int_{1/2}^\infty t\,|V(t)|\,dt, \qquad 1\leqslant k<\infty,$$

так как

$$\int_x^\infty dt\int_t^\infty |V(s)|\,ds\leqslant\int_x^\infty t\,|V(t)|\,dt. \tag{2.5.38}$$

Поэтому

$$\int_x^\infty |f(t,k)g(t,k)|\,dt=O\Big\{\int_x^{1/2}\gamma^2(t)\,dt+\int_{1/2}^\infty t\,|V(t)|\,dt\Big\},$$

поскольку $f(x,k)=O(\gamma(x))$. Отсюда вытекает (2.5.7), так как $\varphi(x,k)=O(\gamma_0(x))$. Деля (2.5.36) на $\gamma(x)$, и устремляя $x\to 0$, с учетом (2.5.37) получаем для $\dot f(k)$ следующее представление:

$$\dot f(k)=\int_0^\infty \varphi(x,k)g(x,k)\,dx, \qquad (k>0), \tag{2.5.39}$$

где $g(x,k)$ определено (2.5.35).

Отсюда в силу оценок (2.5.2), (2.5.20), (2.5.33), (2.5.38) получаем равномерно по $1\leqslant k<\infty$

$$|\dot f(k)|\leqslant C\frac{k^2}{\omega(k)}\Big\{\int_0^{1/2}L(t,k)|V(t)|\,dt+\int_0^{1/2}F(t,k)\,dt+\int_{1/2}^\infty t\,|V(t)|\,dt\Big\}.$$

Второй и третий члены в фигурных скобках ограничены равномерно по $1\leqslant k<\infty$ в силу оценки (2.7.4) (см.§7), а в силу (2.7.I), (2.3.7) при $1\leqslant k<\infty$

$$\frac{1}{k^2}\int_0^{1/2}L(t,k)|V(t)|\,dt\leqslant C_1\int_0^{X_\eta^-(k)}|V(t)|\,e^{-cW^\delta(t)}\,dt+\frac{C_2}{k^2}\int_{X_\eta^-}^{1/2}|V(t)|\,dt\leqslant C_3.$$

Из полученных оценок следует, что $\dot f(k)=O\{k^4\omega^{-1}(k)\}$ $(1\leqslant k<\infty)$. Это вместе с (2.I.20) доказывает (2.5.3I). Лемма доказана.

§ 6. СВЯЗЬ АСИМПТОТИКИ ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ $S(k)$ ПРИ $k\to+\infty$ С АСИМПТОТИКОЙ ПОТЕНЦИАЛА ПРИ $x\to 0$.

ТЕОРЕМА 2.6.I. Пусть потенциал $V(x)$ удовлетворяет условиям A_2, B_σ, C_2 (§I, гл.П) и условию L (I.4.I). Тогда при вещественных $k\to+\infty$ для функции рассеяния справедлива асимптотика

$$S(k)=exp\left\{i\left[2\alpha(k)+\frac{\pi}{2}+o(1)\right]\right\}, \tag{2.6.I}$$

где $\alpha(k)$ определено (2.I.I8). При этом:

а) Если, кроме того, существует при некотором $p>2$

$$\lim_{x\to 0} W(x)x^{p}=C\neq 0, \qquad (p>2); \tag{2.6.2}$$

то при $k\to+\infty$

$$S(k)=exp\left\{-2ik^{-\frac{p-2}{p}}C^{\frac{1}{p}}\left[A_p+o(1)\right]\right\}, \tag{2.6.3}$$

где

$$A_p=1+\frac{1}{p}\int_0^1\left(1-\sqrt{1-t}\right)t^{-1-\frac{1}{p}}\,dt. \tag{2.6.4}$$

в) Если вместо (2.6.2) дано, что при любом $\varepsilon>0$

$$W(x)x^{p+\varepsilon}\to 0, \qquad W(x)x^{p-\varepsilon}\to\infty, \qquad (x\to 0) \tag{2.6.5}$$

монотонно в некоторой (зависящей от ε) окрестности $x=0$, то

$$S(k)=exp\left\{-2ikX(k)\left[A_p+o(1)\right]\right\}, \tag{2.6.6}$$

где $X(k)$ - точка поворота (2.I.7). (При условии (2.6.2) формулы (2.6.3) и (2.6.6) эквивалентны).

с) Наконец, если при $x\to 0$ монотонно (в окрестности $x=0$)

$$\frac{\ln W(x)}{|\ln x|}\to\infty, \tag{2.6.7}$$

то асимптотика (2.6.6) сохраняет силу, если положить $A_p=A_\infty=1$.

Заметим, что сформулированная теорема дает возможность по асимптотике $S(k)$ при $k\to+\infty$ восстановить асимптотику потенциала $V(x)$ при $x\to 0$ в предположении, что $V(x)$ принадлежит одному из перечисленных выше классов. Этот результат соприкасается с обратными задачами теории рассеяния. Сформулируем его в виде теоремы.

Т Е О Р Е М А 2.6.2. Пусть существуют для функции рассеяния

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln\ln S(k)}{\ln k}=q, \quad 0<q<1; \tag{2.6.8}$$

и

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\ln S(k)}{k^{q}}=-iC'. \tag{2.6.9}$$

Тогда, если известно, что потенциал $V(x)$ удовлетворяет условиям A_2, B_σ, C_2(§I,гл.П), условию L (I.4.I) и принадлежит какому-либо из классов, описанных в п.п. а), в) и с) предыдущей теоремы 2.6.I, то можно утверждать, что $V(x)$ - класса а) (2.6.2), то есть при $x\to 0$

$$W(x)\sim Cx^{-p}, \qquad (x\to 0,\ p>2), \tag{2.6.IO}$$

причем

$$p=\frac{2}{1-q}, \qquad C=\left(\frac{C'}{2A_p}\right)^{p}, \tag{2.6.IO}$$

где A_p определено (2.6.4).

Если же дано только (2.6.8) (без (2.6.9)), то в предположении о принадлежности потенциала классам в) (2.6.5) или с) (2.6.7), заключаем, что при $0 < q < 1$ $V(x)$ - класса в), а при $q = 1$ - класса с). При этом

$$X(k) \sim \frac{i \ln S(k)}{2k A_p} \to 0, \qquad (k \to +\infty), \tag{2.6.11}$$

$$W(x) = k^2(x), \qquad (x \to 0), \tag{2.6.12}$$

где $k(x)$ -функция, обратная для $X(k)$ (2.6.11), значения p и A_p определены формулами (2.6.10), (2.6.4) при $0 < q < 1$, а при $q=1$ - $p=\infty$, $A_\infty = 1$.

Данная теорема является очевидным следствием теоремы 2.6.1.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Т Е О Р Е М Ы 2.6.1. Асимптотика (2.6.1) следует непосредственно из определения $S(k)$ (1.4.4) и асимптотики (2.5.1) для функции Йоста $f(k)$ $(f(-k) = \overline{f(k)})$. В силу (2.6.1) при $k \to +\infty$

$$\ln S(k) \sim 2i\alpha(k) \qquad (k \to +\infty). \tag{2.6.13}$$

Найдем асимптотику $\alpha(k)$ (2.1.18).

а) Пусть выполнено условие (2.6.2). Заметим, что

$$\begin{aligned} \alpha(k) &= -k + \int_{X(k)}^{1} \sqrt{k^2 - W(t)}\,dt = \\ &= -k\left[X(k) + \int_X^1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{W(t)}{W(X)}}\right) dt\right]. \end{aligned} \tag{2.6.14}$$

Рассмотрим при $k \to \infty$, $X(k) \to 0$ интеграл

$$\mathcal{J}(k) = \int_{X(k)}^{1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{W(t)}{W(X)}}\right) dt = \int_X^{\sqrt{X}} + \int_{\sqrt{X}}^{1} = \mathcal{J}_1(k) + \mathcal{J}_2(k). \tag{2.6.15}$$

Имеем:

$$0 \le \mathcal{J}_2(k) \le \int_{\sqrt{X}}^{1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{W(\sqrt{X})}{W(X)}}\right) dt = O\left(\frac{W(\sqrt{X})}{W(X)}\right). \tag{2.6.16}$$

Теперь рассмотрим

$$\mathcal{J}_1(k) = \int_X^{\sqrt{X}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{W(t)}{W(X)}}\right) dt = \int_X^{\sqrt{X}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{W(t)t^p}{W(X)X^p} \cdot \frac{X^p}{t^p}}\right) dt.$$

Из условия (2.6.2) при $X \to 0$ имеем

$$\mathcal{J}_1(k) = \int_X^{\sqrt{X}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{X^p}{t^p}\left[1 + \eta(t, X)\right]}\right) dt, \tag{2.6.17}$$

где

$$|\eta(t, X)| \le \max_{X \le t \le \sqrt{X}} \left| \frac{W(t)\,t^p}{W(X)\,X^p} - 1 \right| = \eta(X) \to 0, \quad (X \to 0). \tag{2.6.18}$$

Следовательно,

$$\mathcal{J}_1(k) = \int_X^{\sqrt{X}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{X^p}{t^p}}\right) dt + O\left\{\sqrt{\eta(X)} \int_X^{\sqrt{X}} \left(\frac{X}{t}\right)^{p/2} dt\right\}. \tag{2.6.19}$$

Сделаем в (2.6.19) подстановку

$$X = \xi^{1/p}\, t, \qquad dt = -\frac{1}{p} X \xi^{-1-\frac{1}{p}} d\xi.$$

Находим:

$$\mathcal{J}_1(k)=\frac{1}{p}X\int_{X^{p/2}}(1-\sqrt{1-\xi})\,\xi^{-1-\frac{1}{p}}d\xi+O(X\sqrt{\eta(X)})=$$

$$=\frac{1}{p}X\int_0^1(1-\sqrt{1-\xi})\,\xi^{-1-\frac{1}{p}}d\xi+XO(X^{\frac{p-1}{2}})+XO(\sqrt{\eta(X)}).$$

Отсюда вместе с (2.6.I6), учитывая (2.6.4), получаем

$$\mathcal{J}(k)=X\left\{A_p-1+O(X^{\frac{p-1}{2}})+O(\sqrt{\eta(X)})\right\}+ \tag{2.6.20}$$

$$+O\left(\frac{W\sqrt{X}}{W(X)}\right)=X\left\{A_p-1+\varepsilon(X)\right\},$$

где

$$\varepsilon(X)=O(X^{\frac{p-1}{2}})+O(\sqrt{\eta(X)})+O\left(\frac{W(\sqrt{X})}{XW(X)}\right)\to 0 \quad \text{при} \quad X\to 0$$

в силу (2.6.I8) и (2.6.2). Подставляя (2.6.20) в (2.6.I5), (2.6.I4), находим

$$\alpha(k)\sim -A_p k X(k) \quad \text{при} \quad k\to+\infty. \tag{2.6.2I}$$

Вместе с (2.6.I3) это дает (2.6.6) и (2.6.3) в силу (2.6.2).

в) Пусть теперь выполнено (2.6.5) вместо (2.6.2). Вычисление асимптотики $S(k)$ и $\alpha(k)$ здесь, как и в случае а), сводится к вычислению асимптотики интеграла $\mathcal{J}_1(k)$ (2.6.I5).

В силу первого условия в (2.6.5)

$$W(x)=\eta_\varepsilon(x)x^{-p-\varepsilon},$$

где $\eta_\varepsilon(x)\to 0$ при $x\to 0$ монотонно в некоторой окрестности $x=0$, причем $\eta_\varepsilon(x)>0$ при $x>0$.

Поэтому, как только $\sqrt{X(k)}$ попадает в интервал монотонности $\eta_\varepsilon(x)$

$$\mathcal{J}_1(k)=\int_X^{\sqrt{X}}\left(1-\sqrt{1-\frac{W(t)}{W(X)}}\right)dt=$$

$$=\int_X^{\sqrt{X}}\left(1-\sqrt{1-\frac{\eta_\varepsilon(t)}{\eta_\varepsilon(X)}\cdot\frac{X^{p+\varepsilon}}{t^{p+\varepsilon}}}\right)dt\geqslant\int_X^{\sqrt{X}}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{X}{t}\right)^{p+\varepsilon}}\right)dt= \tag{2.6.22}$$

$$=\frac{1}{p+\varepsilon}X\int_0^1(1-\sqrt{1-\xi})\,\xi^{-1-\frac{1}{p+\varepsilon}}d\xi+XO(X^{\frac{p+\varepsilon-1}{2}}).$$

Аналогично, используя правое из условий (2.6.5), получаем

$$\mathcal{J}_1(k)\leqslant X(k)(A_{p-\varepsilon}-1)+XO(X^{\frac{p-\varepsilon-1}{2}}),$$

что вместе с (2.6.22) дает

$$\mathcal{J}_1(k)=X(k)\left\{A_p-1+o(1)\right\}, \tag{2.6.23}$$

так как $\varepsilon>0$ может быть взято произвольно малым при $k\to\infty$. Из (2.6.23), как и в п. а), получаем (2.6.6).

с) Рассмотрим, наконец, условие (2.6.7). Оно означает, что

$$W(x)=x^{-N(x)},$$

где $N(x)\to\infty$ при $x\to 0$ монотонно около $x=0$. Снова рассматривая $\mathcal{J}_1(k)$ при $k\to+\infty$, находим

$$0<\mathcal{J}_1(k)=\int_X^{\sqrt{X}}\left(1-\sqrt{1-\frac{W(t)}{W(X)}}\right)dt=$$

$$=\int_X^{\sqrt{X}}\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{X}{t}\right)^{N(X)}t^{N(X)-N(t)}}\right)dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{N(X)}X\int_0^1(1-\sqrt{1-\xi})\,\xi^{-1-\frac{1}{N(X)}}d\xi+\frac{X}{N(X)}O(X^{\frac{N(X)-1}{2}}).$$

Отсюда снова для $S(k)$ приходим к асимптотической формуле (2.6.6), на этот раз с $A_p = A_\infty = 1$. Теорема доказана. [ж)]

З А М Е Ч А Н И Е. Совершенно аналогичным способом может быть установлена асимптотика $\omega(k)$ (2.I.I9).

Л Е М М А 2.6.I. При условиях теоремы 2.6.I для величины

$$\omega(k)=\sqrt{\frac{k}{2}}\exp\left\{\int_{X(k)}^{1}\sqrt{W(t)}\,dt+k^2\int_0^{X(k)}\frac{dt}{\sqrt{W(t)-k^2}+\sqrt{W(t)}}\right\} \qquad (2.6.24)$$

в случаях а) (2.6.2) и в) (2.6.5) справедлива асимптотика при $k\to\infty$

$$\omega(k)=\exp\left\{kX(k)\left[B_p+o(1)\right]\right\}, \qquad (2.6.25)$$

где

$$B_p=\frac{2}{p-2}+\frac{1}{p}\int_1^\infty\frac{t^{-1-\frac{1}{p}}}{\sqrt{t-1}+\sqrt{t}}\,dt=\frac{2}{p-2}A_{\frac{2p}{p-2}}. \qquad (2.6.26)$$

Отсюда в силу (2.5.I), (2.6.2I) следует

Т Е О Р Е М А 2.6.3. При условиях теоремы 2.6.I в случаях а) (2.6.2) и в) (2.6.5) для функции Йоста справедлива следующая асимптотика при $k\to\infty$:

$$f(k)=\exp\left\{-kX(k)\left[B_p-iA_p+o(1)\right]\right\}, \qquad (2.6.27)$$

где A_p, B_p определены (2.6.4), (2.6.26).

При тех же условиях для спектральной функции $\rho(\lambda)$ задачи (I.I.I), (I.2.7) имеем при $k\to+\infty$

$$\frac{d\rho(k^2)}{dk}\sim\frac{2}{\pi}\omega^2(k)=\exp\left\{2kX(k)\left[B_p+o(1)\right]\right\}. \qquad (2.6.28)$$

§ 7. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Из лемм 2.2.5, 2.3.I и 2.3.2, неравенств (2.2.28), (2.2.29) и условия B_σ вытекает

Л Е М М А 2.7.I. При некоторой постоянной $C=C_{\alpha,\eta}>0$ справедливы оценки (см. (2.4.5), (2.4.6)):

$$L(x,k)\leq\begin{cases} CW^{-1/4}(x)\exp\{-|\zeta(x,k)|\}, & (x,k^2)\in D_1,\\ C|W'(x)|^{-1/6}\exp\{-|\zeta(x,k)|\}, & (x,k^2)\in D_\eta^-,\\ C|W'(X)|^{-1/6}, & (x,k^2)\in D_\alpha\cup D_\eta^+,\\ C|W(X)|^{-1/4}, & (x,k^2)\in D_2,\end{cases} \qquad (2.7.I)$$

$$M(x,k)\leqslant\begin{cases} CW^{-1/4}(x)\exp\{|\zeta(x,k)|\}, & (x,k^2)\in D_1,\\ C|W'(X)|^{-1/6}\exp\{|\zeta(x,k)|\}, & (x,k^2)\in D_\eta^-,\\ C|W'(X)|^{-1/6}, & (x,k^2)\in D_\alpha\cup D_\eta^+,\\ CW^{-1/4}(X), & (x,k^2)\in D_2,\end{cases} \qquad (2.7.2)$$

$$M(x,k)\geqslant\begin{cases} CW^{-1/4}(x)\exp\{|\zeta(x,k)|\}, & x\leqslant X(k),\\ CW^{-1/4}(X), & x\geqslant X(k),\end{cases} \qquad (2.7.3)$$

ж) В частном случае, когда $V(z)$ – аналитическая функция, допускающая при $\operatorname{Re} z>0$ оценку $|V(z)|<C|z|^{-4}$, асимптотика, подобная (2.6.I), получена в [6]. (Там, однако, пропущено слагаемое $\pi/2$ в показателе экспоненты).

где области D_α, $D^\pm_\eta$ и др. определены формулами (2.2.25) - (2.2.27).

СЛЕДСТВИЕ I. Справедливо неравенство

$$F(x,k) \leqslant CF_1(x,k), \quad (x,k^2)\in D, \tag{2.7.4}$$

где $F(x,k)$ - (2.5.I3) и положено

$$F_1(x,k) = \begin{cases} W^{-1/2}(x), & (x,k_2)\in D_1, \\ |W'(X)|^{-1/3}, & (x,k^2)\in D_\eta, \\ W^{-1/2}(X) = |k|^{-1}, & (x,k^2)\in D_2. \end{cases} \tag{2.7.5}$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$F(x,k) = L(x,k)\,M(x,k). \tag{2.7.6}$$

ЛЕММА 2.7.2. При $k\to\infty$ имеем (см. (2.5.I3), (2.I.I2))

$$\int_0^\infty F(x,k)\,R(x,k)\,dx \to 0. \tag{2.7.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $\eta>0$ так, чтобы была справедлива лемма 2,3,3, и запишем

$$J(k) = \int_0^\infty F(x,k)\,R(x,k)\,dx = \int_0^{X_\eta^-(k)} + \int_{X_\eta^-}^{X_\eta^+} + \int_{X_\eta^+}^\infty = I_1+I_2+I_3, \tag{2.7.8}$$

где $X^\pm_\eta(k)$ определены (2.2.II), (2.2.24). Из (2.3.I2), (2.7.4), леммы 2.2.5 (см. неравенства (2.2.I9), (2.2.20) при $x=X(k)$, $x^\pm_\eta = X^\pm_\eta$), с учетом условия B_σ, получаем

$$I_2(k) \leqslant C_\eta \frac{|W'(X)|^{2/3}}{W(X)} = \dot{O}\left\{W^{-\frac{2}{3}\delta}(X)\right\} = o_k(1), \quad (k\to\infty).$$

Из (2.7.4), (2.7.5) и (2.3.2) получаем при $(x,k^2)\in D_1$

$$F(x,k)|R(x,k)| \leqslant \frac{5}{36}\frac{|q(x,k)|}{|\zeta(x,k)|^2} + C_\eta\left(\frac{W'^2(x)}{W^{5/2}(x)} + \frac{W''(x)}{W^{3/2}(x)}\right). \tag{2.7.9}$$

Замечая, что при $x<X(k)$ $|q(x,k)| = -|\zeta(x,k)|'$, из (2.3.7) получаем

$$\int_0^{X_\eta^-} \frac{|q(x,k)|}{|\zeta(x,k)|^2}\,dx = \frac{1}{|\zeta(X_\eta^-,k)|} \leqslant CW^{-\delta}(X) = o_k(1). \quad (k\to\infty) \tag{2.7.I0}$$

Из (I.I.7), (I.I.8) имеем

$$\int_0^{X_\eta^-}\left(\frac{W'^2(x)}{W^{5/2}(x)} + \frac{W''(x)}{W^{3/2}(x)}\right)dx \leqslant CW^{-\delta}(X) = o_k(1). \quad (k\to\infty) \tag{2.7.II}$$

Неравенства (2.7.9) - (2.7.II) дают

$$I_1(k)\to 0, \quad k\to\infty.$$

Аналогично получаем

$$I_3(k)\to 0, \quad k\to\infty.$$

Лемма доказана.

Л Е М М А 2.7.3. Пусть $U(x)$ удовлетворяет условиям (2.I.3) - (2.I.5), а $F(x,k)$ определено (2.5.13). Тогда при любом $a<\infty$

$$\int_0^a F(x,k)\,|U(x)|\,dx \to 0, \qquad k\to\infty, \tag{2.7.12}$$

а если еще $U(x)\in L(1,\infty)$, то можно положить $a=\infty$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из оценки (2.7.4) для $F(x,k)$ получаем

$$\int_{1/2}^a F(x,k)\,|U(x)|\,dx \le \frac{C}{|k|}\int_{1/2}^a |U(x)|\,dx = o_k(1), \quad (k\to\infty).$$

В частности, если $U(x)\in L(1,\infty)$, то здесь можно положить $a=\infty$. Для доказательства (2.7.12) остается показать, что

$$\int_0^{1/2} |p(x)|\,F(x,k)\,dx \to 0, \qquad k\to\infty, \tag{2.7.13}$$

$$\int_0^{1/2} |z(x)|\,F(x,k)\,dx \to 0, \qquad k\to\infty. \tag{2.7.14}$$

Равенство (2.7.13) непосредственно вытекает из (2.7.4) и условия B_σ, если учесть, что $|X_\eta^+ - X_\eta^-|\to 0$ при $k\to\infty$. ($X_\eta^\pm(k)$ - см. (2.2.11), (2.2.24))

Для доказательства (2.7.14) запишем

$$\int_0^{1/2} |z(x)|\,F(x,k)\,dx = \int_0^{X_\eta^-} + \int_{X_\eta^-}^{X_\eta^+} + \int_{X_\eta^+}^{1/2} = I_1(k)+I_2(k)+I_3(k). \tag{2.7.15}$$

Так как $X_\eta^-(k)\to 0$ при $k\to\infty$, то из (2.7.4) получаем

$$I_1(k)\to 0, \qquad k\to\infty.$$

Для того, чтобы оценить $I_3(k)$, определим $\tilde X=\tilde X(k), (\tilde X > X(k))$ так, чтобы $W(\tilde X)/W(X)\to 0$ и $\tilde X(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Тогда, с учетом (2.7.4), имеем

$$I_3(k) = O\left\{\int_{X_\eta^+}^{1/2} \frac{|z(x)|}{\sqrt{W(X)}}\,dx\right\} = O\left\{\int_X^{\tilde X} \frac{dt}{t^{1-\varepsilon}}\right\} + O\left\{\sqrt{\frac{W(\tilde X)}{W(X)}}\int_{\tilde X}^{1/2}\frac{dt}{t^{1-\varepsilon}}\right\} = o_k(1), \ (k\to\infty)$$

Осталось рассмотреть $I_2(k)$. Запишем

$$I_2(k) = \int_{X_\eta^-(k)}^{X_{-\alpha}} + \int_{X_{-\alpha}}^{X_{+\alpha}} + \int_{X_{+\alpha}}^{X_\eta^+} = J_1(k) + J_2(k) + J_3(k),$$

где $X_{\pm\alpha}(k)$ определены (2.2.12), (2.2.13), (2.2.24). Для $J_1(k)$ воспользуемся оценками (2.3.1), (2.2.19) (при $x=X(k), x_\eta^- = X_\eta^-$) и (2.2.8)

$$J_1(k) = O\left\{\frac{\sqrt{W(X_\eta^-)}}{\sqrt{|W'(X_\eta^-)|}\,(X_\eta^-)^{1-\varepsilon}} \int_{X_\eta^-}^{X_{-\alpha}} \frac{dt}{(t-X)^{1/2}}\right\} = O\left\{\sqrt{\frac{W(X_\eta^-)}{|W'(X_\eta^-)|}}\,\frac{|X_\eta^- - X|^{1/2}}{(X_\eta^-)^{1-\varepsilon}}\right\} =$$

$$= O\left\{W(X_\eta^-)\,|W'(X_\eta^-)|^{-1}\,(X_\eta^-)^{\varepsilon-1}\right\} = O\left\{(X_\eta^-)^{\varepsilon}\right\} = o_k(1), \quad (k\to\infty).$$

$J_3(k)$ оценивается аналогично.

Для $J_2(k)$ из оценок (2.2.21), (2.2.22), (2.2.8) и леммы 2.2.6 получаем

$$J_2(k) \le C\int_{X_{-\alpha}}^{X_{+\alpha}} \frac{W^{1/2}(t)\,dt}{|W'(t)|^{1/3}\,t^{1-\varepsilon}} = O\left\{\frac{\sqrt{W(X_{-\alpha})}}{|W'(X_{-\alpha})|^{2/3}}\,\frac{1}{X_{-\alpha}^{1-\varepsilon}}\right\} = O\left\{\frac{X_{-\alpha}^{-\frac{1}{3}+\varepsilon}}{W^{1/6}(X_{-\alpha})}\right\},$$

но из (I.I.6) следует, что $x^{-\frac{1}{3}-\varepsilon}/W^{\frac{1}{6}}(x)=O(x^{\varepsilon})$ при некотором $\varepsilon>0$. Тем самым показано, что и $J_2(k)\to 0$ при $k\to\infty$. Лемма доказана.

Глава Ш

ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, "ПРИВЯЗАННЫЕ К БЕСКОНЕЧНОСТИ"

§ I. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЯДЕР $\mathcal{K}(x,t)$ ПРИ $x\to 0$.

При условии L (I.4.I) основное решение уравнения рассеяния (I.I.I) допускает, как известно [9,I0,3], представление с помощью оператора преобразования, "привязанного к бесконечности"

$$f(x,k)=e^{ikx}+\int_x^\infty \mathcal{K}(x,t)e^{ikt}dt, \qquad (3.I.I)$$

где

$$\int_x^\infty |\mathcal{K}(x,t)|\,dt<\infty, \qquad (3.I.2)$$

$$\mathcal{K}(x,x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty V(t)\,dt, \qquad (3.I.3)$$

и при $0<x\le t<\infty$ ядро $\mathcal{K}(x,t)$ определяется интегральным уравнением

$$\mathcal{K}(x,t)=\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty V(s)ds+\frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}}V(s)ds\int_{t+x-s}^{t+s-x}\mathcal{K}(s,u)du+$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty V(s)ds\int_s^{t+s-x}\mathcal{K}(s,u)du. \qquad (3.I.4)$$

Все эти факты, очевидно, остаются в силе при $x>0$ независимо от поведения потенциала при $x\to 0$.

Выясним некоторые свойства ядра $\mathcal{K}(x,t)$ оператора преобразования при $x\to 0$ в случае высокосингулярного потенциала.

Т Е О Р Е М А 3.I.I. Пусть потенциал $V(x)$ в уравнении (I.I.I) удовлетворяет условиям § I, гл. П, $\mathcal{K}(x,t)$ – ядро оператора преобразования (3.I.I). Тогда при $x\to 0$ существует предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathcal{K}(x,t)}{\gamma(x)}=\mathcal{K}(t)\not\equiv 0, \qquad 0\le t<\infty, \qquad (3.I.5)$$

где $\mathcal{K}(t)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, ограниченная вместе с каждой из своих производных $\mathcal{K}^{(n)}(t)$ в метриках $C[0,\infty)$ и $L^p(0,\infty)$ с любым $p\geqslant 1$, причем

$$\mathcal{K}(0)=\mathcal{K}^{(n)}(0)=0, \qquad (n=1,2,\dots), \qquad (3.I.6)$$

$$\sup_t|\mathcal{K}^{(n)}(t)|\le C\Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta}\right), \quad (C>0,\ n=0,1,\dots). \qquad (3.I.6')$$

Сходимость к пределу (3.I.5) имеет место в метриках $C[0,\infty)$ *) и в $L^p(0,\infty)$ при любом $p\geqslant 1$.

С Л Е Д С Т В И Е. При условиях теоремы 3.I.I. функция Йоста $f(k)$ допускает интегральное представление

$$f(k)=\int_0^\infty \mathcal{K}(t)e^{ikt}\,dt, \quad (\operatorname{Im}k\geqslant 0), \qquad (3.I.7)$$

где $\mathcal{K}(t)$ определено (3.I.5).

---

*) Само допредельное выражение $\mathcal{K}(x,t)/\gamma(x)$ к $C[0,\infty)$ не принадлежит, т.к. имеет при $t=x$ разрыв первого рода. ($\mathcal{K}(x,t)=0$ при $t<x$).

Если при этом $V(x) \geqslant 0 \quad (0 < x < \infty)$, то $f(k)$ эрмитово-позитивна.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Обозначим

$$\mathcal{K}_x(t) = \begin{cases} \mathcal{K}(x,t)/\gamma(x), & 0 < x \leq t < \infty, \\ 0 & , -\infty < t < x, \end{cases} \tag{3.I.8}$$

$$\mathcal{K}_{1x}(t) = \begin{cases} \mathcal{K}_x(t) - \frac{1}{2\gamma(x)} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} V(s)ds, & 0 < x \leq t < \infty \\ 0 & , \quad -\infty < t < x. \end{cases} \tag{3.I.9}$$

Функция $\mathcal{K}_{1x}(t)$ непрерывна при $-\infty < t < \infty$, так как $\mathcal{K}_{1x}(t)/_{t=x} = 0$ в силу (3.I.3).

Положим далее

$$\Phi_1(x,k) = \frac{f(x,k)}{\gamma(x)}, \tag{3.I.10}$$

$$\Phi_2(x,k) = \Phi_1(x,k) - \frac{e^{ikx}}{\gamma(x)}, \tag{3.I.11}$$

$$\Phi_3(x,k) = \Phi_2(x,k) - \frac{1}{\gamma(x)} \int_x^{\infty} \frac{\sin k(t-x)}{k} V(t) e^{ikt} dt. \tag{3.I.12}$$

Из (3.I.I) имеем:

$$\Phi_2(x,k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_x(t) e^{ikt} dt, \tag{3.I.13}$$

а так как

$$\frac{1}{2}\int_x^{\infty} e^{ikt} dt \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} V(s)ds = \frac{1}{2}\int_x^{\infty} V(t)dt \int_x^{2t-x} e^{iks} ds = \int_x^{\infty} \frac{\sin k(t-x)}{k} V(t) e^{ikt} dt,$$

то

$$\Phi_3(x,k) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{1x}(t) e^{ikt} dt. \tag{3.I.14}$$

Л Е М М А 3.I.I. Сходимость

$$\lim_{x \to 0} \Phi_j(x,k) = f(k) \tag{3.I.15}$$

имеет место в метрике $C(-\infty, \infty)$ при j = I,2,3, а также в $L^p(-\infty,\infty)$ -для $\Phi_2(x,k)$ при $p>1$ и для $\Phi_3(x,k)$ при $p > 1/2$.

Доказательство этой леммы будет приведено в следующем параграфе. А сейчас заметим, обращая (3.I.I4), что

$$\mathcal{K}_{1x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_3(x,k) e^{-ikt} dk,$$

откуда, в силу леммы, следует сходимость в метрике $C(-\infty, \infty)$

$$\lim_{x \to 0} \mathcal{K}_{1x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(k) e^{ikt} dk = \mathcal{K}(t). \tag{3.I.16}$$

А так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2\gamma(x)} \int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty} V(s)ds = 0$$

равномерно по t, $x \leq t < \infty$, то и

$$\lim_{x \to 0} \mathcal{K}_x(t) = \mathcal{K}(t) \qquad (\text{в } C[0,\infty)). \tag{3.I.17}$$

Теперь покажем, что

$$\int_0^\infty |\mathcal{K}(t)|\,dt < \infty \tag{3.I.18}$$

и что

$$\lim_{x\to 0} \int_0^\infty |\mathcal{K}_x(t) - \mathcal{K}(t)|\,dt = 0. \tag{3.I.19}$$

Отсюда, в силу (3.I.17), следует сходимость $\mathcal{K}_x(t) \to \mathcal{K}(t)$ в $L^p(0,\infty)$ при любом $p \geqslant 1$, причем $\mathcal{K}(t) \in L^p(0,\infty)$ в силу (3.I.18) и ограниченности $\mathcal{K}(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$.

Переходим к доказательству (3.I.18) и (3.I.19).

Из интегрального уравнения (3.I.4) для $\mathcal{K}(x,t)$ следует, что если $V(x) \geqslant 0$, то и $\mathcal{K}(x,t) \geqslant 0$, а если $|V(x)| \leqslant \tilde{V}(x)$, то и

$$|\mathcal{K}(x,t)| \leqslant \tilde{\mathcal{K}}(x,t),$$

где волной отмечены величины, отвечающие потенциалу $\tilde{V}(x)$.

Положим

$$\tilde{V}(x) = W(x) + |\mathcal{U}(x)|. \tag{3.I.20}$$

Тогда $\gamma(x) = \tilde{\gamma}(x)$ и, следовательно,

$$|\mathcal{K}_x(t)| \leqslant \tilde{\mathcal{K}}_x(t), \quad |\mathcal{K}(t)| \leqslant \tilde{\mathcal{K}}(t). \tag{3.I.21}$$

Поэтому (3.I.18) достаточно установить для $\tilde{\mathcal{K}}(t)$.

Обозначим

$$\sigma_x(t) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\mathcal{K}}_x(s)\,ds,$$

тогда (3.I.13) запишется в виде

$$\tilde{\Phi}_2(x,k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt}\,d\sigma_x(t). \tag{3.I.22}$$

Так как $\tilde{\mathcal{K}}_x(t) \geqslant 0$, при любом $x > 0$ $\int_x^\infty \tilde{\mathcal{K}}_x(t)\,dt < \infty$, то $\sigma_x(t)$ при $x > 0$ является функцией распределения, то есть ограниченной неубывающей функцией, и, следовательно, при любом $x > 0$ $\tilde{\Phi}_2(x,k)$ в силу (3.I.22) есть положительно определенная (= эрмитово-позитивная) функция. Из леммы 3.I.I. следует, что

$$|\tilde{\Phi}_2(x,k)| \leqslant C, \quad (0 < x < \infty, -\infty < k < \infty)$$

и предел $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{\Phi}_2(x,k) = \tilde{f}(k)$ есть непрерывная и ограниченная на оси функция. Из равномерной сходимости (3.I.17) вытекает, что при любом $t < \infty$

$$\lim_{x\to 0} \sigma_x(t) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{\mathcal{K}}(s)\,ds \stackrel{def}{=} \sigma(t). \tag{3.I.23}$$

Значит, к последовательности $\tilde{\Phi}_2(x,k)$ при $x \to 0$ применима теорема о сходящихся последовательностях положительно определенных функций [24, стр. II0], в силу которой $\tilde{f}(k)$ является положительно определенной функцией, а $\sigma(t)$ -соответствующая ей функция распределения

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt}\,d\sigma(t) = \int_0^\infty e^{ikt}\,\tilde{\mathcal{K}}(t)\,dt,$$

$$\sigma(\infty) = \int_0^\infty \tilde{\mathcal{K}}(t)\,dt < \infty, \quad (\tilde{\mathcal{K}}(t) \geqslant 0). \tag{3.I.24}$$

Этим (3.I.18) доказано. Докажем теперь (3.I.19).

Заметим, что $\lim\limits_{x\to 0} \tilde{\Phi}_2(x,0) = \tilde{f}(0)$, то есть

$$\lim_{x\to 0}\int_0^\infty \tilde{\mathcal{K}}_x(t)\,dt=\int_0^\infty \tilde{\mathcal{K}}(t)\,dt. \tag{3.I.25}$$

Имеем:
$$\int_0^\infty |\mathcal{K}_x(t)-\mathcal{K}(t)|\,dt\le\int_0^N |\mathcal{K}_x(t)-\mathcal{K}(t)|\,dt+$$
$$+\int_N^\infty |\mathcal{K}_x(t)|\,dt+\int_N^\infty |\mathcal{K}(t)|\,dt=J_1+J_2+J_3. \tag{3.I.26}$$

Выбирая достаточно большое N, можно сделать $J_3<\varepsilon$, затем, беря достаточно малые x, получим $J_1<\varepsilon$ в силу (3.I.I7). Оценим J_2:
$$J_2\le\int_N^\infty \tilde{\mathcal{K}}_x(t)\,dt\le\left|\int_0^\infty\{\tilde{\mathcal{K}}_x(t)-\tilde{\mathcal{K}}(t)\}\,dt\right|+$$
$$+\left|\int_0^N\{\tilde{\mathcal{K}}_x(t)-\tilde{\mathcal{K}}(t)\}\,dt\right|+\int_N^\infty\tilde{\mathcal{K}}(t)\,dt.$$

Здесь последний интеграл в правой части $<\varepsilon$ при достаточно больших N, в силу (3.I.24), а первые два интеграла стремятся к нулю при $x\to 0$ в силу (3.I.25) и (3.I.I7) соответственно. Поэтому J_2 и вся правая часть в (3.I.26) могут быть сделаны сколь угодно малыми при больших N и малых x. Сходимость (3.I.I9) доказана.

Исследуем теперь дифференциальные свойства $\mathcal{K}(t)$. Из представления (3.I.I6) и оценки (2.5.5) для $f(k)$ следует бесконечная дифференцируемость $\mathcal{K}(t)$ $(-\infty<t<\infty)$, а так как $\mathcal{K}(t)=0$ при $t<\infty$, то получаем (3.I.6).

Из (3.I.I6), дифференцируя n раз по t и затем один раз интегрируя по частям, имеем при $n\ge 1$:
$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{(n)}(t)&=\frac{(-i)^n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k^n f(k)e^{-ikt}\,dk=\\&=\frac{(-i)^{n+1}}{2\pi t}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{nk^{n-1}f(k)+k^n\dot f(k)\right\}e^{-ikt}\,dk.\end{aligned}\tag{3.I.27}$$

Здесь внеинтегральные члены пропали в силу оценки (2.5.5). Учитывая (2.5.5), (2.5.30), получаем отсюда, что
$$t\mathcal{K}^{(n)}(t)\in L^2(0,\infty),\qquad n=1,2,\dots,$$
поэтому $\mathcal{K}^{(n)}(t)\in L^1(0,\infty)$, а, в силу ограниченности $\mathcal{K}^{(n)}(t)$, из этого вытекает, что
$$\mathcal{K}^{(n)}(t)\in L^{(p)}(0,\infty),\quad p\ge 1.$$

Наконец, (3.I.6') следует из (3.I.I6) и (2.5.5), (см. [30]).

Теорема доказана.

З А М Е Ч А Н И Е. С помощью аналогичных рассуждений можно доказать, что в метриках $C[0,\infty)$ и $L^p(0,\infty)$ при любом $p\ge 1$ имеет место сходимость
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\gamma'(x)}\left\{\mathcal{K}'_x(x,t)+\frac{1}{4}V\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}=\mathcal{K}(t). \tag{3.I.28}$$

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.I.I.

Заметим, что $f(x,k)$ при $x>0$ удовлетворяет уравнению
$$f(x,k)=e^{ikx}+\int_x^\infty\frac{\sin k(t-x)}{k}V(t)f(t,k)\,dt. \tag{3.2.I}$$

Отсюда в силу (3.I.I0), (3.I.II), (3.I.I2) следует
$$\Phi_2(x,k)=\int_x^\infty L(x,t;k)\,\Phi_1(t,k)\,dt, \tag{3.2.2.}$$

$$\Phi_3(x,k)=\int_x^\infty L(x,t;k)\,dt\int_t^\infty L(t,s;k)\,\Phi_1(s,k)\,ds, \qquad (3.2.3)$$

где положено

$$L(x,t;k)=\frac{\sin k(t-x)}{k}\;\frac{\gamma(t)}{\gamma(x)}\,V(t). \qquad (3.2.4)$$

ЛЕММА 3.2.I. Справедлива равномерная по x, k оценка

$$\int_x^\infty |L(x,t;k)|\,dt \le const, \qquad 0<x,k^2<\infty. \qquad (3.2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|V(t)|\le \tilde V(t)$ (3.I.20), то

$$|L(x,t;k)|\le |L(x,t;0)|\le \tilde L(x,t;0)=(t-x)\frac{\gamma(t)}{\gamma(x)}\tilde V(t).$$

Поэтому (3.2.5) достаточно доказать для $\tilde L(x,t;0)$ при $x\in(0,\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon>0$. Положим $\int_x^\infty=\int_x^\varepsilon+\int_\varepsilon^\infty$. Очевидно,

$$\frac{1}{\gamma(x)}\int_\varepsilon^\infty (t-x)\,\gamma(t)\,\tilde V(t)\,dt<const, \qquad x\in(0,\varepsilon) \qquad (3.2.6)$$

Оценим $\int_x^\varepsilon$. Возьмем решение $\tilde\Psi(x,0)$ (I.2.IO), отвечающее уравнению $y''-\tilde V(x)\,y=0$, и пусть ε настолько мало, что

$$\frac12\le\tilde\Psi(x,0)/\gamma(x)\le 2, \qquad (0\le x\le\varepsilon).$$

Тогда, так как

$$\frac{\tilde\Psi(x,0)}{\gamma(x)}=\frac{C_1x+C_2}{\gamma(x)}+\int_x^\varepsilon \tilde L(x,t;0)\frac{\tilde\Psi(t,0)}{\gamma(t)}\,dt,$$

получаем

$$\int_x^\varepsilon \tilde L(x,t;0)\,dt\le 2\left(2+\frac{|C_1\varepsilon|+|C_2|}{\gamma(\varepsilon)}\right), \qquad x\in(0,\varepsilon).$$

Это вместе с (3.2.6) доказывает лемму.

ЛЕММА 3.2.2. При некоторых $C>0$, $C_1>0$ справедливы оценки $(0<x<\infty,\ 0<k^2<\infty)$

$$|\Phi_1(x,k)|\le C\exp\left\{-C_1\left(\min\{k^2, W(x)\}\right)^\delta\right\}, \qquad (3.2.7)$$

$$|\Phi_2(x,k)|\le\frac{C}{|k|+1}, \qquad (3.2.8)$$

$$|\Phi_3(x,k)|\le\frac{C}{k^2+1}. \qquad (3.2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.5.2)

$$|\Phi_1(x,k)|\le C\frac{\sqrt{k}\,M(x,k)}{\gamma(x)}.$$

Подставляя сюда оценку для $M(x,k)$ (2.7.2) и выражение для $\gamma(x)$ (I.2.I), после очевидных преобразований (считая $0<x<h_0$, $k^2\ge W(h_0)$), находим

$$|\Phi_1(x,k)|\le C\exp\left\{-\int_{\max\{x,X(k)\}}^1\sqrt{W(t)}\,dt\right\}\cdot\begin{cases}\min\{\sqrt[4]{W(x)},\sqrt{k}\}, & (x,k^2)\notin D_\eta,\\ \dfrac{k}{|W'(X(k))|^{1/6}}, & (x,k^2)\in D_\eta.\end{cases}$$

Отсюда получаем (3.2.7) в силу (I.2.6), если учесть, что $|W'(x)|\ge C_1W(x)$, а $W(x)$ и k^2 – величины одного порядка при $(x,k^2)\in D_\eta$ (2.2.28).

Докажем (3.2.8). Заметим, что, используя условие B_δ (I.I.4), легко показать (ср. (I.2.6).), что

$$\frac{\gamma(x_\eta^+)}{\gamma(x)} \le C \exp\left\{-C_1 W^\delta(x)\right\}, \qquad (3.2.10)$$

где $x_\eta^+(x)$ определено (2.2.II), $0 < x \le h_0$. Запишем (3.2.2) в виде

$$\Phi_2(x,k) = \int_x^{x_\eta^+} + \int_{x_\eta^+}^{\infty} L(x,t;k)\,\Phi_1(t,k)\,dt = J_1 + J_2(x,k). \qquad (3.2.11)$$

Отсюда, учитывая (3.2.4) и (3.2.10), получаем

$$|J_2| \le \frac{C}{k} \exp\left\{-C_1 W^\delta(x)\right\} \int_x^{\infty} |V(t)|\,dt \le \frac{C}{k}. \qquad (3.2.12)$$

В силу (3.2.7) имеем также

$$|J_1| \le \begin{cases} \dfrac{C}{|k|} \displaystyle\int_x^{x_\eta^+} |V(t)| \exp\left\{-C_1 W^\delta(t)\right\} dt, & x \ge X(k), \\ C \exp\left\{-C_1 |k|^{2\delta}\right\} \displaystyle\int_x^{x_\eta^+} |L(x,t;k)|\,dt, & 0 < x \le X(k), \end{cases}$$

откуда, учитывая (3.2.5), получаем $|J_1(x,k)| < \frac{C}{k}$. Следовательно, (3.2.8), в силу (3.2.11), (3.2.12), доказано. Оценка (3.2.9) получается аналогично. Лемма 3.2.2 доказана.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О Л Е М М Ы 3.I.I из оценок (3.2.7), (3.2.8), (3.2.9) и из оценки для $f(k)$ (2.5.5) вытекает немедленно, если учесть, что в силу теоремы I.2.2 сходимость

$$\lim_{x\to 0} \Phi_j(x,k) = f(k)$$

равномерна по k на любом конечном интервале.

Г л а в а IУ

ТЕОРЕМА ВИНЕРА-ПЭЛИ И ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ РЕГУЛЯРНОГО РЕШЕНИЯ

§ I. АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ВИНЕРА-ПЭЛИ

Пусть потенциал $V(x)$ в уравнении (I.I.I) удовлетворяет условиям A_2, B_δ, C_2 из § I, гл.П. Тогда справедлива следующая

Т Е О Р Е М А 4.I.I. Для того, чтобы функция $G(k)$ допускала представление

$$G(k) = \int_0^\sigma g(x)\,\varphi(x,k)\,dx, \quad (\sigma < \infty), \qquad (4.1.1)$$

где $g(x) \in L^2(0,\sigma)$, необходимы и достаточны следующие условия:

а) $G(k)$ – целая четная функция экспоненциального типа $\le \sigma$,

б)
$$G(k)\,\omega(k) \in L^2(0,\infty), \qquad (4.1.2)$$

где $\omega(k)$ определено (2.I.I9).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О проведем предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ в краевой задаче для уравнения (I.I.I) на интервале $[\varepsilon, \infty)$ с граничными условиями

$$\varphi_\varepsilon(\varepsilon,k) = 0, \qquad \varphi'(\varepsilon,k) = 2\gamma_0^{\prime}(\varepsilon). \qquad (4.1.3)$$

Л Е М М А 4.I.I. Для того, чтобы $G(k)$ допускала представление

$$G(k) = \int_\varepsilon^{\sigma+\varepsilon} g_\varepsilon(x)\,\varphi_\varepsilon(x,k)\,dx, \quad \sigma < \infty, \qquad (4.1.4)$$

где $q_\varepsilon(x) \in L^2(\varepsilon, \sigma+\varepsilon)$, необходимо и достаточно, чтобы $G(k)$ удовлетворяла условию а) теоремы 4.I.I и чтобы было

$$kG(k) \in L^2(0,\infty). \tag{4.I.5}$$

Это – хорошо известный результат, доказательство которого непосредственно вытекает из теоремы Винера-Пэли и из существования операторов преобразования, связывающих $\varphi_\varepsilon(x,k)$ с $\frac{\sin k(x-\varepsilon)}{k}$

$$\varphi_\varepsilon(x,k) = 2\gamma_0'(\varepsilon)\left\{\frac{\sin k(x-\varepsilon)}{k} + \int_\varepsilon^x L(x,t)\,\frac{\sin k(t-\varepsilon)}{k}\,dt\right\}$$

и обратных к ним операторов того же вида, что обеспечено условием (I.I.2).

Л Е М М А 4.I.2. Пусть $V(x)$ удовлетворяет дополнительно условию L (I.4.I). Тогда для того, чтобы непрерывная при $-\infty < \lambda < \infty$ функция $G(\sqrt{\lambda})$ принадлежала $L^2_\rho(-\infty,\infty)$, где $\rho(\lambda)$ – спектральная функция краевой задачи (I.I.I), (I.2.7), необходимо и достаточно условие (4.I.2).

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О вытекает непосредственно из выражения для спектральной функции (теорема I.4.4) и из оценок для $f(k)$ (2.5.4).

Л Е М М А 4.I.3. Пусть $\rho_\sigma(\lambda)$ и $\rho_{\varepsilon\sigma}(\lambda)$ – спектральные функции краевых задач (I.2.7) и (4.I.3) для уравнения (I.I.I) с потенциалом $V_\sigma(x)$ (I.4.9). И пусть $G(k)$ непрерывна и удовлетворяет (4.I.2). Тогда при любых $\varepsilon>0, \sigma>0, N>0$

$$\int_N^\infty |G(k)|^2\,d\rho_{\sigma\varepsilon}(k^2) \le C_\sigma \int_N^\infty |G(k)|^2\,d\rho_\sigma(k^2). \tag{4.I.6}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Так как при $k>0$ в силу (I.4.2I)

$$\frac{d\rho_{\varepsilon\sigma}(k^2)}{dk} = \frac{2}{\pi}\,\frac{k^2}{|2\gamma_0'(\varepsilon) f_\sigma(\varepsilon,k)|^2}, \tag{4.I.7}$$

а в силу (I.4.I6)

$$\frac{d\rho_\sigma(k^2)}{dk} = \frac{2}{\pi}\,\frac{k^2}{|f_\sigma(k)|^2}, \tag{4.I.8}$$

то для доказательства леммы достаточно показать, что при любом $\sigma<\infty$

$$\left|\frac{f_\sigma(k)}{2\gamma_0'(\varepsilon) f_\sigma(\varepsilon,k)}\right| \le C(\sigma), \qquad N < k < \infty. \tag{4.I.9}$$

Если учесть, с одной стороны, что $2\gamma_0'(\varepsilon)\,\gamma(\varepsilon) \geq C > 0$ при $\varepsilon \geq 0$, а с другой, оценки (2.5.2), (2.5.4), доказательство (4.I.9) сводится к проверке неравенства

$$\left|\frac{\sqrt{k}\,\gamma(\varepsilon)}{\omega(k) M(\varepsilon,k)}\right| \le C, \qquad (\varepsilon,k^2)\in D. \tag{4.I.I0}$$

Из (2.I.I9), (2.7.3) получаем

$$\frac{\sqrt{k}}{\omega(k)}\,\frac{\gamma(x)}{M(x,k)} \le \begin{cases} C\exp\left\{-k^2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{W(t)-k^2}+\sqrt{W(t)}}\right\}, & x \le X(k), \\ C\sqrt{|k|}\exp\left\{-k^2\int_0^X \frac{dt}{\sqrt{W(t)-k^2}+\sqrt{W(t)}}\right\}, & X(k) \le x. \end{cases}$$

Но в силу условия B_σ (I.I.4) при $k^2 \geq W(h_0)$

$$k^2\int_0^{X(k)} \frac{dt}{\sqrt{W(t)-k^2}+\sqrt{W(t)}} \geq \frac{k^2}{2M}\int_0^{X(k)} \frac{|W'(t)|\,dt}{W^{2-\delta}(t)} = C|k|^{2\delta},$$

что вместе с предыдущей оценкой дает (4.I.I0). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.I.I. Необходимость условия а) следует из представления (4.I.I) в силу экспоненциальной оценки для $\varphi(x,k)$ (теорема I.3.I). Необходимость условия б) (4.I.2) следует из (4.I.I) в силу леммы 4.I.2, так как в силу (4.I.I) $G(\sqrt{\lambda})\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$, ибо

$$\varphi(x,k)=\varphi_\sigma(x,k)\qquad (0<x\leqslant\sigma) \tag{4.I.II}$$

(ρ_σ, φ_σ отвечают потенциалу V_σ (I.4.9)).

Докажем достаточность условий теоремы. В силу (4.I.II) достаточно установить представление (4.I.I) для построенного по $V(x)$ финитного потенциала $V_\sigma(x)$, который не имеет виртуального уровня (см. лемму I.4.I). Последующие рассуждения относятся к краевым задачам (I.2.7) или (4.I.3), отвечающим потенциалу $V_\sigma(x)$, однако, индекс σ при всех соответствующих величинах опущен.

Из леммы 4.I.2. следует, что $G(\sqrt{\lambda})\in L^2_\rho(-\infty,\infty)$ и, следовательно, в силу ортогональности спектральной функции, отвечающей финитному потенциалу (см. теорему I.4.4), имеем

$$G(k)=\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_0^N g(x)\varphi(x,k)\,dx, \tag{4.I.I2}$$

где $g(x)\in L^2(0,\infty)$, а интеграл сходится в $L^2_\rho(-\infty,\infty)$. Чтобы установить (4.I.I), остается показать, что при любых $\nu>\mu>\sigma$

$$\int_\mu^\nu |g(x)|^2\,dx=0. \tag{4.I.I3}$$

Так как из (4.I.2) следует (4.I.5) в силу (2.I.20), то $G(k)$ удовлетворяет условиям леммы 4.I.I. и представима в виде (4.I.4). Обращая (4.I.I2) и (4.I.4) с учетом вида спектральной функции для задач (I.2.7) или (4.I.3) с финитным потенциалом (см. (I.4.7), (I.4.II)), находим

$$g(x)=\sum_{j=1}^{n}M_j\,G(i\tau_j)\varphi(x,i\tau_j)+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(k)\varphi(x,k)\frac{k^2dk}{|f(k)|^2}, \tag{4.I.I4}$$

$$g_\varepsilon(x)=\sum_{j=1}^{n_\varepsilon}M_j^{(\varepsilon)}G(i\tau_j^{(\varepsilon)})\varphi(x,i\tau_j^{(\varepsilon)})+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G(k)\varphi_\varepsilon(x,k)\frac{k^2dk}{|2\gamma_0'(\varepsilon)f(\varepsilon,k)|^2}, \tag{4.I.I5}$$

где интегралы сходятся в $L^2(0,\infty)$ и в $L^2(\varepsilon,\infty)$ соответственно. Так как при достаточно малых $\varepsilon>0$ в силу леммы I.4.3 $n=n_\varepsilon$, то из (4.I.I4), (4.I.I5) получаем

$$\begin{aligned} g(x)-g_\varepsilon(x)&=\sum_{j=1}^{n}\left\{M_j\,G(i\tau_j)\varphi(x,i\tau_j)-M_j^{(\varepsilon)}G(i\tau_j^{(\varepsilon)})\varphi_\varepsilon(x,i\tau_j^{(\varepsilon)})\right\}+\\ &+\frac{2}{\pi}\int_0^N G(k)\varphi(x,k)\left\{\frac{k^2}{|f(k)|^2}-\frac{k^2}{|2\gamma_0'(\varepsilon)f(\varepsilon,k)|^2}\right\}dk+\\ &+\frac{2}{\pi}\int_0^N G(k)\left\{\varphi(x,k)-\varphi_\varepsilon(x,k)\right\}\frac{k^2dk}{|2\gamma_0'(\varepsilon)f(\varepsilon,k)|^2}+\\ &+\int_N^\infty G(k)\varphi(x,k)\,d\rho(k^2)-\int_N^\infty G(k)\varphi_\varepsilon(x,k)\,d\rho_\varepsilon(k^2)=\\ &=\sum\nolimits_\varepsilon(x)+I_{1N\varepsilon}(x)+I_{2N\varepsilon}(x)+g_N(x)-g_{\varepsilon N}(x). \end{aligned} \tag{4.I.I6}$$

Из лемм I.3.I и I.4.3 нетрудно получить, что равномерно по $\varepsilon\leqslant x\leqslant\nu<\infty$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum\nolimits_\varepsilon(x)=0. \tag{4.I.I7}$$

Так как потенциал по формуле (I.4.9) определен так, что виртуальный уровень отсутствует ($f(0)\neq 0$), то $|f(k)|>0$ при $0\leqslant k\leqslant N<\infty$ и равномерно по $0\leqslant k\leqslant N<\infty$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 2\gamma_0'(\varepsilon) f(\varepsilon,k) = f(k).$$

Поэтому при любом (фиксированном) $N<\infty$ равномерно по $0\leqslant x\leqslant \nu<\infty$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{1N\varepsilon}(x) = 0, \tag{4.I.I8}$$

а учитывая и лемму I.3.I., получаем также, что равномерно по $0\leqslant x\leqslant\nu<\infty$ при любом $N<\infty$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{2N\varepsilon}(x) = 0. \tag{4.I.I9}$$

Из равенства Парсеваля и (4.I.I6) имеем

$$\int_0^\infty |g_N(x)|^2 dx = \int_N^\infty |G(k)|^2 d\rho(k^2),$$

а в силу леммы 4.I.3 при любом $\varepsilon>0$ будет

$$\int_0^\infty |g^2_{N\varepsilon}(x)|dx = \int_N^\infty |G^2(k)| d\rho_\varepsilon(k^2) \leqslant C\int_N^\infty |G^2(k)| d\rho(k^2).$$

Поэтому для любых $0<\mu<\nu<\infty$ и $\varepsilon>0$

$$\lim_{N\to\infty}\left\{\int_\mu^\nu |g^2_N(x)|dx + \int_\mu^\nu |g^2_{N\varepsilon}(x)|dx\right\} = 0. \tag{4.I.20}$$

В силу (4.I.I7) - (4.I.20) получаем из (4.I.I6)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\mu^\nu |g(x)-g_\varepsilon(x)|^2 dx = 0;$$

а так как $g_\varepsilon(x) = 0$ при $\sigma+\varepsilon<\mu\leqslant x$ (в силу леммы 4.I.I), то (4.I.I3) установлено. Теорема доказана.

§ 2. ОПЕРАТОРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ

Т Е О Р Е М А 4.2.I. Пусть $\varphi_i(x,k)$ $(i=1,2)$ – регулярные решения уравнений

$$y'' + \{k^2 - V_i(x)\}y = 0 \qquad (i=1,2),$$

где $V_i(x) = W(x) + \mathcal{U}_i(x)$, и для W и $\mathcal{U}_i$ $(i=1,2)$ выполнены условия A_2, B_δ, C_2 (§ I, гл.П), а разность

$$\mathcal{U}_{ij}(x) = \mathcal{U}_i(x) - \mathcal{U}_j(x) \tag{4.2.I}$$

представима в виде $\mathcal{U}_{ij}(x) = p_{ij}(x) + z_{ij}(x)$, где при некотором $\varepsilon>0$

$$\int_0^{1/2} \frac{x^{\frac12-\varepsilon}}{W^{\delta/6}(x)}|p_{ij}(x)|dx + \sup_{0\leqslant x\leqslant\frac12}\frac{x|z_{ij}(x)|}{W^{\frac14-\varepsilon}(x)} < \infty \qquad (i,j=1,2) \tag{4.2.2}$$

(δ – то же, что и в (I.I.4)). Тогда

$$\varphi_i(x,k) = \varphi_j(x,k) + \int_0^x \mathcal{K}_{ij}(x,t)\varphi_j(t,k)dt, \quad (i,j=1,2) \tag{4.2.3}$$

и при любом $a<\infty$

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant a}\int_0^x \mathcal{K}^2_{ij}(x,t)dt < \infty. \tag{4.2.4}$$

Операторы преобразования (4.2.3), порождаемые ядрами $\mathcal{K}_{12}(x,t)$ и $\mathcal{K}_{21}(x,t)$ взаимно обратны.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О теоремы опирается на аналог теоремы Винера-Пэли и на следующую лемму.

ЛЕММА 4.2.I. Обозначим

$$\varphi_i(x,k)-\varphi_j(x,k)=R_{ij}(x,k), \quad (i,j=1,2). \tag{4.2.6}$$

При условиях теоремы 4.2.I $R_{ij}(x,k)$ при любом $x>0$ есть целая, четная функция по k экспоненциального типа x, и при любом $a<\infty$

$$\sup_{0\le x\le a}\int_1^\infty |R_{ij}(x,k)|^2\omega^2(k)\,dk<\infty. \tag{4.2.7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $i=1,\ j=2$. Первое утверждение леммы следует сразу из теоремы I.3.2. Для того, чтобы доказать (4.2.7), отметим, что $R_{12}(x,k)$ представима в виде

$$R_{12}(x,k)=\int_0^x C_2(x,t;k)\,U_{12}(t)\,\varphi_1(t,k)\,dt, \tag{4.2.8}$$

где $C_2(x,t;k)$ по x является решением (I.I.I) с $V_2(x)=W(x)+U_2(x)$, удовлетворяющим начальным условиям (2.5.27). Отсюда в силу оценок (2.5.20), (2.5.28) получаем равномерно по $0\le x\le a<\infty$, $1\le k<\infty$

$$|R_{12}(x,k)|\le C(a)\frac{\sqrt{k}\,L(x,k)}{\omega(k)}\int_0^x |U_{12}(t)|\,F(t,k)\,dt, \tag{4.2.9}$$

где $L(x,k)$ – (2.4.5), $\omega(k)$ – (2.I.I9), $F(x,k)$ – (2.5.I3). Легко видеть, что $L^2\le F$, и поэтому для доказательства (4.2.7) достаточно показать, что при любом $a<\infty$

$$\sup_{0\le x\le a}\int_1^\infty kF(x,k)\Big\{\int_0^a |U_{12}(t)|\,F(t,k)\,dt\Big\}^2 dk<\infty. \tag{4.2.I0}$$

С учетом лемм 2.2.5, 2.3.I и неравенств (2.2.8), (I.I.6), при условии (4.2.2) доказательство (4.2.I0) легко сводится к проверке справедливости при любом $\varepsilon>0$ следующих неравенств:

$$\sup_{0\le x<\infty}\int_1^\infty \frac{k^2F(x,k)\,dk}{X^{1+\varepsilon}(k)|W'(X)|}<\infty, \qquad \sup_{0\le x<\infty}\int_1^\infty \frac{F(x,k)}{k^\varepsilon}\,dk<\infty,$$

которые вытекают непосредственно из определения $F(x,k)$ (2.5.I3), если заметить, что при любом $\varepsilon>0$

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{W(X)}\,dk}{X^{1-\varepsilon}(k)|W'(X)|}<\infty, \qquad (k\equiv\sqrt{W(X)})$$

и воспользоваться рассуждениями, подобными проведенным при выводе (2.7.I4). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. В силу леммы 4.2.I $R_{ij}(x,k)$ (4.2.6) при любом $x>0$ удовлетворяет условиям теоремы 4.I.I $(\sigma=x)$, следовательно,

$$R_{ij}(x,k)=\int_0^x \mathcal{K}_{ij}(x,t)\,\varphi_j(t,k)\,dt, \quad (i,j=1,2), \tag{4.2.II}$$

где $\mathcal{K}_{ij}(x,t)\in L^2(0,x)$, что вместе с (4.2.6) дает (4.2.3).

Для доказательства (4.2.4) построим $V_{ja}(x)$ по $V_j(x)$ $(j=1,2)$ (2.5.I8). Так как $\varphi_{ja}(x,k)=\varphi_j(x,k)$ при $0\le x\le a$, из равенства Парсеваля (I.4.I7), в силу (4.2.II), получаем

$$\int_0^x \mathcal{K}_{ij}^2(x,t)\,dt=\int_{-\infty}^\infty R_{ij}^2(x,k)\,d\rho_{aj}(k^2)=\int_{-\infty}^1+\int_1^\infty, \tag{4.2.I2}$$
$$(0\le x\le a),$$

где $\rho_{aj}(\lambda)$ – спектральная функция задачи (I.4.II), (I.4.I2) с $V(x)=V_{ja}(x)$. Первый интеграл в правой части последнего равенства равномерно по $0\le x\le a$ ограничен, в силу непрерывности $R_{ij}(x,k)$ по (x,k) (см. (4.2.6) и ограниченности спектра снизу. Сходимость второго интеграла в силу леммы 4.I.2 эквивалентна сходимости интеграла в левой части (4.2.7), который в силу этого же неравенства равномерно ограничен при $0 \le x \le a < \infty$. Теорема доказана.

С помощью построенных операторов преобразования для уравнения с высокосингулярным потенциалом устанавливается теорема единственности решения обратной задачи спектрального анализа, тем же методом, каким в работе В.А.Марченко [25,26] была доказана теорема единственности для случая непрерывного потенциала. Для уравнений с бесселевской особенностью теорема единственности получена В.В.Сташевской [I3,I4].

ТЕОРЕМА 4.2.2. Пусть $V_i(x) = W(x) + U_i(x)$ $(i=1,2)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2.I и пусть $\rho_i(\lambda)$ – некоторые спектральные функции, отвечающие задачам (I.4.II), (I.4.I2) с $V(x) = V_i(x)$. Тогда, если $\rho_1(\lambda) = \rho_2(\lambda)$, то $V_1(x) = V_2(x)$ почти всюду $(0 < x < \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО с использованием операторов преобразования (4.2.3) проходит вполне аналогично [26,I4] и потому не приводится.

§ 3. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ КОСИНУСОВ

Регулярное решение уравнения (I.I.I) $\varphi(x,k)$ (I.2.7) может быть выражено через $\{\cos kt\}$ $(0 \le t \le x)$ с помощью операторов преобразования вида

$$\varphi(x,k) = \int_0^x Q(x,t)\cos kt\,dt, \tag{4.3.I}$$

которые, в отличие от случая уравнений с непрерывным при $x \geq 0$ потенциалом не содержат внеинтегрального члена $\cos kx$.

ТЕОРЕМА 4.3.I. Пусть потенциал $V(x)$ в уравнении (I.I.I) удовлетворяет условиям A_2, B_δ, C_2 (гл. II, §I). Тогда регулярное решение этого уравнения $\varphi(x,k)$ (I.2.7) представимо в виде (4.3.I), где ортогонализирующее ядро $Q(x,t)$, будучи четно по t продолженным на всю полуплоскость $-\infty < t < \infty$, $x > 0$ оказывается бесконечно дифференцируемой по t функцией, если положить $Q(x,t) = 0$ при $|t| \geq x > 0$. Поэтому, очевидно,

$$Q(x,x) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} Q(x,t)\Big|_{t=x} = 0, \quad (n = 1,2,\ldots), \tag{4.3.2}$$

$$\frac{\partial^{2j+1}}{\partial t^{2j+1}} Q(x,t)\Big|_{t=0} = 0, \qquad (j = 0,1,\ldots). \tag{4.3.3}$$

При $x \to 0$ для $Q(x,t)$ справедлива оценка

$$\max_t |Q(x,t)| = O(e^{-cW^\delta(x)}), \quad (x \to 0), \tag{4.3.4}$$

с некоторым $C > 0$.

В смысле сходимости обобщенных функций [27] при $x \to 0$

$$\frac{Q(x,t)}{\gamma_0(x)} \to \delta(t), \quad (0 \le t < \infty), \tag{4.3.5}$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

При непрерывном потенциале $V(x)$ $(x \ne 0)$ $Q(x,t)$ имеет вторые непрерывные производные по x и удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных:

$$Q''_{xx}(x,t) - V(x)Q(x,t) = Q''_{tt}(x,t). \tag{4.3.6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу классической теоремы Винера-Пэли из теоремы

I.3.2 и оценок (2.5.I7), (2.I.20) немедленно получаем представление (4.3.I), где

$$Q(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \varphi(x,k)\cos kt\,dk, \tag{4.3.7}$$

причем в силу названных оценок из (4.3.7) следует бесконечная дифференцируемость $Q(x,t)$ по t и, в частности, (4.3.2), (4.3.3). Двукратная непрерывная дифференцируемость $Q(x,t)$ по x следует тоже из формулы (4.3.7), так как в силу оценок для $\varphi(x,k)$, $\varphi'(x,k)$ и $\varphi''(x,k)=(V(x)-k^2)\varphi(x,k)$ в (4.3.7) возможно двукратное дифференцирование по x под знаком интеграла. Заметим, кстати, что в силу (4.3.2)

$$Q'_x(x,t)\Big|_{t=x}=Q''_{xx}(x,t)\Big|_{t=x}=0. \tag{4.3.8}$$

Уравнение (4.3.6) подобно уравнению для ортогонализирующих ядер, которое в случае непрерывного при $x\geqslant 0$ потенциала было получено в работе И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана [28] (См. также монографию М.А.Наймарка [29,§25]). В нашем случае оно получается непосредственным дифференцированием (4.3.7) под знаком интеграла.

Равенство (4.3.5) следует из того, что в силу (4.3.I) и (I.2.7)

$$\lim_{x\to 0}\int_0^x \frac{Q(x,t)}{\gamma_0(x)}\cos kt\,dt=1 \tag{4.3.9}$$

при любых вещественных (и комплексных) k .

Докажем, наконец, оценку (4.3.4). В силу (4.3.7) для этого достаточно показать,что при $x\to 0$

$$\Phi(x)\equiv\int_0^\infty|\varphi(x,k)|\,dk=O(e^{-cW^\delta(x)}). \tag{4.3.I0}$$

Взявши достаточно большое $k_0>0$ и некоторое фиксированное $\eta>0$, имеем при малых x :

$$\Phi(x)=\int_0^{k_0}+\int_{k_0}^{\sqrt{\frac{W(x)}{1+\eta}}}+\int_{\sqrt{\frac{W(x)}{1+\eta}}}^{\sqrt{(1+\eta)W(x)}}+$$

$$+\int_{\sqrt{(1+\eta)W(x)}}^\infty|\varphi(x,k)|\,dk\equiv\Phi_0+\Phi_1+\Phi_\eta+\Phi_2. \tag{4.3.II}$$

Оценим каждый интеграл в отдельности. В силу (I.2.7), (I.2.5) имеем

$$\Phi_0(x)=O(e^{-cW^\delta(x)}),\qquad (x\to 0). \tag{4.3.I2}$$

Затем, в силу теоремы (2,5.2) оценок,(2,4.3) и (2.I.20), находим

$$|\varphi(x,k)|\leqslant C'\sqrt{k}\,e^{-c|k|^{2\delta}}L(x,k), \tag{4.3.I3}$$

где $L(x,k)$ определено (2.4.5). Используя теперь оценки (2.7.I) для $L(x,k)$ в областях D_1 , D_η и D_2 соответственно (см. (2.2.25)), получаем, учитывая (2.3.7)

$$\Phi_1(x)=O(W^{-\frac{1}{4}}(x)\,e^{-cW^\delta(x)}), \tag{4.3.I4}$$

$$\Phi_2(x)\leqslant C'\int_{\sqrt{W(x)}}^\infty e^{-c|k|^{2\delta}}dk=O(W^{\frac{1}{2}-\delta}(x)\,e^{-cW^\delta(x)}), \tag{4.3.I5}$$

$$\Phi_\eta(x)\leqslant C'W(x)|W'(x)|^{-\frac{1}{6}}e^{-cW^\delta(x)}\leqslant C''W^{\frac{5}{6}}(x)e^{-cW^\delta(x)}. \tag{4.3.I6}$$

(Значения C, C' и т.д. в разных формулах различны. Учтено, что $W(X(k)) = k^2$).

Оценки (4.3.I2), (4.3.I4) - (4.3.I6) означают справедливость (4.3.I0) при соответствующем выборе константы C, откуда вытекает (4.3.4) в силу (4.3.7). Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Р.Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц, Мир, М, I969.

2. В. де Альферо, Т.Редже, Потенциальное рассеяние, Мир, М, I966.

3. З.С.Агранович, В.А.Марченко, Обратная задача теории рассеяния, ХГУ, Харьков,I960.

4. Л.Д.Фаддеев,Обратная задача теории рассеяния, УМН, I4, № 4, 57-II9, I959.

5. В.Э. Лянце, Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора, Мат.сборник, 72, № 4, 537-557, I967.

6. N.Limić, Theory of Scattering on highly singular potential. Nuovo Cimento, 26, N°3, 581-596, 1962.

7. N.Limić, On the existence of the scattering operator. Nuovo Cimento, 28, N°5, 1066-1090, 1963.

8. Э.Ч. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, I,П,ИЛ,М, I960, I96I.

9. Б.Я.Левин, Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка. ДАН СССР, I06, № 2, I87-I90, I956.

I0. З.С.Агранович, Об операторе преобразования, порождаемом дифференциальным уравнением второго порядка и условием на бесконечности. Уч.зап. Пед.ин-та,Харьков, 2I, сер.матем., вып.2, 3-8, I957.

II. Н.И.Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Наука, М, I965.

I2. Н.И.Ахиезер, К теории спаренных интегральных уравнений, Зап.Харьковск.матем.общ., 25, № 34, 5-3I, I957.

I3. В.В.Сташевская, Об обратных задачах спектрального анализа для одного класса дифференциальных уравнений. ДАН СССР, 93, № 3, 409-4II, I953.

I4. В.В.Сташевская, Об обратной задаче спектрального анализа для дифференциального оператора с особенностью в нуле. Зап. Харьковск.матем.общ, 25, № 34, 49-86,1957.

I5. В.Я.Волк, О формулах обращения для дифференциального уравнения с особенностью при $x = 0$, УМН, 8, вып. 4, I4I-I5I, I953.

I6. Ф.С.Рофе-Бекетов, Е.Х.Христов, Операторы преобразования и функция рассеяния в случае высокосингулярного потенциала, ДАН СССР, I68, № 6, I265-I268, I966.

I7. Ф.С.Рофе-Бекетов, Е.Х.Христов, Некоторые аналитические вопросы и обратная задача Штурма-Лиувилля для уравнения с высокосингулярным потенциалом, ДАН СССР, I85, № 4, 768-77I, I969.

I8. Э.А.Коддингтон, Н.Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М, I958.

I9. Б.М.Левитан, Некоторые замечания к вопросу о природе спектра, Прилож. П к книге [8,т.I].

20. М.Г.Крейн, Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0, \infty)$, ДАН СССР, 74, № I, 9-I2, I950.

2I. Б.М.Левитан, Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, ГТТИ, М- Л, I950.

22. Ф.М.Морс, Г.Фешбах, Методы теоретической физики, П, ИЛ, М, I960.

23. Н.Н.Лебедев, Специальные функции и их приложения, Физматгиз, М- Л, I963.

24. С.Бохнер, Лекции об интегралах Фурье,Физматгиз, М, I962.

25. В.А.Марченко, Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка, ДАН СССР, 72, № 3, 457-460, I950.

26. В.А.Марченко, Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, Тр.Моск.матем.о-ва, I, 327-420,I952.

27. И.М.Гельфанд и Г.Е.Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, "Обобщенные функции", вып.I,Физматгиз, М, I958.

28. И.М.Гельфанд и Б.М.Левитан, Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции. Изв. АН СССР, сер.матем., I5, 309-360, I95I.

29. М.А.Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, М, 1969.
30. И.М.Гельфанд и Г.Е.Шилов, Пространства основных и обобщенных функций, "Обобщенные функции", вып. 2, Физматгиз, М, 1958.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Л.А.Слобожанин

При рассмотрении устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости, обладающей поверхностным натяжением, достаточно полно изучен случай бесконечного жидкого цилиндра. Начало этим исследованиям положил Рэлей [1,2], изучивший устойчивость невращающегося столба идеальной и вязкой жидкостей относительно плоских и осесимметричных возмущений. Влияние вращения жидкости, не принятое во внимание Рэлеем при рассмотрении задачи, учли Хокинг и Майкл [3,4]. Наконец, Джиллис и Кауфман в [5] определили критерий устойчивости вязкого столба вращающейся жидкости относительно возмущений общего вида. Все упомянутые исследования проведены методом малых возмущений.

В настоящей статье изучается устойчивость цилиндрического столба вязкой вращающейся жидкости, ограниченной твердыми стенками. В результате исследования установлено, что кривизна стенок, угол смачивания и высота жидкого цилиндра существенно влияют на его устойчивость. Определены условия устойчивости. Построена зависимость критического значения безразмерного параметра, определяемого плотностью жидкости, ее коэффициентом поверхностного натяжения, угловой скоростью вращения и радиусом цилиндра, от " удлинения" цилиндра (отношения высоты цилиндра к его радиусу) при различных значениях параметра, зависящего от кривизны твердой стенки, угла смачивания и высоты цилиндра. Исследование проведено на основе принципа минимума потенциальной энергии системы.

1. Пусть между двумя осесимметричными твердыми стенками S_0, представляющими собой зеркальное отражение друг друга относительно плоскости, нормальной к оси симметрии z, заключена вязкая жидкость плотности ρ, обладающая поверхностным натяжением (коэффициент поверхностного натяжения σ). Центр масс жидкости находится на оси z. Внешнее силовое поле отсутствует. Жидкость вместе со стенками вращается как одно твердое тело с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z.

В подвижной цилиндрической системе координат r, θ, z, жестко связанной со стенками, рассмотрим цилиндрическую поверхность Σ_0, которая при определенном значении угла смачивания α является одной из возможных свободных равновесных поверхностей жидкости [6] (рис.1). Обозначим радиус поверхности Σ_0 через r_0, а длину ее образующей через $2h$.

Исследуем устойчивость, в смысле Ляпунова-Румянцева [7], цилиндрического равновесного состояния жидкости. Исходя из известного принципа минимума потенциальной энергии (см., например, [7]), вопрос об устойчивости осесимметричного равновесного состояния вязкой вращающейся жидкости в общем случае можно свести к проблеме собственных значений следующей линейной краевой задачи относительно нормальной составляющей $g(t,\theta)$ возмущения свободной равновесной поверхности Σ [8]

$$
\begin{gathered}
ag-\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}-\frac{r'}{r}\frac{\partial g}{\partial t}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+mr^2+\mu=\lambda g \quad \begin{pmatrix} t_1<t<t_2 \\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \end{pmatrix}; \\
\beta g-\frac{\partial g}{\partial t}=0 \quad (t=t_1); \qquad \beta g+\frac{\partial g}{\partial t}=0 \quad (t=t_2); \\
\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{2\pi} g r\,dt\,d\theta=0, \qquad m=\tau\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{2\pi} g r^3\,dt\,d\theta.
\end{gathered} \tag{1.1}
$$

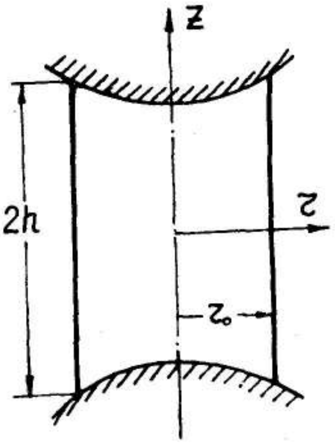


Рис. I.

Здесь t – длина дуги меридиального сечения поверхности Σ, отсчитываемая так, что при возрастании t область, занятая жидкостью, остается слева; $t=t_1$ и $t=t_2$ ($t_1<t_2$)- точки, лежащие на линиях Γ_1 и Γ_2 пересечения поверхности Σ со стенками сосуда S ; $r(t)$ – расстояние точки равновесной поверхности до оси симметрии;

$$a=\frac{1}{\sigma}\cdot\frac{\partial}{\partial n}(p_ж-p_г)-4H^2+2K,\quad \frac{\partial}{\partial n}=\vec{n}\cdot\vec{\nabla},$$

$\vec{n}$ –единичный вектор нормали к поверхности Σ ,направленный внутрь области,занятой жидкостью; $(p_ж-p_г)$– перепад давлений в жидкости и газе при переходе через свободную поверхность; H и K – соответственно средняя и гауссова кривизны равновесной поверхности Σ ; $\mu=const$; $\beta=-\frac{\varkappa_1\cos\alpha+\varkappa_2}{\sin\alpha}$, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – кривизны меридиального сечения поверхностей Σ и S в точках линии Γ_1 либо Γ_2 (при определении знака $\varkappa_2$ предполагается, что вектор нормали к поверхности S направлен в сторону области, занятой жидкостью); $\tau=\frac{\omega^2\rho^2}{\sigma}\left(\frac{d^2F}{dI^2}\right)_0$, $F(I)$ – заданная функция от момента инерции I всей системы (сосуд и жидкость) относительно оси вращения (индекс"0" означает, что берется значение производной в равновесном состоянии).

Собственные значения λ задачи (I.I) вещественны. Если наименьшее из собственных значений положительно, то соответствующее равновесное состояние устойчиво; если отрицательно – неустойчиво. Заметим сразу, что минимальное собственное значение λ^* задачи (I.I) является монотонной функцией β , причем $\lim_{\beta\to-\infty}\lambda^*(\beta)=-\infty$.

Учитывая, что в рассматриваемом нами случае $t=z$, $t_1=-h$, $t_2=h$, $r=r_0$, $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial r}$, $\varkappa_1=0$, $p_г=const$, а вариация момента инерции системы $\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{2\pi} q r^3\,dt\,d\theta = r_0^2\int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} q r_0\,dz\,d\theta=0$ (в силу условия сохранения объема жидкости), получим, что задача (I.I) принимает вид

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial^2 q}{\partial z^2}-\frac{1}{r_0^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\theta^2}+aq+\mu=\lambda q \qquad (-h<z<h,\ 0\leqslant\theta<2\pi);\\
\beta q-\frac{\partial q}{\partial z}=0 \quad (z=-h), \qquad \beta q+\frac{\partial q}{\partial z}=0 \quad (z=h);\\
\int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} q(z,\theta)\,dz\,d\theta=0.
\end{gathered} \tag{I.2}$$

Здесь $a=-2pr_0-\frac{1}{r_0^2}$, $p=\rho\omega^2/2\sigma$.

Решения задачи (I.2) должны быть 2π – периодическими функциями θ . Представляя $q(z,\theta)$ в виде ряда $q(z,\theta)=\varphi_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(z)\cos n\theta+\psi_n(z)\sin n\theta]$, из (I.2) получим задачу относительно $\varphi_0(z)$

$$-\varphi_0''+a\varphi_0+\mu=\lambda\varphi_0 \qquad (-h<z<h), \tag{I.3}$$

$$l_1\varphi_0 \equiv (\beta\varphi_0 - \varphi_0')\big|_{z=-h} = 0, \qquad l_2\varphi_0 \equiv (\beta\varphi_0 + \varphi_0')\big|_{z=h} = 0; \tag{I.4}$$

$$l_3\varphi_0 \equiv \int_{-h}^{h}\varphi_0\,dz = 0. \tag{I.5}$$

систему задач относительно функций $\varphi_n(z)$

$$-\varphi_n'' + \left(a + \frac{n^2}{z_0^2}\right)\varphi_n = \lambda\varphi_n \qquad (-h < z < h,\ n = 1,2,\dots); \tag{I.6}$$

$$l_1\varphi_n \equiv (\beta\varphi_n - \varphi_n')\big|_{z=-h} = 0, \qquad l_2\varphi_n \equiv (\beta\varphi_n + \varphi_n')\big|_{z=h} = 0. \tag{I.7}$$

и эквивалентную (I.6), (I.7) систему задач для функций $\psi_n(z)$.

Как показано в [8] , $\lambda^* = \min(\lambda_{01}, \lambda_{K1})$, а потому устойчивость осесимметричной равновесной поверхности определяется по знаку наименьшего соосственного значния λ_{01} задачи для функции $\varphi_0(z)$ (устойчивость относительно осесимметричных возмущений) и по знаку наименьшего собственного значения λ_{K1} задачи для $\varphi_K(z)$ (устойчивость относительно неосесимметричных возмущений). Здесь $K \geqslant 1$ – минимальный порядок гармоник, соответствующих неосесимметричным возмущениям, допустимым дополнительными условиями задачи.

2. Определим область устойчивости цилиндрического равновесного состояния жидкости относительно осесимметричных возмущений. Общее решение уравнения (I,3) можно представить в виде

$$\varphi_0 = C_{01}\varphi_{01} + C_{02}\varphi_{02} + \mu\varphi_{03}.$$

Здесь $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ – фундаментальная система решений однородного уравнения, соответствующего (I.3), φ_{03} – частное решение неоднородного уравнения при $\mu = 1$. Введя обозначение $\lambda - a = \vartheta_0^2$, имеем

$$\varphi_{01} = \sin\vartheta_0 z, \quad \varphi_{02} = \cos\vartheta_0 z, \quad \varphi_{03} = \frac{1}{\vartheta_0^2} \qquad (\vartheta \neq 0); \tag{2.I}$$

$$\varphi_{01} = z, \qquad \varphi_{02} = 1, \qquad \varphi_{03} = \frac{1}{2}z^2 \quad (\vartheta_0 = 0). \tag{2.2}$$

Подставляя (2.I) и (2.2) в условия (I.4), (I.5), получим алгебраическую систему линейных однородных уравнений относительно постоянных C_{01} , C_{02} , μ . Условием существования нетривиального решения этой системы является равенство нулю ее определителя

$$\det\|l_i\varphi_{0j}\| = 0 \qquad (i,j = 1,2,3). \tag{2.3}$$

Из (2.I),(2.3) после элементарных преобразований получим следующее уравнение относительно $\vartheta_0 \neq 0$:

$$(\beta h\sin\vartheta_0 h + \vartheta_0 h\cos\vartheta_0 h)[(\beta h + \vartheta_0^2 h^2)\sin\vartheta_0 h - \beta h\,\vartheta_0 h\cos\vartheta_0 h] = 0. \tag{2.4}$$

Из (2.2), (2.3) получим условие существования нетривиального решения задачи (I.3)-(I.5) при $\vartheta_0 = 0$

$$(\beta h + 1)(\beta h + 3) = 0.$$

Уравнение (2.4) определяет решения $\vartheta_0 = \frac{1}{h}f(\beta h)$ (так как λ – вещественно, то ϑ_0 может принимать действительные или чисто мнимые значения). При фиксированных β и h эти решения (вместе со значением $\vartheta_0 = 0$, если βh равно – I или – 3) определяют собственные значения задачи (I.3) – (I.5). Минимальное собственное значение λ_{01} определяется тем из решений, для которого величина ϑ_0^2 является наименьшей. Определяющее значение ϑ_0 обозначим через ϑ_0^* . Величина ϑ_0^{*2} , как и λ_{01} , является монотонно возрастающей функцией β , а потому ϑ_0^* может быть равным нулю только при $\beta h = -1$. Так как $\lambda_{01} = \vartheta_0^{*2} - 2pz_0 - \frac{1}{z_0^2}$, то при $\vartheta_0^{*2} \leqslant 0$ соответствующее равновесное состояние всегда неустойчиво. Поэтому для построения границы области устойчивости достаточно рассмотреть те равновесные состояния, для которых решение ϑ_0^* уравнения (2.4) является действительным, отличным от нуля,числом(т.е. решения ϑ_0^* уравнения (2.4) при $\beta h > -1$).

Не останавливаясь подробно на анализе действительных решений уравнения (2.4), отметим только, что интересующее нас значение ϑ_0^* находится из уравнения

$$\beta h \sin \vartheta_0 h + \vartheta_0 h \cos \vartheta_0 h = 0. \tag{2.5}$$

В таблице I приведены значения $\vartheta_0^* h$ в зависимости от величины βh. Граница области устойчивости цилиндрического равновесного состояния относительно осесимметричных возмущений определяется уравнением $\lambda_{01} = 0$ или

$$R_*^3 = 2(\vartheta_0^* h)^2 / \left(\frac{2h}{z_0}\right)^2 - \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Здесь $R_*^3 = p_* z_0^3$, p_* – критическое значение параметра p.

Отметим, что при $\beta = 0$ решение задачи (I.3) - (I.5), соответствующее критическому собственному значению $\lambda_{01} = 0$, имеет вид

$$\varphi_0 = C_{01} \sin \frac{\pi}{2h} z.$$

3. При изучении устойчивости цилиндрического равновесного состояния относительно неосесимметричных возмущений самыми опасными следует считать возмущения по первой гармонике. Исключением является случай, когда жидкость заключена между двумя параллельными пластинами; при этом необходимо наложить дополнительное условие, чтобы возмущения оставляли центр масс жидкости на оси z (иначе состояние равновесия всегда неустойчиво) и потому самыми опасными являются возмущения по второй гармонике. Оставляя пока этот случай в стороне, найдем, аналогично предыдущему, знак наименьшего собственного значения λ_{11} задачи (I.6), (I.7), полагая в ней всюду $n = 1$. Общее решение уравнения (I.6) имеет вид

$$\varphi_1 = C_{11} \varphi_{11} + C_{12} \varphi_{12}, \tag{3.I}$$

где

$$\varphi_{11} = \sin \vartheta_1 z, \quad \varphi_{12} = \cos \vartheta_1 z \qquad \left(\vartheta_1^2 = \lambda - a - \frac{1}{z_0^2} \neq 0\right), \tag{3.2}$$

$$\varphi_{11} = z, \quad \varphi_{12} = 1 \qquad (\vartheta_1 = 0). \tag{3.3}$$

Условие существования нетривиального решения системы линейных однородных алгебраических уравнений относительно C_{11} и C_{12}, получаемой после подстановки (3.I)в (I.7), имеет вид

$$\det \| \ell_i \varphi_{1j} \| = 0 \qquad (i, j = 1, 2). \tag{3.4}$$

Из (3.2), (3.4) получим следующее уравнение относительно $\vartheta_1 \neq 0$ (ϑ_1 может принимать действительные и чисто мнимые значения)

$$(\beta h \sin \vartheta_1 h + \vartheta_1 h \cos \vartheta_1 h)(\beta h \cos \vartheta_1 h - \vartheta_1 h \sin \vartheta_1 h) = 0. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.3) в (3.4), найдем условие существования нетривиального решения задачи при $\vartheta_1 = 0$

$$\beta h (\beta h + 1) = 0.$$

При заданных β и h наименьшее собственное значение задачи (I.6), (I.7) определяется тем из решений уравнения (3.5) (обозначим его ϑ_1^*), для которого ϑ_1^2 является минимальным (в случае, когда βh равно нулю или - I, в число сравниваемых решений следует включить значение $\vartheta_1 = 0$). В силу того, что λ_{11}, а следовательно, и ϑ_1^{*2}, является монотонно возрастающей функцией β, ϑ_1^* может быть равным нулю только при $\beta h = 0$. Поэтому в силу равенства $\lambda_{11} = \vartheta_1^{*2} - 2pz_0$ заключаем, что равновесное состояние неустойчиво относительно возмущений по первой гармонике при $\beta h < 0$. Как показывает анализ решений уравнения (3.5), ϑ_1^* определяется уравнением $\beta h \cos \vartheta_1 h - \vartheta_1 h \sin \vartheta_1 h = 0$ при $\beta h > 0$, и $\vartheta_1^* = 0$ при $\beta h = 0$. В таблице I приведена зависимость $\vartheta_1^* h$ от βh.

Граница области устойчивости цилиндрического равновесного состояния относительно возмущений по первой гармонике определяется уравнением $\lambda_{11} = 0$ или

$$R_*^3 = 2(\vartheta_1^* h)^2 / \left(\frac{2h}{z_0}\right)^2. \tag{3.6}$$

Таблица I

βh	$\nu_0^* h$	$\nu_1^* h$	βh	$\nu_0^* h$	$\nu_1^* h$
∞	π	$\pi/2$			
20	2,9930	I,496I	0,7	I,9204	0,7506
I0	2,8628	I,4289	0,5	I,8366	0,6533
7	2,7654	I,3766	0,3	I,74I4	0,52I8
5	2,6537	I,3I38	0,2	I,6887	0,4328
3	2,4556	I,I925	0,I	I,6320	0,3II0
I	2,0288	0,8603	0,05	I,6020	0,22I8
			0	$\pi/2$	0

В случае, когда жидкость заключена между двумя параллельными пластинами, полагая в (I.6), (I.7) $n=2$, $\beta=0$, легко найдем, что $\nu_2^{*2}=\lambda_{21}-\sigma-\frac{4}{r_0^2}=0$, а потому граница области устойчивости относительно неосесимметричных возмущений определяется соотношением

$$R_*^3=3/2. \tag{3.7}$$

При этом решением задачи (I.6), (I.7), отвечающим критическому значению $\lambda_{21}=0$, является постоянная величина.

4. Используя формулы (2.6) и (3.6), а также результаты таблицы I, на рис. 2 в плоскости $\left(\frac{2h}{r_0}, R^3\right)$ построены общие (относительно возмущений любого вида) границы области устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости при различных значениях βh. Если точка $\left(\frac{2h}{r_0}, R^3\right)$ лежит внутри области, ограниченной критической кривой $R_*^3\left(\frac{2h}{r_0}\right)$ и осью абсцисс, то при заданном βh соответствующее равновесное состояние устойчиво; если же точка лежит вне указанной области, то равновесие неустойчиво.

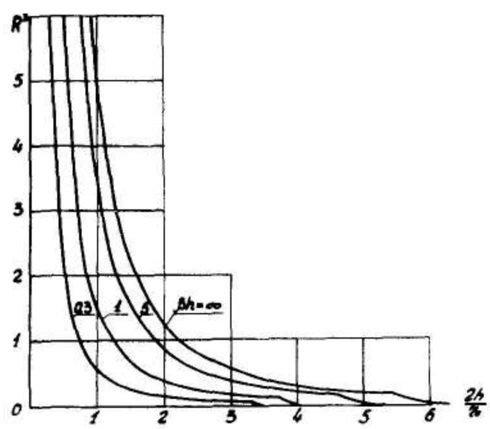


Рис. 2.

ри $\beta h=+\infty$ получим максимальную область устойчивости. При $\beta h<0$ все равновесные остояния являются неустойчивыми. Если удлинение цилиндра $\frac{2h}{r_0}>2\pi$, то цилиндри-эская равновесная поверхность неустойчива при любых значениях βh.

Используя (2.6), (3.7) и результаты таблицы I ($\beta h=0$), на рис. 3 построена раница области устойчивости цилиндрического равновесного состояния жидкости, заключен-эй между двумя параллельными пластинами.

Отметим одну особенность рассмотренной задачи. Можно показать, что в задаче (I.I) $_{01}|_{m\neq0}>\lambda_{01}|_{m=0}$ и $\lambda_{n1}|_{m\neq0}=\lambda_{n1}|_{m=0}$ $(n=1,2,...)$. Функция $F(I)$, определяющая значение τ, ›инимает различный вид в зависимости от вида возмущенного движения системы: если в змущенном движении сосуд вращается с фиксированной угловой скоростью, равной угловой орости невозмущенного движения, то $F(I)=-\frac{1}{2}I$, если же в возмущенном движении сохраня-

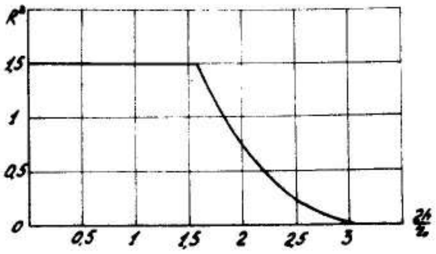


Рис. 3.

ется момент количества движения системы относительно оси z, то $F(I)=\frac{1}{2}\frac{I_0^2}{I}$, где I_0 -значение I в невозмущенном движении. Естественно, при возмущенном движении первого ряда $\frac{d^2F}{dI^2}\equiv 0$ и $m=0$, а при возмущенном движении второго вида $\left(\frac{d^2F}{dI^2}\right)_0=\frac{1}{I_0}\neq 0$. Поэтому обычно при возмущенном движении второго вида область устойчивости равновесного состояния относительно осесимметричных возмущений шире области устойчивости, соответствующей возмущенному движению первого вида. Однако в рассмотренной здесь задаче вариация момента инерции системы $\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{2\pi} g z^3 dt\, d\theta$ равна нулю, а потому $m=0$ и граница области устойчивости определяется однозначно независимо от вида возмущенного движения.

В заключение подчеркнем, что полученные в работе результаты заведомо справедливы только для вязкой жидкости. Если жидкость идеальна, то может иметь место гироскопическая стабилизация, и при этом область устойчивости окажется шире.

Автор благодарит А.Д.Мышкиса за полезные замечания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lord Rayleigh, On the Instability of Jets, Proc.London Math.Soc., 10, 4-13, 1878.
2. Lord Rayleigh, On the Instability of a Cylinder of Viscous Liquid under Capillary Force, Phil.Mag., 34, 145-154, 1892.
3. L.M.Hocking, D.H.Michael, The Stability of a Column of Rotating Liquid, Mathematika, 6, No.1, 25-32, 1959.
4. L.M.Hocking, The Stability of a Rigidly Rotating Column of Liquid, Mathematika 7, No.1, 1-9, 1960.
5. J.Gillis, B.Kaufman, The Stability of a Rotating Viscous Jet, Quart.Appl.Math., 19, No.4, 301-308, 1962.
6. Л.А.Слобожанин, Гидростатика в слабых силовых полях. Формы равновесия вращающейся невесомой жидкости, Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 1969.
7. Н.Н.Моисеев, В.В.Румянцев, Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, М., Наука, 1965.
8. М.А.Беляева, Л.А.Слобожанин, А.Д.Тюпцов,Гидростатика в слабых силовых полях. Сб. "Математические методы в динамике космических аппаратов". Вып. 6. "Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости", ВЦ АН СССР, М.,1968.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

I97I выпуск П

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЕТВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Л.А.Слобожанин

В [I] была изучена устойчивость круговой цилиндрической формы равновесия вязкой вращающейся невесомой жидкости, обладающей поверхностным натяжением и заключенной между двумя твердыми стенками. В окрестности критического (в смысле устойчивости) равновесного состояния происходит ветвление цилиндрической равновесной формы. Ниже с помощью метода Ляпунова-Шмидта рассматривается задача о ветвлении в случае, когда жидкость заключена между двумя параллельными пластинами.

Плоская задача - задача о цилиндрических формах равновесия вращающейся жидкости, ответвляющихся от бесконечного кругового равновесного цилинда, была исследована Ю.К.Братухиным и Л.Н.Мауриным [2]. По-видимому, метод Ляпунова-Шмидта к задачам равновесия жидкости, обладающей поверхностным натяжением, впервые был применен А.Д.Тюпцовым [3].

I. Пусть между двумя параллельными пластинами заключена вязкая капиллярная жидкость плотности ρ и объема ϑ. Расстояние между пластинами равно $2h$. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости - σ. Угол смачивания равен $\pi/2$. Жидкость вместе с пластинами вращается как одно твердое тело с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z, нормальной к плоскости пластин. Центр масс жидкости находится на оси вращения. Внешнее силовое поле отсутствует.

Вводя подвижную цилиндрическую систему координат r, Θ, z (рис. I), жестко связанную с пластинами, рассмотрим в ней равновесные формы свободной поверхности жидкости.

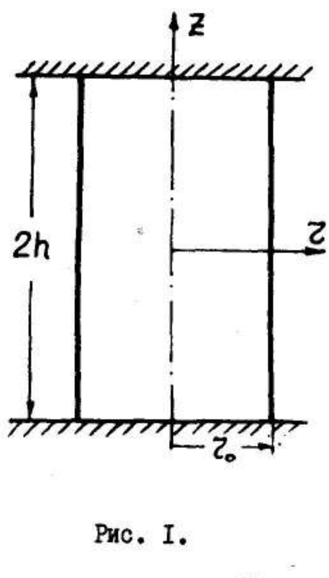


Рис. I.

Формы равновесия, представимые в виде $r = f(z, \Theta)$, являются решениями следующей задачи

$$\begin{aligned} &2H - pf^2 + c = 0, \\ &f'_z\big|_{z=\pm h} = 0, \\ &\int_{-h}^{h} dz \int_0^{2\pi} f^2 d\Theta = 2\vartheta. \end{aligned} \tag{I.I}$$

Здесь $2H$ - удвоенная средняя кривизна поверхности

$$2H = \frac{f^2 + 2f_\Theta'^2 - ff''_{\Theta\Theta} + f^2 f_z'^2 - ff_z'^2 f''_{\Theta\Theta} - f^3 f''_{zz} - ff''_{zz} f_\Theta'^2 + 2ff'_z f'_\Theta f''_{z\Theta}}{f^3\left(1 + \frac{1}{f^2} f_\Theta'^2 + f_z'^2\right)^{3/2}}$$

$p = \rho\omega^2 / 2\sigma$, c - неизвестная постоянная.

Естественно, решения задачи (I.I) должны быть 2π -периодическими функциями Θ и удовлетворять условию сохранения центра масс на оси z.

При всех значениях p одним из решений задачи (I.I) является круговая цилиндрическая поверхность радиуса $r = r_0 \equiv (\vartheta / 2\pi h)^{1/2}$. В дальнейшем будем обозначать эту поверхность через Σ, окружности ее пересечения с пластинами через Γ, а площадь поверхности через S.

Преобразуем задачу (I.I), исключив постоянную c (для этого проинтегрируем уравнение равновесия по поверхности Σ и воспользуемся условием постоянства объема жидкости). Тогда (I.I) примет вид

$$F^{\Sigma}(f,p)=2H-pf^2+\frac{1}{S}\left(2pr_0 v-\int_{\Sigma}2H\,d\Sigma\right)-\frac{1}{2r_0^3 S}\left(\int_{\Sigma}f^2 d\Sigma-2r_0 v\right)=0, \quad (I.2)$$
$$F^{\Gamma}(f)=f'_z\big|_{\Gamma}=0.$$

Введем оператор $F=\{F^{\Sigma}, F^{\Gamma}\}$, действующий из пространства $E_1\times E = C_{2,\alpha}(\bar{\Sigma})\times R$ в пространство $E_2=C_{0,\alpha}(\bar{\Sigma})\times C_{1,\alpha}(\Gamma)$ (здесь $\bar{\Sigma}$ – замыкание Σ, R – вещественная прямая, $C_{k,\alpha}$ – пространство функций, производные k-го порядка которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем α). Тогда (I.2) можно представить в виде

$$F(f,p)=0. \quad (I.3)$$

Нашей целью является исследование форм равновесия, ответвляющихся от критического (в смысле устойчивости) равновесного состояния жидкого цилиндра. Пусть в этом состоянии значение параметра p равно p_0. Положим

$$f(z,\Theta)=r_0+g(z,\Theta), \qquad p=p_0+\mu.$$

Тогда задача состоит в том, чтобы, имея в виду равенство

$$F(r_0,p_0)=0, \quad (I.4)$$

найти для малых $|\mu|$ решения $g(\mu)\in C_{2,\alpha}(\bar{\Sigma})$ уравнения

$$F(r_0+g,\ p_0+\mu)=0 \quad (I.5)$$

такие, что $g(0)=0$.

Напомним (см. [I]), что значения p_0 определяются соотношениями

$$p_0 r_0^3=\frac{3}{2} \qquad (0\leqslant \delta=\delta_1\leqslant \pi/2),$$
$$p_0 r_0^3=\frac{(\pi/\delta)^2-1}{2} \quad (\pi/2\leqslant\delta=\delta_2\leqslant\pi), \qquad \delta=\frac{2h}{r_0}. \quad (I.6)$$

Оператор F является аналитическим. Поэтому с учетом (I.4) уравнение (I.5) можно представить в виде

$$F_{11}(g,\mu)+F_{21}(g,\mu)+\sum_{k=1}^{\infty}F_{k0}(g)=0. \quad (I.7)$$

Здесь $F_{k\ell}$ – степенные операторы с показателями однородности k и ℓ $(F_{k\ell}(mg,n\mu)=m^k n^\ell F_{k\ell}(g,\mu))$. Нетрудно найти, что

$$F_{11}^{\Sigma}(g,\mu)=-2r_0 g\mu+\frac{2r_0}{S}\mu\int_{\Sigma}g\,d\Sigma, \qquad F_{11}^{\Gamma}(g,\mu)=0,$$
$$F_{21}^{\Sigma}(g,\mu)=-g^2\mu+\frac{1}{S}\mu\int_{\Sigma}g^2 d\Sigma, \qquad F_{21}^{\Gamma}(g,\mu)=0,$$
$$F_{10}^{\Sigma}(g)=-g''_{zz}-\frac{1}{r_0^2}g''_{\theta\theta}-\left(2p_0 r_0+\frac{1}{r_0^2}\right)g, \qquad F_{10}^{\Gamma}(g)=g'_z\big|_{\Gamma},$$
$$F_{20}^{\Sigma}(g)=\frac{1}{r_0^3}\left(2g^2+g_\theta'^2+4gg''_{\theta\theta}-r_0^2 g_z'^2\right)-p_0 g^2-$$
$$-\frac{1}{2r_0^3 S}\int_{\Sigma}\left(3g^2+g_\theta'^2+4gg''_{\theta\theta}-r_0^2 g_z'^2\right)d\Sigma,$$
$$F_{30}^{\Sigma}(g)=\frac{1}{2r_0^4}\left(-2g^3-6g^2 g''_{\theta\theta}-3gg_\theta'^2+3g_\theta'^2 g''_{\theta\theta}+\right.$$
$$+r_0^2 gg_z'^2+r_0^2 g_z'^2 g''_{\theta\theta}+r_0^2 g''_{zz}g_\theta'^2+4r_0^2 g'_z g'_\theta g''_{z\theta}+ \quad (I.8)$$
$$\left.+3r_0^4 g_z'^2 g''_{zz}\right)-\frac{1}{2r_0^4 S}\int_{\Sigma}\left(-2g^3-6g^2 g''_{\theta\theta}-\right.$$
$$-3gg_\theta'^2+3g_\theta'^2 g''_{\theta\theta}+r_0^2 gg_z'^2+r_0^2 g_z'^2 g''_{\theta\theta}+$$
$$\left.+r_0^2 g''_{zz}g_\theta'^2+4r_0^2 g'_z g'_\theta g''_{z\theta}+3r_0^4 g_z'^2 g''_{zz}\right)d\Sigma,$$

$$F^{\Gamma}_{\kappa 0}(q) = 0 \qquad (\kappa \geq 2).$$

В дальнейшем ограничимся нахождением главной части малых решений уравнения (I.7). Поэтому выражения $F^{\Sigma}_{\kappa 0}(q)$ $(\kappa > 3)$ не понадобятся.

2. Следуя методу Ляпунова-Шмидта, уравнение (I.7) представим в виде

$$Bq = R(q, \mu). \tag{2.I}$$

Здесь $B = F_{10} \in \{E_1 \to E_2\}$.

Определим размерность и базис пространства нулей E_{11} оператора B. Уравнение $B\varphi = 0$ эквивалентно следующей краевой задаче

$$\begin{aligned} &\varphi''_{zz} + \frac{1}{z_0^2}\varphi''_{\theta\theta} + \left(2p_0 z_0 + \frac{1}{z_0^2}\right)\varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \\ &\varphi'_z = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что задача (2.2) имеет нетривиальные решения вида

$$\begin{aligned} &\varphi_{11} = C_1 \sin 2\theta, \quad \varphi_{12} = C_1 \cos 2\theta \qquad (C_1 = \text{const}) \qquad (\delta = \delta_1), \\ &\varphi_2 = C_2 \sin\frac{\pi}{2h} z \qquad (C_2 = \text{const}) \qquad (\delta = \delta_2). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Уравнение (2.I) инвариантно относительно преобразования $z = -z$ и относительно поворота на угол θ. Поэтому в дальнейшем во избежание неоднозначности будем отождествлять все решения уравнения (2.I), получающиеся одно из другого после указанных преобразований. В соответствии с этим (см. [4]) вместо (2.3) нулями оператора B будем считать

$$\varphi_1 = C_1 \sin 2\theta \qquad (\delta = \delta_1).$$

Таким образом, оператор B имеет одномерное подпространство нулей всюду за исключением точки $\delta = \pi/2$. (Ветвление в точке $\delta = \pi/2$ рассматриваться не будет, и в дальнейшем под $\delta = \delta_1$ и $\delta = \delta_2$ будем подразумевать соответственно полуинтервалы $0 \leq \delta_1 < \pi/2$, $\pi/2 < \delta_2 \leq \pi$).

Построим разложения пространств E_1 и E_2 на прямые суммы подпространств.

Рассматривая пространство $E_1 = C_{2,\alpha}(\bar{\Sigma})$ как линейную систему в вещественном гильбертовом пространстве $L_2(\Sigma)$, введем скалярное произведение

$$(q_1, q_2) = \int_{\Sigma} q_1 q_2 \, d\Sigma.$$

В соответствии с этим нормированные в $L_2(\Sigma)$ базисные функции подпространства E_{11} (в дальнейшем именно они будут обозначаться через φ_1 и φ_2) имеют вид

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{2}{S}} \sin 2\theta \qquad (\delta = \delta_1), \quad \varphi_2 = \sqrt{\frac{2}{S}} \sin\frac{\pi}{2h} z \qquad (\delta = \delta_2).$$

На каждом из участков $\delta = \delta_1$ и $\delta = \delta_2$ введем соответственно оператор P_κ $(\kappa = 1, 2)$ – проектор E_1 на E_{11}; для $q \in E_1$ положим

$$P_\kappa q = (q, \varphi_\kappa)\varphi_\kappa.$$

Оператор P_κ порождает разложение пространства E_1 в прямую сумму подпространств

$$E_1 = E_{11} \dotplus E_{12},$$

где E_{12} состоит из тех элементов $q \in E_1$, для которых $(q, \varphi_\kappa) = 0$.

Уравнение (2.I) разрешимо в том и только в том случае, когда на каждом из участков $\delta = \delta_1$ и $\delta = \delta_2$ соответственно выполняется условие

$$\ell_\kappa(R) \equiv \int_{\Sigma} R \varphi_\kappa \, d\Sigma = 0 \qquad (\kappa = 1, 2).$$

При $\delta = \delta_1$ и $\delta = \delta_2$ введем соответственно оператор Q_κ $(\kappa = 1, 2)$ – проектор в E_2; для $R \in E_2$ положим

$$Q_\kappa R = \varphi_\kappa \ell_\kappa(R).$$

Оператор Q_κ порождает следующее разложение пространства E_2 в прямую сумму подпространств

$$E_2 = E_{21} \dot{+} E_{22}.$$

Здесь E_{21} - область значений оператора Q_κ, E_{22} - пространство, для элементов R которого выполняется равенство $\ell_\kappa(R)=0$, т.е. E_{22} совпадает с областью значений оператора B.

3. Представим $g\in E_1$ в виде суммы

$$g = \varphi + \psi \qquad \varphi\in E_{11} \qquad \psi\in E_{12} \tag{3.I}$$

и с помощью оператора Q_κ спроектируем уравнение (2.I) на E_{21} и E_{22}. В результате на каждом из участков $\delta=\delta_1$ и $\delta=\delta_2$ получим следующую систему уравнений, эквивалентную уравнению (2.I).

$$Q_\kappa R(\varphi+\psi,\mu)=0, \quad \hat{B}\psi = (I-Q_\kappa)R(\varphi+\psi,\mu). \tag{3.2}$$

Здесь $\hat{B}\in\{E_{12}\to E_{22}\}$ - сужение оператора B на E_{12}.

В силу теоремы о неявных операторах второе из уравнений системы (3.2) однозначно разрешимо, и решение является аналитическим

$$\psi = \sum_{i,j\geqslant 0} A_{ij}(\varphi,\mu). \tag{3.3}$$

Подставим (3.3) в первое из уравнений системы (3.2). Полагая $\varphi=\xi_\kappa\varphi_\kappa$ $(\kappa=1,2)$, где $\xi_\kappa\geqslant 0$ (см. [4]), для каждого из участков $\delta=\delta_1$ и $\delta=\delta_2$ получим свое одномерное уравнение разветвления

$$\sum_{i=2}^{\infty} L_{i0}^{(\kappa)}\xi_\kappa^i + \sum_{i=0}^{\infty}\xi_\kappa^i \sum_{j=1}^{\infty} L_{ij}^{(\kappa)}\mu^j = 0 \qquad (\kappa=1,2). \tag{3.4}$$

Здесь $L_{ij}^{(\kappa)}$ - коэффициенты уравнения разветвления

$$L_{ij}^{(\kappa)} = \ell_\kappa(\Phi_{ij}(\varphi_\kappa,1)) \qquad (\kappa=1,2). \tag{3.5}$$

Приведем формулы для определения тех Φ_{ij}, которые нам потребуются в дальнейшем [6] .

$$\Phi_{om}(\mu) = \sum_{(i,j)\neq(1,0)}\ \sum_{|\kappa_i|=m-j} F_{ij}(A_{o\kappa_1}(\mu), A_{o\kappa_2}(\mu),\dots,A_{o\kappa_i}(\mu);\mu)$$
$$(|\kappa_i| = \sum_{s=1}^{i}\kappa_s), \tag{3.6}$$
$$\Phi_{01}(\mu)=F_{01}(\mu), \quad \Phi_{11}(\varphi,\mu) = 2F_{20}(\varphi, A_{01}(\mu)) + F_{11}(\varphi,\mu),$$
$$\Phi_{10}(\varphi)=0, \qquad \Phi_{20}(\varphi) = F_{20}(\varphi),$$
$$\Phi_{30}(\varphi) = 2F_{20}(\varphi, A_{20}(\varphi)) + F_{30}(\varphi).$$

Здесь

$$A_{ij}(\varphi,\mu) = -\hat{B}^{-1}(I-Q)\Phi_{ij}(\varphi,\mu), \quad Q=Q_\kappa \text{ при } \delta=\delta_\kappa \quad (\kappa=1,2). \tag{3.7}$$

Метод обращения операторов типа оператора $\hat{B}$, возникающих при решении задач ветвления равновесных состояний капиллярной жидкости, принадлежит А.Д.Тюпцову [3] .

4. Определим коэффициенты уравнения разветвления (3.4), необходимые для построения убывающей части диаграммы Ньютона. Рассмотрим вначале полуинтервал $\delta=\delta_1$.

Покажем, что все коэффициенты $L_{om}^{(1)}$ $(m=1,2,\dots)$ равны нулю. Для этого достаточно показать, что $\Phi_{om}=0$ $(m=1,2,\dots)$. Из (3.6) и (I.7) следует

$$\Phi_{om}(\mu) = F_{11}(A_{o,m-1}(\mu);\mu) + \sum_{|\kappa_2|=m-1} F_{21}(A_{o\kappa_1}(\mu), A_{o\kappa_2}(\mu);\mu) +$$
$$+\sum_{n=2}^{m}\ \sum_{|\kappa_n|=m} F_{n0}(A_{o\kappa_1}(\mu),\dots, A_{o\kappa_n}(\mu)).$$

Таким образом, $\Phi_{om}(\mu)$ выражается через $A_{on}(\mu)$ $(n<m)$. Так как $F_{01}(\mu)=0$, то и $A_{01}(\mu)=0$. Следовательно, $\Phi_{02}(\mu)=0$, что в свою очередь влечет $A_{02}(\mu)=0$. Проведя рассуждения по методу индукции, приходим к выводу, что $\Phi_{om}(\mu)=0$ $(m=1,2,\ldots)$

Из (3.6), (I.8) следует, что

$$\Phi_{20}(\varphi_1)=A_1+B_1\cos 4\Theta,$$
$$A_1=-\frac{1}{z_0^3 S}\left(\frac{1}{2}+p_0 z_0^3\right),\quad B_1=\frac{1}{z_0^3 S}(9+p_0 z_0^3).$$

Отсюда, согласно (3.5), находим

$$L_{20}^{(1)}=0.$$

Для определения $\Phi_{30}(\varphi_1)$ необходимо найти $A_{20}(\varphi_1)$. Из (3.7) получаем

$$A_{20}(\varphi_1)=-\hat{B}^{-1}(I-Q_1)\,\Phi_{20}(\varphi_1)=-\hat{B}^{-1}\Phi_{20}(\varphi_1).$$

Не останавливаясь на методе обращения оператора $\hat{B}$, приведем полученный результат

$$A_{20}(\varphi_1)=\frac{A_1}{\vartheta_0^2}+\frac{B_1}{\vartheta_4^2}\cos 4\Theta,\quad \vartheta_n^2=-\frac{(n^2-1)}{z_0^2}+2p_0 z_0. \tag{4.I}$$

Справедливость формулы (4.I) легко проверяется. Из (3.6), (I.8) и (4.I) находим

$$\begin{aligned}\Phi_{30}(\varphi_1)=&-\frac{2}{z_0^3}\sqrt{\frac{2}{S}}\,\frac{A_1}{\vartheta_0^2}(3+p_0 z_0^3)\sin 2\Theta-\\&-\frac{2}{z_0^3}\sqrt{\frac{2}{S}}\,\frac{B_1}{\vartheta_4^2}(19+p_0 z_0^3)\sin 2\Theta\cos 4\Theta-\frac{8}{z_0^3}\sqrt{\frac{2}{S}}\,\frac{B_1}{\vartheta_4^2}\sin 4\Theta\cos 2\Theta+\\&+\frac{1}{z_0^4}\left(\frac{2}{S}\right)^{3/2}(11\sin^3 2\Theta-30\sin 2\Theta\cos^2 2\Theta).\end{aligned} \tag{4.2}$$

Используя (3.5) и (4.2), получим

$$L_{30}^{(1)}=-\frac{2}{z_0^3}\,\frac{A_1}{\vartheta_0^2}(3+p_0 z_0^3)+\frac{1}{z_0^3}\,\frac{B_1}{\vartheta_4^2}(15+p_0 z_0^3)+\frac{3}{2}\,\frac{1}{z_0^4 S}.$$

Или окончательно, подставляя выражения для A_1, B_1, ϑ_0, ϑ_4 и учитывая (I.6), найдем

$$L_{30}^{(1)}=-\frac{135}{16 z_0^4 S}.$$

Определим коэффициент $L_{11}^{(1)}$. Так как $A_{01}(\mu)=0$, то из (3.6), (I.8) получим

$$\Phi_{11}(\varphi_1,1)=F_{11}(\varphi_1,1)=-2\sqrt{\frac{2}{S}}\,z_0\sin 2\Theta.$$

Отсюда и из (3.5) найдем

$$L_{11}^{(1)}=-2z_0.$$

Перейдем к определению коэффициентов уравнения разветвления на полуинтервале $\delta=\delta_2$.

Так как $\Phi_{om}(\mu)=0$ $(m=1,2,\ldots)$, то и все коэффициенты $L_{om}^{(2)}$ равны нулю.

Из (3.6), (I.8) найдем

$$\Phi_{20}(\varphi_2)=A_2+B_2\cos\frac{\pi}{h_1}z,$$
$$A_2=-\frac{1}{z_0^3 S}\left(\frac{1}{2}+p_0 z_0^3\right),\quad B_2=-\frac{1}{z_0^3 S}\left(1+\frac{\pi^2}{2\delta^2}-p_0 z_0^3\right). \tag{4.3}$$

Отсюда и из (3.5) следует, что

$$L_{20}^{(2)}=0.$$

Найдем величину $L_{30}^{(2)}$. Для определения $\Phi_{30}(\varphi_2)$ необходимо знать $A_{20}(\varphi_2)$.

Из (3.7), (4.3) получаем

$$A_{20}(\varphi_2) = -\hat{B}^{-1}\Phi_{20}(\varphi_2).$$

Легко проверить, что

$$A_{20}(\varphi_2) = \frac{A_2}{\vartheta_0^2} - \frac{B_2}{3\vartheta_0^2}\cos\frac{\pi}{h}z. \qquad (4.4)$$

Проведя необходимые выкладки, из (3.6), (I.8) и (4.4) найдем

$$\Phi_{30}(\varphi_2) = \frac{2}{z_0^3}\sqrt{\frac{2}{S}}\,\frac{A_2}{\vartheta_0^2}(1-p_0 z_0^3)\sin\frac{\pi}{2h}z -$$
$$-\frac{2}{3z_0^3}\sqrt{\frac{2}{S}}\,\frac{B_2}{\vartheta_0^2}(1-p_0 z_0^3)\sin\frac{\pi}{2h}z\cos\frac{\pi}{h}z -$$
$$-\frac{2}{3z_0^3}\sqrt{\frac{2}{S}}\,\frac{B_2}{\vartheta_0^2}\,\frac{\pi^2}{\delta^2}\sin\frac{\pi}{h}z\cos\frac{\pi}{2h}z +$$
$$+\frac{1}{2z_0^4}\left(\frac{2}{S}\right)^{3/2}\left[-2\sin^3\frac{\pi}{2h}z + \frac{\pi^2}{\delta^2}\left(1-3\frac{\pi^2}{\delta^2}\right)\sin\frac{\pi}{2h}z\cos^2\frac{\pi}{2h}z\right].$$

Теперь, согласно (3.5), можно определить $L_{30}^{(2)}$

$$L_{30}^{(2)} = \frac{2}{z_0^3}\,\frac{A_2}{\vartheta_0^2}(1-p_0 z_0^3) + \frac{1}{3z_0^3}\,\frac{B_2}{\vartheta_0^2}\left(1-p_0 z_0^3 - \frac{\pi^2}{\delta^2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2z_0^4 S}\left(-3+\frac{\pi^2}{2\delta^2} - \frac{3}{2}\,\frac{\pi^4}{\delta^4}\right).$$

Окончательно, подставляя выражения для A_2, B_2, ϑ_0 и учитывая (I.6), получим

$$L_{30}^{(2)} = -\frac{3}{4z_0^4 S}\left[3+\frac{\pi^2}{\delta^2}\left(1-\frac{\pi^2}{\delta^2}\right)+\frac{\delta^2}{\pi^2}\right].$$

Определим, наконец, коэффициент $L_{11}^{(2)}$.

$$\Phi_{11}(\varphi_2, 1) = F_{11}(\varphi_2, 1) = -2z_0\sqrt{\frac{2}{S}}\sin\frac{\pi}{2h}z.$$

Поэтому из (3.4) следует

$$L_{11}^{(2)} = -2z_0.$$

5. Найдем количество и главную часть малых решений уравнения разветвления на обоих рассматриваемых полуинтервалах значений δ. С этой целью построим убывающий участок диаграммы Ньютона для каждого из уравнений разветвления. Так как $L_{0m}^{(\kappa)} = 0$ $(m=1,2,\dots)$, $L_{10}^{(\kappa)}=0$, $L_{20}^{(\kappa)}=0$, $L_{30}^{(\kappa)}\neq 0$, $L_{11}^{(\kappa)}\neq 0$. $(\kappa=1,2)$, то интересующий нас участок диаграммы Ньютона для обоих уравнений (3.4) имеет вид, показанный на рис. 2.

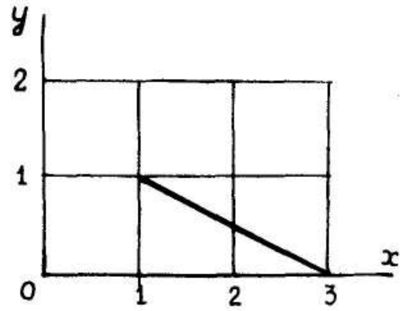


Рис. 2.

Из этого заключаем, что уравнения (3.4) имеют решения вида

$$\xi_\kappa = \eta_\kappa|\mu|^{1/2} + o(|\mu|^{1/2}), \quad (\kappa=1,2),$$

а также решение $\xi_\kappa = 0$, $(\kappa=1,2)$.

Для определения η_κ имеем уравнения

$$L_{11}^{(\kappa)}\eta_\kappa + L_{30}^{(\kappa)}\eta_\kappa^3 = 0, \quad (\mu \geqslant 0);$$
$$L_{11}^{(\kappa)}\eta_\kappa - L_{30}^{(\kappa)}\eta_\kappa^3 = 0, \quad (\mu \leqslant 0), \qquad (5.I)$$

у каждого из которых три простых корня: нулевой, которому соответствует решение $\xi_\kappa = 0$ $(\kappa=1,2,\dots)$, и два ненулевых. Нас будут интересовать вещественные решения каждого из уравнений разветвления (3.4). Так как $L_{11}^{(\kappa)}<0$, $L_{30}^{(\kappa)}<0$ $(\kappa=1,2)$ ($L_{30}^{(2)}<0$ в силу того, что $(1-\frac{\pi^2}{\delta^2})\geqslant 0$ при $\delta=\delta_2$), то из (5.I) следует, что ненулевые вещественные решения существуют лишь при $\mu \leqslant 0$. Учитывая, кроме того, условие $\xi_\kappa \geq 0$ $(\kappa=1,2)$, из (5.I) $(\mu \leq 0)$ получим

$$\eta_\kappa = (L_{11}^{(\kappa)} / L_{30}^{(\kappa)})^{1/2}.$$

Таким образом, при $\mu \leq 0$ уравнение разветвления (3.4) имеет одно вещественное малое решение вида

$$\xi_\kappa = (L_{11}^{(\kappa)}/L_{30}^{(\kappa)})^{1/2} |\mu|^{1/2} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i^{(\kappa)} |\mu|^{i/2}, \quad (\kappa=1,2).$$

Для вычисления постоянных $a_i^{(\kappa)}$ можно воспользоваться методом неопределенных коэффициентов.

Выпишем главную часть малого вещественного решения уравнения равновесия. Воспользовавшись (3.I), (3.3), получим

$$g(\mu) = \xi_\kappa(\mu)\varphi_\kappa + \sum_{i,j\geq 0} A_{ij}(\varphi_\kappa \eta_\kappa |\mu|^{1/2} + o(|\mu|^{1/2}); \mu).$$

Так как $A_{00}=0$, $A_{10}=0$, $A_{01}=0$, то

$$\sum_{i,j\geq 0} A_{ij}(\eta_\kappa \varphi_\kappa |\mu|^{1/2} + o(|\mu|^{1/2}); \mu) = |\mu| A_{20}(\varphi_\kappa \eta_\kappa) + o(|\mu|).$$

Следовательно, с точностью до преобразования $z=-z$ и сдвига по углу θ при $\mu \leq 0$ на полуинтервале $\delta=\delta_1$ от критической цилиндрической формы равновесия ответвляется одна равновесная форма вида

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \left(\frac{2}{S}\frac{L_{11}^{(1)}}{L_{30}^{(1)}}\right)^{1/2} |\mu|^{1/2} \sin 2\theta + \\ &+ |\mu|\left[a_2^{(1)}\sqrt{\frac{2}{S}}\sin 2\theta + A_{20}\left(\left(\frac{2}{S}\frac{L_{11}^{(1)}}{L_{30}^{(1)}}\right)^{1/2}\sin 2\theta\right)\right] + o(|\mu|), \end{aligned} \tag{5.2}$$

а на полуинтервале $\delta=\delta_2$ - одна равновесная форма вида

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \left(\frac{2}{S}\frac{L_{11}^{(2)}}{L_{30}^{(2)}}\right)^{1/2} |\mu|^{1/2} \sin\frac{\pi}{2h}z + \\ &+ |\mu|\left[a_2^{(2)}\sqrt{\frac{2}{S}}\sin\frac{\pi}{2h}z + A_{20}\left(\left(\frac{2}{S}\frac{L_{11}^{(2)}}{L_{30}^{(2)}}\right)^{1/2}\sin\frac{\pi}{2h}z\right)\right] + o(|\mu|). \end{aligned}$$

При малых значениях $|\mu|$ ответвившиеся равновесные формы являются неустойчивыми.

Форма равновесия (5.2) совпадает с решением плоской задачи о ветвлении жидкого равновесного цилиндра [2].

Автор благодарит А.Д.Тюпцова за обсуждения и полезные замечания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Л.А.Слобожанин, Об устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости. (Смотрите настоящий сборник, вып. 2, Харьков, ФТИНТ АН УССР, 1971).
2. Ю.К.Братухин, Л.Н.Маурин, Равновесные фигуры вращающегося жидкого цилиндра, ПММ, . 32, вып. 4, 1968.
3. А.Д.Тюпцов, Равновесные формы поверхности жидкости в условиях, близких к невесомости, их устойчивость и ветвление. Дисс.канд.физ.-мат.наук,Харьков, 1968.
4. В.И.Юдович, Свободная конвекция и ветвление, ПММ, 31, вып. 1, 1967.
5. О.А.Ладыженская, Н.Н.Уральцева,Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., Наука, 1964.
6. М.М.Вайнберг, В.А.Треногин, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М. Наука, 1969.

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1971 выпуск II

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ

А.С. Сохин

ОГЛАВЛЕНИЕ

§ I. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим граничную задачу, порождаемую дифференциальным уравнением

$$-B_x^{(a)}[y]+q(x)y = \lambda^2 y, \quad 0<x<\infty, \tag{I.I}$$

где

$$B_x^{(a)}[y]\equiv \frac{d^2}{dx^2}-\frac{a(a+1)}{x^2}, \quad a>-\frac{1}{2}, \quad a\neq[a], \; [a]+\frac{1}{2} \tag{I.2}$$

и граничным условием

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x,\lambda)}{x^{a+1}} \neq \infty. \tag{I.3}$$

Вещественная функция $q(x)$ (потенциал) удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty (x^{\frac{1}{2}+\alpha}+x^{1+\alpha})|q(x)|dx<\infty, \quad 0<\alpha<\frac{1}{2}, \tag{I.4}$$

причем $\alpha=|\beta|$, $\beta=a-n$, n – ближайшее целое к числу a. Число a назовем параметром особенности.

При условии (I.4) граничная задача может иметь конечное число отрицательных собственных значений $-\mu_k^2$, $\mu_k>0$ (простых), а ее непрерывный спектр заполняет положительную полуось. При $a>\frac{1}{2}$ возможно нулевое собственное число. Нормированные собственные функции $u_a(x,\lambda)$ $(\lambda>0,\ \lambda=i\mu_k,\ k=0,1,\dots,p;\ \mu_0=0$ порождают равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty f(x)\overline{q(x)}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty Uf(\lambda)\,\overline{Uq(\lambda)}\,d\lambda+\sum_{k=0}^{p} U_k f\cdot\overline{U_k q},$$

где

$$Uf(\lambda)=\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\int_0^n u_a(x,\lambda)f(x)\,dx,\quad U_k f=\int_0^\infty u_a(x,i\mu_k)f(x)\,dx,$$

и имеют такую асимптотику при $x\to\infty$:

$$u_a(x,\lambda)=e^{i\lambda x}-e^{i\pi\alpha}S_\alpha(-\lambda)e^{-i\lambda x}+o(1),\quad \lambda>0;$$

$$u_a(x,i\mu_k)=m_k e^{-\mu_k x}[1+o(1)],\quad k=1,2,\dots,p;$$

$$u_a(x,0)=m_0 x^{-a}[1+o(1)],\qquad k=0,\ a>\frac{1}{2}. \tag{I.5}$$

Функция $S_a(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$ обладает свойствами

$$S(-\lambda)=\overline{S_a(\lambda)},\qquad S_a(\lambda)\cdot\overline{S_a(\lambda)}=1$$

и называется функцией рассеяния; числа $m_k>0$ – нормировочными постоянными, совокупность величин $S_a(\lambda)\ (-\infty<\lambda<\infty),\ \mu_k,\ m_k\ (k\ 0,1,2,\dots,p)$ –данными рассеяния граничной задачи (I.I)-(I.2).

Обратная задача состоит в определении потенциала $q(x)$, удовлетворяющего условию (I.4), по известным данным рассеяния, а также в выяснении условий, при которых величины $S_a(\lambda),\mu_k,\ m_k$ являются данными рассеяния некоторой граничной задачи.

Если a – целое число, то, как показано в работе [4], при помощи преобразований специального вида граничная задача с особенностью приводится к граничной задаче без особенностей, рассмотренной в [I]. В нашем случае нецелого и неполуцелого параметра особенности аналогичного способа перехода к задаче без особенностей найти не удалось. Поэтому пришлось избрать такой путь: представим a в виде $a=n+\beta$, где $n=[n]$, $0<|\beta|<\frac{1}{2}$. Затем при помощи конечного числа преобразований специального вида [I,4], исключающих собственные числа и изменяющих параметр особенности на единицу, мы перейдем от задачи с параметром особенности $a>-\frac{1}{2}$ к задаче с параметром особенности $|\beta|\in(0,\ 1/2)$ и функций рассеяния $S_a^*(\lambda)$. Граничную задачу с параметром особенности $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ назовем квазирегулярной. Квазирегулярная задача решается методом, аналогичным рассмотренному в [I] для задачи без особенностей, при этом существенно используются операторы, аналогичные операторам преобразования, введенным впервые Б.Я.Левиным [5] для уравнения без особенностей.

Точнее, решение обратной задачи основано на следующих предложениях.

Если выполнено условие

$$\int_0^\infty (x+x^{1+a})|q(x)|\,dx<\infty,\quad a>0,$$

то существует решение $e_a(x,\lambda)$ дифференциального уравнения (I.I), представимое в виде

$$e_a(x,\lambda)=h_a(\lambda x)+\int_x^\infty K_a(x,t)h_a(\lambda t)\,dt,\quad \Im m\,\lambda\geqslant 0,\ a>0,\quad x>0, \tag{I.6}$$

где $h_a(\lambda x)$– функция Ханкеля-Риккати, являющаяся решением уравнения

$$B_x^{(a)}[y]+\lambda^2 y=0,\quad 0<x<\infty$$

с таким асимптотическим поведением:

$$h_a(\lambda x)=h_a^{(1)}(\lambda x)=e^{i\lambda x}+o(1),\quad x\to+\infty,\quad \lambda\neq 0.$$

При этом потенциал $q(x)$ выражается через $K_\alpha(x,t)$ равенством

$$q(x)=-2\frac{d}{dx}K_\alpha(x,x). \tag{I.7}$$

Эта теорема доказана в [9].

Пусть $\mu_k, m_k, S_\alpha(\lambda)$ – данные рассеяния квазирегулярной задачи. Построим функцию

$$F(x,y;\alpha)=\sum_{k=1}^{p} m_k^2 h_\alpha(i\mu_k x)h_\alpha(i\mu_k y)+ \\ +\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha(\lambda x)e^{-i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}\left[1-S_\alpha(\lambda)\right]h_\alpha(\lambda y)d\lambda, \tag{I.8}$$

тогда функция $K_\alpha(x,y)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению (основному уравнению)

$$F(x,y;\alpha)+K_\alpha(x,y)+\int_x^{\infty}K_\alpha(x,t)F(y,t;\alpha)dt=0,\ 0<x\leqslant y, \tag{I.9}$$

вывод и исследование которого приведены в данной работе. Формулы (I.7)-(I.9) выражают решение обратной задачи при $0<\alpha<1/2$. Если $\alpha\bar{\in}(0,1/2)$, то потенциал, восстанавливаемый равенством (I.7), является промежуточным. В этом случае при помощи обратных преобразований специального вида [I], [4] мы переходим от задачи с параметром особенности $|\beta|\in(0,1/2)$ к задаче с параметром особенности $\alpha=n+\beta$. Потенциал, полученный при этом переходе, удовлетворяет условию (I.4) и является искомым потенциалом, построенным по данным рассеяния.

В §§ I-4 устанавливаются следующие свойства данных рассеяния квазирегулярной задачи:

I. Функция $S_\alpha(\lambda)$ непрерывна при $-\infty<\lambda<\infty$,

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty}S_\alpha(\lambda)=1,\quad \frac{1-S_\alpha(\lambda)}{\lambda^\alpha}\in L_1(-\infty,\infty).$$

Если

$$S_\alpha(\lambda)=S_\alpha^*(\lambda)\ \ (\alpha>\tfrac{1}{2}),\ \text{то}\ \ S_\alpha(0)=1.$$

П. Пусть

$$F_1^{(s)}(x,y;\alpha)=-\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n}\frac{(\lambda x)^{\alpha+1}h_{\alpha+1}(\lambda x)-a_{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+2}}\cdot e^{-i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}\cdot \\ [1-S_\alpha(\lambda)]\,h_\alpha(\lambda y)\,d\lambda,\quad 0<\alpha<\frac{1}{2},$$

где

$$a_{\alpha+1}=\lim_{x\to0}x^{\alpha+1}h_{\alpha+1}(x),$$

тогда при $x>0,\ y>0$ существуют

$$\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}F_1^{(s)}(x,y;\alpha)=F^{(s)}(x,y;\alpha),\quad \frac{d}{dx}F^{(s)}(x,x;\alpha),$$

$$\int_0^{\infty}(x^{1/2+\alpha}+x^{1+\alpha})\left|\frac{d}{dx}F^{(s)}(x,x;\alpha)\right|dx<\infty,$$

$$F^{(s)}(x,y;\alpha)=-\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}R_\alpha\left(t,0;\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)\frac{d}{dt}F^{(s)}(t,t,\alpha)dt,$$

где $R_\alpha(s,t;\xi,\eta)$ – функция Римана уравнения

$$v''_{st}+\frac{4\alpha(\alpha+1)st}{(s^2-t^2)^2}v=f(s,t),$$

имеющая вид

$$R_\alpha(s,t;\xi,\eta)=(1-z)^{-\alpha}F_\alpha(z),$$

$$F_\alpha(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-\alpha)\ldots(-\alpha+n-1)}{n!}\right]^2 z^n,\quad z=\frac{(s^2-\xi^2)(\eta^2-t^2)}{(s^2-\eta^2)(\xi^2-t^2)},\quad 0\leqslant t\leqslant\eta\leqslant\xi\leqslant s.$$

Пусть

$$H_\alpha\varphi(x)=\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\int_{-n}^{n}\varphi(t)h_\alpha(xt)\,dt=$$
$$=\frac{-1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(tx)^{\alpha+1}h_{\alpha+1}(tx)-a_{\alpha+1}}{t^{\alpha+2}}\varphi(t)\,dt$$

– преобразование Ханкеля, тогда

$$F_-^{(s)}(\varphi)=\mathcal{H}_\alpha\left\{e^{-ix\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}\,\frac{1-S_\alpha(\lambda)}{2\pi}\,\mathcal{H}_\alpha\varphi(\alpha)\right\}=$$
$$=\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}F_1^{(s)}(-x,-y;\alpha)\varphi(y)\,dy$$

– ограниченный оператор, действующий из $L_2(0,\infty)$ в $L_2(0,\infty)$.

Ш. Уравнение

$$-\varphi(x)+\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}F_1^{(s)}(-x,-y;\alpha)\varphi(y)\,dy=0,\quad 0\leqslant x<\infty$$

имеет только нулевое решение из $L_2(0,\infty)$.

Пусть

$$F_1(x,y;\alpha)=-\sum_{k=1}^{p}m_k^2\,\frac{(i\mu_k x)^{\alpha+1}h_{\alpha+1}(i\mu_k x)-a_{\alpha+1}}{(i\mu_k)^{\alpha+2}}\,h_\alpha(i\mu_k x)+$$
$$+F_1^{(s)}(x,y;\alpha),\qquad x>0,\ y>0$$

и пусть $L_1^{\rho}(\varepsilon,\infty)$ обозначает пространство функций с нормой

$$\|\varphi\|_{1;\rho}=\int_{\varepsilon}^{\infty}(1+t^{-\alpha})|\varphi(t)|\,dt<\infty,\quad 0<\alpha<\frac{1}{2},\quad \varepsilon\geqslant 0.$$

IУ. Уравнение

$$\psi(x)+\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_{\varepsilon}^{\infty}F_1(x,y;\alpha)\psi(y)\,dy=0,\quad \varepsilon\leqslant x<\infty$$

имеет только нулевое решение из $L_1^{\rho}(\varepsilon,\infty)$ при каждом $\varepsilon\geqslant 0$.

У. Число линейно независимых решений из $L_2(0,\infty)$ уравнения

$$\chi(x)+\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}F_1^{(s)}(x,y;\alpha)\chi(y)\,dy=0,\quad 0\leqslant x<\infty$$

равно числу собственных чисел граничной задачи.

В § 5 доказывается, что эти свойства достаточны для того, чтобы заданная функция $S_\alpha(\lambda)$ и числа $m_k>0$, $\mu_k>0$ являлись данными рассеяния некоторой граничной задачи с потенциалом, удовлетворяющим (I.4).

Из условий I,П,IУ следует, что уравнение (I.9) имеет при каждом $x>0$ единственное решение $K_\alpha(x,y)$. Построенные по $K_\alpha(x,y)$ функции

$$u_\alpha(x,\lambda)=e_\alpha(x,\lambda)-e^{i\pi\alpha}S_\alpha(-\lambda)e_\alpha(x,-\lambda),\quad \lambda>0,$$
$$u_\alpha(x,i\mu_k)=m_k e_\alpha(x,i\mu_k),\qquad k=1,2,\ldots,p,$$

где

$$e_\alpha(x,\lambda)=h_\alpha(\lambda x)+\int_x^{\infty}K_\alpha(x,t)h_\alpha(\lambda t)\,dt,\quad \Im m\lambda\geqslant 0,\quad x>0$$

имеют асимптотику (I.5) и порождают равенство Парсеваля.

При выполении условий П, IУ функции $u_\alpha(x,\lambda), u_\alpha(x,i\mu_k)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$-B_x^{(\alpha)}[y] + q_0(x)y = \lambda^2 y, \quad 0<x<\infty, \tag{I.10}$$

где

$$q_0(x) = -2\frac{d}{dx}K_\alpha(x,x), \tag{I.11}$$

причем

$$\int_\varepsilon^\infty (x^{1/2+\alpha} + x^{1+\alpha})|q_0(x)|dx < \infty, \quad \varepsilon>0.$$

Если выполнены условия I, Ш, IУ, У, то функции $u_\alpha(x,\lambda)$, $u_\alpha(x,i\mu_k)$ удовлетворяют граничному условию (I.3).

В приложении рассматривается преобразование по функциям Ханкеля-Риккати на всей числовой оси для значений параметра $\alpha > -3/2$.

§ 2. ЧАСТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ

I. Свойства решений. Операторы преоразования.

Т Е О Р Е М А 2.I. Если при некотором $\alpha < \delta \leqslant 1$

$$\begin{aligned} &\int_0 x^{1-\delta}|q(x)|dx < \infty, \quad \alpha > -\frac{1}{2}, \\ &\int_0 x^{1-\delta}|\ln x||q(x)|dx < \infty, \quad \alpha = -\frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{2.I}$$

то уравнение

$$-y'' + \left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} + q(x)\right]y = \lambda^2 y, \quad 0<x<\infty \tag{2.2}$$

при всяком фиксированном λ имеет фундаментальную систему решений $g_\alpha(x,\lambda)$ и $h_\alpha(x,\alpha)$ таких, что

$$g_\alpha(x,\lambda) = \begin{cases} x^{\alpha+1}[1+O(x^\delta)], & \alpha > -\frac{1}{2} \\ \sqrt{x}\,[1+O(x^\delta)], & \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$h_\alpha(x,\lambda) = \begin{cases} x^{-\alpha}[1+O(x^\delta)], & \alpha > -\frac{1}{2} \\ \sqrt{x}\,\ln x\,[1+O(x^\delta)], & \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

и эти асимптотические равенства можно дифференцировать. При каждом фиксированном $x \geqslant 0$ функция $g_\alpha(x,\lambda)$ является целой функцией λ.

Т Е О Р Е М А 2.2. Если при некотором $\delta \geqslant 0$

$$\int^\infty x^{1+\delta}|q(x)|dx < \infty, \tag{2.3}$$

то уравнение (2.2) при всяком $\lambda \neq 0$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ имеет фундаментальную систему решений $e_\alpha^{(1)}(x,\lambda)$ и $e_\alpha^{(2)}(x,\lambda)$, удовлетворяющую при $x \to +\infty$ асимптотическим равенствам

$$\begin{aligned} e_\alpha(x,\lambda) \equiv e_\alpha^{(1)}(x,\lambda) &= h_\alpha^{(1)}(\lambda x) + O(x^{-1-\delta}), \\ e_\alpha^{(2)}(x,\lambda) &= h_\alpha^{(2)}(\lambda x) + O(x^{-1-\delta}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Эти асимптотические равенства можно дифференцировать.

Здесь $h_\alpha^{(1,2)}(x)$ – функции Ханкеля-Риккати, определяемые равенством

$$h_\alpha^{(1,2)}(x)=\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\cdot e^{\pm\frac{\pi(\alpha+1)}{2}}\cdot H^{(1,2)}_{\alpha+\frac{1}{2}}(x), \tag{2.5}$$

где $H^{(1,2)}_{\alpha+1/2}(x)$ – функции Ханкеля I-го и 2-го рода.

Следовательно, справедливы такие равенства:

$$\begin{gathered} h_\alpha^{(1,2)}(x)=e^{\pm ix}+O(1), \quad x\to+\infty, \\ h_\alpha^{(1)}(e^{i\pi}x)=h_\alpha^{(2)}(x), \quad h_\alpha^{(2)}(e^{-i\pi}x)=h_\alpha^{(1)}(x), \\ \overline{h_\alpha^{(1)}(x)}=h_\alpha^{(2)}(\bar{x}). \end{gathered} \tag{2.5'}$$

Функции $h_\alpha^{(1,2)}(z)$ аналитические в плоскости, разрезанной вдоль отрицательной части вещественной оси. При вещественном z будем пользоваться значениями функции $h_\alpha^{(1)}(z)$ на верхнем берегу разреза, а значениями $h_\alpha^{(2)}(z)$ – на нижнем. Поэтому всегда

$$\begin{gathered} h_\alpha^{(1)}(-|x|)=h_\alpha^{(2)}(|x|)=\overline{h_\alpha^{(1)}(|x|)}, \\ h_\alpha^{(2)}(-|x|)=h_x^{(1)}(|x|)=\overline{h_\alpha^{(2)}(|x|)}. \end{gathered} \tag{2.5''}$$

ТЕОРЕМА 2.3. Если выполнено условие (2.3), то уравнение (2.2) при $\lambda=0$ имеет фундаментальную систему решений $g_\alpha^{(\infty)}(x)$ и $h_\alpha^{(\infty)}(x)$, удовлетворяющую асимптотическим равенствам при $x\to+\infty$:

$$\begin{gathered} g_\alpha^{(\infty)}(x)=x^{\alpha+1}\left[1+O(x^{-\delta})\right], \quad \alpha\geqslant-\frac{1}{2}, \\ h_\alpha^{(\infty)}(x)=\begin{cases} x^{-\alpha}\left[1+O(x^{-\delta})\right], & \alpha>-\frac{1}{2}, \\ \sqrt{x}\ln x\left[1+O(x^{-\delta})\right], & \alpha=-\frac{1}{2}. \end{cases} \end{gathered} \tag{2.6}$$

Доказательство теорем (2.I)-(2.3) проводится рассмотрением соответствующих интегральных уравнений, получаемых методом вариации постоянных из решений уравнения Бесселя-Риккати

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}\right]y=\lambda^2 y, \quad 0<x<\infty, \tag{2.7}$$

которое получается из (2.2) при $q(x)\equiv 0$. Решениями уравнения (2.7) являются функции

$$z_\alpha(\lambda x)=C\sqrt{\lambda x}\,Z_{\alpha+\frac{1}{2}}(\lambda x), \tag{2.7'}$$

где $Z_{\alpha+\frac{1}{2}}(x)$ – цилиндрическая функция (Бесселя, Ханкеля, Неймана). Интегральные уравнения решаются методом последовательных приближений аналогично тому, как решаются соответствующие уравнения в [I].

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $q(x)$ – произвольная локально суммируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered} \int_x^\infty (t+t^{1+\alpha})|q(t)|\,dt<\infty, \quad x>0, \ \alpha>0, \\ \sigma_1(x)=\int_x^\infty t|q(t)|\,dt<\infty, \quad \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\frac{|q(t)|}{|t-\xi|^{|\alpha|}}\,dt<\infty, \ \delta>0, \ -\frac{1}{2}<\alpha<0, \end{gathered} \tag{2.8}$$

(ξ – произвольное число), тогда уравнение (2.2) при $\lambda\neq 0$, $\Im m\lambda\geqslant 0$ имеет решение $e_\alpha(x,\lambda)\equiv e_\alpha^{(1)}(x,\lambda)$, представляемое в виде

$$e_\alpha(x,t)=h_\alpha^{(1)}(\lambda x)+\int_x^\infty K_\alpha(x,t)\,h_\alpha^{(1)}(\lambda t)\,dt, \quad x>0, \tag{2.9}$$

Функция $K_\alpha(x,t)$ имеет локально суммируемые производные, удовлетворяет равенству

$$K_\alpha(x,x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\,dt \tag{2.10}$$

и неравенству

$$|K_\alpha(x,t)| \le \begin{cases} \frac{C_\alpha}{2}\left(\frac{x+t}{2x}\right)^\alpha \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left[C_\alpha\int_x^{\frac{x+t}{2}}\sigma(s)ds\right], & \alpha>0 \\ \frac{\mathcal{D}_\alpha}{2}\left(\frac{2x}{x+t}\right)^{|\alpha|}\vartheta_\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left[\mathcal{D}_\alpha\int_x^{\frac{x+t}{2}}\vartheta_\alpha(s)ds\right], & -\frac{1}{2}<\alpha<0, \end{cases} \tag{2.11}$$

а производные $\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha$, $\frac{\partial}{\partial t}K_\alpha$ удовлетворяют неравенству

$$\left|DK_\alpha \pm \frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \le \begin{cases} \frac{C_\alpha}{2}\left(\frac{x+t}{2x}\right)^\alpha \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\left[\sigma(x)+\alpha(\alpha+1)\frac{t-x}{tx}\right]\exp\left[C_\alpha\int_x^{\frac{x+t}{2}}\sigma(s)ds\right], & \alpha>0 \\ \frac{\mathcal{D}_\alpha}{2}\left(\frac{2x}{x+t}\right)^{|\alpha|}\vartheta_\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)\left[\vartheta_\alpha(x)+\frac{t-x}{tx}\right]\exp\left[\mathcal{D}_\alpha\int_x^{\frac{x+t}{2}}\vartheta_\alpha(s)ds\right], & -\frac{1}{2}<\alpha<0, \end{cases} \tag{2.12}$$

где

$$\sigma(s)=\int_s^\infty |q(t)|\,dt,$$

$$\vartheta_\alpha(s)=\frac{1}{s^\alpha}\int_s^\infty \frac{t^{2|\alpha|}}{|t-s|^{|\alpha|}}|q(t)|\,dt, \quad -\frac{1}{2}<\alpha<0, \tag{2.13}$$

C_α, $\mathcal{D}_\alpha$ – постоянные, причем $\lim\limits_{\alpha\to-\frac{1}{2}}\mathcal{D}_\alpha=\infty$,

$$\int_x^\infty \vartheta_\alpha(s)\,ds \le C_1(\alpha)\int_x^\infty \sigma(s)\,ds. \tag{2.14}$$

Доказательство этой теоремы для $-\frac{1}{2}<\alpha<0$ аналогично доказательству такой теоремы для случая $\alpha>0$, рассмотренному в [9].

Аналогичное утверждение справедливо относительно преобразования, обратного к преобразованию (2.9).

Т Е О Р Е М А 2.5. Пусть $q(x)$ – произвольная локально суммируемая функция, удовлетворяющая условиям (2.8), тогда функция $h_\alpha^{(1)}(\lambda x)$ представима через решение $e_\alpha^{(1)}(x,\lambda)$ уравнения (2.2) по формуле

$$h_\alpha^{(1)}(\lambda x)=e_\alpha^{(1)}(x,\lambda)+\int_x^\infty H_\alpha(x,t)\,e_\alpha^{(1)}(t,\lambda)\,dt. \tag{2.15}$$

Функция $H_\alpha(x,t)$ имеет локально суммируемые производные, удовлетворяет равенству

$$H_\alpha(x,x)=-\frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\,dt \tag{2.16}$$

и неравенству

$$|H_\alpha(x,t)| \le \begin{cases} \frac{C_\alpha}{2}\left(\frac{x+t}{2x}\right)^\alpha \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left[C_\alpha\int_{\frac{x+t}{2}}^{t}\sigma(s)ds\right], & \alpha>0 \\ \frac{\mathcal{D}_\alpha}{2}\left(\frac{2x}{x+t}\right)^{|\alpha|}\vartheta_\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left[\mathcal{D}_\alpha\int_{\frac{x+t}{2}}^{t}\sigma(s)ds\right], & -\frac{1}{2}<\alpha<0, \end{cases} \tag{2.17}$$

а производные $\frac{\partial}{\partial x}H_\alpha$, $\frac{\partial}{\partial t}H_\alpha$ удовлетворяют неравенству

$$\left|DH_\alpha - \frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| \le \begin{cases} \frac{C_\alpha}{2}\left(\frac{x+t}{2x}\right)^\alpha \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\left[\sigma(x)+\alpha(\alpha+1)\frac{t-x}{tx}\right]\exp\left[C_\alpha\int_{\frac{x+t}{2}}^{t}\sigma(s)ds\right], & \alpha>0 \\ \frac{\mathcal{D}_\alpha}{2}\left(\frac{2x}{x+t}\right)^{|\alpha|}\vartheta_\alpha\left(\frac{x+t}{2}\right)\left[\vartheta_\alpha(x)+\frac{t-x}{tx}\right]\exp\left[\mathcal{D}_\alpha\int_{\frac{x+t}{2}}^{t}\vartheta_\alpha(s)ds\right], & -\frac{1}{2}<\alpha<0. \end{cases} \tag{2.17}$$

2. Преобразования специального вида и обратные к ним

Рассмотрим задачу, определяемую уравнением

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{a(a+1)}{x^2}\right\}y+q(x)y-\lambda^2 y=0,\quad 0<x<\infty. \tag{2.18}$$

и граничным условием

$$\lim_{x\to 0} x^{-a-1}\,y(x,\lambda)\neq\infty \tag{2.18'}$$

с потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_0^\infty x^{1\pm\delta}|q(x)|\,dx<\infty,\quad \delta>0. \tag{2.18''}$$

Такие потенциалы будем называть регулярными.

Пусть

$$a=n+\beta,\quad n=[n],\quad -\tfrac{1}{2}<\beta<\tfrac{1}{2}.$$

Задачу (2.18)-(2.18′) обозначим буквой $S(a,q;\lambda)$, уравнение (2.18) буквой $U(a,q;\lambda)$, граничное условие – $U_0(a)$. Т.о.

$$S(a,q;\lambda)\equiv\left\{U(a,q;\lambda),\ U_0(a)\right\}.$$

При помощи некоторых преобразований перейдем к задаче без дискретного спектра с некоторым другим регулярным потенциалом $q_p(x)$, а затем, применяя преобразование еще одного вида, перейдем к задаче с некоторым регулярным потенциалом q_{p+n} и параметром особенности равным $|\beta|$. Будут рассмотрены также обратные преобразования. Все эти преобразования изучались в [1] и систематически использовались в [4].

Пусть $u(x,\lambda)$, $u_k(\lambda)$ $(k=0,1,2,\dots,p)$ – решение задачи (2.18) – (2.18′), отвечающие, соответственно, непрерывному спектру $0<\lambda<\infty$ и дискретному спектру $-\mu_p^2<-\mu_{p-1}^2<\dots<-\mu_1^2<\mu_0^2=0$ и порождающие равенство Парсеваля

$$(f,g)_0=\frac{1}{2\pi}(Uf,Ug)_0+\sum_{k=0}^{p} f_k\cdot\bar g_k,$$

где

$$(f,g)_0=\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx,\quad Uf(t)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^n U(x,t)f(x)\,dx,$$

$$f_k=(f,u_k)_0.$$

Рассмотрим преобразование

$$u_\lambda^{(1)}=u^{(1)}(x,\lambda)=u(x,\lambda)+u_1^{(1)}(x)\int_x^\infty u_1(t)u(t,\lambda)\,dt=(I+K_1)u_\lambda, \tag{2.19}$$

где

$$u_1^{(1)}(x)=\frac{u_1(x)}{-\int_x^\infty u_1^2(t)\,dt}. \tag{2.20}$$

Из [1, гл.VI, §1] и [4, §1] следует, что преобразование (2.19) переводит решение задачи $S(a,q;\lambda)$ в решения задачи $S(a,q_1;\lambda)$,

где

$$\begin{aligned} q_1(x)&=q(x)-2\left[u_1^{(1)}(x)u_1(x)\right]'=\\ &=q(x)-2\left(J'/J\right)',\\ J&=-\int_x^\infty u_1^2(t)\,dt, \end{aligned} \tag{2.21}$$

причем функция $u_1^{(1)}(x)$ удовлетворяет уравнению $U(a,q_1;\ l\mu_1)$, граничному условию $U_0(a)$ и экспоненциально растет при $x\to+\infty$. Нетрудно видеть, что этим преобразованием собственная функция $u_1(x)$ переводится в нуль, а функции

$$u_k^{(1)}=(I+K_1)u_k,\quad k=2,3,\dots,p;0$$

являются собственными функциями новой задачи $S(a,q_1;\lambda)$, так как при $x\to+\infty$ экспоненциально убывают, а при $x\to 0$ удовлетворяют условию $U_0(a)$. Из равенства (2.I9) следует, что новых собственных функций не возникает. Можно проверить также, что потенциал $q_1(x)$ в (2.2I) регулярен. Итак, мы исключим одну собственную функцию. Аналогично поступаем с задачей $S(a,q_1;\lambda)$, имеющей собственные функции $u_k^{(1)}(x)$, $k=2,3,\dots,p;0$ $(k\neq 1)$.

В результате преобразований вида (2.I9) приходим к задаче $S(a,q_p;\lambda)$, не имеющей дискретного спектра. При $a>\frac{1}{2}$ возможно нулевое собственное число.

Теперь приведем задачу $S(a,q;\lambda)$ к задаче $S(|\alpha|,q_{p+n},\lambda)$, где $a=n+\alpha$, $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$, q_{p+n} – регулярный потенциал.

Пусть $n+\alpha>1/2$ и ненулевые собственные числа отсутствуют. Тогда решения уравнения $U(n+\alpha,q_p;0)$ не обращаются в нуль при $0<x<\infty$ ([2], стр. I00).

Пусть также нулевое собственное число отсутствует. Тогда существует решение $z_{n+\alpha}(x)$ уравнения $U(n+\alpha,q_p;0)$, ведущее себя, как $x^{-n-\alpha}$, при $x\to 0$ и $x\to+\infty$:

$$z_{n+\alpha}(x)=\frac{D}{x^{n+\alpha}}\left[1+O(x^{\pm\delta})\right],\quad \delta>0. \tag{2.22}$$

Рассмотрим преобразование

$$u^{(p+1)}(x,\lambda)=\frac{1}{z_{n+\alpha}(x)}\int_x^\infty z_{n+\alpha}(t)u^{(p)}(t,\lambda)dt \tag{2.23}$$

решений $u^{(p)}(x,\lambda)$ задачи $S(n+\alpha,q_p;\lambda)$.

В [I] и [II] показано, что функция $u^{(p+1)}(x,\lambda)$ является решением задачи $\{U(n+\alpha,\tilde{q}_p;\lambda),\ U_0(a-1)\}$, где потенциал

$$\tilde{q}_p(x)=q_p(x)-2[\ln z_{n+\alpha}(x)]''$$

нерегулярен. Функция $y_{n+\alpha}=\frac{1}{z_{n+\alpha}(x)}$ удовлетворяет уравнению $U(n+\alpha,\tilde{q}_p;0)$ и неограниченно растет при $x\to+\infty$. Уравнение $U(n+\alpha),\tilde{q}_p;\lambda)$ легко преобразуется в уравнение $U(n-1+\alpha,q_{p+1};\lambda)$, где потенциал

$$q_{p+1}(x)=q_p(x)-2[\ln x^{n+\alpha}z_{n+\alpha}(x)]'' \tag{2.24}$$

уже регулярен. Итак, при помощи преобразования (2.23) от задачи $S(n+\alpha,q_p;\lambda)$ мы перешли к задаче $S(n-1+\alpha,q_{p+1};\lambda)$, т.е. уменьшили параметр особенности на единицу.

Таким образом, в результате n преобразований вида (2.23) придем к задаче $S(\alpha,q_{p+n};\lambda)$, где

$$q_{p+n}(x)=q_{p+n-1}(x)-2[\ln x^{1+\alpha}z_{1+\alpha}(x)]'',$$

$z_{1+\alpha}(x)$ – решение типа (2.22) уравнения $U(\alpha+1,q_{p+n-1};\lambda)$.

Пусть теперь имеет место нулевое собственное число. В этом случае не существует решения вида (2.22) с одинаковым поведением при $x\to 0$ и $x\to+\infty$.

Пусть $\mathfrak{Z}_p(x)$ – решение уравнения $U(n+\alpha, q_p; 0)$ такое, что

$$\mathfrak{Z}_p(x) = \frac{A}{x^{n+\alpha}}\left[1 + O(x^{-\delta})\right], \quad x \to +\infty, \quad \delta > 0.$$

Тогда

$$\mathfrak{Z}_p(x) = Bx^{n+\alpha+1}\left[1 + O(x^{\delta})\right], \quad x \to 0, \quad \delta > 0.$$

Преобразование

$$u^{(p+1)}(x) = \frac{1}{\mathfrak{Z}_p(x)} \int_x^{\infty} \mathfrak{Z}_p(t)\, u^{(p)}(t, \lambda)\, dt.$$

переводит решения задачи $S(n+\alpha, q_p; \lambda)$ в решения задачи $\{U(n-1+\alpha), q_{p+1}; U_0(n+1+\alpha)\}$, где потенциал

$$q_{p+1}(x) = q_p(x) - 2\left[\ln x^{n+\alpha}\mathfrak{Z}_p(x)\right]'' -$$

регулярный при $x \to +\infty$, а при $x \to 0$ представляется в виде

$$q_{p+1}(x) = \frac{4(n+2)+2}{x^2} + \Delta q_p \tag{2.25}$$

($\Delta q_p(x)$ – регулярный потенциал). Функция $y_p(x) = \frac{1}{\mathfrak{Z}_p(x)}$ удовлетворяет уравнению $U(n-1+\alpha, q_{p+1}; 0)$. Задача $\{U(n-1+\alpha, q_{p+1}; \lambda), U_0(n+1+\alpha)\}$ имеет параметр особенности равный $n-1+\alpha$ при $x \to +\infty$ и $n+1+\alpha$ при $x \to 0$.

Пусть $u_{p+1}(x, i\bar{\mu})$ – решение задачи $\{U(n-1+\alpha, q_{p+1}; i\bar{\mu}, U_0(n+1+\alpha)\}$, где $\bar{\mu} > 0$ и не является собственным числом. Тогда

$$u_{p+1}(x, i\bar{\mu}) \neq 0, \quad 0 < x < \infty,$$

$$u_{p+1}(x, i\bar{\mu}) = \begin{cases} Ae^{-\bar{\mu}x}\left[1 + O(x^{-\delta})\right], & x \to +\infty, \\ Bx^{-(n+1+\alpha)}\left[1 + O(x^{\delta})\right], & x \to 0. \end{cases}$$

Преобразование вида

$$u^{(1)}_{p+1}(x, \lambda) = u_{p+1}(x) + \frac{u_{p+1}(x, i\bar{\mu})}{-\int_x^{\infty} u^2_{p+1}(t, i\bar{\mu})\,dt} \int_x^{\infty} u_{p+1}(t, i\bar{\mu})\, u_{p+1}(t, \lambda)\, dt \tag{2.26}$$

переводит решения задачи $\{U(n-1+\alpha, q_{p+1}; \lambda), U_0(n+1+\alpha)\}$ с нерегулярным при $x \to 0$ потенциалом $q_{p+1}(x)$ в решения задачи $S(n-1+\alpha, q^{(1)}_{p+1}; \lambda)$, где потенциал

$$q^{(1)}_{p+1}(x) = q_{p+1}(x) - 2\left[\frac{u^2_{p+1}(x, i\bar{\mu})}{-\int_x^{\infty} u^2_{p+1}(t, i\bar{\mu})\,dt}\right]' \tag{2.27}$$

регулярен как при $x \to +\infty$, так и при $x \to 0$.

Функция

$$\frac{u_{p+1}(x, i\bar{\mu})}{-\int_x^{\infty} u^2_{p+1}(t, i\bar{\mu}) \cdot dt}$$

удовлетворяет уравнению $U(n-1+\alpha, q^{(1)}_{p+1}; i\bar{\mu})$, граничному условию $U_0(n-1+\alpha)$ и экспоненциально растет при $x \to +\infty$. Итак, мы пришли к задаче $S(n-1+\alpha, q^{(1)}_{p+1}; \lambda)$, не имеющей нулевого собственного числа. Таким образом, при помощи преобразований вида (2.19), (2.23), (2.26) от задачи с произвольным параметром особенности мы перешли к задаче без дискретного спектра и параметром особенности $\alpha \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Рассмотрим теперь обратные преобразования. Пусть функция $u_1^{(1)}(x)$ является решением задачи $S(a; q_1; i\mu_1)$, $\mu_1>0$. Так как $-\mu_1^2$ не является собственным числом этой задачи, то

$$u_1^{(1)}(x) = Ae^{\mu_1 x}[1+o(x^{-\delta})], \quad x\to+\infty, \quad \delta>0.$$

Нетрудно проверить, что функция $u_1(x)$, определяемая равенством

$$u_1(x) = -\frac{u_1^{(1)}(x)}{1+\int\limits_0^x [u_1^{(1)}(t)]^2 dt}, \tag{2.28}$$

имеет такое асимптотическое поведение

$$u_1(x) = \begin{cases} Ax^{a+1}[1+o(x^{\delta})], & x\to 0, \\ Be^{-\mu_1 x}[1+o(x^{-\delta})], & x\to+\infty, \end{cases} \quad \delta>0 \tag{2.29}$$

Из [I,гл.УI,§I] и [4,§I] следует, что преобразование, обратное к преобразованию (2.I9), имеет вид

$$\begin{aligned} u(x,\lambda) &= u^{(1)}(x,\lambda) + u_1(x)\int\limits_0^x u_1^{(1)}(t)\,u^{(1)}(t,\lambda)\,dt = \\ &= (\dot{I}+H_1)\,u_\lambda^{(1)}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Это преобразование переводит решения задачи $S(a, q_1; \lambda)$ в решения задачи $S(a, q; \lambda)$ с потенциалом

$$\begin{aligned} q(x) &= q_1(x) + 2[u_1(x)\,u_1^{(1)}(x)]' = \\ &= q_1(x) - 2\left(\frac{J_1'}{J_1}\right)', \end{aligned} \tag{2.3I}$$

где

$$J_1(x) = 1+\int\limits_0^x [u_1^{(1)}(t)]^2 dt.$$

При этом справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\frac{u_1(x)}{u_1^{(1)}(x)} = J(x), \qquad J'(x) = [u_1(x)]^2 \\ &\frac{u_1^{(1)}(x)}{u_1(x)} = -J_1(x), \quad J_1' = [u_1^{(1)}(x)]^2. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Учитывая равенства (2.3I), получаем потенциал

$$q(x) = q_1(x) + 2\left(\frac{J'}{J}\right)',$$

который точно так определяется из формулы (2.2I) через $q_1(x)$.

Из равенства (2.29) следует, что функция $u_1(x)$, определяемая равенством (2.28), является собственной функцией задачи $S(a, q; \lambda)$, отвечающей собственному числу $-\mu_1^2$.

В [I], [4] доказана теорема, которая применительно к нашему случаю формулируется так:

Т Е О Р Е М А 2.6. Пусть семейство функций $u^{(1)}(x,\lambda)$, $0<\lambda<\infty$, $u_k^{(1)}(x)$, $k=2,3,\dots,p$ порождает равенство Парсеваля

$$(f,g)_0=\frac{1}{2\pi}(U_1 f, U_1 g)_0+\sum_{k=2}^{p}(u_k^{(1)},f)_0\cdot\overline{(u_k^{(1)},g)_0},$$

где

$$(f,g)_0=\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx,\quad U_1 f(t)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^n u^{(1)}(x,t)f(t)\,dt.$$

Тогда преобразованное по (2.30) семейство функций

$$u(x,\lambda)=(\dot I+H_1)u_\lambda^{(1)},\quad u_k(x)=(\dot I+H_1)u_k^{(1)},\quad k=2,3,\ldots,p$$

порождает такое равенство Парсеваля

$$(f,g)_0=\frac{1}{2\pi}(Uf,Ug)_0+\sum_{k=2}^{p}(u_k,f)_0\cdot\overline{(u_k,g)_0}+(u_1,f)_0\cdot\overline{(u_1,g)_0},$$

где

$$Uf(t)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^n u(x,t)f(x)\,dx.$$

Итак, мы вернулись к исходной задаче. Другие собственные числа вводятся аналогично.

В [4] доказана такая

ТЕОРЕМА 2.7. Если семейство функций $u(x,\lambda), 0<\lambda<\infty$ порождает равенство Парсеваля

$$(f,g)_0=\frac{1}{2\pi}(Uf,Ug)_0,\qquad Uf=\int_0^\infty u(x,t)f(x)\,dx,$$

и если

$$u_1(x,\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda^2-\lambda_0^2}}{z(x)}\cdot\int_x^\infty z(t)u(t,\lambda)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda_0^2}}\left[u'_x(x,\lambda)-\frac{z'(x)}{z(x)}u(x,\lambda)\right]=Tu_\lambda,$$

где $z(x)\neq 0,\quad 0<x<\infty,$

то семейство функций $u_1(x,\lambda), 0<\lambda<\infty$ также порождает равенство Парсеваля

$$(f,g)_0=\frac{1}{2\pi}(U_1 f,U_1 g)_0,\quad U_1 f(t)=\int_0^\infty u_1(x,t)f(x)\,dx.$$

Из [I], [4], [II] и из последней теоремы следует, что обратное к (2.23) преобразование имеет вид

$$u^{(p)}(x,\lambda)=\frac{\lambda^2}{y_{n+\alpha}(x)}\int_0^x y_{n+\alpha}(t)u^{(p+1)}(t,\lambda)\,dt, \tag{2.33}$$

где функция $u^{(p+1)}(x)$ является решением задачи $S(n-1+\alpha,q_{p+1};\lambda)$, функция $y_{n+\alpha}(x)$ является решением задачи $S(n-1+\alpha,q_{p+1};0)$ и при $x\to 0$, $x\to+\infty$:

$$y_{n+\alpha}(x)=x^{n+\alpha}\left[1+o(x^{\pm\delta})\right],\quad \delta>0.$$

Функция $u^{(p)}(x,\lambda)$ является решением задачи $S(n+\alpha,q_p;\lambda)$, где потенциал

$$q_p(x)=q_{p+1}(x)-2\left[\ln\frac{y_{n+\alpha}(x)}{x^{n+\alpha}}\right]'' \tag{2.34}$$

регулярный. Функция

$$z_{n+\alpha}(x) = [y_{n+\alpha}(x)]^{-1}$$

удовлетворяет уравнению $U(n+\alpha, q_p; 0)$.

Обратное к (2.26) преобразование строится аналогично преобразованию (2.30), обратному к (2.19).

Нам осталось еще рассмотреть случай $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, т.е. рассмотреть переход от задачи $S(\alpha, q; \lambda), -\frac{1}{2} < \alpha < 0$ к задаче $S(\beta, q; \lambda), 0 < \beta < 1/2$. Так как уравнения $U(\alpha, q; \lambda)$ и $U(-\alpha-1, q; \lambda)$ совпадают, то при помощи преобразования (2.33), повышающего параметр особенности на единицу, приходим к задаче $S(-\alpha, q_1; \lambda)$, $0 < -\alpha < 1/2$. Связь между потенциалами $q_1(x)$ и $q(x)$ определяется равенством (2.34), в котором следует положить $n=0$ и $-\alpha$ вместо α.

§ 3. СПЕКТР ЗАДАЧИ. ФУНКЦИЯ ЙОСТА. ФУНКЦИЯ РАССЕЯНИЯ

ТЕОРЕМА 3.1. Граничная задача $S(a, q; \lambda)$, $\alpha > -\frac{1}{2}$ имеет конечное число собственных значений. Все они отрицательные. При $\alpha > \frac{1}{2}$ возможно нулевое собственное число. Квадратные корни из собственных значений, имеющие вид $\lambda_k = i\mu_k$, $0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_p$ являются нулями функции $(-i\lambda x)^\alpha e_\alpha(x,\lambda)|_{x=0} = E_\alpha(\lambda)$, аналитической в верхней полуплоскости комплексного переменного λ. Непрерывный спектр задачи совпадает с интервалом $[0, \infty]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству соответствующего утверждения в [1] (также [11]) с привлечением метода расщепления операторов [7].

Замечание. Из теоремы 2.1. следует, что граничное условие $\lim_{x\to 0} x^{-\alpha-1} y(x,\lambda) \neq \infty$ эквивалентно условию

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha y(x,\lambda) = 0, \quad \alpha > -\frac{1}{2}.$$

Пусть в уравнении $U(\alpha, q; \lambda)$ параметр $\lambda \neq 0$ и вещественный. Решение $g_\alpha(x,\lambda)$ этого уравнения представимо в виде линейной комбинации решений $e_\alpha^{(1)}(x,\lambda)$ и $e_\alpha^{(2)}(x,\lambda)$:

$$g_\alpha(x,\lambda) = A(\lambda) e_\alpha^{(1)}(x,\lambda) + B(\lambda) e_\alpha^{(2)}(x,\lambda). \tag{3.1}$$

Пусть

$$w[f,g] = fg' - f'g.$$

Функции

$$e_\alpha(\lambda) = w[e_\alpha^{(1)}, g_\alpha], \quad E_\alpha(\lambda) = (-i\lambda)^\alpha e_\alpha(\lambda) \tag{3.2}$$

называются, соответственно, функцией Йоста и нормированной функцией Йоста. Функции $e_\alpha(x,\lambda) \equiv e_\alpha^{(1)}(x,\lambda)$ и $(-i\lambda x)^\alpha e_\alpha(x,\lambda) = E_\alpha(x,\lambda)$ называются, соответственно, решением Йоста и нормированным решением Йоста. Можно показать, что

$$e_\alpha(x,\lambda) = e_\alpha(\lambda)\frac{x^{-\alpha} - x^{\alpha+1}}{2\alpha+1} + o\left(\frac{x^{-\alpha} - x^{\alpha+1}}{2\alpha+1}\right), \quad x\to 0, \quad \alpha > -\frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Из интегрального уравнения для $e_\alpha(x,\lambda)$ [2, стр. 42] можно получить

$$\lim_{\lambda\to\infty} (-i\lambda)^\alpha e_\alpha(\lambda) = \lim_{x\to 0} (-ix)^\alpha h_\alpha(x) = P_\alpha = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}. \tag{3.4}$$

Используя обозначение (3.2), свойства решений Йоста из равенства (3.1) получим

$$g_\alpha(x,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}\left[e_\alpha(-\lambda)e_\alpha^{(1)}(x,\lambda)-e_\alpha(\lambda)e_\alpha^{(2)}(x,\lambda)\right]=$$
$$=\frac{e_\alpha(-\lambda)}{2i\lambda}\left[e_\alpha(x,\lambda)-e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}\,S_\alpha(-\lambda)e_\alpha(x,-\lambda)\right], \tag{3.5}$$

где функция

$$S_\alpha(\lambda)=\frac{E_\alpha(-\lambda)}{E_\alpha(\lambda)}$$

называется функцией рассеяния задачи $S(\alpha,q;\lambda)$. Нетрудно проверить следующие свойства функции рассеяния:

1. Унитарность - $S_\alpha(\lambda)\,\overline{S_\alpha(\lambda)}=1$.
2. $S_\alpha(-\lambda)=\overline{S_\alpha(\lambda)}$.
3. $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty}[S_\alpha(\lambda)-1]=0$.

Итак, функция

$$u_\alpha(x,\lambda)=\frac{2i\lambda}{e_\alpha(-\lambda)}\,g_\alpha(x,\lambda) \tag{3.6}$$

имеет представление

$$u_\alpha(x,\lambda)=e_\alpha(x,\lambda)-e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}\,S_\alpha(-\lambda)\,e_\alpha(x,-\lambda), \tag{3.7}$$

где

$$e_\alpha(x,\lambda)=h_\alpha(\lambda x)+\int_x^\infty K_\alpha(x,t)\,h_\alpha(\lambda t)\,dt,\quad x>0,\quad \alpha>-\tfrac{1}{2}. \tag{3.8}$$

Л Е М М А 3.1. Функция $\dfrac{\lambda^{2\alpha+1}}{E_\alpha(\lambda)}$ $(\alpha>0)$ ограничена при $\lambda\to 0$, $\Im m\lambda\geqslant 0$. Доказательство аналогично доказательству леммы 2.4.1 из [1] .

Л Е М М А 3.2. Пусть $\alpha>\frac{1}{2}$ и $\int_0^\infty x|q(x)|\,dx<\infty$. Если $\lambda=0$ является собственным числом граничной задачи (2.18) - (2.18′), то

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{E_\alpha(0,\lambda)}{\lambda^2}\neq 0\,;\,\infty,\qquad \Im m\lambda\geqslant 0.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $g_\alpha(x)$ - решение уравнения (2.18) при $\lambda=0$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x\to 0}x^{-\alpha-1}g_\alpha(x)=1.$$

В силу предположения, функция $g_\alpha(x)\in L_2(0,\infty)$ и, следовательно, имеет асимптотику

$$g_\alpha(x)=Bx^{-\alpha}[1+o(1)],\quad x\to+\infty.$$

Обозначим

$$G_\alpha(x)=x^\alpha g_\alpha(x).$$

Из асимптотики $G_\alpha(x)$ и $E_\alpha(x,0)$ при $x\to+\infty$ следует, что эти функции пропорциональны

$$E_\alpha(x,0)=AG_\alpha(x).$$

Из последнего равенства вытекает

$$0=\lim_{x\to 0}AG_\alpha(x)=\lim_{x\to 0}E_\alpha(x,0)=E_\alpha(0,0)=\lim_{\lambda\to 0}E_\alpha(0,\lambda).$$

Функции $E_\alpha(x,\lambda)$ и $G_\alpha(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$-E_\alpha'' + \frac{2\alpha}{x}E_\alpha' + q(x)E_\alpha = \lambda^2 E_\alpha, \quad 0 < x < \infty, \tag{3.8}$$

$$-G_\alpha'' + \frac{2\alpha}{x}G_\alpha' + q(x)G_\alpha = 0, \quad 0 < x < \infty. \tag{3.8'}$$

Вычитая из уравнения (3.8), умноженного на G_α, уравнение (3.8′), умноженное на $E_\alpha(x,\lambda)$, и обозначая

$$E_\alpha' G_\alpha - E_\alpha G_\alpha' = w(x,\lambda),$$

получим относительно функции $w(x,\lambda)$ уравнение

$$-w' + \frac{2\alpha}{x}w = \lambda^2 E_\alpha G_\alpha, \quad 0 < x < \infty,$$

интегрируя которое получаем

$$\lambda^2\int_x^b t^{-2\alpha}E_\alpha(t,\lambda)G_\alpha(t)\,dt = -\left.\frac{w(t,\lambda)}{t^{2\alpha}}\right|_{t=x}^{t=b} \tag{3.9}$$

Из теорем (2.I) - (2.4) нетрудно получить такие асимптотические равенства

$$G_\alpha(x) = \begin{cases} x^{2\alpha+1}[1+o(1)], & x\to 0 \\ 1+o(1), & x\to+\infty \end{cases}, \qquad G_\alpha'(x) = \begin{cases} (2\alpha+1)x^{2\alpha}[1+o(1)], & x\to 0 \\ O\left(\frac{1}{x}\right), & x\to+\infty \end{cases};$$

$$E_\alpha(x,\lambda) = \begin{cases} P_\alpha[1+o(1)], & x\to 0 \\ (\lambda x)^\alpha[1+o(1\lambda x|^\alpha)], & x\to+\infty \end{cases}, \quad \lim_{x\to 0} xE_\alpha'(x\lambda) = 0,$$

$$E_\alpha'(x,\lambda) = \left(\lambda+\frac{1}{x}\right)(\lambda x)^\alpha\left[1+(\lambda x)^\alpha o\left(\lambda+\frac{1}{x}\right)\right], \quad x\to+\infty,$$

с учетом которых из равенства (3.9), перейдя к пределу при $x\to 0$ и положив $b=\frac{1}{|\lambda|}$, получим

$$-(2\alpha+1)E_\alpha(0,\lambda) + O(\lambda^{2\alpha+1}) = \lambda^2\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t^{-\alpha}E_\alpha(t,\lambda)g_\alpha(t)\,dt. \tag{3.9'}$$

В силу оценки

$$|t^{-\alpha}E_\alpha(t,\lambda)| \le C_1(\alpha)t^{-\alpha}, \quad t < \frac{1}{|\lambda|},$$

которую нетрудно получить при помощи теоремы 2.2, а также [2], существует предел при $|\lambda|\to 0$ интегралов в равенстве (3.9′) и, учитывая, что $\alpha > 1/2$, получаем

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ (\operatorname{Im}\lambda\ge 0)}} \frac{E_\alpha(0,\lambda)}{\lambda^2} = \frac{1}{2\alpha+1}\lim_{\lambda\to 0}\left\{\int_0^{\frac{1}{|\lambda|}} t^{-\alpha}E_\alpha(t,\lambda)g_\alpha(t)\,dt + O(\lambda^{2\alpha-1})\right\} =$$
$$= -\frac{A}{2\alpha+1}\int_0^\infty g_\alpha^2(t)\,dt.$$

С Л Е Д С Т В И Е 3.I. Если $\int_0^\infty x|q(x)|\,dx < \infty$, $a > \frac{1}{2}$, то

$$1 - S_a(0) = 0. \tag{3.10}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из определения $S_a(\lambda)$ следует, что утверждение леммы очевидно в случае $E_a(0) \ne 0$.

Пусть $E_a(0) = 0$. Согласно лемме 3.2

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda^2}{E_\alpha(\lambda)} \neq \infty. \qquad (3.11)$$

Из равенства (3.5) получаем

$$\frac{2(i\lambda)^{2a+1}}{E_a(-\lambda)} \cdot x^a g_a(x,\lambda) - \left[E_a(x,\lambda) - E_a(x,-\lambda)\right] e^{ix a \operatorname{sign} \lambda} =$$

$$= \left[1 - S_a(\lambda)\right] E_a(x,\lambda).$$

Из 2a + I > 2, равенства (3.II), непрерывности $E_a(x,\lambda)$ по λ при $\lambda = 0$ (для которой достаточно наложенного на потенциал требования), существования достаточно малого $x > 0$ такого, что $E_a(x,0) \neq 0$, следует справедливость равенства (3.I0).

Л Е М М А 3.3. Пусть $-1/2 < \beta < 1/2$. Если

$$\int_0^\infty (x + x^{1+\beta}) |q(x)| \, dx < \infty,$$

то

$$\int_{|\lambda| \geq b > 0} \frac{|1 - S_a(\lambda)|}{|\lambda|^{1+\beta}} d\lambda < \infty. \qquad (3.12)$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Если $\beta > 0$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $-\frac{1}{2} < \beta \leq 0$. Пользуясь интегральным уравнением для решения Йоста [2,8], можно получить неравенство

$$|1 - S_a(\lambda)| \leq C_a \int_0^\infty \frac{t|q(t)|}{1 + |\lambda| t} dt, \qquad -\infty < \lambda < \infty,$$

из которого следует

$$\int_{|\lambda| \geq b > 0} \frac{|1 - S_a(\lambda)|}{|\lambda|^{1+\beta}} d\lambda \leq A_a \int_0^\infty t^{1+\beta} |q(t)| dt.$$

Л Е М М А 3.4. Пусть $a = n + \beta$ и $S_a(\lambda)$ – функция рассеяния задачи $S(a, q; \lambda)$. Функция рассеяния $S_a^*(\lambda)$ задачи $S(\alpha, q^{(1)}_{n+p}; \lambda)$, $\alpha = |\beta|$, полученной p – кратным преобразованием вида (2.I9), n –кратным преобразованием вида (2.23) и преобразованием вида (2.26) и (2.33), имеет вид

$$S_a^*(\lambda) = \left(\frac{\lambda - i\bar{\mu}}{\lambda + i\bar{\mu}}\right)^2 \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\lambda - i\mu_k}{\lambda + i\mu_k}\right)^2 S_a(\lambda), \quad \mu_k > 0, \quad \bar{\mu} > 0, \quad \mu_k \neq \bar{\mu}. \qquad (3.13)$$

Доказательство нетрудно получить непосредственной проверкой, учитывая также,что преобразования вида (2.23), (2.33) не меняют асимптотику решений [10].

С Л Е Д С Т В И Е 3.2. Пусть $a = n + \beta$, $-1/2 < \beta < 1/2$. Тогда

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} S_a^*(\lambda) = 1, \quad \int_{|\lambda| \geq b > 0} \frac{|1 - S_a^*(\lambda)|}{|\lambda|^{1+\beta}} d\lambda < \infty, \quad S_a^*(0) = 1 \quad (a > \tfrac{1}{2}).$$

Доказательство непосредственно следует из формул (3.I0), (3.I2), (3.I3).

Л Е М М А 3.5. Если

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}+\alpha} |q(x)| \, dx < \infty, \qquad 0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

то

$$\frac{1 - S_\alpha(\lambda)}{\lambda^\alpha} \in L_2(-\infty, \infty).$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из оценки

$$|1-S_a(\lambda)| \le C_a \int_0^\infty \frac{t|q(t)|}{1+|\lambda| t}\,dt$$

получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|1-S_a(\lambda)|^2}{|\lambda|^{2\alpha}} \le 2C_a^2 \left(\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}+\alpha}\,|q(t)|dt\right)^2.$$

С Л Е Д С Т В И Е 3.3. Функция $\dfrac{1-S_a^*(\lambda)}{\lambda^\alpha} \in L_2(-\infty,\infty)$, если

$$\frac{1-S_a(\lambda)}{\lambda^\alpha} \in L_2(-\infty,\infty).$$

§ 4. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

I. РАВЕНСТВО ПАРСЕВАЛЯ.

Пусть $g_k(x)$, $k=0,1,2,\dots,p$ ($k=0$ при $\alpha>\frac{1}{2}$) – собственные функции задачи $S(\alpha,q;\lambda)$, отвечающие собственным числам $0=\mu_0^2>-\mu_1^2>\dots>-\mu_p^2$. Пусть $g_\alpha(x,\lambda)$ – решения уравнения $U(\alpha,q;\lambda)$ при $\lambda\geqslant 0$. Функции $g_k(x)$ и $g_\alpha(x,\lambda)$ считаем нормированными так, что выполняется граничное условие

$$\lim_{x\to 0} x^{-\alpha-1} y(x,\lambda)=1, \quad \alpha>-1/2.$$

Т Е О Р Е М А 4.I. Семейство функций $g_\alpha(x,\lambda)$, $0<\lambda<\infty$, $g_k(x)$, $k=0,1,2,\dots,p$ порождает равенство Парсеваля, эквивалентное следующему разложению δ – функции:

$$\delta(x-y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_\alpha(x,\lambda)\,\frac{\lambda^{2\alpha+2}}{E_\alpha(-\lambda)E_\alpha(\lambda)}\,g_\alpha(y,\lambda)d\lambda + \sum_{k=0}^{p} c_k g_k(x) g_k(y), \tag{4.I}$$

где

$$c_k=\frac{1}{\|g_k\|_0^2}=\begin{cases} \dfrac{-2i\mu_k}{\dot{E}_\alpha(i\mu_k)}\cdot\dfrac{\partial E_\alpha(x,i\mu_k)}{\partial x^{2\alpha+1}}\Big|_{x=0}, & k=1,2,\dots,p,\ \mu_k>0 \\ -\lim\limits_{\mu\to 0}\dfrac{\mu^2}{E_\alpha(i\mu)}\cdot\dfrac{\partial E_\alpha(x,0)}{\partial x^{2\alpha+1}}\Big|_{x=0}, & k=0 \quad (\alpha>\frac{1}{2}), \end{cases} \tag{4.2}$$

$$E_\alpha(\lambda)=(-i\lambda)^\alpha e_\alpha(\lambda), \quad \dot{E}_\alpha(i\mu_k)=\frac{d}{d\lambda}\cdot E_\alpha(\lambda)\Big|_{\lambda=i\mu_k}$$

Эту теорему можно доказать методом, рассматриваемым в [II] для задачи без особенностей.

Введем функции

$$u_k(x)=\begin{cases} \sqrt{c_k}\cdot g_k(x) = m_k e_\alpha(x,i\mu_k), & k=1,2,\dots,p \\ \sqrt{c_0}\cdot g_0(x) = m_0\left[x^{-\alpha}+\int_x^\infty K_\alpha(x,t)\,t^{-\alpha}dt\right], & k=0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Можно показать, что

$$m_k=\sqrt{\frac{-2i\mu_k}{\dot{E}_\alpha(i\mu_k)}\left(\frac{\partial E_\alpha(x,i\mu_k)}{\partial x^{2\alpha+1}}\Big|_{x=0}\right)^{-1}}\cdot\mu_k^\alpha, \quad k=1,2,\dots,p$$

$$m_0=\sqrt{-\lim_{\mu\to+0}\frac{\mu^2}{E_\alpha(i\mu)}\left(\frac{\partial E_\alpha(x,0)}{\partial x^{2\alpha+1}}\Big|_{x=0}\right)^{-1}}. \tag{4.4}$$

Из разложения (4.I), (4.3), (3.7) следует, что функции

$$u_\alpha(x,\lambda) = \frac{2(i\lambda)^{\alpha+1}}{E_\alpha(-\lambda)} g_\alpha(x,\lambda) =$$
$$= e_\alpha(x,\lambda) - e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda} S_\alpha(-\lambda) e_\alpha(x,-\lambda), \tag{4.5}$$
$$u_k(x) = m_k e_\alpha(x, i\mu_k), \quad k = 1,2,\ldots,p;\ \mu_k > 0,$$
$$u_0(x) = m_0\left[x^{-\alpha} + \int_x^\infty K_\alpha(x,t)t^{-\alpha}dt\right], \quad \alpha > \frac{1}{2},$$

где

$$e_\alpha(x,\lambda) = h_\alpha(\lambda x) + \int_x^\infty K_\alpha(x,t)h_\alpha(\lambda t)dt, \quad \mathrm{Im}\,\lambda \geqslant 0,$$

порождают равенство Парсеваля

$$(f,g)_0 = \frac{1}{2\pi}(Uf, Ug)_0 + \sum_{k=0}^{p} U_k f \cdot \overline{U_k g},$$
$$(f,g)_0 = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}dx, \quad Uf(\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^n u_\alpha(x,\lambda)f(x)dx,$$
$$U_k f = \int_0^\infty u_k(x)f(x)dx.$$

2. ВЫВОД ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ.

Обозначим

$$U_0(x,\lambda) = h_\alpha(\lambda x) - e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda} S_\alpha(-\lambda)h_\alpha(-\lambda x), \quad 0<\alpha<\frac{1}{2}. \tag{4.6}$$

Тогда

$$u_\alpha(x,\lambda) = U_0(x,\lambda) + \int_x^\infty K_\alpha(x,t)U_0(t,\lambda)dt. \tag{4.7}$$

Обозначим

$$L_i^{(>a)}(0,\infty) = \{f(x): f(x)\in L_i(0,\infty),\ f(x)=0,\ \ 0\leqslant x\leqslant a,\ i=1,2,\infty\}.$$

($a>0$ – некоторое произвольное число).

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – произвольные функции из $L_1^{(>a)}(0,\infty)\cap L_\infty^{(>a)}(0,\infty)$ и финитные в окрестности $x = +\infty$.

Функцию $K_\alpha(x,t)$ продолжим нулем для $x>t$ и продолженную функцию будем обозначать по-прежнему.

Обозначим

$$K_\alpha^{(a)}(x,t) = \begin{cases} K_\alpha(x,t), & 0<a\leqslant x\leqslant t \\ 0, & 0\leqslant x\leqslant a \end{cases}. \tag{4.8}$$

Введем операторы

$$U_0\varphi(\lambda) = \int_0^\infty U_0(t,\lambda)\varphi(t)dt, \quad H_k\varphi = \int_0^\infty m_k h_\alpha(i\mu_k t)\varphi(t)dt,$$
$$K_a\varphi(x) = \int_x^\infty K_\alpha^{(a)}(x,t)\varphi(t)dt, \quad H_0\varphi = \int_0^\infty m_0 t^{-\alpha}\varphi(t)dt, \tag{4.9}$$
$$K_a^*\varphi(x) = \int_0^x K_\alpha^{(a)}(t,x)\varphi(t)dt.$$

Можно показать, что оператор $I + K_a^*$ переводит каждое из пространств $L_i^{(>a)}$ ($i=1,2,\infty$) в себя и имеет ограниченный обратный. Доказательство аналогично соответствующему утверждению в [6]. Принимая во внимание введенные обозначения, получим

$$U\varphi(\lambda) = U_0\varphi(\lambda) + \int_0^\infty \varphi(x)dx\int_x^\infty K_\alpha^{(a)}(x,t)U_0(t,\lambda)dt =$$
$$= U_0\varphi(\lambda) + \int_0^\infty U_0(t,\lambda)dt\int_0^t K_\alpha^{(a)}(x,t)\varphi(x)dx =$$

$$= U_\circ \varphi + U_\circ K_a^* \varphi = U_\circ (I + K_a^*) \varphi, \qquad \lambda > 0.$$

Перестановка порядка интегрирования возможна в силу условий на $\varphi(x)$. Обозначим

$$(I + K_a^*) \varphi = \varphi_a^*, \tag{4.10}$$

тогда

$$U_\varphi = U_\circ \varphi_a^*. \tag{4.11}$$

Из равенства Парсеваля, равенства (4.11), учитывая обозначения (4.9), получим равенство

$$\| \varphi \|_\circ^2 = \sum_{\kappa=0}^{p} H_\kappa \varphi_a^* \cdot \overline{H_\kappa \varphi_a^*} + \frac{1}{2\pi} (U_\circ \varphi, U_\circ \varphi)_\circ, \tag{4.12}$$

из которого следует неравенство

$$\| U_\circ \varphi_a^* \| \le \| \varphi \|_\circ = \| (\dot{I} + K_a^*)^{-1} \varphi_a^* \| \le \| (\dot{I} + K_a^*)^{-1} \| \cdot \| \varphi_a^* \|. \tag{4.13}$$

Для $\varphi, \psi \in L_1^{(>a)} \cap L_\infty^{(>a)}$ и финитных в окрестности $x \to +\infty$ имеем

$$U_\circ \varphi(\lambda) \cdot \overline{U_\circ \psi(\lambda)} = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x) \overline{\psi(t)}\, U_\circ(x,\lambda)\, U_\circ(t,\lambda)\, dx\, dt.$$

Нетрудно проверить, что

$$U_\circ(x,\lambda) \overline{U_\circ(t,\lambda)} = 2\pi j_\alpha(\lambda x) j_\alpha(\lambda t) + h_\alpha^{(2)}(\lambda x) T_s(-\lambda) h_\alpha^{(2)}(\lambda t) + $$
$$+ h_\alpha^{(1)}(\lambda x) T_s(\lambda) h_\alpha^{(1)}(\lambda t),$$

где

$$j_\alpha(t) = \sqrt{t}\, \mathcal{J}_{\alpha+\frac{1}{2}}(t), \quad h_\alpha(x) e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} - h_\alpha(x) e^{\frac{i\pi\alpha}{2}} = 2i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, j_\alpha(x) -$$

– функция Бесселя-Риккати,

$$T_s(\lambda) = e^{-i\pi\alpha \operatorname{sign} \lambda} [1 - S_\alpha(\lambda)]. \tag{4.14}$$

Введем преобразования

$$B_\alpha \varphi(\lambda) = \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^n j_\alpha(\lambda t) \varphi(t)\, dt. \tag{4.15}$$

– преобразование Бесселя. (Известно [3], что B_α – унитарный оператор в $L_2(0,\infty)$),

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\alpha \varphi(\lambda) &= \underset{n \to \infty}{\text{l.i.m.}} \int_0^n h_\alpha(\lambda t) \varphi(t)\, dt, \\ \mathcal{H}_\alpha \varphi(-\lambda) &= \overline{\mathcal{H}_\alpha \varphi(\lambda)} = \int_0^\infty \overline{h_\alpha(\lambda t)} \varphi(t)\, dt = \int_0^\infty h_\alpha(-\lambda t) \varphi(t)\, dt. \end{aligned} \tag{4.16}$$

– преобразование Ханкеля. Учитывая эти обозначения, имеем

$$\begin{aligned} U_\circ \varphi(\lambda) \cdot U_\circ \psi(\lambda) &= 2\pi B_\alpha \varphi(\lambda) B_\alpha \psi(\lambda) + \mathcal{H}_\alpha \varphi(-\lambda) T_s(-\lambda) \times \\ &\times \mathcal{H}_\alpha \psi(-\lambda) + \mathcal{H}_\alpha \varphi(\lambda) \cdot T_s(\lambda) \cdot \mathcal{H}_\alpha \psi(\lambda). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Оператор $U_\circ^* U_\circ - 2\pi \dot{I}$ ограничен в $L_2^{(>a)}(0,\infty)$ ввиду ограниченности оператора $U_\circ$. Учитывая равенство (4.17), унитарность B_α и $\mathcal{H}_\alpha$, имеем

$$\left\{\frac{1}{2\pi}U_0^*U_0-\dot{I}\right\}\varphi=\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\int_{-n}^{n}\mathcal{H}_\alpha\varphi(\lambda)T_s(\lambda)h_\alpha(\lambda x)d\lambda= \tag{4.18}$$

$$=\frac{-1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\lambda x)^{\alpha+1}h_{\alpha+1}(\lambda x)-a_{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+2}}\,\frac{T_s(\lambda)}{2\pi}\mathcal{H}_\alpha\varphi(\lambda)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}F_1^{(s)}(x,y;\alpha)\varphi(y)dy,$$

где

$$F_1^{(s)}(x,y;\alpha)=-\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\int_{-n}^{n}\frac{(\lambda x)^{\alpha+1}h_{\alpha+1}(\lambda x)-a_{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+2}}\,\frac{T_s(\lambda)}{2\pi}h_\alpha(\lambda y)d\lambda. \tag{4.18'}$$

Обозначим

$$\frac{1}{2\pi}U_0^*U_0-\dot{I}=F_a^{(s)}. \tag{4.18''}$$

Итак, имеем

$$(\varphi,\psi)_0=\sum_{k=1}^{p}\mathcal{H}_k\varphi_a^*\cdot\overline{H_k\psi_a^*}+\left(\left\{I+F_a^{(s)}\right\}\varphi_a^*,\ \psi_a^*\right)_0= \tag{4.19}$$

$$=\left(\left\{\dot{I}+F_a\right\}\varphi_a^*,\psi_a^*\right)_0,$$

где

$$F_a\varphi(x)=\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_a^{\infty}F_1(x,y;\alpha)\varphi(y)dy, \tag{4.20}$$

$$F_1(x,y;\alpha)=-\sum_{k=1}^{p}\frac{(i\mu_k)^{\alpha+1}h_{\alpha+1}(i\mu_k x)-a_{\alpha+1}}{(i\mu_k)^{\alpha+1}}\cdot h_\alpha(i\mu_k y)+F_1^{(s)}(x,y;\alpha). \tag{4.20'}$$

Из формул (4.19) и (4.11) следует равенство

$$(\varphi,\psi)_0=\left(\{\dot{I}+K_a\}\{\dot{I}+F_a\}\{\dot{I}+K_a^*\}\varphi,\psi\right)_0,$$

равносильное равенству в $L_2^{(>a)}(0,\infty)$ операторов

$$(\dot{I}+K_a)(\dot{I}+F_a)(\dot{I}+K_a^*)=I. \tag{4.21}$$

Раскрыв скобки в (4.21), получим

$$K_a^*+(K_a+F_a+K_aF_a)(\dot{I}+K_a^*)=0. \tag{4.21'}$$

Ядром оператора K_a^* является функция

$$K_a^*(x,t)=K_\alpha^{(a)}(t,x),\qquad K_\alpha^{(a)}(t,x)=0,\quad t>x.$$

Следовательно, для произвольного $s\geqslant a>0$ и произвольной функции $\varphi(t)\in L_2^{(>s)}(0,\infty)$ справедливо равенство

$$K_a^*\varphi(x)=\int_0^{\infty}K_a^*(x,t)\varphi(t)dt=\int_{[a,x]\cap[s,\infty]}K_\alpha(t,x)\varphi(t)dt=0,\quad a\leq x\leq s.$$

Из этого равенства и (4.21') следует, что

$$(K_a+F_a+K_aF_a)\varphi_a^*(x)=0,\quad a\leq x\leq s, \tag{4.22}$$

где

$$\varphi_a^*(x)=(I+K_a^*)\varphi(x)\in L_2^{(>s)}(0,\infty).$$

Ввиду произвольности $\varphi_a^*(x)$ при произвольной $\varphi(x)\in L_2^{(>s)}(0,\infty)$ равенство (4.22) можно формально при помощи ядер соответствующих операторов записать в виде

$$K_\alpha(x,y)+F(x,y;\alpha)+\int_x^\infty K_\alpha(x,t)F(t,y;\alpha)\,dt=0, \qquad 0<a\leq x\leq s\leq y \tag{4.23}$$

при каждом $s>a>0$, где $a>0$ – произвольно и фиксировано. Значит, уравнение (4.23) выполнено при $0<x\leq y$. Это уравнение, следуя [I], назовем основным уравнением. Оно приобретает строгий смысл уравнения в пространстве обычных функций, как только будет установлена соответствующая гладкость ядра

$$F(x,y;\alpha)=\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}F_1(x,y;\alpha).$$

3. СВОЙСТВА ЯДРА ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Л Е М М А 4.I. Функция $F_1(x,y;\alpha)$, определяемая равенством (4.20′) и задающая оператор

$$F_a\varphi(x)=\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty F_1(x,y;\alpha)\varphi(y)\,dy,\quad 0<a\leq x,\quad 0<\alpha<\tfrac{1}{2},$$

ограниченный в $L_2^{(>a)}(0,\infty)$, дифференцируема по x $(x>0)$, и производная

$$\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\cdot F_1(x,y;\alpha)=F(x,y;\alpha)$$

удовлетворяет неравенству

$$|F(x,y;\alpha)|\leq K_\alpha x^{-\alpha}y^{-\alpha}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2\alpha}\sigma_0\left(\frac{x+y}{2}\right)+\frac{\sigma_\alpha\left(\frac{x+y}{2}\right)}{x^\alpha y^\alpha},\ 0<x\leq y,\ 0<\alpha<\tfrac{1}{2}, \tag{4.24}$$

где

$$\sigma_\beta(x)=\int_x^\infty t^\beta|q(t)|\,dt,$$

постоянная K_α зависит от $\sigma_1(0)$ и $\sigma_{1+\alpha}(0)$. Функция $F(x,y;\alpha)$ –симметричная функция от x и y.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Обозначим

$$I+H_a=(I+K_a)^{-1}.$$

(о свойствах ядра $H_\alpha^{(a)}(x,y)$ оператора H_a см. теорему 2.5). Из равенства (4.2I) получаем равенство операторов в $L_2^{(>a)}(0,\infty)$

$$\dot I+F_a=(\dot I+H_a)(\dot I+H_a^*) \tag{4.25}$$

или

$$F_a=H_a+H_a^*+H_aH_a^*. \tag{4.25′}$$

Обозначим для краткости через

$$A_a(t,y)=H_\alpha^{(a)}(t,y)+H_a^*(t,y)+\int_0^\infty H_\alpha^{(a)}(t,s)H_a^*(s,y)\,ds \tag{4.25″}$$

ядро оператора

$$H_a+H_a^*+H_aH_a^*=A_a.$$

Равенство (4.25′) означает, что

$$\int_a^x t^{\alpha+1}F_a\varphi(t)\,dt=\int_a^x t^{\alpha+1}A_a\varphi(t)\,dt$$

при любой $\varphi\in L_2^{(>a)}(0,\infty)$. Последнее равенство равносильно следующему

$$\int_a^\infty \{F_1(x,y;\alpha) - F_1(a,y;\alpha)\}\varphi(y)dy = \int_a^x t^{\alpha+1}dt \int_a^\infty A_a(t,y)\varphi(y)dy =$$
$$= \int_a^\infty \{\int_a^x t^{\alpha+1} A_a(t,y)dt\} \varphi(y)dy.$$

(перестановка порядка интегрирования возможна в силу условия $\int_a^x t^{\alpha+1}|A_a(t,y)dt \in L_2(a,\infty)$, которое нетрудно проверяется). Из произвольности φ вытекает в $L_2(a,\infty)$ по y равенство

$$F_1(x,y;\alpha) - F_1(a,y;\alpha) = \int_a^x t^{\alpha+1} A_a(t,y)dt$$

при каждом $x \geqslant a$. Из последнего равенства следует, что существует

$$\frac{1}{x^{\alpha+1}} \frac{d}{dx} F_1(x,y;\alpha) = A_a(x,y) = F(x,y;\alpha).$$

Пусть $0 < x \leq y$, тогда $H_a^*(x,y) = 0$. Из равенства (4.25″), учитывая $H_a^*(t,y) = H_\alpha^{(a)}(y,t)$, получаем

$$F(x,y;\alpha) = H_\alpha(x,y) + \int_y^\infty H_\alpha(x,t)\,H_\alpha(y,t)dt, \quad 0 < x \leq y. \tag{4.26}$$

Из оценки (2.I7) для функции $H_\alpha(x,y)$ и равенства (4.26) вытекает оценка (4.24) Из равенства 4.2I следует самосопряженность оператора F_a. Из вещественности ядра и самосопряженности получаем

$$F(x,y;\alpha) = F(y,x;\alpha), \quad x > 0,\ y > 0.$$

С Л Е Д С Т В И Е. Оператор F_a в терминах ядра основного уравнения определяется равенством

$$F_a\ \varphi(x) = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \frac{d}{dx} \int_a^\infty F_1(x,y;\alpha)\varphi(y)dy = \int_a^\infty F(x,y;\alpha)\varphi(y)dy.$$

С Л Е Д С Т В И Е 4.I. Функция $F(x,y;\alpha)$ ограничена в области $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant y$.

С Л Е Д С Т В И Е 4.2. Функция $F(x,y;\alpha)$ суммируема по y в области $0 < x \leq y$ и интеграл

$$\int_x^\infty x^\alpha |F(x,y;\alpha)|dy < \infty$$

равномерно по $x \geqslant 0$.

Л Е М М А 4.2. Ядро $K_\alpha(x,y)$ оператора преобразования является равномерно непрерывной функцией по обеим переменным в области $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant y$.

Доказательство нетрудно получить принимая во внимание суммируемость производных функций $K_\alpha(x,y)$.

С Л Е Д С Т В И Е 4.3. Функция

$$m_K(x,y) = \max_{s \in [x,\infty]} |K_\alpha(s,y)|$$

равномерно относительно $x \geqslant \varepsilon > 0$ непрерывна по y в области $y \geqslant x$.

Л Е М М А 4.3. Существует

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha K_\alpha(x,y) = k(t), \quad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2},$$

где $k(t)$ имеет суммируемую производную при $t > 0$, $k(t) \in L_1(0,\infty)$ и сходимость равномерная в каждом конечном интервале $0 < \varepsilon \leqslant t \leqslant a < \infty$. Также

$$\lim_{x \to 0} \int_0^\infty |x^\alpha K_\alpha(x,t) - k(t)|dt = 0.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из интегрального уравнения для функции $K_\alpha(x,y)$

вида функции Римана $R_\alpha(s,t;\xi,\eta)$ [9] вытекает первая часть утверждения. Из оценки функции $K_\alpha(x,t)$ следует, что интегралы

$$\int_0^\varepsilon x^\alpha |K_\alpha(x,t)|\,dt, \qquad \int_N^\infty x^\alpha |K_\alpha(x,t)|\,dt$$

стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$, $N \to +\infty$ равномерно относительно $x \in [0,b]$, $b>0$. Из этого последнего свойства и равномерной сходимости по t в каждом конечном интервале, не содержащем точек $t=0$ и $t=+\infty$, следует справедливость второго утверждения леммы.

З А М Е Ч А Н И Е 1. Пусть $H_\alpha(x,t)$ - ядро оператора $(\dot{I}+K)^{-1}=\dot{I}+H$. Тогда существует

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha H_\alpha(x,t)=h(t), \qquad \alpha>-\frac{1}{2},$$

и этот предел имеет свойства, аналогичные свойствам функции $k(t)$ из леммы 4.3.

З А М Е Ч А Н И Е 2. Из представления (4.26) для ядра $F(x,y;\alpha)$ основного уравнения и замечания 1 следует, что существует

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha F(x,y;\alpha)=f(y),$$

и этот предел имеет свойства, аналогичные свойствам функции $k(t)$ из леммы 4.3.

Л Е М М А 4.4. Функция $F(x,y;\alpha)$ непрерывна по y равномерно относительно x и y из области $0<\varepsilon\le x\le y$.

Доказательство непосредственно следует из (4.26).

Л Е М М А 4.5. Функция $F(x,y;\alpha)$ непрерывна по обеим переменным x и y равномерно в области $0<\varepsilon\le x\le y$.

Доказательство легко получить из основного уравнения в силу леммы 4.2, леммы 4.4 и суммируемости функций $F(t,y;\alpha)$ и $K_\alpha(x,t)$ по t.

Л Е М М А 4.6. Функция $F(x,y;\alpha)$ имеет суммируемые первые частные производные x и по y, для которых справедливы оценки

$$\left|DF(x,y;\alpha)-\frac{1}{4}q\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \qquad x>0, \quad y>0; \tag{4.27}$$

$$\left|\frac{d}{dx}F(y,y;\alpha)-\frac{1}{2}q(y)\right|\le \psi_0(y;\alpha), \qquad y>0,$$

где $DF(x,y;\alpha)$ означает $\frac{\partial}{\partial x}F$ или $\frac{\partial}{\partial y}F$, функции $\psi_1(x,y;\alpha)$, $\psi_0(y;\alpha)$ суммируемы по y в интервале $[\varepsilon,\infty]$, $\varepsilon>0$, $x>0$, а функция $\psi_0(y;\alpha)$, кроме того, обладает свойством

$$\int_0^\infty \left(y^{\frac{1}{2}+\alpha}+y^{1+\alpha}\right)\psi_0(y;\alpha)\,dy<\infty, \qquad 0<\alpha<\frac{1}{2}. \tag{4.27'}$$

Доказательство нетрудно получить из представления (4.26) функции $F(x,y;\alpha)$ и оценок (2.17), (2.17′) функции $H_\alpha(x,y)$ и ее производных.

Л Е М М А 4.7. Функция $F(x,y;\alpha)$ имеет представление

$$F(x,y;\alpha)=-\int_{\frac{x+y}{2}}^\infty R_\alpha\left(s,0;\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)\frac{d}{ds}F(s,s;\alpha)\,ds, \qquad x>0,\ y>0, \tag{4.28}$$

где

$$\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{2}+\alpha}+s^{1+\alpha}\right)\left|\frac{d}{ds}F(s,s;\alpha)\right|ds, \qquad 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Аппроксимируем потенциал $q(x)$ последовательностью дифференцируемых функций $q_n(x)$ таких, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\varepsilon}^{\infty}|q_n(t)-q(t)|\,dt=0,\quad \varepsilon>0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\infty}(t^{1/2+\alpha}+t^{1+\alpha})|q_n(t)-q(t)|\,dt=0,$$

тогда ядра $H_\alpha^{(n)}(x,y)$ имеют вторые непрерывные частные производные и удовлетворяют уравнению

$$B_x^{(\alpha)}[H_\alpha^{(n)}(x,y)]=B_y^{(\alpha)}[H_\alpha^{(n)}(x,y)]-q_n(y)H_\alpha^{(n)}(x,y),\quad 0<x<y, \tag{4.29}$$

где
$$B_x^{(\alpha)}\equiv\frac{d^2}{dx^2}-\frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}.$$

Это утверждение доказано для ядер $K_\alpha^{(n)}(x,y)$ в [9]. Доказательство для ядер $H_\alpha^{(n)}(x,y)$ аналогично ввиду " одинаковости" интегральных уравнений для $H_\alpha(x,y)$ и $K_\alpha(x,y)$.

Из представления (4.26), учитывая (4.29), получаем, что $F_n(x,y;\alpha)$ также имеет вторые производные и справедливо равенство

$$B_x^{(\alpha)}[F_n]-B_y^{(\alpha)}[F_n]=$$
$$=\mathcal{L}[H_\alpha^{(n)}]+\int_x^\infty\mathcal{L}[H_\alpha^{(n)}(x,s)]H_\alpha^{(n)}(y,s)\,ds=0, \tag{4.30}$$

где
$$\mathcal{L}[H_\alpha^{(n)}]=B_x^{(\alpha)}[H_\alpha^{(n)}]-B_y^{(\alpha)}[H_\alpha^{(n)}]+q_n(y)H_\alpha^{(n)}=0.$$

Решая уравнение (4.30) в области $0<x\leqslant y$ методом Римана [9] , находим, что

$$F_n(x,y;\alpha)=-\int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty}R_\alpha\left(s,0;\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)\frac{d}{ds}F_n(s,s;\alpha)\,ds,\quad 0<x\leqslant y,$$

где функция Римана

$$R_\alpha(s,t;\xi,\eta)=F(-\alpha,-\alpha,1;z)(1-z)^{-\alpha},\quad 0\leqslant t\leqslant\eta\leqslant\xi\leqslant s,$$

$$z=\frac{(s^2-\xi^2)(\eta^2-t^2)}{(s^2-\eta^2)(\xi^2-t^2)},\ F(-\alpha,-\alpha,1;z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-\alpha)\dots(-\alpha+n-1)}{n!}\right]^2 z^n.$$

Заметим, что из равенства (4.26) для $F(x,y;\alpha)$ и $F_n(x,y;\alpha)$ и оценки для $H_\alpha(x,y)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x,y;\alpha)=F(x,y;\alpha)$$

равномерно в любой области $0<\varepsilon\leqslant x\leqslant y$, а также

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^\infty x^\alpha|F_n(x,y;\alpha)-F(x,y;\alpha)|\,dy=0$$

равномерно по $x\geqslant 0$, и

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^\infty\left|\frac{dF_n(s,s;\alpha)}{ds}-\frac{dF(s,s;\alpha)}{ds}\right|ds=0$$

равномерно по $x\geqslant\varepsilon>0$. Из этих последних замечаний следует справедливость леммы.

4. РАЗРЕШИМОСТЬ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ.

Пусть $L_1^\rho(\varepsilon,\infty)$ обозначает множество функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_{1;\rho}=\int_\varepsilon^\infty(1+t^{-\alpha})|\varphi(t)|dt<\infty,\ \alpha>0.$$

Т Е О Р Е М А 4.1. Пусть

$$F_\varepsilon\varphi(x)=\int_\varepsilon^\infty F(x,y;\alpha)\varphi(y)dy\ ,\quad \varepsilon\geqslant 0,\ \ 0<\alpha<\tfrac{1}{2},$$

тогда оператор $\dot I+F_\varepsilon$ действует из $L_1^\rho(\varepsilon,\infty)$ в $L_1^\rho(\varepsilon,\infty)$ (из $L_2(\varepsilon,\infty)$ в $L_2(\varepsilon,\infty)$) и имеет ограниченный обратный, равный

$$(\dot I+F_\varepsilon)^{-1}=(\dot I+K_\varepsilon^*)(\dot I+K_\varepsilon). \tag{4.31}$$

Если $\varepsilon>0$, то $\dot I+F_\varepsilon$ действует из $L_1(\varepsilon,\infty)$ в $L_1(\varepsilon,\infty)$ и имеет ограниченный обратный.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Равенство (4.31) легко следует из операторного равенства (4.21), которое, как нетрудно проверить, справедливо в $L_1^\rho(\varepsilon,\infty)$ $(L_2(\varepsilon,\infty))$. Так как ядро K_ε оператора преобразования и ядро H_ε оператора, обратного к оператору преобразования, имеют оценки одинакового вида и

$$\dot I+F_\varepsilon=(\dot I+H_\varepsilon)(\dot I+H_\varepsilon^*),$$

то для доказательства теоремы достаточно установить, что один из операторов $\dot I+F_\varepsilon$ или $(\dot I+F_\varepsilon)^{-1}$ действует в указанных пространствах функций. Пользуясь оценками для H_ε и K_ε, это нетрудно выполнить аналогично соответствующей проверке из [6].

С Л Е Д С Т В И Е 4.1. Основное уравнение как уравнение относительно функции

$$k_x(y)=x^\alpha K_\alpha(x,y),\quad 0<x\leq y,\quad 0<\alpha<\tfrac{1}{2}$$

имеет единственное решение из $L_1^\rho(x,\infty)$. Для $x\geqslant\delta>0$ основное уравнение имеет единственное решение из $L_1(x,\infty)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Обозначим

$$f_x(y)=x^\alpha F(x,y;\alpha),\quad 0<x\leq y,\quad 0<\alpha<\tfrac{1}{2}.$$

Из равенства (4.24) следует, что $f_x(y)\in L_1^\rho(x,\infty),\ x\geqslant 0$ и $f_x(y)\in L_1(x,\infty),\ x>0$. Основное уравнение можно записать в операторной форме так:

$$(\dot I+F_x)k_x=-f_x.$$

По предыдущей теореме

$$-k_x=(\dot I+F_x)^{-1}f_x=(\dot I+K_x^*)(\dot I+K_x)f_x\in\begin{cases}L_1^\rho(x,\infty), & x\geqslant 0\\ L_1(x,\infty), & x>0.\end{cases}$$

С Л Е Д С Т В И Е 4.2. Справедливы неравенства

$$\max_{x\in[0,\infty]}\|(\dot I+F_x)^{-1}\|_{1;\rho}<\infty,$$

$$\max_{x\in[\delta,\infty]}\|(\dot I+F_x)^{-1}\|_1<\infty,$$

где δ - произвольное положительное число.

С Л Е Д С Т В И Е 4.3. Уравнение

$$(\dot{I}+F_\varepsilon)\varphi=0, \qquad \varepsilon\geqslant 0$$

имеет только нулевое решение из $L_1^\rho(\varepsilon,\infty)$ $(L_2(\varepsilon,\infty))$.

5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Л Е М М А 4.8. Оператор $\dot{I}+F_\varepsilon^{(s)}$ при $0<\alpha<\frac{1}{2}$, действующий из $L_2(\varepsilon,\infty)$ в $L_2(\varepsilon,\infty)$, неотрицателен.

Доказательство следует из равенства

$$(\{I+F_\varepsilon^{(s)}\}\varphi,\varphi)_0=\frac{1}{2\pi}(U_0^*U_0\varphi,\varphi)_0=\frac{1}{2\pi}(U_0\varphi,U_0\varphi)_0, \quad \varepsilon\geqslant 0,$$

где

$$U_0\varphi(\lambda)=\int_0^\infty U_0(x,\lambda)\varphi(x)dx,$$

$$U_0(x,\lambda)=h_\alpha(\lambda x)-e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}S_\alpha(-\lambda)h_\alpha(-\lambda x),$$

полученного при выводе основного уравнения (§ 4, п. 2).

Пусть

$$\hat{\varphi}_h(\lambda)=\int_0^\infty h_\alpha(\lambda x)\varphi(x)dx.$$

обозначает преобразование Ханкеля функций $\varphi\in L_1^\rho(0,\infty)$.

Л Е М М А 4.9. Для того, чтобы функция $\varphi\in L_1^\rho(\varepsilon,\infty)\cap L_2(\varepsilon,\infty)$, $(0<\alpha<\frac{1}{2})$, $\varepsilon\geqslant 0$ была решением уравнения

$$\varphi+F_\varepsilon\varphi=\varphi(x)+\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_\varepsilon^\infty F_1(x,y;\alpha)\varphi(y)dy=0,$$

необходимо и достаточно, чтобы она была решением уравнения

$$\varphi+F_\varepsilon^{(s)}\varphi=\varphi(x)+\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_\varepsilon^\infty F_1^{(s)}(x,y;\alpha)\varphi(y)dy=0$$

и

$$\hat{\varphi}_h(i\mu_k)=0, \quad k=1,2,\dots,p.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Необходимость. Пусть φ - решение и ψ - произвольная функция из того же класса, что и φ.

Имеем

$$0=(\varphi+F_\varepsilon\varphi,\varphi)_0=(\varphi+F_\varepsilon^{(s)}\varphi,\varphi)_0+\sum_{k=1}^p|\hat{\varphi}_h(i\mu_k)|^2m_k^2.$$

Сумма неотрицательных чисел равна нулю, если все числа равны нулю, т.е.

$$(\varphi+F_\varepsilon^{(s)}\varphi,\varphi)_0=0, \qquad \hat{\varphi}_h(i\mu_k)=0, \qquad k=1,2,\dots,p.$$

Также

$$0=(\varphi+F_\varepsilon\varphi,\psi)=(\varphi+F_\varepsilon^{(s)}\varphi,\psi)_0.$$

Из произвольности ψ вытекает равенство $\varphi+F_\varepsilon^{(s)}\varphi=0$.

Достаточность очевидна.

Л Е М М А 4.10. Для того, чтобы функция $\varphi(x) \in L_2(\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon \geq 0$ была решением уравнения

$$\varphi + F_\varepsilon^{(s)} \varphi = 0, \quad \varepsilon \geq 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла равенству

$$\hat{\varphi}_h(\lambda) - e^{i\pi\alpha \operatorname{sign} \lambda} S_\alpha(-\lambda) \hat{\varphi}_h(-\lambda) = 0, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

где

$$\hat{\varphi}_h(\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^n h_\alpha(\lambda x) \varphi(x) dx,$$

$$S_\alpha(\lambda) = \frac{(i\lambda)^\alpha e_\alpha(-\lambda)}{(-i\lambda)^\alpha e_\alpha(\lambda)} = \frac{E_\alpha(-\lambda)}{E_\alpha(\lambda)}.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Необходимость. При выводе основного уравнения было получено равенство

$$\dot{I} + F_\varepsilon^{(s)} = \frac{1}{2\pi} U_0^* U_0,$$

где U_0 - оператор, действующий из $L_2^{(>\varepsilon)}(0,\infty)$ в $L_2(0,\infty)$, определяется формулой

$$U_0 \varphi(\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^n U_0(x,\lambda) \varphi(x) dx,$$

$$U_0(x,\lambda) = h_\alpha(\lambda x) - e^{i\pi\alpha \operatorname{sign} \lambda} S_\alpha(-\lambda) h_\alpha(-\lambda x), \quad \lambda > 0,\ x > 0.$$

Пусть $\varphi(x)$ - решение рассматриваемого уравнения.
Тогда

$$0 = (\varphi + F_\varepsilon^{(s)} \varphi, \varphi) = \frac{1}{2\pi} (U_0 \varphi, U_0 \varphi),$$

т.е.

$$0 = U_0 \varphi = \hat{\varphi}_h(\lambda) - e^{i\pi\alpha \operatorname{sign} \lambda} S_\alpha(-\lambda) \hat{\varphi}_h(-\lambda), \quad \lambda > 0.$$

Из последнего равенства вытекает, что оно верно и при $\lambda < 0$. В самом деле, после умножения его на $-S_\alpha(\lambda) e^{-i\pi\alpha \operatorname{sign} \lambda}$, $\lambda > 0$ получим, учитывая $S_\alpha(\lambda) S_\alpha(-\lambda) = 1$, равенство

$$0 = \hat{\varphi}_h(-\lambda) - e^{-i\pi\alpha \operatorname{sign} \lambda} S_\alpha(\lambda) \hat{\varphi}_h(\lambda),$$

которое, с другой стороны, получается из предыдущего равенства, если заменить в нем λ на $-\lambda$.

Для доказательства достаточности, очевидно, нужно повторить предыдущие рассуждения в обратной последовательности.

Л Е М М А 4.11. Всякая функция $\varphi(x) \in L_2(\varepsilon, \infty)$, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi + F_\varepsilon^{(s)} \varphi = 0, \quad \varepsilon \geq 0,$$

принадлежит $L_1^\rho(\varepsilon, \infty)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. В силу равенства

$$F_\varepsilon = F_\varepsilon^{(s)} + F_\varepsilon^{(P)},$$

где

$$F_\varepsilon^{(P)}\varphi(x)=\sum_{K=1}^{P} h_K(x)(h_K,\varphi)_0\,,\qquad h_K(x)=m_K h_\alpha(i\mu_K x),$$

уравнение $\varphi+F_\varepsilon^{(S)}\varphi=0$ можно переписать в эквивалентной форме

$$\varphi+F_\varepsilon\varphi=F_\varepsilon^{(P)}\varphi.$$

Из $F_\varepsilon^{(P)}\varphi(x)\in L_1^{\rho}(\varepsilon,\infty)$ и теоремы 4.I вытекает, что

$$\varphi(x)=(\dot{I}+F_\varepsilon)^{-1}F_\varepsilon^{(P)}\varphi\in L_1^{\rho}(\varepsilon,\infty).$$

Л Е М М А 4.I2. Функция $\hat{\varphi}_h(\lambda)$, где $\varphi(x)\in L_1^{\rho}(\varepsilon,\infty)$, $\varepsilon\geqslant 0$, удовлетворяющая равенству

$$\hat{\varphi}_h(\lambda)-e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}S_\alpha(-\lambda)\hat{\varphi}_h(-\lambda)=0,\qquad -\infty<\lambda<\infty,$$

имеет представление

$$\hat{\varphi}_h(\lambda)=\sum_{K=1}^{P}\frac{a_K}{\lambda^2+\mu_K^2}e_\alpha(\lambda),\qquad \mu_K>0$$

или

$$(-i\lambda)^\alpha\hat{\varphi}_h(\lambda)=\sum_{K=1}^{P}\frac{a_K}{\lambda^2+\mu_K^2}E_\alpha(\lambda),$$

где

$$a_K=\frac{2i\mu_K\hat{\varphi}_h(i\mu_K)}{\dot{e}_\alpha(i\mu_K)}=\frac{2i\mu_K^{\alpha+1}\hat{\varphi}_h(i\mu_K)}{\dot{E}_\alpha(i\mu_K)}.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы из [I].

Л Е М М А 4.I3. Всякое решение уравнения

$$\varphi+F_\varepsilon^{(s)}\varphi=0,\quad \varepsilon\geqslant 0,$$

из $L_1^{\rho}(\varepsilon,\infty)$ при $0<\alpha<\frac{1}{2}$ принадлежит $L_\infty^{\rho}(\varepsilon,\infty)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из формулы

$$j_\alpha(x)=\sqrt{x}\,\mathcal{J}_{\alpha+\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{h_\alpha(x)e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}+h_\alpha(-x)e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}}{2}$$

вытекает

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\hat{\varphi}_h(\lambda)e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}+\hat{\varphi}_h(-\lambda)e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}\right]=\int_0^\infty j_\alpha(\lambda x)\varphi(x)\,dx,\quad \lambda>0.$$

Из последнего равенства следует:

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty j_\alpha(\lambda x)\left[\hat{\varphi}_h(\lambda)e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}+\hat{\varphi}_h(-\lambda)e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty j_\alpha(\lambda x)\sum_{K=1}^{P}\frac{a_K}{\lambda^2+\mu_K^2}\hat{k}_\beta(\lambda)\,d\lambda,$$

где

$$\hat{k}_\beta(\lambda)=\int_0^\infty j_\alpha(\lambda t)k(t)\,dt=e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}e_\alpha(\lambda)+e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}e_\alpha(-\lambda).$$

Из суммируемости $k(t)$ в $[0,\infty]$ получаем ограниченность $\hat{k}_\beta(\lambda)$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant \infty$, из которой следует ограниченность $\varphi(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant \infty$. Осталось доказать, что функция $x^{-\alpha}\varphi(x)$ ограничена при $x \to 0$.

Учитывая неравенство $|j_\alpha(x)| \leqslant A \frac{x^{\alpha+1}}{1+x^{\alpha+1}}$, имеем

$$|x^{-\alpha}\varphi(x)| \leqslant \sum_{K=1}^{p} |a_K| \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}|j_\alpha(\lambda x)|\,|\hat{k}_\beta(\lambda)|}{\lambda^2+\mu_K^2}\, d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \int_0^\infty \frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|^{\alpha+1}} \frac{\lambda^\alpha\,|\hat{k}_\beta(\lambda)|}{\lambda^2+\mu_1^2}\, d\lambda < \infty$$

ввиду неравенства

$$\frac{x}{1+x^{\alpha+1}} < \infty, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \infty, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}$$

и поведения функции $\lambda^\alpha \hat{k}_\beta(\lambda)$. Лемма доказана.

С Л Е Д С Т В И Е 4.4. Уравнение

$$\varphi + F_\varepsilon^{(s)}\varphi = 0, \qquad \varepsilon > 0$$

имеет только нулевое решение из $L_2(\varepsilon,\infty) = L_2^{(>\varepsilon)}(0,\infty)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\varphi \in L_2^{(>\varepsilon)}(0,\infty)$ - решение. Тогда

$$|z^\alpha \hat{\varphi}_h(z)| = O\left[e^{-\varepsilon b_\alpha \cdot \Im m z}\right], \quad z \to \infty, \ \Im m z > 0, \ b_\alpha > 0.$$

По лемме 4.12.

$$(-iz)^\alpha \hat{\varphi}_h(z) = \sum_{K=1}^{p} \frac{a_K}{\lambda^2+\mu_K^2} E_\alpha(z), \qquad \Im m z \geqslant 0,$$

где

$$\mu_K > 0, \qquad \lim_{\substack{z \to 0 \\ (\Im m z > 0)}} E_\alpha(z) = 1.$$

Чтобы была справедлива написанная выше оценка для $(-iz)^\alpha \hat{\varphi}_h(z)$ необходимо и достаточно, чтобы $a_K = 0$, $K = 1, 2, \ldots, p$, т.е. $\hat{\varphi}_h(z) \equiv 0$ и, следовательно, $\varphi(x) \equiv 0$.

Из лемм (4.10) - (4.12) вытекает такая

Т Е О Р Е М А 4.2. Уравнение

$$\psi + F_0^{(s)}\psi = \psi(x) + \frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty F_1^{(s)}(x,y;\alpha)\psi(y)\,dy = 0.$$

имеет столько линейно независимых решений из $L_2(0,\infty)$, сколько собственных функций у граничной задачи.

Л Е М М А 4.14. Для того, чтобы функция $\varphi(x) \in L_2(0,\infty)$ удовлетворяла уравнению

$$\left\{-\dot{I} + F_0^{(s,-)}\right\}\varphi = -\varphi(x) + \frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty F_1^{(s)}(-x,-y;\alpha)\,\varphi(y)\,dy = 0, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}.$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\hat{\varphi}_h(\lambda) + e^{-i\pi\alpha\, \mathrm{sign}\,\lambda} S_\alpha(\lambda)\hat{\varphi}_h(-\lambda) = 0, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

где

$$\hat{\varphi}_h(\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^n \varphi(t) h_\alpha(\lambda t)\,dt, \quad \hat{\varphi}_h(-\lambda) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_0^n h_\alpha(-\lambda t)\varphi(t)\,dt = \mathcal{H}_\alpha^* \varphi(\lambda),$$

$$S_\alpha(\lambda) = \frac{E_\alpha(-\lambda)}{E_\alpha(\lambda)}.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пользуясь определением функции $F_1^{(s)}(x, y; \alpha)$, нетрудно проверить равенство в $L_2(0,\infty)$ операторов

$$-\dot{I} + F_0^{(s,-)} = V_0^* V_0,$$

где

$$V_0 \varphi(\lambda) = \mathcal{H}_\alpha \varphi(\lambda) + e^{-i\pi\alpha\, \mathrm{sign}\,\lambda} S_\alpha(\lambda) \mathcal{H}_\alpha^* \varphi(\lambda),$$

из которого следует утверждение леммы при помощи рассуждений, применяемых в лемме 4.10.

Т Е О Р Е М А 4.3. Уравнение

$$-\varphi(x) + \frac{1}{x^{\alpha+1}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty F_1^{(s)}(-x, -y; \alpha)\varphi(y)\,dy = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty, \quad 0 < \alpha < \tfrac{1}{2}$$

имеет только нулевое решение в $L_2(0,\infty)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $\varphi(x) \in L_2(0,\infty)$ – решение этого уравнения, и пусть $\varphi_\varepsilon(x)$ – финитная гладкая функция такая, что $\|\varphi - \varphi_\varepsilon\|_{L_2(0,\infty)} < \varepsilon$. Из предыдущей леммы следует равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\alpha \varphi_\varepsilon(\lambda) E_\alpha(\lambda) &= [\mathcal{H}_\alpha \varphi_\varepsilon(\lambda) - \mathcal{H}_\alpha \varphi(\lambda)] E_\alpha(\lambda) - \\ &- \frac{(-i\lambda)^\alpha}{(i\lambda)^\alpha} E_\alpha(-\lambda)[\mathcal{H}_\alpha^* \varphi(\lambda) - \mathcal{H}_\alpha^* \varphi(\lambda)] - \frac{(-i\lambda)^\alpha}{(i\lambda)^\alpha} E_\alpha(-\lambda)\mathcal{H}_\alpha^* \varphi_\varepsilon(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Функция

$$F(z) = \mathcal{H}_\alpha \varphi_\varepsilon(z) \cdot E_\alpha(z), \quad \mathrm{Im}\, z \geqslant 0 \tag{4.33}$$

принадлежит $L_2(-\infty,\infty)$ при $\mathrm{Im}\, z = 0$, $z^\alpha F(z)$ непрерывна при $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$ и аналитическая при $\mathrm{Im}\, z > 0$, кроме того,

$$\lim_{R\to\infty} |F(Re^{i\theta})| = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Пусть

$$C_d = \{z : |z| = d, \ \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}.$$

Тогда нетрудно доказать, что

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(z) h_\alpha(xz)\,dz = 0, \quad x > 0.$$

(аналог леммы Жордана). Имеем

$$\mathcal{H}_\alpha^* F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) h_\alpha(-xt) =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} \right) F(t) h_\alpha(-xt)\,dt = \int_{\partial\Gamma_{\varepsilon,R}} F(z) h_\alpha(-xz)\,dz -$$

$$-\left(\int\limits_{C_\varepsilon}-\int\limits_{C_R}\right)F(z)h_\alpha(-xz)dz,$$

где $\partial\Gamma_{\varepsilon,R}$ - граница области $\Gamma_{\varepsilon,R}=\{z:\ \varepsilon\le|z|\le R,\ \mathrm{Im}\,z\geqslant 0\}$.

В силу аналитичности и непрерывности вплоть до границы подынтегральной функции интеграл по $\partial\Gamma_{\varepsilon,R}$ равен нулю. Из оценок $|z^\alpha F(z)|\le C$, $|z^\alpha h_\alpha(-xz)|\le C$ при $|z|\to 0$, $0<\alpha<1/2$ следует, что интеграл по C_ε исчезает при $\varepsilon\to 0$. По аналогу леммы Жордана при $x<0$ интеграл по C_R исчезает при $R\to\infty$. Итак,

$f(x)=\mathcal{H}^*_\alpha F(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ и $f(x)=0$ при $x<0$, т.е. $f(x)\in L_2^{(>0)}(0,\infty)$.

Подставляя вместо $F(x)$ ее выражение согласно равенству (4.32), получим

$$f(x)=\mathcal{H}^*_\alpha F(x)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-i\lambda)^\alpha}{(i\lambda)^\alpha}E_\alpha(-\lambda)\hat{\varphi}_\varepsilon(\lambda)h_\alpha(-x\lambda)d\lambda+\psi_1(x),\quad x>0, \tag{4.34}$$

где

$$\psi_1(x)=\mathcal{H}^*_\alpha\left\{\mathcal{H}_\alpha(\varphi_\varepsilon-\varphi)E_\alpha-\frac{(-i\lambda)^\alpha}{(i\lambda)^\alpha}E_\alpha(-\lambda)\cdot\mathcal{H}^*_\alpha(\varphi-\varphi_\varepsilon)\right\},$$

причем, учитывая равенство Парсеваля и ограниченность $E_\alpha(\lambda)$, имеем

$$\|\psi_1\|_{L_2(-\infty,\infty)}\le 2\,\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|_{L_2(0,\infty)}=2\varepsilon.$$

Интеграл в равенстве (4.34) равен нулю при $x>0$, следовательно,

$$f(x)=\psi_1(x),\quad x>0.$$

Таким образом, имеем неравенство

$$\|F\|_{L_2(-\infty,\infty)}=\|\mathcal{H}^*_\alpha F\|_{L_2(-\infty,\infty)}=\|f\|_{L_2(0,\infty)}\le 2\varepsilon.$$

Из этого неравенства и (4.33) следует, что $\|\varphi_\varepsilon\|\le 2\varepsilon$, значит,

$$\|\varphi\|_{L_2(0,\infty)}\le\|\varphi-\varphi_\varepsilon\|_{L_2(0,\infty)}+\|\varphi_\varepsilon\|_{L_2(0,\infty)}\le 3\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $a=n+\alpha>\frac{1}{2}$ и $S_a(\lambda)$ - функция рассеяния соответствующей задачи. Построим функцию $S_\alpha(\lambda)=S^*_a(\lambda)$ по формуле (3.13) и функцию $F^*_1(x,y;|\alpha|)$ по $S^*_a(\lambda)$, тогда уравнения

$$-\varphi(x)+\frac{1}{x^{|\alpha|+1}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty F^*_1(-x,-y;|\alpha|)\varphi(y)dy=0,\quad 0\le x<\infty,$$

$$\psi(x)+\frac{1}{x^{|\alpha|+1}}\frac{d}{dx}\int\limits_0^\infty F^*_1(x,y;|\alpha|)\psi(y)dy=0,\quad 0\le x<\infty$$

имеют только нулевые решения, соответственно, из $L_2(0,\infty)$ и из $L_1^\rho(0,\infty)\cap L_2(0,\infty)$.

§ 5. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

В §§ 1-4 доказано, что данные рассеяния граничной задачи с особенностью вида $\alpha(\alpha+1)x^{-2}$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$ обладают свойствами I-V. Обратная задача заключается в доказательстве того, что указанные свойства достаточны, чтобы функция $S_\alpha(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ и числа $m_k>0$, $\mu_k>0$ $(k=1,2,\dots,p)$ являлись данными рассеяния некоторой граничной задачи с потенциалом из указанного класса функций, а также в восстановлении потенциала по данным рассеяния.

Из свойства IУ следует, что если по данным рассеяния построить функцию $F(x,y;\alpha)$, согласно П, а по ней – основное уравнение

$$x^{\alpha}K(x,y)+x^{\alpha}F(x,y;\alpha)+\int_x^{\infty}F(y,t;\alpha)x^{\alpha}K(x,t)dt=0, \quad 0\le x\le y,$$

то это уравнение имеет единственное решение

$$x^{\alpha}K_{\alpha}(x,y)\in L_1^{\rho}(x,\infty), \quad x\geqslant 0 \qquad (K_{\alpha}(x,y)\in L_1(x,\infty),\ x>0).$$

При этом докажем, что построенные по $K_{\alpha}(x,t)$ функции

$$u_{\alpha}(x,\lambda)=e_{\alpha}(x,\lambda)-e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}S_{\alpha}(-\lambda)e_{\alpha}(x,-\lambda), \quad \lambda>0,$$

$$u_{\alpha}(x,i\mu_k)=m_k e_{\alpha}(x,i\mu_k), \quad k=1,2,\dots,p,$$

где

$$e_{\alpha}(x,\lambda)=h_{\alpha}(\lambda x)+\int_x^{\infty}K_{\alpha}(x,t)h_{\alpha}(\lambda t)dt, \quad \mathrm{Im}\,\lambda\geqslant 0$$

порождают равенство Парсеваля, а также покажем, что при выполнении свойств I и П функции $u_{\alpha}(x,\lambda)$, $u_{\alpha}(x,i\mu_k)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$y''+\lambda^2 y=\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}+q_0(x)\right]y, \quad 0<x<\infty,$$

где

$$q_0(x)=-2\frac{d}{dx}K_{\alpha}(x,x),$$

причем

$$\int_{\delta}^{\infty}x^{1+\alpha}|q_0(x)|dx<\infty, \quad \delta>0, \quad 0<\alpha<\frac{1}{2}.$$

Если выполнено условие IУ при $\varepsilon=0$, то

$$\int_0^{\infty}(x^{\frac{1}{2}+\alpha}+x^{1+\alpha})|q_0(x)|dx<\infty.$$

Затем, при условиях I,Ш, IУ, У, докажем, что функции $u_{\alpha}(x,\lambda), u_{\alpha}(x,i\mu_k)$ удовлетворяют граничному условию.

Наконец, проследим путь восстановления потенциала в случае

$$\alpha>\frac{1}{2}\ \left([\alpha]\ne n,\ \ n+\frac{1}{2};\ \ n=[n]\right).$$

2. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ОЦЕНКИ

Л Е М М А 5.I. Функция $F(x,y;\alpha)$ равномерно непрерывна по совокупности переменных x и y в области $x\geqslant\delta,\ y\geqslant\delta$ $(\delta>0)$, удовлетворяет неравенству

$$|F(x,y;\alpha)|\le A_{\alpha}x^{-\alpha}y^{-\alpha}\left(\frac{x+y}{2}\right)^{2\alpha}\tau_0\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad 0<x\le y, \quad 0<\alpha<\frac{1}{2}, \tag{5.I}$$

где

$$\tau_{\beta}(x)=\int_x^{\infty}s^{\beta}\left|\frac{d}{ds}F(s,s;\alpha)\right|ds, \quad \beta\geqslant 0$$

и имеет частные производные по x и по y, удовлетворяющие неравенству

$$|DF(x,y;\alpha)|\le A_{\alpha}\frac{(x+y)^{2\alpha+1}}{x^{\alpha+1}y^{\alpha+1}}\tau_0\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{5.I'}$$

где D обозначает $\frac{\partial}{\partial x}$ или $\frac{\partial}{\partial y}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О нетрудно получить при помощи представления функции $F(x,y;\alpha)$ через функцию Римана R_{α}, учитывая такую оценку для производных от R_{α}:

$$\left| DR_\alpha (s,0;\xi,\eta) \right| \le A_\alpha \frac{\xi^{2\alpha+1}}{(\xi^2-\eta^2)^{\alpha+1}}, \quad 0<\alpha<\frac{1}{2}, \qquad (5.?)$$

где D обозначает $\frac{\partial}{\partial\xi}$ или $\frac{\partial}{\partial\eta}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.I.

$$\int_\delta^\infty\int_\delta^\infty |D_i F(x,s;\alpha)|\,dx\,ds < \infty, \quad \delta>0, \ i=1,2.$$

$$d_i(x,y)=\int_y^\infty |D_i F(x,s;\alpha)|\,ds, \quad \lim_{y\to+\infty} d_i(x,y)=0$$

равномерно по $x \geqslant \delta > 0$, $D_1 = \partial/\partial x$, $D_2 = \partial/\partial s$.

$$d_i^{(1)}(x,y)=\int_y^\infty s\,|D_i F(x,s;\alpha)|\,ds, \quad \lim_{y\to+\infty} d_i^{(1)}(x,y)=0$$

равномерно по $x \geqslant \delta > 0$.

Замечание. Пусть

$$f_x(t)=F(x,\ x+t;\alpha),$$
$$f_x^{(\rho)}(t)=x^\alpha F(x,x+t;\alpha)\rho(x+t),$$

где $\rho(t)=1+t^{-\alpha}$, тогда

$$\lim_{h\to0} \| f_{x+h}-f_x \|_{L_1(0,\infty)}=0$$

равномерно по $x \geqslant \delta > 0$,

$$\lim_{h\to0} \| f_{x+h}^{(\rho)}-f_x^{(\rho)} \|_{L_1(0,\infty)}=0$$

равномерно по $x \geqslant 0$.

Справедливость замечания нетрудно получить из вышеупомянутого представления.

Положив

$$k_x^{(\rho)}(t)=x^\alpha K_\alpha(x,x+t)\rho(x+t),$$

основное уравнение запишем в виде

$$k_x^{(\rho)}(y)+\int_0^\infty F^{(\rho)}(x+y,x+t)\,k_x^{(\rho)}(t)\,dt=-f_x^{(\rho)}(y), \quad 0\leqslant y<\infty$$

при каждом $x \geqslant 0$, где

$$F^{(\rho)}(y,t)=\rho(y)F(y,t;\alpha)\rho^{-1}(t), \qquad \rho(t)=1+t^{-\alpha}.$$

ЛЕММА 5.2. Оператор

$$\Phi_x^{(\rho)} f(y) = \int_0^\infty F^{(\rho)}(x+y,\ x+t)f(t)\,dt, \quad x\geqslant0$$

является вполне непрерывным оператором, действующим в $L_1(0,\infty)$, норма $\|\Phi_x^{(\rho)}\| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ и

$$\|\Phi_x^{(\rho)}\| \le const,$$
$$\|\Phi_{x+h}^{(\rho)}-\Phi_x^{(\rho)}\| \le \varepsilon, \quad |h|<\delta(\varepsilon)$$

равномерно по $x \geqslant 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из неравенств

$$\int_\varepsilon^\infty |\Phi_x^{(\rho)} f(y)|\,dy \leqslant A_x(\varepsilon)\,\|f\|,$$
$$A_x(\varepsilon)=\max_{t\geqslant0}\int_\varepsilon^\infty |F^{(\rho)}(x+y,x+t)|\,dy,$$

$$\int_0^\infty |\Phi_x^{(\rho)} f(y+h) - \Phi_x^{(\rho)} f(y)|\,dy \le B_x(h)\|f\|,$$

где

$$B_x(h) = \max_{t\ge 0} \int_0^\infty |F^{(\rho)}(x+h+y,\, x+t) - F^{(\rho)}(x+y,\, x+t)|\,dy,$$

$$\|\Phi_{x+h}^{(\rho)} f - \Phi_x^{(\rho)} f\| \le C_x(h)\,\|f\|,$$

где

$$C_x(h) = \max_{t\ge 0} \int_0^\infty |F^{(\rho)}(x+h+y,\, x+h+t) - F^{(\rho)}(x+y,\, x+t)|\,dy,$$

в которых, как нетрудно показать, пользуясь предыдущей леммой

$$A_x(\varepsilon) \le A_\alpha\left[\tau_1\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right) + \tau_{1+\alpha}\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right],$$

$$\lim_{h\to 0} B_x(h) = 0, \qquad \lim_{h\to 0} C_x(h) = 0$$

равномерно по $x \ge 0$.

Л Е М М А 5.3. При каждом $x \ge 0$ существует оператор $(\dot I + \Phi_x^{(\rho)})^{-1}$, ограниченный и непрерывный равномерно относительно $x \ge 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из полной непрерывности и условия IУ следует, что существует ограниченный $(\dot I + \Phi_x^{(\rho)})^{-1}$ при всех $x \ge 0$. Непрерывность по норме относительно $x \ge 0$ оператора $(\dot I + \Phi_x^{(\rho)})^{-1}$ вытекает из непрерывности по норме относительно $x \ge 0$ оператора $\Phi_x^{(\rho)}$ и очевидного равенства

$$(\dot I + \Phi_{x+h}^{(\rho)})^{-1} - (\dot I + \Phi_x^{(\rho)})^{-1} = \left\{[\dot I + (I + \Phi_x^{(\rho)})^{-1}\Delta_x \Phi_x^{(\rho)}]^{-1} - I\right\}(\dot I + \Phi_x^{(\rho)})^{-1},$$

где

$$\Delta_x \Phi_x^{(\rho)} = \Phi_{x+h}^{(\rho)} - \Phi_x^{(\rho)}.$$

Ограниченность $\|(\dot I + \Phi_x^{(\rho)})^{-1}\|$ для $0 \le x \le x_0$ вытекает из непрерывности по x. Выбирая x_0 таким, чтобы $\|\Phi_x^{(\rho)}\| < 1/2$, мы получим, что $\|(\dot I + \Phi_x^{(\rho)})^{-1}\| \le 2$ для $x \ge x_0$.

Заметим, что при $x > 0$ нормы в пространствах $L_1^\rho(x,\infty)$ и $L_1(x,\infty)$ эквивалентны. Исследуем в этом случае оператор, порождаемый функцией $F(x, y; \alpha)$.

Положив

$$K_\alpha(x, x+y) = k_x(y), \quad F(x, x+y; \alpha) = f_x(y), \quad y > 0,$$

основное уравнение перепишем в виде

$$k_x(y) + \int_0^\infty F(x+y;\, x+t;\, \alpha)\, k_x(t)\,dt = -f_x(y), \quad x > 0, \quad 0 \le y < \infty.$$

Л Е М М А 5.4. Оператор

$$\Phi_x f(y) = \int_0^\infty F(x+y,\, x+t;\, \alpha) f(t)\,dt, \qquad x > 0$$

является вполне непрерывным оператором, действующим в $L_1(0,\infty)$, норма $\|\Phi_x\| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ и

$$\|\Phi_x\| \le const,$$

$$\|\Phi_{x+h} - \Phi_x\| < \varepsilon, \quad |h| < \delta(\varepsilon)$$

равномерно по $x \ge \delta > 0$.

Л Е М М А 5.5. При каждом $x \ge \delta > 0$ существует оператор $(\dot I + \Phi_x)^{-1}$, ограниченный и непрерывный равномерно относительно $x \ge \delta > 0$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Учитывая неравенство

$$|R_\alpha(s,0;\xi,\eta)| \le C_\alpha x^{-\alpha} y^{-\alpha} \left(\frac{x+y}{2}\right)^{2\alpha}, \quad \xi = \frac{x+y}{2}, \quad \eta = \frac{y-x}{2}$$

для функции Римана R_α и представление $F(x,y;\alpha)$, через R_α получаем, что существует конечный при $x \geqslant 0, t > 0$ (или $x > 0, t \geqslant 0$)

$$\max_{\substack{s\in[x,\infty]\\ t\in[y,\infty]}} s^\alpha t^\alpha |F(s,t;\alpha)| \le B_\alpha \tau_{2\alpha}\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad 0<\alpha<\frac{1}{2}. \tag{5.3}$$

Л Е М М А 5.6. Справедливо неравенство

$$|K_\alpha(x,y)| \leqslant B_\alpha \frac{\tau_{2\alpha}\left(\frac{x+y}{2}\right)}{x^\alpha y^\alpha}, \quad 0<x\leqslant y. \tag{5.4}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. В силу леммы 5.3

$$\int_x^\infty x^\alpha |K_\alpha(x,t)|\, t^{-\alpha} dt \leqslant \int_x^\infty x^\alpha |K_\alpha(x,t)\rho(t)|\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x\geqslant 0} \|(\dot I + \Phi_x^{(\rho)})^{-1}\| \cdot \int_x^\infty x^\alpha |F(x,t;\alpha)|\rho(t)\, dt < \infty.$$

Учитывая это неравенство, из основного уравнения получаем

$$x^\alpha |K_\alpha(x,y)| y^\alpha \le x^\alpha y^\alpha |F(x,y;\alpha)| + \int_x^\infty x^\alpha |K_\alpha(x,t)\, t^{-\alpha} y^\alpha t^\alpha F(y,t;\alpha)\, dt \le$$
$$\le C_\alpha \left(1+\int_x^\infty x^\alpha |K_\alpha(x,t)|\, t^{-\alpha} dt\right) \tau_{2\alpha}\left(\frac{x+y}{2}\right) \le B_\alpha \tau_{2\alpha}\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Л Е М М А 5.7. Функция $k_x(t) = K_\alpha(x, x+t)$ как элемент пространства $L_1(0,\infty)$ по t равномерно непрерывна относительно $x \geqslant \delta > 0$ по норме этого пространства.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $f_x(t) = F(x, x+t;\alpha)$, тогда из основного уравнения получаем равенство

$$-k_x = (I+\Phi_x)^{-1} f_x,$$

из которого следует

$$-\Delta_x k_x = (\dot I + \Phi_{x+h})^{-1} \Delta_x f_x + [\Delta_x (\dot I + \Phi_x)^{-1}] f_x,$$

где

$$\Delta_x k_x = k_{x+h} - k_x, \quad \Delta_x f_x = f_{x+h} - f_x,$$
$$\Delta_x (\dot I + \Phi_x)^{-1} = (\dot I + \Phi_{x+h})^{-1} - (\dot I + \Phi_x)^{-1}.$$

Из равномерной по x ограниченности норм $\|(\dot I + \Phi_x)^{-1}\|$, непрерывности по норме относительно параметра x элемента $f_x \in L_1(0,\infty)$ равномерной по $x \geqslant \delta > 0$ малости $\|\Delta_x(\dot I + \Phi_x)^{-1}\|$ следует утверждение леммы.

Л Е М М А 5.7. Функция $k_x^{(\rho)} = x^\alpha K_\alpha(x, x+t)\rho(x+t)$ как элемент пространства $L_1(0,\infty)$ по t равномерно относительно $x \geqq 0$ непрерывна по норме этого пространства.

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.7.

С Л Е Д С Т В И Е 5.2. Функция $K_\alpha(x,t)$ равномерно непрерывна по совокупности переменных x и y в области $y \geqslant x \geqslant \delta > 0$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Достаточно проверить равномерную непрерывность по каждой из переменных в отдельности. Пусть

$$\Delta_y K(x,y) = K_\alpha(x, y+h) - K_\alpha(x,y),$$
$$\Delta_y F(x,y) = F(x, y+h;\alpha) - F(x,y;\alpha),$$

тогда
$$\Delta_y K(x,y) = -\Delta_y F(x,y) - \int_x^\infty K_\alpha(x,t)\,\Delta_y F(t,y)\,dt.$$

Из оценки
$$\int_x^\infty |K_\alpha(x,t)|\,dt \leqslant C(\delta), \quad x \geqslant \delta > 0$$

следует
$$|\Delta_y K(x,y)| \leq C_1(\delta) \max_{t\in[\delta,\infty]} |\Delta_y F(t,y)| \leq \varepsilon$$

равномерно по $x \geqslant \delta > 0$. Следовательно, равномерная непрерывность по направлению (0,I) доказана. Далее, из основного уравнения получаем равенство

$$\Delta_x K(x,x+y) = -\Delta_x F(x,x+y) - \Phi_{x+h}\,\Delta_x k_x - (\Phi_{x+h} - \Phi_x)\,k_x,$$

из которого вытекает

$$|\Delta_x K(x,x+y)| \leq |\Delta_x F(x,x+y)| + \|\Phi_{x+h}\|\cdot\|\Delta_x k_x\| + \|\Phi_{x+h} - \Phi_x\|\cdot\|k_x\|. \qquad (5.5)$$

Из леммы 5.7, неравенства (5.5) и равномерной непрерывности по x функции $F(x,x+y;\alpha)$ следует равномерная непрерывность функции $K_\alpha(x,x+y)$ по x для $x \geqslant \delta > 0$ при $y \geqslant 0$, т.е. непрерывность по направлению (I,I) функции $K_\alpha(x,y)$ в области $0 < \delta \leqslant x \leqslant y$ доказана. Из непрерывности по двум непараллельным направлениям следует непрерывность по x.

4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОСНОВНОГО УРАВНЕНИЯ

Л Е М М А 5.8. Если функция $F(x,y;\alpha)$ удовлетворяет условию IУ и $F'_y(x,y;\alpha)$ непрерывна (ради простоты изложения), то при каждом $y \geqslant x > 0$ существует частная производная $\frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x,y)$, и ее можно получить из основного уравнения дифференцированием по y, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x,y) = -F'_y(x,y;\alpha) - \int_x^\infty K_\alpha(x,t)\,F'_y(t,y;\alpha)\,dt. \qquad (5.6)$$

Для доказательства, очевидно, достаточно проверить, что интеграл в (5.6) сходится при фиксированном $x > 0$ равномерно по $y \geqslant x$. Действительно, пусть $N > x$, тогда, используя неравенство (5.4), получаем

$$\left|\int_N^\infty K_\alpha(x,t)\,F'_y(t,y;\alpha)\,dt\right| \leq B_\alpha\, \frac{\tau_{2\alpha}\left(\frac{x+N}{2}\right)}{x^\alpha N^\alpha} \int_N^\infty |F'_y(t,y;\alpha)|\,dt. \qquad (5.7)$$

Оба сомножителя в (5.7) стремятся к нулю при $N \to \infty$ равномерно относительно x и y в области $0 < \delta \leq x \leqslant y$.

З А М Е Ч А Н И Е I. Функция $\frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x,y)$ непрерывна по y и $\frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x,y) \times$ $\times \in L_1(x, \infty)$ при $x > 0$. Доказательство вытекает из равенства (5,6) и оценки F'_y.

З А М Е Ч А Н И Е 2. Если функция $F(x,y;\alpha)$ при $x > 0$, $y > 0$ имеет непрерывные вторые производные, удовлетворяющие условиям следствия 5.I, то аналогично доказывается существование непрерывной по y производной $\frac{\partial^2}{\partial y^2} K_\alpha(x,y)$, $x > 0$, $y \geqslant x$, равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} K_\alpha(x,y) = -F''_{yy}(x,y;\alpha) - \int_x^\infty K_\alpha(x,t) F''_{yy}(t,y;\alpha)\,dt \tag{5.8}$$

и то, что $\frac{\partial^2}{\partial y^2} K_\alpha(x,y) \in L_1(x,\infty)$.

ЛЕММА 5.9. Если функция $F(x,y;\alpha)$ удовлетворяет условию IУ $\left(\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}F_1(x,y;\alpha)=F(x,y;\alpha)\right)$ и $F'_x(x,y;\alpha)$ непрерывна при $x>0,\ y>0$, (для простоты изложения), то существует производная $\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,y)$ при каждом $y \geqslant x > 0$, и она может быть вычислена дифференцированием основного уравнения по x, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,y) = -F'_x(x,y;\alpha) + K_\alpha(x,x)F(x,y;\alpha) - \int_x^\infty \frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,t)F(t,y;\alpha)\,dt. \tag{5.9}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K_\alpha(x,y)=0, x>y$. Заменив в основном уравнении x на $x+h$, вычтем полученное равенство из самого уравнения и, разделив эту разность на $h>0$, получим равенство

$$\frac{1}{h}\Delta_x K(x,y) = -\frac{1}{h}\Delta_x F(x,y) - \int_x^\infty \frac{1}{h}\Delta_x K(x,t)F(t,y;\alpha)\,dt + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} K_\alpha(x+h,t)F(t,y;\alpha)\,dt, \tag{5.10}$$

которое можно переписать так:

$$K_x^{(1)}(y) = (I+\Phi_x)^{-1}\Psi_x^{(h)}(y), \tag{5.11}$$

где

$$K_x^{(1)}(y) = \frac{K_\alpha(x+h,x+y)-K_\alpha(x,x+y)}{h},$$

$$\Psi_x^{(h)}(y) = -\frac{F(x+h,x+y;\alpha)-F(x,x+y;\alpha)}{h} + \frac{1}{h}\int_0^1 K_\alpha(x+h,x+t)F(x+y,x+t;\alpha)\,dt.$$

Так как подынтегральная функция в $\Psi_x^{(h)}(t)$ непрерывна, то при каждом $y>0$ $(x>0)$

$$\Psi_x^{(0)}(y) = \lim_{h\to 0}\Psi_x^{(h)}(y) = -F'_x(x,t;\alpha)\Big|_{t=x+y} + K_\alpha(x,x)F(x,x+y;\alpha). \tag{5.12}$$

Нетрудно проверить, используя представление $F(x,y;\alpha)$ и непрерывность $F'_x(x,y;\alpha)$, что $\Psi_x^{(h)}(y) \to \Psi_x^{(0)}(y)$ в метрике $L_1(0,\infty)$ по y, $x \geqslant \delta > 0$. Возвращаясь к исходному равенству (5.10), видим, что правая часть его имеет обычный предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{K_\alpha(x+h,y)-K_\alpha(x,y)}{h} = \frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,y),$$

и мы получаем равенство (5.9), а также равенство

$$\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,t)\Big|_{t=x+y} = (\dot I+\Phi_x)^{-1}\Psi_x^{(0)}(y), \quad y>0, \tag{5.13}$$

где $\Psi_x^{(0)}(y)$ определяется формулой (5.12).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из формулы (5.9) следует, что $\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,y)$ также непрерывна по совокупности переменных в области $0<\delta\leqslant x\leqslant y$ и $\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,y)\in L_1(x,\infty)$.

С Л Е Д С Т В И Е 5.3. Справедливо неравенство

$$\max_{x\in[0,\infty]} \int_x^\infty x^{\alpha+1}\left|\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,t)\right|t^{-\alpha}dt<\infty.$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из леммы (5.3) следует

$$\int_x^\infty\left|\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,t)\right|t^{-\alpha}dt\leqslant\int_x^\infty\left|\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,t)\right|(1+t^{-\alpha})\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\|(\dot I+\Phi_x^{(\rho)})^{-1}\|\cdot\int_0^\infty|\Psi_x^{(0)}(t)|(1+t^{-\alpha})\,dt.$$

Из неравенства $\max\limits_{x\geqslant 0}\|(\dot I+\Phi_x^{(\rho)})^{-1}\|<\infty$ и легко проверяемого неравенства

$$\max_{x\in[0,\infty]}\int_0^\infty x^{\alpha+1}|\Psi_x^{(0)}(t)|(1+t^{-\alpha})\,dt<\infty$$

вытекает утверждение следствия.

З А М Е Ч А Н И Е. Пусть функция $F(x,y;\alpha)$ имеет при $0<x\leq y$ непрерывные вторые производные, удовлетворяющие условиям следствия 5.I, то аналогично доказывается существование непрерывной производной $\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_\alpha(x,y)$, удовлетворяющей равенству

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_\alpha(x,y)=-F''_{xx}(x,y;\alpha)+\frac{d}{dx}\left[K_\alpha(x,x)F(x,x;\alpha)\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,t)\Big|_{t=x}\cdot F(x,y;\alpha)-\int_x^\infty\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_\alpha(x,t)F(y,t;\alpha)\,dt, \tag{5.I4}$$

получаемому двукратным дифференцированием основного уравнения по переменной x. Кроме того, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}K_\alpha(x,t)\in L_1(x,\infty)$.

Л Е М М А 5.I0. При условии IУ справедливо неравенство

$$\left|\frac{d}{dx}K_\alpha(x,x)+\frac{d}{dx}F(x,x;\alpha)\right|\leq\psi_\alpha(x),\quad x>0, \tag{5.I5}$$

где

$$\psi_\alpha(x)\in L_1(\varepsilon,\infty),\ \varepsilon>0 \quad \text{и}$$
$$\int_0^\infty x^{\frac12+\beta}\psi_\alpha(x)\,dx<\infty,\quad \alpha\leq\beta\leq\frac12+\alpha. \tag{5.I5'}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из основного уравнения получаем при $y=x$ равенство

$$K_\alpha(x,x)+F(x,x;\alpha)=-\int_x^\infty K_\alpha(x,t)F(t,y;\alpha)\,dt,\quad x>0. \tag{5.I6}$$

Из предыдущего следует, что это равенство при $x>0$ можно дифференцировать. Дифференцируя его, получаем такое неравенство

$$\left|\frac{d}{dx}K_\alpha(x,x)+\frac{d}{dx}F(x,x;\alpha)\right|\leq\left|K_\alpha(x,x)F(x,x;\alpha)\right|+$$
$$+\int_x^\infty\left|\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha(x,t)F(x,t;\alpha)\right|dt+\int_x^\infty\left|K_\alpha(x,t)F'_x(x,t;\alpha)\right|dt=\psi_\alpha(x).$$

Из неравенства

$$x^{\frac12+\beta}|F(x,x;\alpha)|\leq x^{\frac12+\beta}\int_x^\infty|F'_t(t,t;\alpha)|\,dt\leq\tau_{\frac12+\beta}(0)<\infty$$

следует

$$\int_0^\infty x^{\frac12+\beta}|K_\alpha(x,x)F(x,x;\alpha)|\,dx\leq\tau_{\frac12+\beta}(0)\int_0^\infty|K_\alpha(x,x)|\,dx<\infty.$$

Далее, учитывая леммы 5.I и 5.6 и следствия 5.3, получаем неравенства

$$\int_0^\infty dx \int_x^\infty x^{\frac{1}{2}+b} \left|\frac{\partial}{\partial x} K_\alpha(x,t)\right| |F(x,t;\alpha)|\, dt \le C_\alpha \tau_{\frac{1}{2}+b}(0) < \infty,$$

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}+b} |K_\alpha(x,t)| |F'_x(x,t;\alpha)|\, dt =$$

$$= \int_0^\infty dx \int_x^\infty x^{\alpha+1} |F'_x(x,t;\alpha)| t^{-\alpha} \cdot \frac{|K_\alpha(x,t)| t^\alpha}{x^{\frac{1}{2}+\alpha-b}}\, dt \le$$

$$\le A_\alpha \tau_{\frac{1}{2}+b}(0)\, \tau_1(0) < \infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Так как

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}+b} \left|\frac{d}{dx} F(x,x;\alpha)\right| dx < \infty, \quad \alpha \le b \le \alpha + \frac{1}{2}, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \tag{5.17}$$

то

$$\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}+b} \left|\frac{d}{dx} K_\alpha(x,x)\right| dx < \infty. \tag{5.17'}$$

5. ВЫВОД РАВЕНСТВА ПАРСЕВАЛЯ

Пусть $K_\alpha(x,y)$ – решение основного уравнения. Введем функции

$$K_\alpha^{(a)}(x,y) = \begin{cases} K_\alpha(x,y), & 0 < a \le x \le y \\ 0, & x > y,\ x < a \end{cases}$$

$$F_a(x,y) = \begin{cases} F(x,y;\alpha), & 0 < a \le x,\ 0 < a \le y \\ 0, & x < a,\ \ y < a \end{cases}$$

и обозначение

$$L_2^{(>a)}(0,\infty) = \{\varphi(x) : \varphi(x) \in L_2(0,\infty),\ \varphi(x) = 0,\ \ 0 \le x \le a\}.$$

Учитывая оценку (5.4) для $K_\alpha(x,y)$, нетрудно установить, что операторы

$$F_a \varphi(x) = \int_a^\infty F_a(x,s)\varphi(s)\, ds, \quad x \ge a$$

$$K_a \varphi(x) = \int_a^\infty K_\alpha^{(a)}(x,s)\varphi(s)\, ds,$$

$$K_a^* \varphi(x) = \int_a^x K_\alpha^{(a)}(s,x)\varphi(s)\, ds = \int_a^x K_a^*(x,s)\varphi(s)\, ds$$

являются ограниченными операторами, действующими из $L_2^{(>a)}(0,\infty)$ в $L_2^{(>a)}(0,\infty)$.

Пусть $0 < a < s$ – произвольные числа и $\varphi(y) \in L_2^{(>s)}(0,\infty)$. Тогда из равенства

$$\int_0^\infty K_a^*(x,y)\varphi(y)\, dy = \int_{[a,x]\cap[s,\infty]} K_a^*(x,y)\varphi(y)\, dy$$

вытекает

$$K_a^* \varphi(x) \in L_2^{(>s)}(0,\infty).$$

Рассмотрим оператор

$$T_a = K_a^* + (K_a + F_a + K_a F_a)(I + K_a^*). \tag{5.18}$$

Пусть $T_a(x,y)$ – ядро оператора T_a, т.е.

$$T_a\varphi(x)=\int_a^\infty T_a(x,y)\varphi(y)dy.$$

Из равенства (5.18) следует, что $T_a(x,y)$ – обычная вещественная функция. Непосредственно проверяется, что T_a – самосопряженный оператор, значит, его ядро $T_a(x,y)$ – симметрическая функция своих аргументов. Нетрудно проверить, что

$$T_a(x,y)=0,\quad 0<x<y,$$

а ввиду симметрии это равенство верно и при $x>y>0$. Значит,

$$T_a=0. \tag{5.18'}$$

Прибавляя к обеим частям равенства (5.18') единичный оператор и учитывая (5.18), получаем такое равенство операторов в $L_2^{(>a)}(0,\infty)$:

$$(\dot I+K_a)(\dot I+F_a)(\dot I+K_a^*)=I. \tag{5.19}$$

Пусть теперь φ и ψ – произвольные функции из $L_1^{(>a)}(0,\infty)\cap L_\infty^{(>a)}(0,\infty)$, финитные вблизи $x=0$ и $x=+\infty$. Тогда

$$\int_0^\infty\varphi(x)\psi(x)dx=(\varphi,\psi)_0=(\{\dot I+K_a\}\{\dot I+F_a\}\{\dot I+K_a^*\}\varphi,\psi)_0=$$
$$=(\{\dot I+F_a\}\varphi^*,\psi^*)_0,$$

где

$$\varphi^*(x)=\{\dot I+K_a^*\}\varphi(x),\quad \psi^*(x)=\{\dot I+K_a^*\}\psi(x).$$

Далее, повторяя соответствующие выкладки при выводе равенства Парсеваля (§4, п. 2) в обратном порядке, можно получить, что справедливо равенство операторов в $L_2^{(>a)}(0,\infty)$

$$\dot I+F_a=\frac{1}{2\pi}U_0^*U_0+\sum_{K=1}^{p}H_K^*H_K,$$

где

$$U_0\varphi(\lambda)=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^n U_0(x,\lambda)\varphi(x)dx,$$
$$U_0(x,\lambda)=h_\alpha(\lambda x)-e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}S_\alpha(-\lambda)h_\alpha(-\lambda x).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(\varphi,\psi)_0&=\Big(\Big\{\frac{1}{2\pi}U_0^*U_0+\sum_{K=1}^{p}H_K^*H_K\Big\}\{\dot I+K_a^*\}\varphi,\ \{\dot I+K_a^*\}\psi\Big)_0=\\&=\frac{1}{2\pi}\big(U\varphi,U\psi\big)_0+\sum_{K=1}^{p}U_K\varphi\cdot\overline{U_K\psi},\end{aligned} \tag{5.20}$$

где U – ограниченный оператор из $L_2^{(>a)}(0,\infty)$ в $L_2(0,\infty)$:

$$U\varphi(\lambda)=\int_0^\infty u(x,\lambda)\varphi(x)dx,\quad U_K\varphi=\int_0^\infty u_K(x)\varphi(x)dx,$$
$$u(x,\lambda)=U_0(x,\lambda)+\int_x^\infty K_\alpha(x,t)U_0(t,\lambda)dt,$$
$$u_K(x)=m_K\Big[h_\alpha(i\mu_K x)+\int_x^\infty K_\alpha(x,t)h_\alpha(i\mu_K t)dt\Big].$$

Таким образом,равенство Парсеваля на плотном множестве функций а, значит, и всюду в $L_2^{(>a)}(0,\infty)$ доказано.

6. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Т Е О Р Е М А 5.1. Пусть функция $F(x,y;\alpha)$ представима в виде

$$F(x,y;\alpha) = -\int\limits_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} R_\alpha\left(s,0;\frac{x+y}{2},\frac{y-x}{2}\right) z(s)\,ds, \quad 0<\alpha<\frac{1}{2}, \tag{5.21}$$

где
$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |z(s)|\,ds < \infty, \quad \varepsilon>0; \quad \int\limits_{0}^{\infty} (s^{\frac{1}{2}+\alpha} + s^{1+\alpha})\,|z(s)|\,ds < \infty,$$

и пусть функция $K_\alpha(x,y)$ является решением основного уравнения, построенного по $F(x,y;\alpha)$, тогда функция

$$e_\alpha(x,\lambda) = h_\alpha(\lambda x) + \int\limits_{x}^{\infty} K_\alpha(x,t)\, h_\alpha(\lambda t)\,dt, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0 \tag{5.22}$$

удовлетворяет уравнению

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}\right\} y + q_0(x)\, y = \lambda^2 y, \quad 0<x<\infty, \tag{5.23}$$

где

$$q_0(x) = -2\frac{d}{dx} K_\alpha(x,x), \tag{5.24}$$

причем справедливы неравенства

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |q_0(x)|\,dx < \infty, \quad \varepsilon>0, \tag{5.25}$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} (x^{\frac{1}{2}+\alpha} + x^{1+\alpha})\,|q_0(x)|\,dx < \infty. \tag{5.26}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Рассмотрим последовательность $\{z_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ дифференцируемых финитных функций таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} |z_n(x) - z(x)|\,dx = 0, \quad \varepsilon>0, \tag{5.27}$$
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} (x^{\frac{1}{2}+\alpha} + x^{1+\alpha})\,|z_n(x) - z(x)|\,dx = 0.$$

Функцию, построенную по формуле (5.21) при $z(x) = z_n(x)$ обозначим $F_n(x,y)$. Эта функция имеет непрерывные вторые производные и удовлетворяет уравнению

$$B_x^{(\alpha)}[F_n] - B_y^{(\alpha)}[F_n] = 0, \quad 0<x<y, \tag{5.28}$$

где

$$B_x^{(\alpha)} \equiv \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2}. \tag{5.29}$$

Пусть $K_n(x,y)$ – решение основного уравнения, построенного по $F_n(x,y)$. Тогда функция $K_n(x,y)$ имеет непрерывные вторые производные, которые, как следует из предыдущего, можно находить дифференцированием основного уравнения. Применяя к основному уравнению оператор Бесселя-Риккати (5.29), учитывая равенство (5.28), получим

$$B_x^{(\alpha)}[K_n] - B_y^{(\alpha)}[K_n] + B_x^{(\alpha)}\Big[\int\limits_{x}^{\infty} K_n(x,t) F_n(t,y)\,dt - \int\limits_{x}^{\infty} K_n(x,t)\, B_y^{(\alpha)}[F_n(t,y)]\,dt = 0.$$

Выполнив справа дифференцирование по x, заменив $B_y^{(\alpha)}[F_n(t,y)]$ на $B_t^{(\alpha)}[F_n(t,y)]$ и проинтегрировав по частям, получим

$$\begin{gathered}\{B_x^{(\alpha)} - B_y^{(\alpha)}\}[K_n(x,y)] + q_0^{(n)}(x) F_n(x,y) + \\ + \int\limits_{x}^{\infty} \{B_x^{(\alpha)} - B_t^{(\alpha)}\}[K_n(t,y)]\, F_n(t,y)\,dt = 0,\end{gathered} \tag{5.30}$$

где

$$q_0^{(n)}(x) = -2\frac{d}{dx} K_\alpha(x,x), \quad x>0. \tag{5.30$'$}$$

Из уравнения (5.30) вычитанием основного уравнения, умноженного на $q_0^{(n)}(x)$, получим равенство

$$\left\{B_x^{(\alpha)} - B_y^{(\alpha)} - q_0^{(n)}(x)\right\}[K_n(x,y)] + \int_x^\infty F_n(y,t)\left\{B_x^{(\alpha)} - B_t^{(\alpha)} - q_0^{(n)}(x)\right\}[K_n(x,t)]dt = 0,$$

из которого, в силу единственности решения из $L_1(x,\infty)$ основного уравнения при $x > 0$, вытекает, что

$$\left\{B_x^{(\alpha)} - B_y^{(\alpha)} - q_0^{(n)}(x)\right\}[K_n(x,y)] = 0, \quad 0 < x < y. \tag{5.31}$$

При каждом фиксированном $x > 0$ выполнены также соотношения

$$\lim_{t\to+\infty} K_n(x,t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{\partial}{\partial t} K_n(x,t) = 0. \tag{5.32}$$

Нетрудно проверить, что функция $K_n(x,t)$ задает оператор, переводящий решения $z_\alpha(\lambda x)$ уравнения

$$B_x^{(\alpha)}[z] + \lambda^2 z = 0, \quad 0 < x < \infty$$

в решения $e_\alpha^{(n)}(x,\lambda)$ уравнения

$$B_x^{(\alpha)}[y] + \lambda^2 y = q_0^{(n)}(x) y, \quad 0 < x < \infty \tag{5.33}$$

по формуле

$$e_\alpha^{(n)}(x,\lambda) = h_\alpha(\lambda x) + \int_x^\infty K_n(x,t) h_\alpha(\lambda t)dt, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0. \tag{5.34}$$

Решения $e_\alpha^{(n)}(x,\lambda)$ ведут себя при $x \to +\infty$ так же, как $h_\alpha(\lambda x)$. Функция

$$u_n(\xi,\eta) = K_n(x,t) = K_n(\xi-\eta, \xi+\eta) \tag{5.35}$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$u_n(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\int_\xi^\infty R_\alpha(s,0;\xi,\eta) q_0^{(n)}(s)ds + \int_\xi^\infty ds \int_0^\eta R_\alpha(s,t;\xi,\eta) q_0^{(n)}(s-t) u_n(s,t)dt. \tag{5.36}$$

Вычитая основное уравнение, построенное по $F_n(x,y)$ из основного уравнения, построенного по $F(x,y;\alpha)$, получим равенство

$$\Delta K_n(x,y) + \Delta F_n(x,y) + \int_x^\infty \Delta F_n(y,t) K_n(x,t)dt + \int_x^\infty F(y,t;\alpha)\Delta K_n(x,t)dt = 0, \tag{5.37}$$

где

$$\Delta K_n(x,y) = K_\alpha(x,y) - K_n(x,y), \quad \Delta F_n(x,y) = F(x,y;\alpha) - F_n(x,y),$$

которое можно записать так:

$$(I + \Phi_x)[\Delta K_n(x,x+y)] = \Psi_n(x,x+y), \quad 0 < y < \infty, \tag{5.38}$$

где

$$\Psi_n(x,x+y) = -\Delta F_n(x,x+y) - \int_x^\infty \Delta F_n(x+y,t) K_n(x,t)dt,$$

$$\Phi_x f(y) = \int_0^\infty F(x+y;x+t;\alpha) f(t)dt. \tag{5.39}$$

Непосредственно проверяем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^\infty | F_n(x,y) - F(x,y;\alpha) | dy = 0 \qquad (5.40)$$

равномерно по $x \geqslant \delta > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x,y) = F(x,y;\alpha) \qquad (5.41)$$

равномерно в области $0 < \delta \leq x \leq y$. Из равенства (5.40) следует, что оператор

$$\Phi_x^{(n)} f(y) = \int_0^\infty F_n(x+y,\ x+s) f(s)\, ds, \quad x \geqslant \delta > 0$$

является ограниченным оператором из $L_1(0,\infty)$ в $L_1(0,\infty)$ и

$$\| \Phi_x^{(n)} \| < \infty$$

равномерно по n. А также

$$\lim_{n\to\infty} \| \Phi_x^{(n)} - \Phi_x \| = 0. \qquad (5.42)$$

Из равенства (5.42) вытекает, что оператор $\dot{I} + \Phi_x^{(n)}$ при достаточно большом n имеет ограниченный обратный $(\dot{I} + \Phi_x^{(n)})^{-1}$, так как $\dot{I} + \Phi_x$ имеет ограниченный обратный и норма $\|(\dot{I} + \Phi_x^{(n)})^{-1}\| < \infty$ равномерно по $x \geqslant \delta > 0$ и n, начиная с достаточно большого номера. Решая основное уравнение, построенное по $F_n(x,y)$, получаем равенство

$$K_n(x,x+y) = -(\dot{I} + \Phi_x^{(n)})^{-1} F_n(x,x+y), \quad 0 < y < \infty, \qquad (5.43)$$

из которого следует

$$\int_x^\infty |K_n(x,y)|\, dy \leq \|(\dot{I} + \Phi_x^{(n)})^{-1}\| \int_x^\infty | F_n(x,y)|\, dy < \infty \qquad (5.44)$$

равномерно по $x \geqslant \delta > 0$ и достаточно больших n. Из равенства (5.40) и неравенства (5.44) получаем,

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^\infty | \Psi_n(x,y) |\, dy = 0$$

равномерно по $x \geqslant \delta > 0$.

Из равенства (5.37) получаем

$$\int_x^\infty |\Delta K_n(x,y)|\, dy \leq \|(\dot{I} + \Phi_x^{(n)})^{-1}\| \cdot \int_x^\infty |\Psi_n(x,y)|\, dy \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \qquad (5.45)$$

равномерно по $x \geqslant \delta > 0$.

Из уравнения (5.37) и равенства (5.41) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \Delta K_n(x,y) = 0 \qquad (5.46)$$

равномерно в области $0 < \delta \leq x \leq y$. Аналогично проверяем, что равномерно по $x \geqslant \delta > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^\infty |D \Delta K_n(x,y)|\, dy = 0, \qquad (5.47)$$

где D – символ дифференцирования по x или по y. В частности,

$$\int_x^\infty |q_0^{(n)}(t) - q_0(t)|\, dt = 2\int_x^\infty \left|\frac{d}{dt} \Delta K_n(t,t)\right| dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad x \geqslant \delta > 0, \qquad (5.48)$$

$$\int_x^\infty (t^{\frac{1}{2}+\alpha} + t^{1+\alpha}) |q_0^{(n)}(t) - q_0(t)|\, dt = \qquad (5.48')$$
$$= 2\int_x^\infty (t^{1/2+\alpha} + t^{1+\alpha}) \left|\frac{d}{dt} \Delta K_n(t,t)\right| dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad x \geqslant 0.$$

Из равенства (5.36), равенств (5.45), (5.48), (5.48') можно получить, что функция

$$u(\xi,\eta) = K_\alpha(x,y) = K_\alpha(\xi-\eta, \xi+\eta)$$

удовлетворяет уравнению

$$u(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\int_\xi^\infty R_\alpha(s,0;\xi,\eta)\, q_0(s)\,ds + \tag{5.49}$$
$$+\int_\xi^\infty ds\int_0^\eta R_\alpha(s,t;\xi,\eta)\, q_0(s-t)\, u(s,t)\,dt$$

и, следовательно, является ядром преобразования, переводящего решения $h_\alpha(\lambda x)$ уравнения

$$B_x^{(\alpha)}[z] + \lambda^2 z = 0, \quad 0 < x < \infty$$

в решения $e_\alpha(x,\lambda)$ уравнения

$$B_x^{(\alpha)}[y] + \lambda^2 y = q_0(x)\, y, \quad 0 < x < \infty$$

по формуле

$$e_\alpha(x,\lambda) = h_\alpha(\lambda x) + \int_x^\infty K_\alpha(x,t)\, h_\alpha(\lambda t)\,dt, \quad \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

7. ВЫВОД ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

Пусть заданы вещественные числа $m_k > 0$, $\mu_k > 0$ $(k=1,2,\ldots,p)$ и функция $S_\alpha(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, удовлетворяющая равенствам

$$\overline{S_\alpha(\lambda)} = S_\alpha(-\lambda) = S_\alpha^{-1}(\lambda).$$

Из представления функции $F^{(s)}(x,y;\alpha)$ через функцию Римана следует, что существует

$$\lim_{y\to+0} y^\alpha F^{(s)}(x,y;\alpha) = f_s(x), \quad x > 0. \tag{5.50}$$

Из определения функции $F^{(s)}(x,y;\alpha)$ имеем при $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$\int_0^x F^{(s)}(t,y;\alpha)\, t^{\alpha+1}\,dt = F_1^{(s)}(x,y;\alpha) =$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left\{\frac{(\lambda x)^{\alpha+1} h_{\alpha+1}(\lambda x) - a_{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+2}}\, e^{-i\pi\alpha\,\operatorname{sign}\lambda}\left[1 - S_\alpha(\lambda)\right]\right\} h_\alpha(\lambda y)\,d\lambda,$$

где функция в фигурных скобках принадлежит $L_1^\rho(-\infty,\infty)$, $\rho = 1+|t|^{-\alpha}$. Из последнего равенства следует равенство

$$\lim_{y\to+0}\int_0^x y^\alpha F^{(s)}(t,y;\alpha)\, t^{\alpha+1}\,dt = \int_0^x t^{\alpha+1} f_s(t)\,dt =$$
$$= -p_\alpha\int_{-\infty}^\infty \left\{\frac{(\lambda x)^{\alpha+1} h_{\alpha+1}(\lambda x) - a_{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+2}}\right\} e^{-i\pi\alpha\,\operatorname{sign}\lambda}\, \frac{1 - S_\alpha(\lambda)}{2\pi(-i\lambda)^\alpha}\,d\lambda,$$
$$\left(a_\alpha = \lim_{x\to 0} x^\alpha h_\alpha(x), \quad p_\alpha = e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} a_\alpha = \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\right),$$

которое означает

$$f_s(x) = \frac{-1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^\infty p_\alpha\, \frac{1 - S_\alpha(\lambda)}{2\pi(i\lambda)^\alpha}\left\{\frac{(\lambda x)^{\alpha+1} h_{\alpha+1}(\lambda x) - a_{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+2}}\right\} d\lambda = \tag{5.51}$$
$$= \mathcal{H}_\alpha\left[\frac{1 - S_\alpha(\lambda)}{2\pi(i\lambda)^\alpha}\right] \in L_2(-\infty,\infty).$$

Пусть $K_\alpha(x,y)$ – решение основного уравнения. Нашей задачей является доказательство того, что функции

$$u_\alpha(x,\lambda)=e_\alpha(x,\lambda)-e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}\,S_\alpha(-\lambda)\,e_\alpha(x,-\lambda),\quad \lambda>0,$$
$$u_k(x)=m_k e_\alpha(x,i\mu_k),\quad k=1,2,\ldots,p, \tag{5.52}$$

где
$$e_\alpha(x,\lambda)=h_\alpha(\lambda x)+\int_x^\infty K_\alpha(x,t)\,h_\alpha(\lambda t)\,dt,\quad \operatorname{Im}\lambda\geqslant 0,$$

удовлетворяют граничному условию
$$\lim_{x\to 0} x^\alpha y(x,\lambda)=0,\quad 0<\alpha<\tfrac12 \tag{5.53}$$

$(\lambda>0,\ \lambda=i\mu_k,\ k=1,2,\ldots,p,\ \mu_k>0)$, которое эквивалентно условию
$$\lim_{x\to 0} x^{-\alpha-1} y(x,\lambda)\neq\infty. \tag{5.54}$$

ЛЕММА 5.II. Пусть $\varphi(x)\in L_2^{(>0)}(-\infty,\infty)$ и при $x>0$ есть решение уравнения
$$\varphi+F_0^{(s)}\varphi=\varphi(x)+\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty F_1^{(s)}(x,y;\alpha)\,\varphi(y)\,dy=0$$
из $L_2(0,\infty)$, тогда
$$\int_0^\infty f_s(y)\varphi(y)\,dy=0. \tag{5.55}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущего известно, что функция $\mathcal{H}_\alpha\varphi(\lambda)$ удовлетворяет равенству
$$\mathcal{H}_\alpha\varphi(\lambda)-e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda}\,S_\alpha(-\lambda)\,\mathcal{H}_\alpha\varphi(-\lambda)=0,\quad -\infty<\lambda<\infty. \tag{5.56}$$

По равенству Парсеваля
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_s(y)\varphi(y)\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-S_\alpha(-\lambda)}{(-i\lambda)^\alpha}\,\mathcal{H}_\alpha\varphi(-\lambda)\,d\lambda.$$

Для доказательства достаточно проверить, что функция под интегралом справа в последнем равенстве является нечетной. Обозначим эту функцию через $g(\lambda)$. Учитывая равенство (5.56), получаем
$$g(-\lambda)=\frac{1-S_\alpha(\lambda)}{(i\lambda)^\alpha}\,\mathcal{H}_\alpha\varphi(\lambda)=\frac{1-S_\alpha(\lambda)}{(-i\lambda)^\alpha}\,S_\alpha(-\lambda)\,\mathcal{H}_\alpha\varphi(-\lambda)=-g(\lambda).$$

Из предыдущего следует, что существуют в пространстве $L_1^\rho(0,\infty)$ по y пределы
$$\lim_{x\to+0} x^\alpha F(x,y;\alpha)=f(y),$$
$$\lim_{x\to+0} x^\alpha K_\alpha(x,y)=k(y),\quad 0<\alpha<\tfrac12,\quad y>0. \tag{5.57}$$

Учитывая обозначение (5.50), определение функции $F(x,y;\alpha)$ и поведение функции $h_\alpha(\lambda x)$ вблизи $x=0$, получим
$$f(y)=\sum_{k=1}^{p} a_\alpha\frac{m_k^2}{\mu_k^\alpha}\,h_\alpha(i\mu_k y)+f_s(y),\quad y>0. \tag{5.58}$$

Уравнение, полученное из основного умножением на функцию x^α и переходом к пределу при $x\to+0$, назовем основным уравнением в нуле. Оно имеет такой вид:
$$f(y)+k(y)+\int_0^\infty F(y,t;\alpha)\,k(t)\,dt=0,\quad 0\leq y<\infty,\ 0<\alpha<\tfrac12 \tag{5.59}$$

и обладает единственным решением из $L_1^\rho(0,\infty)$, $\rho=1+t^{-\alpha}$ в силу наложенных требований.

Подставляя в (5.59) вместо $f(y)$ и $F(y,t;\alpha)$ их выражения и обозначая

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha} e_{\alpha}(x, i\mu_{\kappa}) = e_{0}(i\mu_{\kappa}), \tag{5.60}$$

получим равенство

$$f_s(y) + \sum_{\kappa=1}^{p} m_{\kappa}^{2} e_{0}(i\mu_{\kappa}) h_{\alpha}(i\mu_{\kappa} y) + k(y) + \int_0^{\infty} F^{(s)}(y,t;\alpha)\, k(t)\, dt = 0. \tag{5.61}$$

Обозначим для краткости

$$h_{\alpha}(i\mu_{\kappa} x) = h_{\kappa}, \quad f_s(y) = f_s, \quad k(y) = k \tag{5.62}$$

функции из $L_2(0,\infty)$. Умножим равенство (5.6I) на любое решение $\varphi(x) \in L_2(0,\infty)$ уравнения $\varphi + F_0^{(s)}\varphi = 0$ и проинтегрируем в пределах $(0,\infty)$. Тогда, учитывая равенство (5.55) и самосопряженность оператора $F_0^{(s)}$, получим равенство

$$0 = \sum_{\kappa=1}^{p} m_{\kappa}^{2} e_{0}(i\mu_{\kappa})(h_{\kappa}, \varphi)_{0}, \tag{5.63}$$

где

$$(h_{\kappa},\varphi)_0 = \int_0^{\infty} h_{\alpha}(i\mu_{\kappa} y)\varphi(y)\, dy = \mathcal{H}_{\alpha}\varphi(i\mu_{\kappa}).$$

Действуя аналогично [I], можно доказать, что из равенства (5.63) вытекают равенства

$$e_0(i\mu_{\kappa}) = 0, \quad \kappa = 1,2,\ldots,p, \tag{5.64}$$

т.е. граничное условие (5.53) выполнено при $\lambda = i\mu_{\kappa}$.

Докажем теперь справедливость граничного условия (5.53) при $\lambda > 0$. Из (5.52) и (5.57) следует, что при $-\infty < \lambda < \infty$ существует

$$\lim_{x\to+0} x^{\alpha} u_{\alpha}(x,\lambda) = u_0(\lambda) = a_{\alpha}\frac{1 - S_{\alpha}(-\lambda)}{2\pi(-i\lambda)^{\alpha}} + \hat{k}_h(\lambda) - e^{i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda} S_{\alpha}(-\lambda)\hat{k}_h(-\lambda). \tag{5.65}$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что $u_0(\lambda)$ непрерывна при $-\infty < \lambda < \infty$,

$$\lim_{\lambda\to\pm\infty} u_0(\lambda) = 0, \tag{5.66}$$

$$u_0(\lambda) \in L_2(-\infty,\infty), \tag{5.66'}$$

$$u_0(-\lambda) + e^{-i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,\lambda} S_{\alpha}(\lambda) u_0(\lambda) = 0, \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{5.66''}$$

Нетрудно заметить, что функция $u_0(\lambda)$ является преобразованием Ханкеля в $L_2(-\infty,\infty)$ функции

$$\psi(x) = f_s(x) + k(x) - k^{(+)}(x) + \int_{-\infty}^{\infty} F^{(s)}(x,y;\alpha)\, k(y)\, dy, \tag{5.67}$$

где

$$k(x) = 0, \quad x < 0, \tag{5.68}$$

$$k^{(+)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\pi\alpha\,\mathrm{sign}\,t}\, \hat{k}_h(t)\, h_{\alpha}(xt)\, dt, \qquad k^{(+)}(x) = 0, \quad x > 0. \tag{5.69}$$

Из равенства (5.69) следует, что правая часть равенства (5.67) совпадает с основным уравнением, и, следовательно, равна нулю, т.е.

$$\psi(x) = 0, \quad x > 0.$$

Следоват

$$u_0(-\lambda) = \mathcal{H}_\alpha \psi(-\lambda),$$

где

$$\psi(-x) \in L_2^{(>0)}(-\infty, \infty).$$

Из равенства (5.66) и леммы 4.I4 вытекает, что функция $\psi(-x)$ является решением из $L_2(0,\infty)$ уравнения

$$-\varphi(x) + \frac{1}{x^{\alpha+1}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty F_1^{(s)}(-x, -y; \alpha)\varphi(y)dy = 0,$$

которое, по условию Ш, имеет только нулевое решение в $L_2(0,\infty)$. То есть $u_0(\lambda) \equiv 0$. Выполнение граничного условия доказано полностью.

8. СЛУЧАЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ОСОБЕННОСТИ

Из предыдущего следует, что данные рассеяния

$$S_\alpha(\lambda)\ (-\infty < \lambda < \infty), \quad 0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_p, \ m_k > 0, \ (k = 0, 1, 2, \ldots p)$$

граничной задачи с параметром особенности $\alpha = n + \beta$, $(|\beta| < \frac{1}{2})$ обладают такими свойствами:

I. Функция

$$S_\alpha^*(\lambda) = \left(\frac{\lambda - i\bar{\mu}}{\lambda + i\bar{\mu}}\right)^2 \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\lambda - i\mu_k}{\lambda + i\mu_k}\right)^2 S_\alpha(\lambda), \quad 0 < \bar{\mu} \neq \mu_k$$

непрерывна при $-\infty < \lambda < \infty$,

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} [1 - S_\alpha^*(\lambda)] = 0,$$

$$\frac{1 - S_\alpha^*(\lambda)}{\lambda^\alpha} \in L_2(-\infty, \infty),$$

$$S_\alpha^*(0) = 1, \text{ если } S_\alpha(0) = 1.$$

П. Пусть

$$F_1^*(x, y; \alpha) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{\alpha+1} h_{\alpha+1}(\lambda x) - a_{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha+2}} e^{-i\pi\alpha \operatorname{sign}\lambda}[1 - S_\alpha^*(\lambda)] h_\alpha(\lambda y) d\lambda,$$

$$\alpha = |\beta|,$$

тогда выполнены свойства П, Ш, IУ с $F_1^*(x, y; \alpha)$ вместо $F_1(x, y; \alpha)$ и $F_1^{(s)}(x, y; \alpha)$.

Из предыдущего следует, что функции $u_\alpha^*(x, \lambda)$, построенные по решению $K^*(x, y)$ основного уравнения

$$K(x, y) + F^*(x, y; \alpha) + \int_x^\infty F^*(y, t) K(x, t) dt = 0, \quad 0 < x \leq y,$$

где

$$F^*(x, y) = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \frac{d}{dx} F_1^*(x, y; \alpha),$$

при помощи формулы

$$u_\alpha^*(x, \lambda) = e_\alpha^*(x, \lambda) - e^{i\pi\alpha \operatorname{sign}\lambda} S_\alpha^*(-\lambda) e_\alpha^*(x, -\lambda), \ -\infty < \lambda < \infty,$$

где

$$e_\alpha(x, \lambda) = h_\alpha(\lambda x) + \int_x^\infty K_\alpha^*(x, t) h_\alpha(\lambda t) dt,$$

порождают равенство Парсеваля, удовлетворяют уравнению

$$-B_x^{(\alpha)}[y] + q_0^*(x) y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \infty, \tag{5.70}$$

где

$$q_0^*(x) = -2\frac{d}{dx}K^*(x,x), \tag{5.71}$$

причем

$$\int_0^\infty (x^{\frac{1}{2}+\alpha} + x^{1+\alpha})|q_0^*(x)|dx < \infty, \tag{5.72}$$

и граничному условию

$$\lim_{x\to 0} x^{-\alpha-1} y(x,\lambda) \neq \infty. \tag{5.73}$$

Теперь при помощи преобразований вида (2.33), (2.23), рассмотренных подробно ранее, перейдем от задачи (5.70), (5.73) к задаче

$$-B_x^{(n+\beta)}[y] + q_0^{(p)}(x)y = \lambda^2 y, \quad 0 < x < \infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x,\lambda)}{x^{n+\beta+1}} \neq \infty,$$

имеющей параметр особенности, равный нужному, потенциал $q_0^{(p)}(x)$, удовлетворяющий условию (5.72), и функцию рассеяния, равную $\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{\lambda-i\mu_k}{\lambda+i\mu_k}\right)^2 S_a(\lambda)$. От последней задачи при помощи преобразований вида (2.30), вводящих нужные собственные числа и оставляющие потенциал удовлетворяющим условию (5.72), перейдем к задаче с потенциалом $q_0(x)$, имеющей собственные числа $0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_p$ и функцию рассеяния $S_a(\lambda)$. Этот потенциал $q_0(x)$ является искомым потенциалом, восстановленным по данным рассеяния.

ПРИЛОЖЕНИЕ. $\mathcal{H}_\alpha$ - ПРЕОБРАЗОВАНИЕ.

1. Преобразование Ханкеля на всей числовой оси.

Пусть $h_\alpha^{(1,2)}(x)$ - функции Ханкеля-Риккати, определяемые формулой

$$h_\alpha^{(1,2)}(x) = e^{\pm\frac{ix(\alpha+1)}{2}}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,H^{(1,2)}_{\alpha+\frac{1}{2}}(x), \tag{I}$$

где $H_p^{(1,2)}(x)$ - функции Ханкеля первого (второго) рода. Справедливо такое асимптотическое равенство:

$$h_\alpha^{(1,2)}(x) = e^{\pm ix} + O(1), \quad x\to+\infty, \tag{I'}$$

Преобразование вида

$$\mathcal{H}_\alpha f(x) = \hat{f}_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h_\alpha^{(1)}(xt)f(t)\,dt \tag{2}$$

назовем преобразованием Ханкеля на всей оси.

Пусть

$$\mathcal{J}_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} -$$

функция Бесселя. Определим формулой

$$j_\alpha(x) = \sqrt{x}\;\mathcal{J}_{\alpha+\frac{1}{2}}(x)$$

функцию Бесселя-Риккати [7].

Преобразование вида

$$B_\alpha f(x) = \hat{f}_\beta(x) = \int_0^\infty j_\alpha(x,t)f(t)\,dt \tag{3}$$

называется преобразованием Бесселя.

Известна следующая теория преобразования Бесселя.

ТЕОРЕМА 1. (L_1 - теория) [10]. Если $f(t)\in L_1(0,\infty)$ и имеет ограниченную вариацию в окрестности точки x, то

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\lim_{N\to\infty}\int_0^N j_\alpha(xt)\hat{f}_\beta(t)\,dt,\quad \alpha\geqslant -1. \tag{4}$$

ТЕОРЕМА 2. (L_2 - теория) [3]. Если $f(t)\in L_2(0,\infty)$, то существует

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^N j_\alpha(xt)f(t)\,dt=\hat{f}_\beta(x),\quad \alpha>-\tfrac{3}{2} \tag{5}$$

и

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_0^N j_\alpha(xt)\hat{f}_\beta(t)\,dt=f(x), \tag{5'}$$

$$\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_0^\infty \hat{f}_\beta(x)\overline{\hat{g}_\beta(x)}\,dx. \tag{5''}$$

Используя эту известную теорию, построим преобразование Ханкеля на всей оси вида (1) при любом $-3/2<\alpha<1/2$.

Из представления

$$H_p^{(1)}(x)=i\,\frac{J_p(x)e^{-i\pi p}-J_{-p}(x)}{\sin\pi p} \tag{6}$$

при нецелом параметре p получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot h_\alpha^{(1)}(x)=\frac{e^{\frac{i\pi\alpha}{2}}j_{-\alpha-1}+e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}j_\alpha(x)}{2\cos\pi\alpha}. \tag{6'}$$

Функция $h_\alpha^{(1)}(z)$ аналитическая в плоскости комплексного переменного z, разрезанной вдоль отрицательной части вещественной оси. Обозначим через $\overset{(+)}{h}{}_\alpha^{(1)}(x)$ $\left(\overset{(-)}{h}{}_\alpha^{(1)}(x)\right)$ значения функции $h_\alpha^{(1)}(z)$ на верхнем (нижнем) берегу разреза.

Равенство (4) $\left((5')\right)$ формально можно записать в виде разложения δ - функции

$$\delta(x-y)=\int_0^\infty j_\alpha(\lambda x)j_\alpha(\lambda y)\,d\lambda,\quad \alpha\geqslant -1\ (\alpha>-3/2). \tag{7}$$

Докажем справедливость разложения

$$\delta(x-y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overset{(+)}{h}{}_\alpha^{(1)}(\lambda x)\,\overline{\overset{(+)}{h}{}_\alpha^{(1)}(\lambda y)}\,d\lambda, \tag{8}$$

причем равенство (8) справедливо в смысле L_1 - теории для $-1\leqslant\alpha\leqslant 0$ и в смысле L_2 - теории для $-3/2<\alpha<1/2$. Все последующие преобразования будем, для краткости, проводить формально. Из теорем 1 и 2 следует, что они имеют строгий смысл.

Из равенства

$$\overline{h_\alpha^{(1)}(x)}=h_\alpha^{(2)}(\overline{x}) \tag{9}$$

вытекает, что формулу (8) можно переписать так:

$$\delta(x-y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overset{(+)}{h}{}_\alpha^{(1)}(\lambda x)\,\overset{(-)}{h}{}_\alpha^{(2)}(\lambda y)\,d\lambda. \tag{8'}$$

Пусть $j_\alpha^{(\pm)}(x)$ - значения функции $j_\alpha(x)$ на верхнем (нижнем) берегу разреза. Нетрудно установить равенства

$$j_{-\alpha-1}^{(\pm)}(e^{i\pi}x)=e^{-i\pi\alpha}j_{-\alpha-1}^{(\pm)}(x),\qquad j_\alpha^{(\pm)}(e^{i\pi}x)=-e^{i\pi\alpha}j_\alpha^{(\pm)}(x),$$

$$j^{(-)}_{-\alpha-1}(e^{-i\pi}x) = e^{i\pi\alpha} j^{(-)}_{-\alpha-1}(x), \quad j^{(-)}_{\alpha}(e^{-i\pi}x) = -e^{-i\pi\alpha} j^{(-)}_{\alpha}(x). \tag{10}$$

Пусть $f(y)$ – произвольная финитная гладкая функция. Учитывая равенства (10), получим

$$F_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} j^{(-)}_{-\alpha-1}(\lambda y) f(y)\,dy = \int_0^{\infty} j_{-\alpha-1}(\lambda y)\left[f(y) + e^{i\pi\alpha} f(-y)\right] dy,$$
$$F_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} j^{(-)}_{\alpha}(\lambda y) f(y)\,dy = \int_0^{\infty} j_{\alpha}(\lambda y)\left[f(y) - e^{-i\pi\alpha} f(-y)\right] dy. \tag{11}$$

Пусть $x > 0$. Рассмотрим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overset{(+)}{h}{}^{(1)}_{\alpha}(x\lambda)\,d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(-)}{h}{}^{(2)}_{\alpha}(\lambda y) f(y)\,dy.$$

Подставляя вместо $\overset{(+)}{h}{}^{(1)}_{\alpha}$ и $\overset{(-)}{h}{}^{(2)}_{\alpha}$ их выражения согласно (6′), (9) и учитывая обозначения (11), получим

$$J = \frac{1}{4\cos^2\pi\alpha}\int_0^{\infty}\Big\{ j_{-\alpha-1}(\lambda x)\left[F_1(\lambda) + e^{-i\pi\alpha}F_1(e^{i\pi}\lambda)\right] +$$
$$+ i e^{i\pi\alpha} j_{-\alpha-1}(\lambda x)\left[F_2(\lambda) + e^{-i\pi\alpha}F_2(e^{i\pi}\lambda)\right] +$$
$$+ i e^{-i\pi\alpha} j_{\alpha}(\lambda x)\left[F_1(\lambda) - e^{i\pi\alpha}F_1(e^{i\pi}\lambda)\right] +$$
$$+ j_{\alpha}(\lambda x)\left[F_2(\lambda) - e^{i\pi\alpha}F_2(e^{i\pi}\lambda)\right]\Big\}\,d\lambda.$$

Из равенства [10] следует, что второе и третье слагаемые в последней формуле равны нулю.

Из равенств (10), (11) и (5′) получаем, что

$$J = \frac{1}{4\cos^2\pi\alpha}\Big\{(1 + e^{-2i\pi\alpha})\left[f(x) + e^{i\pi\alpha} f(-x)\right] +$$
$$+ (1 + e^{2i\pi\alpha})\left[f(x) - e^{-i\pi\alpha} f(-x)\right] = f(x).$$

Случай $x < 0$ рассматривается аналогично. Итак, справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3. Если $f(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ и имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $x \neq 0$, то

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{h^{(1)}_{\alpha}(\lambda x)}\,\hat{f}_h(\lambda)\,d\lambda, \quad -1 < \alpha < 0. \tag{12}$$

ТЕОРЕМА 4. Если $f(x) \in L_2(-\infty,\infty)$ и $-3/2 < \alpha < 1/2$, то существует преобразование

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-N}^{N} h^{(1)}_{\alpha}(\lambda x) f(x)\,dx = \hat{f}_h(\lambda) = \mathcal{H}_{\alpha} f(\lambda), \tag{13}$$

обратное преобразование

$$\underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\int_{-N}^{N} \overline{h^{(1)}_{\alpha}(\lambda x)}\,\hat{f}_h(\lambda)\,d\lambda = f(x) = \mathcal{H}^{*}_{\alpha}\hat{f}_h(x) \tag{13′}$$

и равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}_h(\lambda)\,\overline{\hat{g}_h(\lambda)}\,d\lambda. \tag{14}$$

З А М Е Ч А Н И Е I. В силу равенства

$$-\frac{1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\left[x^{\alpha+1}h_\alpha^{(1,2)}(x)\right] = h_\alpha^{(1,2)}(x)$$

оператор $\mathcal{H}_\alpha\,(\mathcal{H}_\alpha^*)$ может быть записан в виде

$$\mathcal{H}_\alpha f(x) = \frac{-1}{x^{\alpha+1}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(xt)^{\alpha+1}h_{\alpha+1}^{(1)}(xt) - a_{\alpha+1}^{(1)}}{t^{\alpha+2}}f(t)\,dt, \qquad (13'')$$

где

$$a_{\alpha+1}^{(1)} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha+1}h_{\alpha+1}^{(1)}(x).$$

З А М Е Ч А Н И Е 2. Равенство Парсеваля (I5) доказано нами при $\alpha \neq -\frac{1}{2}$. В силу того, что $\mathcal{H}_\alpha f(\lambda)$ – целая функция параметра α, равенство (I4) справедливо и при $\alpha = -\frac{1}{2}$. При $\alpha = 0$ получаем обычный оператор преобразования Фурье в $L_2(-\infty,\infty)$.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ХАНКЕЛЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Рассмотрим преобразование $\mathcal{H}_\alpha$ при $\alpha > 0$ функций, сосредоточенных на полуоси $x > 0$, т.е.

$$F_h(\lambda) = \int_0^\infty h_\alpha^{(1)}(\lambda x) f(x)\,dx, \quad \alpha > 0. \qquad (15)$$

Введем класс функций, для которых имеет смысл преобразование вида (I5) и построим обратное преобразование.

Пусть

$$\rho(t) = 1 + t^{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Обозначим через $L_1^\rho(0,\infty)$ множество функций f, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{1;\rho} = \int_0^\infty (1 + t^{-\alpha})|f(t)|\,dt < \infty, \quad \alpha > 0.$$

Т Е О Р Е М А 5. Если $f(t) \in L_1^\rho(0,\infty)$ и имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $x \neq 0$, то преобразование (I5) существует при $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$, функция $F_h(\lambda)$ аналитическая при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha F_h(\lambda) = 0$ $\quad (\operatorname{Im}\lambda > 0)$ и

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{R_{N,\varepsilon}} h_\alpha^{(2)}(xz) F_h(z)\,dz, \quad \alpha > 0,$$

где $R_{N,\varepsilon}$ обозначает контур, составленный из отрезков $[-N,-\varepsilon]$, $[\varepsilon, N]$, числовой оси и полуокружности $C_\varepsilon = \{z : |z| = \varepsilon,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Пусть $f(x) \in L_1^\rho(0,\infty)$. Преобразование (I5) обладает следующими свойствами:

I) $\quad |x^\alpha F_h(x)| < \infty, \quad x \to 0.$

Пусть $0 < x < 1$. Из неравенств

$$|x^\alpha h_\alpha^{(1)}(x)| \leq C, \qquad |x| \leq 1,$$
$$|h_\alpha^{(1)}(x)| \leq C, \qquad |x| \geq 1$$

получаем

$$|x^\alpha F_h(x)| = \left|\int_0^{1/x} t^{-\alpha} f(t) x^\alpha t^\alpha h_\alpha^{(1)}(xt)\,dt + \int_{1/x}^\infty x^\alpha f(t) h_\alpha^{(1)}(xt)\,dt\right| \leq$$
$$\leq C\left(\int_0^{1/x} t^{-\alpha}|f(t)|\,dt + \int_{1/x}^\infty |f(t)|\,dt\right) \leq C\,\|f\|_{1;\rho}.$$

2) $F_h(x) \to 0, \quad x \to +\infty.$

Пусть $x \geqslant 1$. Учитывая, что

$$h_\alpha^{(1)}(x) = e^{ix} + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \geqslant 1,$$

получим

$$|F_h(x)| \leq C\left(x^{-\alpha}\int_0^{1/x} t^{-\alpha}|f(t)|dt + \left|\int_{1/x}^{\infty} f(t)e^{ixt}dt\right| + \int_{1/x} \frac{|f(t)|}{xt}\,dt\right) = C\,(J_1 + J_2 + J_3).$$

Оценим каждый из интегралов. Очевидно, $J_1 = O(x^{-\alpha}),\ x \to \infty$. Из теоремы Римана-Лебега вытекает, что

$$\lim_{x \to +\infty} J_2 = 0.$$

$$J_3(x,\alpha) = \frac{1}{x}\int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{t}|f(t)|\,dt = \frac{1}{x}\int_{1/x}^{\infty}(1+t^{-\alpha})|f(t)|\,\frac{t^\alpha}{t(1+t^\alpha)}\,dt.$$

Из оценки

$$\psi_\alpha(x) = \frac{t^\alpha}{t(1+t^\alpha)} \leq \begin{cases} C_1\ \ \psi_2\left(\frac{1}{x}\right), & t \geqslant \frac{1}{x}, \quad 0 < \alpha < 1 \\ C_1 & ,\quad t \geqslant 0, \quad \alpha \geqslant 1 \end{cases}$$

получаем

$$J_3(x,\alpha) \leqslant C \begin{cases} \dfrac{1}{x^{\alpha}+1}\,\|f\|_{1;\rho}, & 0 < \alpha < 1 \\ x^{-1}\,\|f\|_{1;\rho}, & \alpha \geqslant 1; \end{cases}$$

т.е.

$$\lim_{x \to +\infty} J_3(x,\alpha) = 0.$$

Из (I) и (6) получаем формулу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[h_\alpha^{(1)}(z)\,e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}} + h_\alpha^{(2)}(z)\,e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}\right] = j_\alpha(z), \quad Jm\, z \geqslant 0, \tag{I6}$$

из которой следует

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}F_h(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}F_h(e^{i\pi}x) = \int_0^\infty j_\alpha(xt)f(t)\,dt. \tag{I6$'$}$$

Рассмотрим преобразование Ханкеля вида (I5) при $Jm\,\lambda > 0$. Так как $h_\alpha^{(1)}(\lambda t)$ – аналитическая при $Jm > 0$ и интеграл сходится равномерно по λ в любой конечной области, то $F_h(\lambda)$ аналитична при $Jm\,\lambda > 0$. Совершенно аналогично доказывается, что $\lambda^\alpha F_h(\lambda)$ непрерывна и ограничена при $|\lambda| \leqslant const,\ Jm\,\lambda \geqslant 0$. Из неравенства

$$|\lambda^\alpha h_\alpha^{(1)}(\lambda)| \leqslant A_\alpha e^{-B_\alpha \cdot Jm\,\lambda}, \quad A_\alpha > 0,\ B_\alpha > 0,$$

которое нетрудно проверить, следует

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^\alpha F_h(\lambda) = 0, \quad Jm\,\lambda > 0.$$

Пусть теперь $f(t)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки x и непрерывна (для простоты). Тогда согласно L_1 – теории (теорема I) и формулы (I6$'$) получаем

$$f(x) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon \to 0}} \int_\varepsilon^N \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}F_h(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}F_h(e^{i\pi}t)\right] j_\alpha(xt)\,dt = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \varepsilon \to 0}} J_{N,\varepsilon}$$

$$J_{N,\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-N}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{N}\right)e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}F_h(t)j_\alpha(xt)dt =$$

$$=\int_{R_{N,\varepsilon}}\frac{1}{2\pi}e^{-i\pi(\alpha+1)}F_h(z)h_\alpha^{(1)}(xz)dz+\frac{1}{2\pi}\int_{R_{N,\varepsilon}}h_\alpha^{(2)}(x,z)F_h(z)dz+ \tag{17}$$

$$+\int_{C_\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{i\pi(\alpha+1)}{2}}F_h(z)j_\alpha(xz)dz=$$

$$=J_N^{(1)}+J_{N,\varepsilon}^{(2)}+J_\varepsilon^{(3)}.$$

Оценим каждый из интегралов. Пусть $C_N=\{z:|z|=N, \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$. Тогда в силу аналитичности подынтегральной функции интеграл

$$\int_{R_{N,\varepsilon}+C_N}F_h(z)h_\alpha^{(1)}(xz)dz=0,\quad x>0.$$

Следовательно,

$$J_N^{(1)}=\int_{C_N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\pi(\alpha+1)}F_h(z)h_\alpha^{(1)}(xz)dz,\ x>0.$$

В силу оценки

$$|h_\alpha^{(1)}(xNe^{i\varphi})|\leqslant C_\alpha e^{-xN\sin\varphi},\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$$

получим

$$\begin{aligned}|J_N^{(1)}|&\leqslant\frac{C_\alpha}{2\pi}\int_0^\pi|F_h(z)|e^{-xN\sin\varphi}N\,d\varphi\leqslant\\&\leqslant C_\alpha\frac{1-e^{-xN}}{2x}\cdot\max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi}|F_h(xNe^{i\varphi})|,\ x>0.\end{aligned} \tag{18}$$

Из оценок

$$|j_\alpha(xz)|\leqslant C|xz|^{\alpha+1},\quad z\to0,$$

$$|F_h(z)|\leqslant C|z|^{-\alpha},\qquad z\to0$$

следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}J_\varepsilon^{(3)}=0. \tag{19}$$

Из формул (17), (18) и (19) вытекает равенство

$$f(x)=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to0}}J_{N,\varepsilon}=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to0}}J_{N,\varepsilon}^{(2)}=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to0}}\frac{1}{2\pi}\int_{R_{N,\varepsilon}}F_h(z)h_\alpha^{(2)}(xz)dz.$$

Теорема доказана.

Так как при $0<\alpha<\frac{1}{2}$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}F_h(z)h_\alpha^{(2)}(xz)dz=0,\quad x\neq0,$$

то из предыдущей теоремы вытекает такая

ТЕОРЕМА 6. Если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $x \neq \infty$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|t|^{-\alpha})|f(t)|\,dt < \infty, \quad 0<\alpha<\tfrac{1}{2}, \tag{20}$$

то существует преобразование

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,h_{\alpha}^{(1)}(st)\,dt = \hat{f}_h(s) \tag{21}$$

и обратное преобразование

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} \hat{f}_h(s)\,h_{\alpha}^{(2)}(xs)\,ds. \tag{22}$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.А.Марченко за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. З.С.Агранович, В.А.Марченко, Обратная задача теории рассеяния, ХГУ, Харьков, 1960.
2. В. де Альфаро, Т. Редже, Потенциальное рассеяние, Мир, М, 1969.
3. Н.И.Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Наука, М, 1965.
4. В.Ф.Короп, Обратная задача рассеяния для уравнений с особенностью. Сибирский матем. журнал, II, № 5, 1961.
5. Б.Н.Левин, Преобразования типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 106, № 2, 1956.
6. В.А.Марченко, Устойчивость обратной задачи теории рассеяния, Матем.сб., Новая серия, 77(119):2, 1968.
7. М.А.Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, М, 1969.
8. Р. Ньютон, Теория рассеяния волн и частиц, Мир, М, 1969.
9. А.С.Сохин, Об одном классе операторов преобразования, Труды ФТИНТ АН УССР, Математическая физика и функциональный анализ, в. I, Харьков, 1969.
10. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Госиздат техн.-теор.лит-ры, М, 1948.
11. Л.Д.Фаддеев, Обратная задача квантовой теории рассеяния, УМН, XIУ, в.4(88), 1959.

Р Е Ф Е Р А Т Ы

УДК 517.512.2/4

ОБ ОДНОМ НЕОПРЕДЕЛЕННОМ УРАВНЕНИИ ЧЕБЫШЕВСКОГО ТИПА В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ. Н.И. Ахиезер. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. II, 1971, стр.3-14

Рассматриваются континуальные и дискретные ортонормированные системы целых функций для случая некоторых специальных весов (названных обобщенными чебышевскими весами). Показано, как задача построения этих систем сводится к решению некоторых неопределенных уравнений, в частном случае рассмотренных П.Л.Чебышевым.

Рисунков 1.

УДК 517.9

УСЛОВИЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ. А.Г.Брусенцев, Ф.С.Рофе-Бекетов. "Математическая физика и функциональный анализ", вып.II, 1971, стр. 15-25

Получены достаточные условия самосопряженности в $\mathcal{L}_2(E^n)$ операторов

$$L = (-\Delta)^m + q(x),$$
$$M = (-1)^m \sum_i \frac{\partial^{2m}}{\partial x_i^{2m}} + q(x)$$

без краевых условий на бесконечности.

Библиографических ссылок 8.

УДК 517.519.5

К ВОПРОСУ О ПОДФАКТОРАХ ГИПЕРФИНИТНЫХ ФАКТОРОВ. В.Я.Голодец. "Математическая физика и функциональный анализ", вып.II, 1971, стр.26-29

Доказано, что если гиперфинитный фактор M типа II_1 представим в виде тензорного произведения факторов M_i (i =1,2)типа II_1 , то M_i (i =1,2)- гиперфинитные II_1 -факторы (проблема С.Сакаи).

Библиографических ссылок 8.

УДК 517.519.5

О ГИПЕРФИНИТНЫХ ФАКТОРАХ ТИПА II_∞. В.Я.Голодец. "Математическая физика и функциональный анализ", вып.II, 1971, стр. 30-36

Доказано, что все гиперфинитные факторы типа II_∞ в сепарабельном гильбертовом пространстве изоморфны между собой алгебраически и изоморфны тензорному произведению гиперфинитного фактора типа II_∞ на фактор типа I_∞.

Библиографических ссылок 7.

УДК 517.519.5

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МОДУЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.(Краткое сообщение).В.Я.Голодец. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. II, 1971, стр.37-40

Исследуются общие спектральные свойства семейства всех модулярных операторов, построенных для произвольного фиксированного фактора. Доказательство теоремы об общих точках спектра полностью приведено.

Библиографических ссылок 3.

УДК 519.21

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ. Г.Б.Клебанова, А.А.Янцевич. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. II, 1971, стр. 41-44

Получена формула, позволяющая восстанавливать реализации неоднородного случайного поля с аналитической функцией ковариации по значениям в узлах периодической решетки. С помощью этой формулы оценивается вероятность выброса поля за фиксированный уровень через вероятности выброса в узлах решетки.

Библиографических ссылок 3.

УДК 513.88 + 517.94.

К ВОПРОСУ О ДЕФЕКТНЫХ ЧИСЛАХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С КОМПЛЕКСНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. В.И.Коган, Ф.С.Рофе-Бекетов. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. II, 1971, стр. 45-60

Выделяется некоторый класс минимальных симметрических дифференциальных операторов на полуоси произвольного четного или нечетного порядка с комплексными, вообще говоря, коэффициентами, и для операторов этого класса находятся дефектные числа. В случае операторов четного порядка $2m$, рассмотренный нами класс содержит, в частности, операторы с различными дефектными числами $(p, p+1)$ или $(p+1, p)$ при $p = m, m+1, \ldots, 2m-2$, а также операторы, рассматривавшиеся Орловым и Мак-Леодом. Для случая операторов нечетного порядка $2m+1$ мы получаем набор операторов с индексами дефекта (p, p) $(p = m+1, \ldots, 2m+1)$ и с индексами $(p, p+1)$ или $(p+1, p)$, где $p = m, m+1, \ldots, 2m-1$. Работа основана на выводимых в ней асимптотических формулах для решения дифференциального уравнения

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = 0, \quad 0 < x_0 \leq x < \infty,$$

коэффициенты которого голоморфны в некотором открытом секторе правой x - полуплоскости, содержащем положительную полуось, и имеют в S при $x \to \infty$ асимптотические разложения в виде степенных рядов

$$p_j(x) \sim x^{n-\ell} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x^{-k}, \quad a_{00} \neq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, \ell-1;$$
$$p_j(x) \sim x^{n-j} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x^{-k}, \quad a_{\ell 0} \neq 0, \quad j = \ell, \ldots, n; \quad 0 \leq \ell \leq n.$$

Библиографических ссылок 13.

УДК 517.53

О МНОГОМЕРНЫХ БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫХ ЗАКОНАХ, ИМЕЮЩИХ ТОЛЬКО БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ КОМПОНЕНТЫ. Л.З.Лившиц, И.В.Островский. "Математическая физика и функциональный анализ", вып II, 1971, стр. 61-75

Доказано, что класс n-мерных безгранично делимых законов, имеющих только безгранично делимые компоненты, является плотным в смысле слабой сходимости в классе всех n-мерных безгранично делимых законов.

Библиографических ссылок 19.

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ПРОДЫРЯВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. В.А.Львов, Е.Я.Хруслов. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. II, 1971, стр. 76-98

В работе проводится исследование решения второй краевой задачи для уравнения Гельмгольца в области специального вида, граница которой состоит из большого числа продырявленных поверхностей.

Рассматривается последовательность таких краевых задач, когда диаметры дырок, расстояния между соседними поверхностями стремятся к нулю.

Получены условия, при которых последовательность решений краевых задач сходится к функции, удовлетворяющей некоторому дифференциальному уравнению эллиптического типа, и найден вид этого уравнения.

Библиографических ссылок 14.

УДК 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА. Д.Ш.Лундина. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. II, 1971, стр. 99-110

В работе рассмотрен вопрос об устойчивости обратной задачи теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$.

В частности, показано, что если данные рассеяния двух граничных задач совпадают при $|\lambda| < N$ и потенциалы принадлежат классу $W_\alpha(x)$, задающему априорное поведение в нуле и на бесконечности, то разность нормированных собственных вектор-функций в L_2 -метрике убывает, как $1/\sqrt{N}$ при $N \to \infty$.

Библиографических ссылок 4.

УДК 517.9

САМОУСРЕДНЯЕМОСТЬ ЧИСЛА СОСТОЯНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА СО СЛУЧАЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ. Л.А.Пастур. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. II, 1971, стр. 111-116

Рассмотрено уравнение Шредингера в кубе $\mathcal{V}$ N -мерного евклидова пространства с самосопряженными условиями на границе куба в предположении, что потенциал является случайным метрически транзитивным полем, реализации которого в определенном смысле ограничены снизу. Показано, что след разложения единицы этого оператора,деленный на V, при $V \to \infty$ стремится к неслучайному пределу.

Библиографических ссылок 7.

УДК 517.53

О ГЛОБАЛЬНОЙ ПРИВОДИМОСТИ ПСЕВДОПОЛИНОМОВ.Л.И.Ронкин. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. II, 1971, стр. 117-121

Доказано, что если псевдополином

$$p(z,W) = a_0(z)W^m + \ldots + a_m(z), \quad z \in C^n, \ W \in C^1,$$

коэффициенты которого -голоморфные функции в области $\mathcal{D} \subset C^n$, представим в виде

$$p(z,W) = F_1(z,W)\,F_2(z,W),$$

где $F_1(z,W)$ и $F_2(z,W)$ - функции, голоморфные в $\mathcal{D} \times C^1_{(w)}$, то существуют такие псевдополиномы $p_1(z,W)$ и $p_2(z,W)$, что

$$p(z,W) = p_1(z,W)\,p_2(z,W).$$

Это утверждение является обобщением соответствующего результата М.Ф.Зуева, рассматривавшего случай $\mathcal{D} = C^1$.

Библиографических ссылок 4.

УДК 517.94 + 530.145

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С РАССЕЯНИЕМ НА ВЫСОКОСИНГУЛЯРНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ. Ф.С.Рофе-Бекетов, Е.Х.Христов. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. II, 1971, стр. 122-168

Рассматривается радиальное уравнение рассеяния

$$y'' + \{k^2 - V(x)\}y = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

где $V(x) = W(x) + U(x)$, причем $W(x) \to +\infty$ при $x \to 0$ быстрее, чем x^{-2} и удовлетворяет некоторым условиям регулярности роста при $x \to 0$, в частности, $W' = O(W^{\frac{3}{2}-\delta})$, $0 < \delta < \frac{1}{2}$, а $U(x)$ - относительно малая добавка. Получена равномерная по x при $k \to +\infty$ асимптотика для регулярного при $x = 0$ решения $\varphi(x,k)$ и для основного решения задачи рассеяния

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x,t)e^{ikt}dt,$$

а также асимптотика функции Йоста и S - функции, для которой установлена простая в обе стороны связь с асимптотикой $W(x)$ при $x \to 0$. Для ядра $K(x,t)$ установлено существование предела $\lim\limits_{x\to 0} K(x,t)/\gamma(x) = K(t)$, причем $K(t) \in C^\infty(-\infty,\infty)$, $\gamma(x)$ заданным образом выражается через $W(x)$, $(\gamma(0) = \infty)$. Для разложения по решениям $\varphi(x,k)$ установлен аналог теоремы Винера-Пэли, и построены операторы преобразования, связывающие регулярные решения уравнений с потенциалами $V_i = W + u_i$ $(i=1,2)$, а также операторы вида $\varphi(x,k)=\int_0^x Q(x,t)\cos kt\,dt$. Установлена теорема единственности определения составляющей $U(x)$ потенциала $V(x)$ по спектральной функции $\rho(\lambda)$.

Основные результаты работы анонсированы авторами в ДАН СССР (I68, № 6 и I85, № 4).

Библиографических ссылок 30.

УДК 532.0

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ. Л.А.Слобожанин. "Математическая физика и функциональный анализ", вып. П, I97I, стр. I69-I74

Изучается устойчивость цилиндрической формы равновесия невесомой вязкой вращающейся жидкости, обладающей поверхностным натяжением и ограниченной осесимметричными твердыми стенками. Следуя принципу минимума потенциальной энергии, задача об устойчивости сводится к вопросу о знаке наименьшего собственного значения некоторой линейной краевой задачи относительно нормальной составляющей возмущения равновесной поверхности.

Результаты, полученные в виде формул, таблиц и графиков, позволяют определить общую границу области устойчивости цилиндрического равновесного состояния жидкости в пространстве трех безразмерных параметров: отношения высоты цилиндра к радиусу, отношения центробежных сил к силам поверхностного натяжения и параметра, зависящего от высоты цилиндра, угла смачивания и кривизны твердой стенки.

Рисунков 3, таблиц I, библиографических ссылок 8.

УДК 532.0

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВЕТВЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РАВНОВЕСНОГО СОСТОЯНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ. Л.А.Слобожанин. **"Математическая физика и функциональный анализ"**, вып. П, I97I, стр. I75-I8I

Изучается ветвление цилиндрической формы равновесия вязкой вращающейся капиллярной жидкости в окрестности критического равновесного состояния. Рассматривается случай, когда столб жидкости заключен между двумя параллельными пластинами. Исследование ведется на основе метода Ляпунова-Шмидта.

Показано, что при значениях безразмерного параметра, характеризующего отношение центробежных сил к силам поверхностного натяжения, близких к критическому, но не превышающих его, существует одна, равновесная форма, ответвляющаяся от цилиндрической формы равновесия. Выписываются первые приближения ответвившихся равновесных форм, которые имеют различный вид в зависимости от отношения высоты цилиндра к его радиусу.

Рисунков 2, библиографических ссылок 6.

УДК 5I7.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОСОБЕННОСТЬЮ. А.С.Сохин. **"Математическая физика и функциональный анализ"**, вып.П, I97I, стр. I82-235

Проводится спектральный анализ граничной задачи

$$\left\{-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{a(a+1)}{x^2}\right\}y+q(x)y=\lambda^2 y,\quad 0<x<\infty, \tag{I}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{y(x,\lambda)}{x^{a+1}}\neq\infty,\quad a>-\tfrac{1}{2},\quad a\neq[a],\ [a]+\tfrac{1}{2},$$

где функция $q(x)$ (потенциал) подчинена условию

$$\int_0^\infty (x^{1/2+|\beta|}+x^{1+|\beta|})|q(x)|\,dx<\infty,\quad \beta=a-[a], \tag{2}$$

и исследуется обратная задача рассеяния. Найдены необходимые и достаточные условия, которым следует подчинить данные рассеяния, чтобы обратная задача имела решение в классе (2) потенциалов. Случай целых значений a рассмотрен ранее другими авторами.

Библиографических ссылок II.