АКАДЕМИЯ НАУК УССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

Математическая физика и функциональный анализ

Выпуск I

ХАРЬКОВ • 1969

АКАДЕМИЯ НАУК УССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я   Ф И З И К А,
Ф У Н К Ц И О Н А Л Ь Н Ы Й   А Н А Л И З

Сборник научных трудов

в ы п у с к I

Харьков - 1969.

Т Р У Д Ы
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ ИЛИ ЧАСТИЧНОЙ НЕВЕСОМОСТИ*

Н.Д.Копачевский, А.Д.Мышкис, А.Д.Тюпцов.

В последние годы в ряде стран проявляется значительный интерес к поведению жидкости в условиях полной невесомости или близких к ним; выполнено ряд теоретических и большое число экспериментальных работ в этой области. В этом обзоре мы остановимся на математическом исследовании малых движений жидкости в условиях полной или частичной невесомости, уделив основное внимание работам, выполненным в отделе прикладной математики Физико-технического института низких температур АН УССР.

Если действующее на жидкость поле массовых сил достаточно слабое и жидкость имеет свободную поверхность, то на ее поведение значительное влияние оказывают капиллярные силы. Это, в основном, и есть тот существенно новый физический фактор, который проявляется в условиях полной или частичной невесомости. Как это проявляется в математических задачах, будет показано позже.

Капиллярные силы являются поверхностными и имеют следующий потенциал

$$U = \int_{\Sigma} \sigma d\Sigma.$$

Здесь Σ – поверхность соприкосновения различных сред;
σ – коэффициент поверхностного натяжения (положительная величина, которая для каждой пары однородных сред зависит только от температуры).

---

x Эта статья представляет собой полный текст доклада, прочитанного на У Международной конференции по нелинейным колебаниям (г.Киев, август - сентябрь 1969г.)

Формально влияние поверхностных сил проявляется в изменении граничных условий:

I) на свободной поверхности жидкости (как в состоянии покоя, так и при движении) давление имеет разрыв, величина которого определяется формулой Лапласа.

$$P_1 = P_2 + \sigma 2H,$$

H – средняя кривизна свободной поверхности жидкости;

2) для идеальной жидкости (а в состоянии равновесия – и для вязкой) свободная поверхность Γ может пересекать стенку сосуда S только под вполне определенным углом δ (рис. I), который называется углом смачивания и определяется физическими свойствами жидкости, газа и стенки сосуда:

$$\cos \delta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma},$$

σ, σ_1, σ_2 – соответствующие коэффициенты поверхностного натяжения.

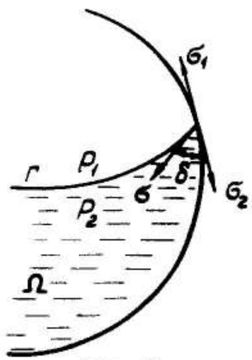

Рис. I.

Среди задач гидромеханики, в которых проявляется влияние капиллярных сил, наиболее простые следующие: построение равновесной поверхности жидкости, изучение устойчивости равновесного состояния, изучение малых движений (в частности, колебаний) жидкости в окрестности состояния покоя.

В этой работе и будут рассмотрены названные задачи. При рассмотрении малых движений жидкости задача будет считаться линеаризованной.

Вопрос о построении равновесной поверхности жидкости здесь затрагиваться не будет. Отметим только, что к настоящему времени довольно хорошо изучены осесимметричные и "плоские" равновесные поверхности жидкости в поле сил тяжести, в поле центробежных сил, а также в смешанном поле гравитационных и центробежных сил [I–7]. В.М.Петров и Ф.Л.Черноусько рассмотрели более сложный случай равновесия жидкости в цилиндрическом сосуде с прямоугольным сечением (в поле сил тяжести) [8]. В работе [9] изучена в круговом цилиндре задача о ветвлении равновесных поверхностей жидкости (в окрестности осесимметричных) в поле сил тяжести.

§ I.Устойчивость состояния покоя

Задача об устойчивости равновесного состояния жидкости с учетом капиллярных сил изучалась (в основном, в работах В.В.Румянцева ([IO] и др.)) на основе второго метода А.М.Ляпунова. В качестве соответствующего функционала бралась полная энергия. На этом пути, как известно еще из работ А.М.Ляпунова, возникают трудности, связанные с возможностью образования "нитей" (наличие капиллярных сил исключает возможность образования "листов", с большой площадью) и возможностью перехода жидкости из данного состояния в другое, далекое, по тонкому "жидкому мосту" с преодолением сколь угодно малого потенциального барьера [II].

Вероятно, указанные трудности носят лишь теоретический характер, и поэтому при изучении устойчивости можно опираться на принцип минимума потенциальной энергии (при этом в большинстве случаев можно ограничиться второй вариацией энергии). Однако окончательное решение этого вопроса пока отсутствует.

Если поле массовых сил является "внешним" (не зависит от положения жидкости) с массовой плотностью потенциала $\Pi(\bar{x})$, то вторая вариация потенциальной энергии имеет следующий вид (в равновесном состоянии, т.е. при условии $\delta U = 0$)

$$\delta^2 U = \sigma \int_\Gamma [aN^2 + (\nabla_\Gamma N)^2]\, d\Gamma + \int_\gamma \chi N^2\, d\ell.$$

Здесь N – отклонение возмущенной поверхности жидкости от невозмущенной, измеренное по нормали к последней; $\nabla_\Gamma N$ – поверхностный градиент функции $N(\bar{x})(\bar{x}\in\Gamma)$; a, χ – коэффициенты, зависящие от равновесной поверхности Γ, угла ϑ и $\Pi(\bar{x})$. Так как жидкость несжимаема, то должно выполняться условие

$$\int_\Gamma N\, d\Gamma = 0. \tag{I.I}$$

Чтобы применить к исследованию $\delta^2 U$ энергетический подход, обозначим через B расширение по Фридрихсу оператора

$$B'u = (-\Delta_\Gamma + a)\,u - \frac{1}{\mathrm{mes}\,\Gamma}\int_\Gamma (-\Delta_\Gamma + a)\,u\,d\Gamma, \tag{I.2}$$

заданного на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций из гильбертова пространства $H = L_2(\Gamma) \ominus 1$ (это вычитание вытекает из условия (I.I)), удовлетворяющих на γ краевому условию $\chi N + \frac{\partial}{\partial \nu} N = 0$ ($\frac{\partial}{\partial \nu}$ -производная по нормали к γ на Γ . Тогда

$$\frac{1}{G}\delta^2 U = \|N\|_B^2 = \|B^{1/2} N\|^2, \tag{I.3}$$

где $\|\cdot\|$ – норма в H, $\|\cdot\|_B$ – связанная с оператором B энергетическая норма в H .

Очевидно, что если исключить некоторые особые случаи, то условие устойчивости равновесного состояния жидкости эквивалентно положительности оператора B , а равенство

$$\inf_{N \in D(B^{1/2})} \frac{\|B^{1/2} N\|^2}{\|N\|^2} = 0$$

определяет границу области устойчивости в пространстве параметров, от которых зависит состояние покоя. В работе [I2] была построена граница области устойчивости осесимметричных равновесных состояний жидкости в цилиндрическом сосуде в поле сил тяжести. В этом случае состояние покоя зависит от двух параметров: угла смачивания δ и числа Бонда $b = \rho g R^2 G^{-1}$ (R- радиус цилиндра, ρ - плотность жидкости, g - ускорение силы тяжести). Полученная зависимость $b(\delta)$ на границе области устойчивости показана на рис. 2.

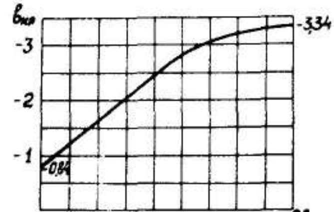

Рис. 2.

Аналогичная задача была решена для жидкой капли, висящей на горизонтальной плоскости 7,9 . Случай, когда кроме сил тяжести есть еще и центробежные силы (вращающаяся жидкость в цилиндрическом сосуде), был изучен Л.А.Слобожаниным 7 . Плоскую задачу (жидкость в прямоугольном канале) решил П.Конкус I3 .

Запас устойчивости. Если в состоянии покоя x потенциальная энергия $U(y)$ механической системы имеет изолированный минимум, то глубина $H(x)$ потенциальной ямы точки x в некоторой степени характеризует устойчивость этого равновесного состояния по отношению к конечным возмущениям ("запас устойчивости"). Для гладкого функционала $U(y)$

$$H(x) = U(x^*(x)) - U(x).$$

Здесь $x^* x$ – стационарная точка $U(y)$, лежащая на границе ямы точки x .

Задача о вычислении глубины потенциальной ямы сложна даже в конечномерном случае. Но она значительно упрощается для равновесных состояний, близких к границе области устойчивости. Пусть, например, потенциальная энергия системы и ее равновеные состояния непрерывно зависят от параметра λ

$$U = U(\lambda, y), \quad x = x(\lambda),$$

причем $\lambda = \lambda_0$ – есть граница области устойчивости. Тогда

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} x^*(x(\lambda)) = x(\lambda_0),$$

т.е. в точке $\lambda = \lambda_0$ происходит ветвление равновесных состояний. Для малых значений $\varepsilon = \lambda - \lambda_0$ все равновесные состояния, ответвляющиеся от семейства $x(\lambda)$ при $\lambda = \lambda_0$, можно найти по методу Ляпунова-Шмидта. В простейшем случае ответвляется одно семейство, $x^*(\lambda)$ (см.рис.3 для случая, когда пространство состояний механической системы одномерно). После того как $x(\lambda)$ и $x^*(\lambda)$ найдены, можно вычислить глубину потенциальной ямы точки $x(\lambda)$.

$$H(\lambda) = U(\lambda, x^*(\lambda)) - U(\lambda, x(\lambda)).$$

Таким способом была решена в [9] задача о запасе устойчивости равновесных состояний жидкости в круговом цилиндре (вблизи критической кривой $b(\vartheta)$, показанной на рис. 2).

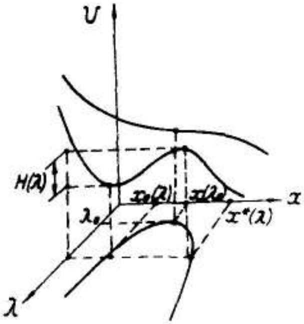

Рис. 3.

В этом случае для уравнения равновесной поверхности жидкости $z = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ должна быть решением следующей краевой задачи [9] в области $x^2 + y^2 \leqslant R^2$

$$\operatorname{div} \frac{\nabla f}{\sqrt{1+(\nabla f)^2}} - bf = 2\cos\vartheta, \quad -\left.\frac{\partial f/\partial r}{\sqrt{1+(\nabla f)^2}}\right|_{r=R} = \cos\vartheta. \tag{I.4}$$

Применение метода Ляпунова-Шмидта к задаче (I.4) позволяет установить, что от семейства осесимметричных решений ответвляется одно (если отвлечься от возможного поворота вокруг оси z) семейство неосесимметричных решений следующего вида

$$f(x,y,\varepsilon) = f(x,y,0) + \varepsilon^{1/2}\left[u_0(x,y) + O(\varepsilon)\right] \quad (\varepsilon = b - b_{кр}(\vartheta)).$$

Выражение запаса устойчивости имеет вид:

$$H = \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2).$$

Для H_1 найдено выражение через $f(r)$ и $f'(r)$, но оно довольно громоздкое и приводить его здесь не будем ($z = f(r)$ -уравнение равновесной поверхности при $b = b_{кр}(\vartheta)$).

§2. Задача Коши и соответствующая ей спектральная задача о колебаниях идеальной жидкости.

Если состояние равновесия жидкости в сосуде устойчиво (оператор B положительно определен), то возникает задача о малых движениях жидкости, а также задача об определении частот колебаний. Случай идеальной жидкости рассмотрен Н.Н.Моисеевым и Ф.Л.Черноусько [10 и 14], а впоследствии одним из авторов этой статьи [15,16].

Как показано в [I6], эта задача в предположении потенциальности поля скоростей $\vec{U}(\vec{x},t)=\nabla\Phi(\vec{x},t)$ приводится к исследованию операторного уравнения

$$AN_{tt}+BN=F(t),\ N(0)=\eta,\ N_t(0)=\xi \tag{2.I}$$

в вещественном гильбертовом пространстве $H=L_2(\Gamma)\ominus 1$ на равновесной поверхности Γ. Здесь $N(t)\in H$, $A>0$ – полный вполне непрерывный оператор (кинетической энергии), $F(t)$ -потенциал возмущения внешних сил $\vec{f}(\vec{x},t)$ на Γ $(\vec{f}=\nabla F)$.

Заменой $A^{1/2}N=u$ уравнение (2.I) преобразуется в хорошо исследованное уравнение [I7]

$$u_{tt}+Cu=f \qquad (f=A^{-1/2}F), \tag{2.2}$$

где $C=A^{-1/2}\,BA^{-1/2}$ – положительно определенный неограниченный оператор. Решение уравнения (2.2) при начальных условиях

$$u(0)=A^{-1/2}N(0)=\varphi,\ u_t(0)=A^{-1/2}N_t(0)=\Psi$$

имеет вид

$$u(t)=\sin(C^{1/2}t)(C^{-1/2}\Psi)+\cos(C^{1/2}t)\varphi+ \tag{2.3}$$
$$+\int_0^t \sin[C^{1/2}(t-\tau)]C^{-1/2}f(\tau)d\tau.$$

Как показано в [I6], при выполнении условий

$$N(0)\in H_B,\ N_t(0)\in H_A,\ F(t)\in H_A(0,T),$$

сводящихся к тому, что в начальный момент времени конечны кинетическая и потенциальная энергия системы, а также работа внешних сил за промежуток $0\leqslant t\leqslant T$, существует единственное обобщенное решение задачи (2.I) с конечной полной энергией в любой момент t. Для этого обобщенного решения выполняется закон баланса энергии

$$\frac{1}{2}\|N\|^2_B+\frac{1}{2}\|N_t\|^2_A=\int_0^t\Big(\int_\Omega\nabla F\cdot\nabla\Phi\, d\Omega\Big)dt+\frac{1}{2}\|N(0)\|^2_B+\frac{1}{2}\|N_t(0)\|^2_A.$$

Частоты колебаний жидкости находятся из уравнения (см. (2.2))

$$Cv=\omega^2 v \qquad (u=v\cdot\exp(i\omega t)). \tag{2.4}$$

Поскольку $C^{-1} = A^{1/2} B^{-1} A^{1/2}$ – полный вполне непрерывный положительный оператор, то, в силу известных теорем [I8], собственные значения задачи (2.4) образуют дискретный спектр, $\omega_k^2 > 0$ (т.е. все частоты ω_k действительны) и $\omega_k^2 \to \infty$ при $k \to \infty$. Собственные функции задачи (2.4) образуют полную систему и ортогональны в пространствах H и H_c.

§3. Задача Коши для малых колебаний вязкой жидкости.

Эта задача рассматривалась в работе [I9], где доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения. Учет влияния поверхностных сил приводит к тому, что в граничном условии на равновесной поверхности Γ появляется дифференциальный оператор, порядок которого равен порядку дифференциального оператора в области Ω. Решение задачи $\vec{u}(\vec{x}, t)$ естественно искать в подпространстве $\mathcal{J}(\Omega)$ гильбертова пространства вектор-функций $L_2(\Omega)$. Элементы из $\mathcal{J}(\Omega)$ получаются замыканием в норме $L_2(\Omega)$ гладких соленоидальных вектор-функций, у которых обращается в нуль нормальная компонента на твердой стенке сосуда S.

Искомые функции $\vec{u}(\vec{x}, t)$, $p(\vec{x}, t)$ и $N(\xi, t)$ (поле скорости, давления и величина отклонения по нормали движущейся свободной поверхности от равновесной поверхности Γ) удовлетворяют уравнениям Навье-Стокса

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nu P_j \Delta \vec{u} + P_j \nabla p = \vec{f}, \qquad \operatorname{div} \vec{u} = 0, \qquad (3.1)$$

граничным и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} &u_{1,3} + u_{3,1} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0, \quad p - 2\nu u_{3,3} = \sigma B N \\ &\int_\Gamma N(\xi, t)\, d\Gamma = 0, \quad N(\xi, t) = N(\xi, 0) + \int_0^t u_n(\xi, \tau)\, d\tau \end{aligned}\right\} \text{ на } \Gamma, \qquad (3.2)$$

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = 0 \text{ на } S, \quad N(\xi, t) = 0 \text{ на } \gamma,$$

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad N(\xi, 0) = N_0(\xi).$$

Здесь P_j – оператор проектирования на $\mathcal{J}(\Omega)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ – криволинейные координаты на Γ, оператор B задается дифференциальным выражением (I.2) на множестве функций $\{N(\xi)\}$, обращающихся в нуль на γ. (Это условие – математическое предположение, нужное для замыкания задачи. Вопрос об истинном условии на γ не исследован до настоящего времени). Первые три условия (3.2) есть условия на касательные и нормальные напряжения, а последующие два — следствия условия несжимаемости и кинематического условия.

Назовем обобщенным решением задачи (3.I)- (3.2) с конечной полной энергией вектор-функцию $\vec{u}(\vec{x},t)$, для которой конечны интегралы $(0 \leqslant t \leqslant T)$

$$\int_0^T \|\vec{u}_t\|^2 dt, \quad \int_0^T E(\vec{u},\vec{u})\,dt, \quad \int_0^T \|u_n(\xi,t)\|_B^2\,dt, \tag{3.3}$$

при $t=0$ удовлетворяющую условию $\vec{u}(\vec{x},0)=\vec{u}_0(x)$ и интегральному тождеству

$$\int_0^T (\vec{u}_t,\vec{v})\,dt + \nu\int_0^T E(\vec{u},\vec{v})\,dt + \sigma\int_0^T\Big(\int_0^t u_n(\tau)\,d\tau, v_n(t)\Big)_B dt = \tag{3.4}$$
$$= \int_0^T (\vec{f},\vec{v})\,dt - \Big(N_0, \int_0^T v_n(t)\,dt\Big)_B$$

для всякой вектор-функции $\vec{v}(\vec{x},t)$,удовлетворяющей второму и третьему требованию (3.3). Здесь

$$E(\vec{u},\vec{u}) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega \quad -$$

- квадратичная форма, пропорциональная диссипации энергии в Ω в момент времени t .

В работе [I9] доказано, что если выполнены условия

$$\vec{u}(\vec{x},0)\in W_2^2(\Omega)\cap \mathcal{J}(\Omega), \quad \vec{u}(\vec{x},0)\big|_S=\vec{0},$$
$$N(\xi,0)\in W_2^{5/2}(\Gamma)\cap H_B, \quad \int_0^t\big(\|\vec{f}\|^2+\|\vec{f}_\tau\|^2\big)\,d\tau<\infty,$$

связанные с гладкостью начальных функций и правой части в (3.I)-(3.2), то существует единственное обобщенное решение (3.4) задачи (3.I)-(3.2). При выполнении более слабых требований

$$\vec{u}(\vec{x},0)\in\mathcal{J}(\Omega), \quad N(\xi,0)\in H_B, \quad \int_0^t \|\vec{f}(\tau)\|\,d\tau<\infty$$

существует единственное слабое (в смысле Хопфа [20]) решение этой задачи.

§4. Структура спектра в задаче о нормальных колебаниях вязкой жидкости

Нормальные колебания тяжелой $(b=\infty)$ вязкой жидкости в ограниченной области изучались многими авторами, из которых упомянем Г.Ламба [2I] и С.Чандрасекхара [22] . Для случая произвольного сосуда полное исследование методами функционального анализа проведено в работах С.Г.Крейна [23] , Н.К.Аскерова, С.Г.Крейна и Г.И.Лаптева [24,25] .

Решения этой задачи, зависящие от времени по закону $\exp(-\lambda t)$, удовлетворяют операторному уравнению

$$\nu u = \lambda P u + \frac{g}{\lambda} Q u \qquad (4.1)$$

в некотором гильбертовом пространстве. Здесь P - положительный вполне непрерывный оператор, Q - неотрицательный вполне непрерывный оператор. Исследование показало, что спектр задачи (4.I) дискретен; собственные числа λ_k ($k = 1, 2, \ldots$) имеют две предельные точки $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$; все нормальные колебания представляют апериодические движения ($\Im m \lambda = 0$, $Re \lambda > 0$), за исключением, быть может, конечного числа затухающих колебаний; при достаточно большой вязкости колебательных движений нет.

Напомним, что эти выводы получены без учета влияния поверхностных сил. Если же поверхностные силы учитывать, то характер спектра в задаче о нормальных колебаниях вязкой жидкости существенно изменяется. Рейд (W.H.Reid) в [26] рассматривал влияние капиллярных сил на частоты колебаний маловязкого жидкого шара. А.Г.Шмидт в [27] рассмотрел задачу о гравитационных и капиллярных волнах на поверхности шарового слоя маловязкой гравитирующей жидкости и, применяя метод пограничного слоя, получил асимптотические формулы для частот колебаний. Исследованию влияния капиллярных сил на частоты вязкого самогравитирующего шара посвящена также работа авторов [28] . Методом представления решения в виде ряда по обобщенным сферическим функциям здесь получено точное характеристическое уравнение, которое затем исследуется при произвольном значении вязкости.

В работе доказано, что поверхностные силы устраняют предельную точку спектра в нуле (т.е. не существуют как угодно медленно затухающие апериодические колебания). Единственной предельной точкой дискретного спектра является точка $\lambda = +\infty$; все собственные значения, за исключением, быть может, конечного числа, вещественны; при достаточно большой вязкости невещественные собственные значения отсутствуют. Наоборот, при достаточно малой вязкости число невещественных собственных значений будет как угодно большим. В работе получены также асимптотические формулы для собственных значений в различных предельных случаях (случай большой и малой вязкости и др.).

Однако задача о нормальных колебаниях вязкой жидкости в произвольном сосуде с учетом поверхностных сил не исследована до настоящего времени. С.Г.Крейну и Г.И.Лаптеву удалось привести эту задачу к исследованию операторного уравнения

$$u = \lambda A u + B u \qquad (4.2)$$

в некотором гильбертовом пространстве. Здесь A – полный вполне непрерывный положительный оператор, B – вполне непрерывный оператор. К уравнению (4.2) применима теорема М.В.Келдыша о полноте системы собственных и присоединенных векторов операторного пучка, из которой, в частности, следует, что единственной предельной точкой спектра задачи (4.2) является $\lambda = +\infty$, а все собственные значения λ, за исключением, быть может, конечного числа, расположены в угле $-\varepsilon < \arg \lambda < \varepsilon$, где ε – любое положительное число.

§5. Асимптотика частот колебаний идеальной жидкости в малозаполненном осесимметричном сосуде

Поверхностные силы оказывают также принципиальное влияние на характер асимптотического поведения частот колебаний идеальной жидкости при малых глубинах заполнения сосуда. Эти выводы получаются уже из рассмотрения следующей задачи [29]. Пусть в сферическом сосуде равновесная поверхность жидкости горизонтальна, т.е. краевой угол δ между поверхностью Γ и стенкой сосуда S выбран определенным образом (см.рис.4). Если глубина жидкости мала, то при решении задачи о частотах колебаний идеальной жидкости можно применить асимптотический метод типа узких полос [30].

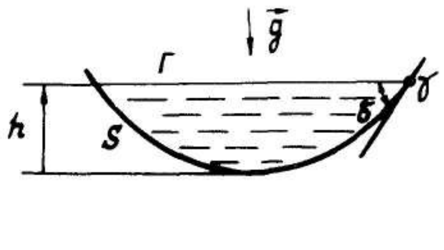

Рис. 4.

Если в качестве малого параметра выбрать величину $\varepsilon = \sin^2\delta$, то задача приводится к операторному уравнению

$$A(\varepsilon)u = \lambda\varepsilon^2 B(\varepsilon)u \qquad (\lambda = \omega^2 R g^{-1}) \tag{5.I}$$

в некотором гильбертовом пространстве (ω – частота колебаний, R – радиус сосуда, g – интенсивность гравитационных сил). В (5.I) операторы $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ аналитически зависят от параметра ε, причем $A(\varepsilon)$ – неотрицательный неограниченный самосопряженный оператор, $B(\varepsilon)$ – полный вполне непрерывный положительный оператор.

Исследование уравнения (5.I) показывает, что асимптотические формулы для собственных значений имеют следующий вид (индекс m отвечает разложению решения в ряд Фурье по $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$, где φ – цилиндрическая координата):

$$\lambda_{mp}(\varepsilon) = \alpha_{mp} b^{-1}\varepsilon^{-1} + \beta_{mp} + \gamma_{mp} b^{-1} + O(\varepsilon)\ldots \tag{5.2}$$

$(m = 0,1,2,\ldots;\ p\ 1,2,\ldots)$, где α_{mp}, β_{mp} и γ_{mp} – –численные коэффициенты, b – число Бонда. Старший коэффициент α_{mp} в разложении (5.2) положителен для всех значений m и p, кроме случая $m = p = 1$, когда он обращается в нуль. При $m = p = 1$ получается минимальное собственное значение задачи (5.I), которое вычисляется по формуле

$$\lambda_{11}(\varepsilon) = 1 + \frac{1}{6}\varepsilon + \frac{19}{252}\varepsilon^2 + \left(\frac{947}{21168} - \frac{b}{26460}\right)\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4). \tag{5.3}$$

Этому собственному значению отвечают в пределе при $\varepsilon \to +0$ колебания малой массы жидкости как математического маятника длины R. Поверхностные силы, как видно из (5.3), мало влияют на эту частоту колебаний, поскольку в процессе колебаний свободная поверхность жидкости остается почти плоской. Остальные частоты отвечают собственно колебаниям малой жидкой капли с сохранением центра масс. При характерном размере $h = O(\varepsilon R)$ – глубине жидкости, из (5.2) следует, что соответствующая безразмерная комбинация

$$\mu_{mp}(\varepsilon) = \omega^2 h g^{-1} = O(1).$$

В разобранной задаче предельный переход $\varepsilon \to 0$ не совсем физически естественен, так как, если равновесная поверхность горизонтальна, то при изменении ε угол смачивания δ меняется, т.е. жидкость приходится заменять. Разобрана также и более естественная задача, когда при стремлении коэффициента заполнения к нулю угол смачивания сохраняется (причем он не равен нулю, так как в этом случае возникает ряд осложнений, не дающих пока возможности довести решение до конца). Эта задача в вычислительном отношении (даже при построении нулевого приближения) является существенно более громоздкой.

Однако и здесь получаются аналогичные качественные выводы: при малых глубинах заполнения в качестве малого параметра ε можно выбрать отношение максимального размера жидкой капли d к радиусу сферы R. При этом удается асимптотически проинтегрировать уравнения равновесия с малым параметром $b\varepsilon^2$. Задача о частотах колебаний приводится к исследованию уравнения

$$A(\varepsilon)u = \mu B(\varepsilon)u, \tag{5.4}$$

где $\mu = \rho\omega^2 d^3 \sigma^{-1}$ (ρ - плотность жидкости, σ - коэффициент поверхностного натяжения), $A(\varepsilon)$ и $B(\varepsilon)$ - операторы такого же типа, как и в (5.I). Асимптотические формулы для собственных значений задачи (5.4) имеют вид

$$\mu_{mp}(\varepsilon) = \alpha_{mp} + O(\varepsilon) \qquad (m = 0,1,2,\dots;\ p = 1,2,\dots),$$

причем $\alpha_{mp} > 0$, кроме случая $m = p = 1$. Коэффициенты α_{mp} зависят от параметра задачи - угла смачивания δ. Например, при $\delta = \pi/2$ имеем

$$\alpha_{mp} = (m+2p)(m+2p-2)(m+2p-3).$$

Случай $m = p = 1$, как и в задаче (5.I), отвечает в пределе при $\varepsilon \to +0$ колебанию всей массы жидкой капли как математического маятника длины R.

Если не учитывать поверхностные силы (при этом равновесная поверхность жидкости под действием гравитационных сил становится горизонтальной), то формулы для частот колебаний, как показано в работе Будянского [3I] (B.Budiansky), имеют вид

$$\lambda_{mp}(\varepsilon) = m + 2(p+m)(p-1) + O(\varepsilon). \tag{5.5}$$

Сравнивая это выражение с (5.2), видим, что характер асимптотического поведения частот колебаний в двух случаях ($b = \infty$ и $b < \infty$) существенно различен. При малых глубинах заполнения поверхностные силы оказывают гораздо большее влияние на частоты колебаний (все, кроме первой), чем гравитационные силы.

Аналогичным образом можно исследовать характер асимптотического поведения частот колебаний при коэффициенте заполнения сосуда, близком к единице.

§6. Приближенный расчет частот колебаний.

Если сосуд имеет произвольную форму, то задача определения частот существенно усложняется. Ответ задачи зависит от трех безразмерных параметров: угла смачивания δ, числа Бонда b и коэффициента заполнения сосуда. Точное решение известно только в нескольких простых случаях. Например, в цилиндрическом сосуде радиуса R при угле смачивания $\delta = \pi/2$ частоты колебаний вычисляются по формуле

$$\lambda_{mp} = \rho \omega_{mp}^2 R^3 \sigma^{-1} = \beta_{mp}(\beta_{mp}^2 + b)\, th\left[\beta_{mp} \frac{h}{R}\right], \qquad (6.I)$$

где β_{mp} – p-й корень первой производной функции Бесселя $J_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; $p = 1, 2, \ldots$; h – глубина жидкости.

В общем случае решение этой задачи, т.е. решение уравнения (см. 2.I)

$$Bu = \lambda A u \qquad \left(u = \frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma\right) \qquad (6.2)$$

можно найти, применяя различные приближенные методы. В работе Н.Д.Копачевского и Н.Н.Морозовской [32] использован вариационный принцип для определения первой частоты колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде при произвольном угле смачивания и числе Бонда, причем гравитационное поле направлено вдоль оси цилиндра "вертикально вниз". Этот принцип следует из свойств операторов в (6.2)

$$\lambda_1 = \min_{u \in H_B} \frac{\|u\|_B^2}{\|u\|_A^2} = \min_{\substack{\frac{\partial \Phi}{\partial n}|_\Gamma \in H_B \\ \Phi|_\Omega \in W_2^1}} \frac{\left\| B^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma \right\|^2}{\int_\Omega |\nabla \Phi|^2 d\Omega}. \qquad (6.3)$$

Здесь $\Phi(\vec{x})$ – потенциал поля скоростей частиц жидкости, Γ – равновесная поверхность жидкости, Ω – область, занимаемая жидкостью в положении равновесия.

В работе [32] для приближенного вычисления λ_1 применен метод Ритца при вычислении минимума функционала (6.3). В качестве системы координатных функций выбраны собственные функции этой же задачи, отвечающие углу смачивания $\delta = \pi/2$, получаемые методом разделения переменных. Для случая полубесконечного цилиндра величина $\lambda_1(\mathcal{B}, \delta)$ хорошо аппроксимируется формулой (сравн. с (6.I) для $\delta = \pi/2$)

$$\lambda_1(\mathcal{B}, \delta) = f_1(\delta)\left[1 - \frac{\mathcal{B}}{f_2(\delta)}\right]. \tag{6.4}$$

Здесь $f_1(\delta) = \lambda_1(0, \delta)$ – значение λ_1 в условиях чистой невесомости (рис. 5), а $f_2(\delta) = \mathcal{B}_{кр} < 0$ – значение критического числа Бонда, отвечающее границе области устойчивости (см. рис.2).

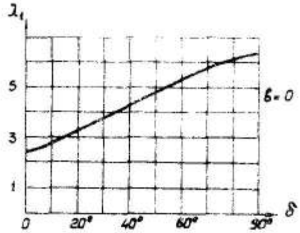

Рис. 5.

Если сосуд имеет осесимметричную форму, а сила тяжести направлена вдоль оси симметрии, то задачу (6.2) можно привести к системе интегральных уравнений относительно двух функций, определенных на кривой, образующей при вращении равновесную поверхность Γ. Значение гармонической в области Ω функции $\Phi(\bar{x})$, удовлетворяющей на твердой стенке S условию Неймана $\frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_S = 0$, можно представить в интегральной форме через значения двух функций $v = \frac{\partial \Phi}{\partial n}\Big|_\Gamma$ и $Av = \Phi|_\Gamma$, использовав в качестве ядра интегрального представления функцию Грина задачи Неймана для более широкой области (например, для всего сосуда). Вычисляя затем $Av = \Phi|_\Gamma$, получим

$$Av = G_1 Av + G_2 v, \tag{6.5}$$

где G_1 и G_2 – интегральные операторы. Уравнение (6.2) можно записать в эквивалентной форме

$$v = \lambda B^{-1} Av, \tag{6.6}$$

где B^{-1} - интегральный оператор. Уравнения (6.5) и (6.6) составляют требуемую систему из двух интегральных уравнений относительно функций v и Av.

Для очень важного класса осесимметричных равновесных поверхностей Γ в осесимметричном сосуде можно вычислить оператор B^{-1}, используя ЭВМ. В этом случае задачу (2.4) об определении частот колебаний можно привести также к задаче на минимум некоторого квадратичного функционала. Переписывая уравнение (2.4) в эквивалентной форме

$$A^{1/2} B^{-1} A^{1/2} v = \frac{1}{\omega^2} v,$$

получим, в силу [18],

$$\omega_1^2 = \min \frac{\| v\|^2}{\|B^{-1/2} A^{1/2} v\|^2} = \min \frac{\|A^{1/2} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\|^2}{\|B^{-1/2} A^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Phi}{\partial n}\|^2} =$$

$$= \min \frac{(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial n})}{(B^{-1}\Phi, \Phi)} = \min \frac{\int_\Omega (\nabla \Phi)^2 d\Omega}{(B^{-1}\Phi, \Phi)}.$$

Л.А.Темкин в [33] получил зависимость частот и форм колебаний идеальной жидкости в сферическом сосуде для случая горизонтальной равновесной поверхности при любых глубинах заполнения, причем при решении системы интегральных уравнений (6.5) - (6.6) он использовал метод коллокаций, а интегралы заменял квадратурными суммами. Вычисления показали, что $\lambda_{min} = \lambda_{11}$ практически не зависит от чисел Бонда (как и для малых глубин заполнения), а остальные частоты существенно отличаются от случая, когда поверхностные силы не учитываются. По-видимому, процедуру вычисления частот колебаний идеальной жидкости в условиях невесомости в осесимметричном случае можно довести до стандартных программ на ЭВМ.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ko Tomada, Yosio Shibaoka, On the Pendent Drop, J.Phys.Soc., Japan, 16, N 6, 1961.

2. В.В.Шулейкин, Форма поверхности жидкости, теряющей весомость, ДАН СССР, 147, № I, 1962.

3. В.В.Шулейкин, Еще о поведении жидкости, теряющей весомость, ДАН СССР, 147, № 5, 1962.

4. М.А.Беляева, А.Д.Мышкис, А.Д.Тюпцов, Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости. Изд.АН СССР, Механика и машиностроение, №5, 1964.

5. Л.А.Слобожанин, Гидростатика в слабых силовых полях. Равновесные формы поверхности вращающейся жидкости в условиях невесомости, Изв.АН СССР, МЖГ, № 5, 1966.

6. Л.А.Слобожанин, Гидростатика в слабых силовых полях. О кольцеобразных фигурах равновесия вращающейся жидкости и об их устойчивости. Изв.АН СССР, МЖГ, № 4, 1968.

7. М.А.Беляева, Л.А.Слобожанин, А.Д.Тюпцов, Гидростатика в слабых силовых полях. Сб. "Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости". Изд.АН СССР, 1968.

8. В.М.Петров, Ф.Л.Черноусько, Об определении формы равновесия жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. Изв.АН СССР, МЖГ, № 5, 1966.

9. А.Д.Тюпцов, Равновесные формы поверхности жидкости в условиях, близких к невесомости, их устойчивость и ветвление. Канд.диссертация, Харьков, 1968.

10. Н.Н.Моисеев, В.В.Румянцев, Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, Изд."Наука", М, 1965.

11. А.Д.Мышкис, О понятии запаса устойчивости в задачах механики сплошной среды. Сб."Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости", Изд. ВЦ АН СССР, 1968.

12. А.Д.Тюпцов, Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. Изв.АН СССР, МЖГ, № 2, 1966.

I3. П.Конкус, Капиллярная устойчивость свободной поверхности жидкости в перевернутом канале при кривизне, меняющей знак. Ракетная техника и космонавтика, № I2, I964.

I4. Н.Н.Моисеев, Ф.Л.Черноусько, Задачи колебаний жидкости, подверженной силам поверхностного натяжения, ЖВМ и МФ, т.5, № 6, I965.

I5. Н.Д.Копачевский, Гидродинамика в слабых силовых полях. Малые колебания идеальной жидкости, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 2, I966.

I6. Н.Д.Копачевский, О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости, В кн. "Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости", ВЦ АН СССР, М, I968.

I7. С.Г.Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, " Наука", М, I967.

I8. С.Г.Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, М, I952.

I9. Н.Д.Копачевский, О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил, ЖВМ и МФ, т.7, № I, I967.

20. О.А.Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М, Физматгиз, I96I.

2I. Г.Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, I947.

22. S.Chandrasekhar, *The Oscillations of a Viscous Liquid Globe*. Proc.London Math.Soc., 9, N 33, 1959.

23. С.Г.Крейн, О колебаниях вязкой жидкости в сосуде, ДАН СССР, I59, № 2, I964.

24. Н.К.Аскеров, С.Г.Крейн, Г.И.Лаптев, Об одном классе несамосопряженных задач, ДАН СССР, I55, № 3, I964.

25. Н.К.Аскеров, С.Г.Крейн, Г.И.Лаптев,Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения, Функциональный анализ и его приложения, т.2,в.2, I968.

26. W.H.Reid,The Oscillations of a viscous Liquid Globe with a Core.Proc.London Math.Soc.,9,N 35,1959.

27. А.Г.Шмидт,Гравитационные и капиллярные волны на поверхности шарового слоя вязкой гравитирующей жидкости, ЖВМ и МФ, I964, т.4, № I.

28. Н.Д.Копачевский, А.Д.Мышкис, О свободных колебаниях жидкого самогравитирующего шара с учетом вязких и капиллярных сил, ЖВМ и МФ,I968,т.8, № 6.

29. Н.Д.Копачевский, О влиянии капиллярных сил на частоты колебаний идеальной жидкости в малозаполненном сферическом сосуде, ЖВМ и МФ, т.9, № 6, I969.

30. Н.Н.Моисеев,Асимптотические методы типа узких полос, в сб. "Некоторые проблемы математики и механики", СО АН СССР, I96I.

3I. B.Budiansky,Sloshing of Liquids in Circular Canal and Spherical Tanks,J.Aero/Space Sci.,27,N 3,1960.

32. Н.Д.Копачевский, Н.Н.Морозовская,Определение первой частоты колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде в слабом гравитационном поле, в кн. "Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости", ВЦ АН СССР,М, I968.

33. Л.А.Темкин, О нахождении собственных частот и форм малых колебаний идеальной жидкости в сферическом сосуде в слабом силовом поле, Изв.АН СССР,Механ.жидкости и газа, I969, №I.

Т Р У Д Ы
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

О РОЛИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ШАРОВОМ СЛОЕ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В.Г.Бабский, И.Л.Скловская

С появлением и развитием космической техники многие классические задачи гидродинамики приобрели новый смысл и новое значение. Это относится и к задаче о возникновении конвекции в шаровом слое самогравитирующей жидкости, которой посвящена отдельная глава в монографии Чандрасекхара [I] . Возникнув в гео- и астрофизике, эта задача может найти применение при решении некоторых проблем новой техники. Действительно, как следует из результатов Чандрасекхара и других авторов [I] , полученных при определении "границы устойчивости", в сферическом сосуде диаметром в несколько метров, заполненном, полностью или частично, жидкостью с радиальным градиентом температуры и находящемся в условиях невесомости, может возникнуть свободная конвекция под действием сил самогравитации.

В данной работе проведен более точный, чем в [I] , учет свободной поверхности жидкости и показано, что для тонких слоев жидкости эта поправка может существенно изменить границу устойчивости. Подробно исследована соответствующая задача на собственные значения.

I. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет объем Ω между двумя концентрическими сферами радиуса R_1 и R_2 , первая сфера представляет собой свободную поверхность жидкости, а вторая - твердую стенку $(R_1 < R_2)$. На жидкость действует сферически симметричное радиальное гравитационное поле с напряженностью

$$g(r)=\frac{4}{3}\pi\rho G\left(1-\frac{R_1^3}{r^3}\right) \qquad (G \text{ -гравитационная постоянная}) \qquad (I.I)$$

В жидкости имеется радиальный градиент температуры ∇T_0 , причем $T_0(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\chi\Delta T_0=0. \qquad (I.2)$$

и граничным условиям,

$$T_0(R_2)=C_1, \quad \frac{\partial T_0}{\partial n}+\alpha T_0\Big|_S=C_2, \tag{I.3}$$

где $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности S, а α – некоторый постоянный коэффициент теплообмена: χ – коэффициент температуропроводности.

Скорость, давление и температура $(\bar{v}', p', T')$ жидкости в случае ее стационарной свободной конвекции в сосуде с твердой стенкой Σ и свободной поверхностью S удовлетворяют уравнениям в Ω

$$\begin{gathered} \nu\Delta\bar{v}'=(\bar{v}'\nabla)v'+\frac{1}{\rho}\nabla p'+\beta g(r)\bar{r}T', \; div\,\bar{v}'=0, \\ \chi\Delta T'=\bar{v}'\nabla T' \end{gathered} \tag{I.4}$$

и граничным условиям

$$\begin{gathered} \bar{v}'\big|_\Sigma=0, \; T'\big|_\Sigma=C_1, \; \left(\frac{\partial T'}{\partial n}+\alpha T\right)_S=C_2, \\ (p'-P_0)n_i=\mu(v'_{i,k}+v'_{k,i})n^k-\sigma(k_1+k_2)n_i, \\ \bar{v}'\cdot\bar{n}=0 \quad (\text{на } S). \end{gathered} \tag{I.5}$$

Здесь P_0 – постоянное внешнее давление, $\mu=\rho\nu$, σ – коэффициент поверхностного натяжения, k_1 и k_2 – главные кривизны поверхности S: ν – вязкость, ρ – плотность жидкости, β – коэффициент линейного расширения.

Система (I.4), (I.5) допускает решение

$$\bar{v}_0=0, \quad T_0=T_0(r), \; p_0=\rho\beta\int g(r)rT_0(r)\,dr, \tag{I.6}$$

когда Σ и S – концентрические сферы радиусов R_1 и R_2.

Предположим, что для (I.6) выполняется "принцип изменения устойчивости" [I,7] и поставим вопрос о существовании других, отличных от (I.6), стационарных решений граничной задачи (I.4), (I.5). Исследуем для этого соответствующую линеаризованную задачу.

Обозначим отклонение свободной поверхности от сферы в направлении внешней нормали $N(\vartheta,\varphi)$ ((ϑ,φ) – координаты на сфере). Имеет место разложение

$$T'(R_1+N)=T_0(R_1)+\theta(R_1)+\left[\frac{\partial T_0}{\partial n}\right]_{r=R_1}N+\ldots \tag{I.7}$$

Сделаем в (I.4), (I.5) подстановку

$$\bar{v}'=\bar{v}_0+\bar{u}, \quad p'=p_0+p, \; T'=T_0+\theta. \tag{I.8}$$

Линеаризация относительно $\bar{u}$, θ и N (с одновременным переходом к безразмерным переменным) приводит нас к системе уравнений

$$\Delta \bar{u} = \nabla(p - \Pi) - Ra\, g(r)\bar{r}\theta, \qquad \Delta\theta = -f(r) r u_r \tag{I.9}$$

с граничными условиями на твердой стенке $r = h = \frac{R_2}{R_1}$

$$\bar{u}\big|_{r=h} = 0\,, \qquad \theta\big|_{r=h} = 0. \tag{I.I0}$$

Здесь $\Pi(r, \vartheta, \varphi)$ – изменение гравитационного потенциала при малом отклонении свободной поверхности от сферической. Если

$$N(\vartheta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \delta_\ell \sum_{n=-\ell}^{\ell} \gamma_{\ell,n} T^{\ell}_{on}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right), \tag{I.II}$$

то $\Pi(r, \vartheta, \varphi)$ имеет вид [3]

$$\Pi(r,\vartheta,\varphi) = 3S \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^{-\ell-1}}{2\ell+1} \delta_\ell \sum_{n=-\ell}^{\ell} \gamma_{\ell,n} T_{on}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right), \tag{I.I2}$$

где $S = \frac{4\pi\rho G R_1^4}{3\chi\nu}$, $Ra = \frac{4\pi\rho\beta\gamma R_1^6 G}{3\chi\nu}$ – число Рэлея;

$$\gamma = |\nabla T_0|_{r=R_1}\,, \qquad f(r) = -\frac{1}{r}\frac{dT_0}{dr}\gamma^{-1}.$$

Граничные условия (I.5) на возмущенной свободной поверхности $r = 1 + N(\vartheta, \varphi)$ сносим на сферу $r = 1$ и линеаризуем; при этом используется разложение (I.7). В результате в сферической системе координат граничные условия (I.5) принимают вид

$$\frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{1}{r\cdot \sin\vartheta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} = 0,$$

$$p - 2\frac{\partial u_r}{\partial r} = Q(2N + \Delta_s N), \quad u_r = 0, \qquad (\text{при } r = 1)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r} - \alpha'(\theta - f(1)N) = 0. \tag{I.I3}$$

Здесь $Q = \frac{\sigma R_1}{\chi\mu}$, Δ_s – оператор Лапласа на сфере. Будем искать решение задачи (I.9), (I.I0), (I.I3) в виде рядов по обобщенным сферическим функциям $T^{\ell}_{mn}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right)$ (см. [4,5]) с амплитудными функциями $u_\ell(r)$, $\vartheta_\ell(r)$, $p_\ell(r)$, $\theta_\ell(r)$.
Тогда для параметров Ra, Q , S и соответствующих им собственных функций получим следующую спектральную задачу

$$D_\ell v_\ell = \frac{2}{z^2}u_\ell - \frac{1}{z}p_\ell \ , \therefore \ D_\ell = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d}{dz} - \frac{\ell(\ell+1)}{z^2},$$

$$D_\ell u_\ell = \frac{2}{z^2}u_\ell + \frac{2\ell(\ell+1)}{z^2}v_\ell + \frac{dp_\ell}{dz} - Ra\, g(z) z\theta_\ell,$$

$$\frac{du_\ell}{dz} + \frac{2}{z}u_\ell + \frac{\ell(\ell+1)}{z}v_\ell = 0,$$

$$u_\ell(1) = u_\ell(h) = v_\ell(h) = 0, \quad \left(\frac{dv_\ell}{dz} - v_\ell\right)\Big|_{z=1} = 0, \qquad (I.I4)$$

$$\left(p_\ell - 2\frac{du_\ell}{dz} + (\ell+2)(\ell-1)\,Q\delta_\ell\right)\Big|_{z=1} = 0,$$

$$\frac{d\theta_\ell}{dz} - \alpha\left(\theta_\ell - f(1)\delta_\ell\right)\big|_{z=1} = 0, \quad \theta_\ell(h) = 0.$$

Исключая из этой системы p_ℓ и v_ℓ, приходим к граничной задаче для $\omega_\ell = zu_\ell$ и θ_ℓ

$$D_\ell^2\omega_\ell = \lambda_\ell g(z)\theta_\ell \ , \quad D_\ell\theta_\ell = -f(z)\omega_\ell,$$

$$\omega_\ell(1) = \omega_\ell''(1) = \omega_\ell(h) = \omega_\ell'(h) = 0, \qquad (I.I5)$$

$$\theta_\ell'(1) - \alpha\theta_\ell(1) = -\alpha\delta_\ell f(1),$$

$$\mathcal{L}\omega_\ell \equiv 3\ell(\ell+1)\omega_\ell'(1) - \omega_\ell'''(1) = t_\ell\delta_\ell.$$

Здесь

$$\lambda_\ell = Ra\ \ell(\ell+1), \quad q_\ell = Q\ell(\ell+1), \quad s_\ell = S\ell(\ell+1),$$
$$t_\ell = (\ell+2)(\ell-1)q_\ell + \frac{3}{2\ell+1}s_\ell. \qquad (I.I6)$$

Функция Грина $g_1(z,s)$ оператора $-z^2 D_\ell$ с граничными условиями $u(h) = u'(1) - \alpha u(1) = 0$ симметрична и имеет вид:

$$g_1(z,s) = \frac{1}{2\ell+1}\,\frac{z^{-\ell-1}\varphi_1(z)\,\varphi_2(s)}{\varphi_1(h)}\,(1 < z < s < h), \qquad (I.I7)$$

где

$$\varphi_1(z) = z^{2\ell+1}(\ell+1) + \ell + \alpha(z^{2\ell+1} - 1), \qquad (I.I8)$$

$$\varphi_2(s) = s^{-\ell-1}\left(h^{2\ell+1} - s^{2\ell+1}\right). \qquad (I.I9)$$

Функция Грина оператора $g_2(x,s)$ с граничными условиями $u(1) = u''(1) = u(h) = u'(h) = 0$ также симметрична и имеет следующий вид:

$$g_2(x,s)=\frac{1}{\xi_2(h)W(\ell)}\left[\xi_1(x)\varphi_1(s)-\xi_2(x)\varphi_2(s)\right]. \qquad \text{(I.20)}$$
$$(1\leqslant x\leqslant s\leqslant h)$$

Здесь

$$\xi_1(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (\ell+2)(\ell+1) & \ell(\ell-1) & \ell(\ell-1) & (\ell+2)(\ell+1) \\ x^{\ell+2} & x^{\ell} & x^{-\ell+1} & x^{-\ell-1} \\ h^{\ell+2} & h^{\ell} & h^{-\ell+1} & h^{-\ell-1} \end{vmatrix},\ \xi_2(x)=\frac{\partial\xi_1}{\partial h}.$$

$$\varphi_2(s)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \ell+2 & \ell & -\ell+1 & -\ell-1 \\ (\ell+2)(\ell+1) & \ell(\ell-1) & \ell(\ell-1) & (\ell+2)(\ell+1) \\ \left(\frac{s}{h}\right)^{-\ell-1} & \left(\frac{s}{h}\right)^{-\ell+1} & \left(\frac{s}{h}\right)^{\ell} & \left(\frac{s}{h}\right)^{\ell+2} \end{vmatrix} h,\ \varphi_1(s)=\frac{\partial\varphi_2}{\partial h}. \qquad \text{(I.22)}$$

$$W(\ell)=4(2\ell-1)(2\ell+1)^2(2\ell+3). \qquad \text{(I.23)}$$

Задача (I.I5) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$\Theta_\ell(z)=\int_1^h g_1(z,s)f(s)\omega_\ell(s)s^2ds+\alpha f(1)\delta_\ell\zeta_g(z), \qquad \text{(I.24)}$$

$$\omega_\ell(z)=\lambda_\ell\int_1^h g_2(z,s)g(s)\Theta_\ell(s)s^2ds, \qquad \text{(I.25)}$$

где $\zeta_g(z)$ служит решением задачи

$$D_\ell\zeta_g=0,\qquad \zeta_g'(1)-\alpha\zeta_g(1)=-1,\ \zeta_g(h)=0 \qquad \text{(I.26)}$$

и имеет вид

$$\zeta_g(z)=\frac{\zeta_{g_2}(z)}{\zeta_{g_1}(h)}. \qquad \text{(I.27)}$$

Заметим, что δ_ℓ в (I.24), (I.25) можно исключить с помощью последнего граничного условия в (I.I5). Применим оператор $\mathcal{L}$ к уравнению (I.25)

$$t_\ell \vartheta_\ell = \lambda_\ell \int_1^h \mathcal{L} g_2(r,s) g(s) \theta_\ell(s) s^2 ds. \qquad (I.28)$$

Подставляя (I.25) и (I.28) в (I.24), получаем одно интегральное уравнение относительно θ_ℓ

$$\theta_\ell - \lambda_\ell \int_1^h g_t(r,s) g(s) \theta_\ell(s) s^2 ds, \qquad (I.29)$$

где

$$g_t(r,s) = g(r,s) + \alpha t_\ell^{-1} \mathcal{T}_\ell(r) \mathcal{L} g_2(r,s) f(1), \qquad (I.30)$$

$$g(r,s) = \int_1^h g_1(r,s) g_2(x,s) f(s) s^2 ds. \qquad (I.31)$$

2. Исследуем интегральное уравнение (I.29). Ядра $g_1(r,s)$ и $g_2(r,s)$ положительны при $1 < r, s < h$

$$g_1(r,s) > 0, \quad g_2(r,s) > 0; \qquad (2.I)$$

что для ядра $g_1(r,s)$ очевидно из (I.I7)-(I.I9), а для ядра $g_2(r,s)$ следует из его осцилляционности [6] . Осцилляционность ядра $g_2(r,s)$ нетрудно доказать, если воспользоваться следующим представлением для оператора $r^2 D_\ell^2$

$$r^2 D_\ell^2 u = r^{-\ell} \frac{d}{dr} r^{2\ell+2} \frac{d}{dr} r^{-2\ell} \frac{d}{dr} r^{2\ell+2} \frac{d}{dr} r^{-\ell} u \qquad (2.2)$$

и применить уточненную теорему Ролля ([6] , стр. I76-I79). Непосредственно проверяется также условие

$$\left. \frac{\partial g_1(r,s)}{\partial r} \right|_{\substack{r=1 \\ r=h}} \neq 0. \qquad (2.3)$$

Определим интегральные операторы g_1, g_2 формулами

$$g_k \Psi = \int_1^h g_k(x,y) \Psi(y) y^2 dy \quad (k=1,2). \qquad (2.4)$$

Тогда (I.29) принимает вид

$$\theta_\ell - \lambda_\ell g_t \theta_\ell = \lambda_\ell (A + \alpha t_\ell^{-1} f(1) H) \theta_\ell, \qquad (2.5)$$

где

$$A = g_1 f g_2 g, \quad H\Psi = \mathcal{T}_\ell(r) \int_1^h \mathcal{L} g_2(r,s) g(s) \Psi(s) s^2 ds, \qquad (2.6)$$

а f и g – операторы умножения на функции $f(r)$, $g(r)$.

Пусть $u_0(z), v_0(z)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие условиям:

$$u_0(z)>0 \quad (1\leqslant z<h),\quad u_0(h)=0,\ u_0'(h)\neq 0, \tag{2.7}$$

$$v_0(z)>0 \quad (1<z<h),\ v_0(1)=v_0(h)=0,\ v_0'(1)\neq 0,\ v_0'(h)\neq 0. \tag{2.8}$$

Обозначим K конус непрерывных неотрицательных функций. Выделим в $C[1,h]$ подпространство функций с конечной u_0 -нормой E_{u_0} (здесь и далее терминология из [7]); по определению

$$u\in E_{u_0}: -\alpha_1 u_0\leqslant u\leqslant \alpha_2 u_0;\ \alpha_1,\alpha_2>0,\ \|u\|_{u_0}=\max\{\inf\alpha_1,\inf\alpha_2\}. \tag{2.9}$$

Введем вспомогательный конус $K_{u_0}=K\cap E_{u_0}$. Конус K нормален и телесен в C , а конус K_{u_0} нормален и телесен в E_{u_0}. Аналогично вводится более узкий конус K_{v_0}.

С помощью (2.I), (2.3) нетрудно доказать следующие утверждения:

А. Оператор G_2 положителен относительно конуса K.

Б. Оператор G_1 сильно положителен относительно конуса K_{u_0}, т.е. для каждого ненулевого $u\in K_{u_0}$ элемент $G_1 u$ является внутренним для конуса K_{u_0} (при $\alpha<\infty$). В случае $\alpha=\infty$ оператор G_1 сильно положителен относительно конуса K_{v_0}.

Применим оператор $\mathcal{L}$ из (I.I5) к функции Грина $G_2(z,s)$ (I.20):

$$\mathcal{L}G_2(z,s)=\frac{\Phi(s)}{\xi_2(h)W(\ell)},\ \Phi(s)=\mathcal{L}\xi_1(z)\varphi_1(s)-\mathcal{L}\xi_2(z)\varphi_2(s) \tag{2.I0}$$

Используя (I.2I), (I.22), можно привести $\Phi(s)$ к следующему виду:

$$\begin{aligned}\Phi(s)&=z^{-\ell+1}\,\Phi_1(z)=\\&=z^{-\ell+1}\left[-C_1(h)z^{2\ell+3}+C_2(h)z^{2\ell+1}-C_3(h)z^2+C_4(h)\right],\end{aligned} \tag{2.II}$$

где

$$z=\frac{s}{h},\quad C_i(h)>0 \qquad (i=1,2,3,4).$$

Полином $\Phi_1(z)$ имеет нуль второй кратности при $z=1$ $(s=h)$ (см. (I.22)), причем простые выкладки показывают, что

$$\Phi_1''(1)<0,\quad \Phi_1(h^{-1})<0. \tag{2.I2}$$

Поскольку $\Phi_1(z)$, согласно правилу Декарта, имеет три положительных корня, то из неравенств (2.I2) получаем

$$\Phi_1(z) < 0 \qquad (h^{-1} \leqslant z < 1). \tag{2.I3}$$

С помощью правила Декарта легко показать, что $\xi_2(h) < 0$, откуда, учитывая (I.23) и (2.I3), получаем, что в (2.I0)

$$\alpha g_2(z,s) > 0 \qquad (1 \leqslant s \leqslant h). \tag{2.I4}$$

Из (I.27),(I.I8),(I.I9) следует, что $\zeta_1(z) > 0 \quad (1 < z < h)$. Таким образом, оператор H преобразует весь конус K в один элемент $\zeta_1(z) \in K$, причем легко видеть, что $\zeta_1(z) \in K_{u_0}$ и, более того, $\zeta_1(z)$ – внутренний элемент конуса K_{u_0}. Поэтому имеет место утверждение:

В. Оператор H сильно положителен относительно конуса K_{u_0} при любом $\alpha > 0$ и t_ℓ.

Потребуем теперь, чтобы исходный градиент температуры был неположительным

$$\frac{dT_0}{dz} \leqslant 0 \qquad (1 \leqslant z < h) \qquad f(z) \geqslant 0,\ f(1) = 1. \tag{2.I5}$$

Тогда из свойств А, Б, В следует (см. [7]):

ТЕОРЕМА. ОПЕРАТОР g_t ПРИ ЛЮБЫХ $\alpha \geqslant 0, S, Q, \ell = 1, 2, \ldots$ ИМЕЕТ ПРОСТОЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЕ НАИМЕНЬШЕЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ $\lambda_\ell^{(1)}$, КОТОРОМУ СООТВЕТСТВУЕТ СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ $\theta_\ell^{(1)} \in K_{u_0}$.

Это характеристическое значение может быть найдено итерационным методом. Пусть $u(z)$ – произвольный внутренний элемент конуса K_{u_0}. Тогда при любом n имеет место двусторонняя оценка

$$\alpha_n = \min_{1<z<h} \frac{g_t^n u}{g_t^{n-1} u} \leqslant (\lambda_\ell^{(1)})^{-1} \leqslant \max \frac{g_t^n u}{g_t^{n-1} u} = \beta_n, \tag{2.I6}$$

причем $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = (\lambda_\ell^{(1)})^{-1}$. Сходимость этого метода доказана в [6] для матриц с положительными элементами; там же изложена идея доказательства для любых сильно положительных операторов.

3. Операторы A и αH монотонно зависят от параметра α, причем A монотонно убывает, а αH монотонно возрастает с ростом α. Действительно, простые выкладки показывают, что:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} g_1(z,s) < 0, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\alpha \zeta_g(z)\right] > 0. \qquad (3.1)$$

Таким образом, "вклад" оператора αH максимален при $\alpha \to \infty$, т.е. при первом краевом условии для температуры на свободной поверхности.

Рассмотрим два предельных случая: $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$. При $\alpha \to 0$ (второе краевое условие для температуры на свободной поверхности) коэффициент перед оператором H обращается в нуль; это означает, что при $\alpha = 0$ силы поверхностного натяжения не влияют на границу устойчивости, определяемую из линеаризованной задачи. Уравнение (2.5) упрощается:

$$\theta_\ell = \lambda_\ell A \theta_\ell . \qquad (3.2)$$

Характеристическое значение оператора A $\lambda_\ell^{(1)}$ является функцией параметров h и ℓ. Приведем без доказательства некоторые свойства функции $\lambda^{(1)}(h,\ell)$, найденные путем подробного исследования функций Грина $g_1(z,s)$ и $g_2(z,s)$.

I. $\lambda^{(1)}(h,\ell)$ – монотонно убывающая функция h при любом $\ell = 1, 2, \dots$.

II. $\lambda^{(1)}(h,\ell)$ – монотонно возрастающая функция ℓ при $h \to \infty$.

III. $\lambda^{(1)}(h,\ell)$ имеет следующую асимптотику при больших ℓ для каждого фиксированного h

$$\lambda^{(1)}(h,\ell) = \Lambda(h)\ell^6 + O(\ell^6). \qquad (3.3)$$

Оператор A аналитически зависит от параметра h, поэтому и $\lambda^{(1)}(h,\ell)$ – аналитическая функция h $(1 < h < \infty)$. Отсюда следует:

IV. Точки пересечения линий $\lambda^{(1)}(h,\ell)$ с различными ℓ ($\ell = 1, 2, 3, \dots$) образуют счетное множество.

Заметим, что свойства I–IV первого характеристического значения оператора A сохраняются при любом $\alpha \leqslant \infty$.

Пусть $h = 1 + \varepsilon$. Разложение оператора A в ряд по степеням ε имеет вид:

$$A = \varepsilon^7 A_0 + O(\varepsilon^8), \qquad (3.4)$$

где

$$A_0\theta = \int_0^1 \left[\int_0^1 g_{10}(z,s) g_{20}(x,s)\,ds\right]\theta(x)\,x\,dx,$$

$$g_{10}(z,s) = 1-s, \quad z \leqslant s;$$

$$g_{20}(x,s) = \frac{3}{4}\left[(x-x^3)(1-s)^2 - \frac{1}{3}(3x-x^3)(1-s)^3\right], \quad x \leqslant s.$$

7. $\lambda^{(1)}(h,\ell)$ имеет следующую асимптотику при $h \to 1$

$$\lambda^{(1)}(h,\ell) = \lambda_0^{(1)} \varepsilon^{-7} + O(\varepsilon^{-6}), \tag{3.5}$$

где $\lambda_0^{(1)}$ – первое характеристическое значение оператора A_0.

Оператор A_0 также сильно положителен относительно конуса K_{L_0}, и $\lambda_0^{(1)}$ может быть найдено интерационным методом (2.16). Реализация этого метода на ЭЦВМ М-20 с начальным приближением $\theta_0(z) = 1-z$ дает $\lambda_0^{(1)} = 613,6$ с точностью до четвертого знака.

Пусть теперь $\alpha = \infty$ (первое краевое условие для температуры).
Будем считать параметр t_ℓ достаточно большим (заметим, что в физически реальных случаях параметры Q и S действительно велики; например, для воды при R_1 =100см, $Q \approx 10^8$, $S \approx 10^4$). Тогда к уравнению (2.5) можно применить теорию возмущений [8]. Операторы $\widetilde{A} = A|_{\alpha=\infty}$ и $\widetilde{H} = \alpha H|_{\alpha=\infty}$ будем рассматривать в пространстве L_2 с весом z^2 и со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\mathcal{L}_2} = \int_1^h \varphi(z)\psi(z) z^2 dz. \tag{3.6}$$

Из теории возмущений вытекает следующее неравенство для первого характеристического значения оператора g_ℓ:

$$\lambda_\ell^{(1)} \geqslant \frac{\widetilde{\lambda}_\ell^{(1)}}{1 + t_\ell^{-1} \widetilde{\lambda}_\ell^{(1)} \|\widetilde{H}\|_{L_2}}, \tag{3.7}$$

где $\widetilde{\lambda}_\ell^{(1)}$ –первое характеристическое значение оператора $\widetilde{A}$.
С другой стороны, в силу положительности операторов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{H}$

$$\lambda_\ell^{(1)} \leqslant \widetilde{\lambda}_\ell^{(1)}. \tag{3.8}$$

Вычисления показывают, что $\|\widetilde{H}\|_{L_2}$ – монотонно возрастающая функция h при каждом ℓ и

$$\|\widetilde{H}\|_{L_2} \leqslant 4(2\ell+3)(6\ell^2+4\ell-1). \tag{3.9}$$

Результаты вычисления $\widetilde{\lambda}_\ell^{(1)}$ методом Галеркина приведены в книге Чандрасекхара [1]. С помощью этих результатов нетрудно установить, что теория возмущений для достаточно больших t_ℓ применима лишь до значений h, близких к единице, когда $\tilde{\lambda}_\ell^{(1)}$ неограниченно возрастает. В этой области h требуется дополнительное исследование.

Разложим операторы $\tilde{A}$ и $\tilde{H}$ в ряды по степеням ε и оставим первые члены разложений

$$g_t\big|_{\alpha=\infty} = \varepsilon\tilde{A}_0 + O(\varepsilon^8) + t_\ell^{-1}\varepsilon^2\tilde{H}_0 + t_\ell^{-1}O(\varepsilon^3). \tag{3.10}$$

Здесь

$$\tilde{A}_0\theta = \int_0^1\Big[\int_0^1 \tilde{g}_{10}(z,s)\,g_{20}(x,s)\,ds\Big]\theta(x)\,x\,dx; \tag{3.11}$$

$$\tilde{g}_{10} = z(1-s), \quad z<s;$$

$$\tilde{H}_0\theta = (1-z)\frac{3}{2}\int_0^1 (1-s)^2(2-s)\,\theta(s)\,s\,ds. \tag{3.12}$$

Из разложения (3.10) видно, что как бы ни были велики параметры Q, S, при достаточно малых ε оператор $\tilde{H}$ определяет значение $\lambda_\ell^{(1)}$. Другими словами, для тонких слоев жидкости свободная поверхность является определяющим фактором границы устойчивости. В разложении (3.10) можно выделить две ветви:

$$g_t\big|_{\alpha=\infty} = \varepsilon^7\tilde{A}_0 + O(\varepsilon^8) \qquad (t_\ell^{-1} \ll \varepsilon^5) \tag{3.13}$$

и

$$g_t\big|_{\alpha=\infty} = t_\ell^{-1}\big[\varepsilon^2\tilde{H}_0 + O(\varepsilon^3)\big] \qquad (t_\ell^{-1} \gg \varepsilon^5), \tag{3.14}$$

откуда следует:

$$\lambda_{\ell,1}^{(1)} = \tilde{\lambda}_0^{(1)}\varepsilon^{-7} + O(\varepsilon^{-6}), \quad \lambda_{\ell,2}^{(1)} = t_\ell\big[8\varepsilon^{-2} + O(\varepsilon^{-1})\big]. \tag{3.15}$$

$\tilde{\lambda}_0^{(1)}$ – первое характеристическое значение оператора $\tilde{A}_0$ было найдено интерационным методом с начальным приближением $\theta_0 = z(1-z)$ и оказалось равным $\tilde{\lambda}_0^{(1)} = 1768$, на 4 итерации с точностью до четвертого знака.

Чтобы оценить поведение $\lambda_\ell^{(1)}$ в переходной области ε, будем искать $\lambda_\ell^{(1)}$ в виде $\lambda_\ell^{(1)} = \mu(\gamma)\varepsilon^{-7} + O(\varepsilon^{-6})$, $\gamma = t_\ell^{-1}\varepsilon^{-5}$, а μ находить итерационным методом из (3.10) при различных γ с начальным приближением $\theta_0 = 1 - z$. Результаты приведены в таблице I.

Таблица I.

γ	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1
μ	1768	1765	1741	1522	593,7	80	8

В работах Чандрасекхара и других авторов [I] фактически не допускалось отклонения свободной поверхности от сферической ($N=0$) и за границу устойчивости принимали $Ra_1(\ell,h)$ ($\lambda^{(1)}=Ra_1\,\ell(\ell+1)$). Как следует из сказанного выше, эти результаты применимы лишь до h , достаточно близких к I. Для тонких слоев жидкости граница устойчивости по сравнению с [I] существенно изменяется как количественно (таблица I) так и качественно. Действительно, без учета Q и S асимптотика $Ra_1(\ell,h)$ при $h\to 1$ имеет вид (см. (3.5))

$$Ra_1 = \frac{613,6}{\ell(\ell+1)}\varepsilon^{-7} + O(\varepsilon^{-6}), \qquad (3.16)$$

т.е. с уменьшением ε "опасной" становится все более высокая гармоника ($\ell\to\infty$). В нашем случае эта асимптотика принимает вид

$$Ra_1 = \left\{Q(\ell+2)(\ell-1)+\frac{3}{2\ell+1}S\right\}\left[8\varepsilon^{-2}+O(\varepsilon^{-1})\right], \qquad (3.17)$$

т.е. "опасными" являются наиболее длинноволновые возмущения ($\ell=1$). Заметим, что это хорошо согласуется с результатами работы [9] для бесконечного плоского слоя жидкости.

Остановимся кратко на случае $0<\alpha<\infty$. Здесь разложение типа (3.10) имеет следующий вид

$$Q_t = \varepsilon^7 A_0 + O(\varepsilon^8) + \alpha t_\ell^{-1}\left[\varepsilon^3 \tilde{H}_0 + O(\varepsilon^4)\right], \qquad (3.18)$$

где A_0 такой же, как в разложении (3.4). Проведем первую итерацию (2.16), выбрав в качестве начального приближения собственную функцию оператора $A_0\,\theta_0^{(1)}$. Тогда для первого характеристического значения $\lambda_\ell^{(1)}$ при малых ε будет иметь место двусторонняя оценка

$$\frac{613{,}6\cdot\varepsilon^{-7}+O(\varepsilon^{-6})}{1+\alpha t_\ell^{-1}\cdot 613{,}6\cdot\max\Psi\cdot\varepsilon^{-6}}\leqslant\lambda_\ell^{(1)}\leqslant\frac{613{,}6\cdot\varepsilon^{-7}+O(\varepsilon^{-6})}{1+\alpha t_\ell^{-1}\cdot 613{,}6\cdot\min\Psi\cdot\varepsilon^{-6}}, \qquad (3.19)$$

$$\Psi(r)=\frac{(1\ r)\tilde{H}_0\Theta_0^{(1)}}{\Theta_0^{(1)}}$$

или, после вычислений, $\min\Psi = 0{,}094$, $\max\Psi = 0{,}167$.

Следует отметить, что в силу результатов работы [10] в случае тонких слоев жидкости преобладающей может стать термокапиллярная конвекция.

ЛИТЕРАТУРА

1. S.Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford, Clarendon Press, Ch V1, 1961.
2. А.С. Монин, А.М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч.I, "Наука", М., 1965.
3. Е.Е. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИЛ, 1952.
4. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, ФМ, М., 1958.
5. В.Г. Бабський, Про виникнення стаціонарноі конвекції у кульовому шарі самогравітуючоі рідини. В сборнике" Третя наукова конференція молодих математиків України", "Наукова думка", Київ, 1967, стр. 184-189.
6. Ф.Р. Гантмахер, М.Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, ГИТТЛ, М., 1950.
7. М.А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, ФМ, М. 1962.
8. Справочник "Функциональный анализ", "Наука", М. 1964, стр.108.
9. В.Х. Изаксон, В.И. Юдович, О возникновении конвекции в слое жидкости со свободной границей, Изв.АН СССР, МЖГ, №4 (1968).
10. В.Г. Бабский, И.Л. Скловская, Гидродинамика в слабых силовых полях. Возникновение стационарной термокапиллярной конвекции в шаровом слое жидкости в условиях невесомости, Изв. АН СССР, МЖГ, №3 (1969).

Т Р У Д Ы

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

1969 выпуск I

О КОЛЕБАНИЯХ КАПЛИ ЖИДКОСТИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ПЛОСКОСТИ, В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ

Н.Д.Копачевский, Л.А.Темкин, В.С.Темкина

Рассматривается классическая задача об определении частот и форм малых колебаний капли идеальной жидкости, лежащей на плоскости, в условиях полной невесомости. Единственным безразмерным параметром задачи является краевой угол. Линейная задача на собственные значения для случая произвольного краевого угла приводится к системе двух одномерных интегральных уравнений, которая затем решается численно на ЭЦВМ М-20. Отдельно исследуется случай малого краевого угла, а также случай, когда краевой угол равен прямому. Результаты расчетов представлены в виде таблиц, графиков типичных форм колебаний и асимптотических формул для частот.

I^0. Известно [I] , что в условиях полной невесомости равновесная свободная поверхность S жидкости является частью сферы (см. рис. I).

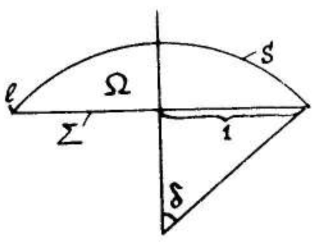

Рис. I.

Математически задача описывается следующей системой уравнений и граничных условий [I,2] : в объеме Ω ,заполненном жидкостью

$$\Delta\Phi = 0, \qquad (I)$$

на смоченной поверхности плоскости Σ

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \qquad (2)$$

на свободной поверхности S

$$\Delta_s \frac{\partial\Phi}{\partial n} + 2\sin^2\delta \frac{\partial\Phi}{\partial n} + \lambda\Phi + C = 0 \qquad (\lambda = \gamma\omega^2 R^3 \sigma^{-1}), \qquad (3)$$

на линии ℓ пересечения свободной поверхности S с плоскостью Σ

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial n\partial\nu} - \cos\delta \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0; \qquad (4)$$

это условие означает, что в процессе колебаний краевой угол δ (угол смачивания) остается постоянным.

Здесь Δ – трехмерный оператор Лапласа; Δ_S – оператор Лапласа – Бельтрами на сфере; $\Phi(X)$ $(X \in \Omega)$ – потенциал скоростей; n – внешняя нормаль к границе области Ω; ν – внешняя нормаль к контуру ℓ в плоскости, касательной к свободной поверхности S; C – произвольная постоянная; λ – собственное значение задачи; ω – частота колебаний; σ – коэффициент поверхностного натяжения; γ – плотность жидкости; R – радиус пятна контакта капли на Σ (на рис. I в безразмерных переменных $R = I$).

2^0. Приведем задачу на собственные значения (I – 4) к интегральной форме аналогично тому, как это делается в [3].

В интегральном представлении гармонической функции

$$p\Phi(X) = \iint\limits_{S+\Sigma} G(X,Y) \frac{\partial\Phi(Y)}{\partial n} dS_y - \iint\limits_{S+\Sigma} \Phi(Y) \frac{\partial G(X,Y)}{\partial n} dS_y, \qquad (5)$$

где

$$p = \begin{cases} 0, & \text{если } X \in \bar{\Omega}, \\ 1, & \text{если } X \in \Omega, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } X \in S + \Sigma - \ell, \\ \frac{\delta}{2\pi}, & \text{если } X \in \ell, \end{cases}$$

в качестве $G(X,Y)$ выберем функцию Грина задачи Неймана для полупространства:

$$G(X,Y) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*}\right), \qquad (6)$$

где r – расстояние между точками X и Y, r^* – расстояние между точками X^* и Y (X^* – точка, сопряженная с X относительно плоскости Σ). Легко проверить, что на плоскости Σ функция $G(X,Y)$, определяемая равенством (6), удовлетворяет условию

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n_y}\right|_{\Sigma} = 0.$$

Учитывая это свойство, а также условие (2), получим:

$$p\Phi(X) = \iint_S G(X,Y)\frac{\partial \Phi(Y)}{\partial n}dS_y - \iint_S \Phi(Y)\frac{\partial G(X,Y)}{\partial n}dS_y, \qquad (7)$$

т.е.в интегральном представлении (5) остаются только интегралы по свободной поверхности S .

Переходя в равенстве (7) к сферическим координатам на поверхности сферы Θ, φ $(0 \leqslant \Theta \leqslant \delta$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi)$ и представляя $\Phi(X)\big|_S$ и $\left.\frac{\partial \Phi(X)}{\partial n}\right|_S$ в виде рядов Фурье по углу φ , получим систему уравнений относительно коэффициентов $\Phi_m(\Theta_x)$ и $\Psi_m(\Theta_x)$ при соответствующих косинусах (относительно коэффициентов при синусах получается точно такая же система уравнений):

$$p\Phi_m(\Theta_x) = \int_0^{\delta} K_m(\Theta_x, \Theta_y)\Psi_m(\Theta_y)\,d\Theta_y - \int_0^{\delta} N_m(\Theta_x, \Theta_y)\Phi_m(\Theta_y)\,d\Theta_y, \qquad (8)$$

где:

$$K_m(\Theta_x, \Theta_y) = \frac{\sin\Theta_y}{\sin^2\delta}\int_0^{2\pi} G(\Theta_x, \Theta_y, \alpha)\cos m\alpha\, d\alpha,$$

$$N_m(\Theta_x, \Theta_y) = \frac{\sin\Theta_y}{\sin^2\delta}\int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial n}\cos m\alpha\, d\alpha,$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots; \quad \alpha = \varphi_y - \varphi_x .$$

Граничное условие (3) и условие на контуре (4) в сферических координатах, после отделения переменной φ , принимают вид:

$$\frac{\sin^2\delta}{\sin\theta}\left[\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\,\frac{d\Psi_m}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin\theta}\Psi_m\right]+2\sin^2\delta\,\Psi_m+\lambda\Phi_m=0, \quad (9)$$

$$\frac{d\Psi_m}{d\theta}-\mathrm{ctg}\,\delta\,\Psi_m=0 \quad \text{при} \quad \theta=\delta \quad (I0)$$

(произвольную постоянную C в уравнении (3) здесь полагаем равной нулю).

После замены переменной

$$x(\theta)=\frac{\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}}{\mathrm{tg}\,\frac{\delta}{2}}, \quad 0\leqslant x<1, \quad (II)$$

уравнение (9) преобразуется к виду

$$L_m\Psi_m=f_m,$$

где

$$L_m\Psi_m=-\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{d\Psi_m}{dx}\right)+\frac{m^2}{x}\Psi_m,$$

$$f_m\equiv\frac{(2\sin^2\delta\cdot\Psi_m+\lambda\Phi_m)\sin^2\theta}{x\sin^2\delta}.$$

Запишем это уравнение в интегральной форме

$$\Psi_m(x)=\int_0^1 g_m(x,\xi)\,f_m(\xi)\,d\xi. \quad (I2)$$

Здесь $g_m(x,\xi)$ – функция Грина оператора L_m с граничными условиями:

$$\frac{d\Psi_m}{dx}-\cos\delta\,\Psi_m=0 \quad (x=1);\quad |\Psi_m|<\infty \quad (x=0)$$

Условие при $x=1$ получено из (I) с учетом преобразования (II).

Функция Грина $g_m(x,\xi)$ из (I2), выражение для которой получается стандартным образом (см, например, [4]), имеет вид:

$$g_m(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2m}x^m\left(\frac{m+\cos\delta}{m-\cos\delta}\xi^m+\xi^{-m}\right), & x\leqslant\xi,\\ \frac{1}{2m}\xi^m\left(\frac{m+\cos\delta}{m-\cos\delta}x^m+x^{-m}\right), & x\geqslant\xi.\end{cases}$$

при $m=1,2,\ldots;$

$$g_0(x,\xi)=\begin{cases}-\frac{1}{\cos\delta}(1+\cos\delta\ln\xi), & x<\xi,\\ -\frac{1}{\cos\delta}(1+\cos\delta\ln x), & x>\xi.\end{cases}$$

Возвращаясь в уравнении(I2) к переменной θ_x , получим при каждом $m = 0, 1, 2, \ldots$ систему двух однородных интегральных уравнений (8) и (I2) относительно двух неизвестных функций $\Phi_m(\Theta_x)$ и $\Psi_m(\Theta_x)$.

Заметим, что в уравнении (8) ядра $K_m(\Theta_x, \Theta_y)$ и $N_m(Q_x, Q_y)$ имеют особенности логарифмического типа при $\theta_x = \theta_y$. Эти особенности выделим, как рекомендуется, например, в [5] . Тогда уравнение (8) приведется к виду

$$
\begin{aligned}
\rho \Phi_m(\Theta_x) = \int_0^\delta K_m(\Theta_x, \Theta_y)[\Psi_m(\Theta_y) - \Psi_m(\Theta_x)]\, d\Theta_y + \qquad (I3) \\
+ \Psi_m(\Theta_x) \int_0^\delta K_m(\Theta_x, \Theta_y) d\Theta_y - \int_0^\delta N_m(\Theta_x, \Theta_y)[\Phi_m(\Theta_y) - \\
- \Phi_m(\Theta_x)] d\Theta_y - \Phi_m(\Theta_x) \int_0^\delta N_m(\Theta_x, \Theta_y) d\Theta_y.
\end{aligned}
$$

Заменим далее интегралы в (I2-I3) квадратурными суммами и из полученной системы линейных алгебраических уравнений найдем собственные значения λ_{mp} и соответствующие им собственные функции Ψ_{mp} (p – номер корня характеристического уравнения при данном m).

Полученная система уравнений решалась численно на ЭЦВМ М-20. Были вычислены безразмерные частоты $\sqrt{\lambda_{mp}}$ и собственные функции Ψ_{mp} , пропорциональные отклонению по нормали свободной поверхности от равновесной при m = I,2,3 и p = I,2,3 для различных значений угла смачивания δ . Графики зависимости $\sqrt{\lambda_{mp}}$ от угла δ представлены на рис. 2. Типичные собственные функции Ψ_{mp} при $\delta = 60°$ представлены на рис. 3–5.

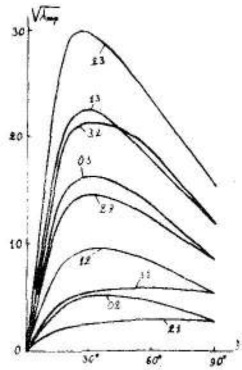

Рис. 2.

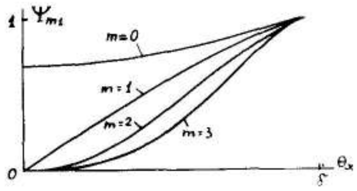

Рис. 3.

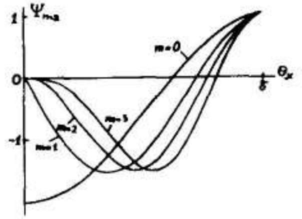

Рис. 4.

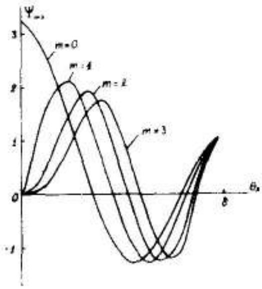

Рис. 5.

3^0. Если угол смачивания $\delta = \frac{\pi}{2}$, то задача (I-4) допускает полное разделение переменных. В сферических координатах ρ, Θ, φ собственные функции и собственные значения задачи (I-4) имеют вид

$$\Phi_{mp}(\rho,\Theta,\varphi) = \rho^{m+2p-2}\, P^m_{m+2p-2}(\cos\Theta)\exp[\pm i m\varphi]$$

$$\lambda_{mp} = (m+2p)(m+2p-2)(m+2p-3), \qquad (14)$$
$$(m=0,1,2,\dots;\ p=1,2,\dots).$$

Нижний индекс n у присоединенных полиномов Лежандра $P_n^m(x)$ при каждом $m = 0, 1, 2, \ldots$ выбран таким образом, чтобы выполнялось условие (2) на твердой стенке $\sum$ (при этом условие (4) для $\delta = \frac{\pi}{2}$ выполняется автоматически).

При $m = 0$, $p = 1$ из (14) получаем $\Phi_{01} = 1$, $\lambda_{01} = 0$, что соответствует тривиальному физическому решению задачи, а при $m = 1$, $p = 1$ получим решение

$$\lambda_{11} = 0, \quad \Phi_{11}(\rho, \Theta, \varphi) = \rho \sin\Theta \exp[\pm i\varphi],$$

соответствующее перемещению как целого всей массы жидкой капли по плоскости $\sum$ с постоянной скоростью. Остальные случаи отвечают собственно колебаниям капли с сохранением центра масс.

4^0. Для малых углов смачивания $\delta \ll 1$ можно получить решение задачи (1-4), применяя асимптотический метод типа узких полос [6], так как в этом случае высота капли будет значительно меньше ее поперечного размера. Следуя этому методу, сделаем замену переменных

$$\eta = \frac{\rho \sin\delta - 1}{\delta \sin\delta}, \quad x = \frac{\Theta}{\delta} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

В новых переменных свободная поверхность S имеет уравнение $\eta = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, а область Ω переходит в область Ω', показанную на рис. 6.

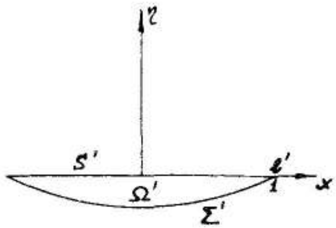

Рис. 6.

Решение задачи (1-4) будем искать в виде ряда по малому параметру $\varepsilon = \delta^2$ (именно эта величина входит в уравнения и граничные условия), т.е., после отделения переменной φ, в виде

$$\Phi_m(x,\eta;\delta) = \Phi_m^{(0)}(x,\eta) + \varepsilon\,\Phi_m^{(1)}(x,\eta) + O(\varepsilon^2),$$
$$\mu_m(\delta) = \frac{\lambda_m \delta^3}{\sin^2\delta} = \mu_m^{(0)} + \varepsilon\,\mu_m^{(1)} + O(\varepsilon^2). \qquad (15)$$

Уравнение (I) при любом m удается проинтегрировать. Его решение для любого приближения по ε выражается через значения неизвестных функций $\Phi_m\big|_s$ и $\Psi_m = \frac{\partial \Phi_m}{\partial n}\big|_s$, введенных в п.2, и предыдущих приближений. В частности, из нулевого приближения следует, что

$$\Phi_m^{(0)}(x,\eta) = u_m(x), \quad \mu_m^{(0)} = 0,$$

а первое приближение приводит к системе уравнений относительно $u_m(x)$ и $v_m(x)$

$$\frac{1}{2x}\left[x(x^2-1)u_m'\right]' + \frac{m^2}{2x^2}(1-x^2)u_m = v_m \quad \left({}' = \frac{d}{dx}\right), \qquad (16)$$
$$-\left[v_m'' + \frac{1}{x}v_m' - \frac{m^2}{x^2}v_m\right] = \mu_m^{(1)} u_m + c_m,$$
$$\int_0^1 v_0(x)\,x\,dx = 0$$

(последнее условие есть следствие условия сохранения объема при колебаниях) и граничных условий

$$|u_m(0)| < \infty, \quad |u_m(1)| < \infty, \quad |v_m(0)| < \infty; \qquad (17)$$
$$v_m'(1) - v_m(1) = 0.$$

Уравнения (16) вместе с граничными условиями (17) естественно рассматривать в виде системы операторных уравнений

$$A_m u_m = v_m, \quad B_m v_m = \mu_m^{(1)} u_m \qquad (18)$$

в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_0^1 u(x)\,v(x)\,x\,dx.$$

Оператор A_m определяется дифференциальным выражением, стоящим в левой части первого уравнения (16), на множестве функций из пространства Соболева (с весом x) $W_2^2[0,1]$, являющегося плотным в H множеством. Аналогично оператор B_m при $m=1,2,3,\dots$ задается дифференциальным выражением, стоящим в левой части второго уравнения (I6), на множестве функций из $W_2^2[0,1]$, удовлетворяющих последнему условию (I7).

При $m = 0$, в силу последнего условия (I6), задачу (I8) следует рассматривать в пространстве $H_0 = H \ominus 1$. Тогда, выбирая соответствующим образом постоянную C_m в (I6), получим выражение для B_0:

$$B_0 v = -\frac{1}{x}(xv')' + 2v'(1).$$

Этот оператор действует в H_0.

Операторы A_m и B_m при каждом $m = 2,3,\ldots$ являются самосопряженными и положительно определенными в H. При $m = 0$ операторы обладают этими свойствами в $H_0 = H \ominus 1$, а при $m = 1$ в пространстве $H_1 = H \ominus \{\beta x\}$, ортогональном к одномерному подпространству, натянутому на элемент $u(x) = x$.

Система собственных функций $f_{mp}(x)$ и собственных значений β_{mp} оператора A_m имеет вид:

$$f_{mp}(x) = \sum_{k=1}^{p} a_{mp}^{(k)} x^{m+2k-2} \quad (m = 0,1,2,\ldots;\ p = 1,2,\ldots), \qquad (I9)$$

$$\beta_{mp} = m + 2(p+m)(p-1), \quad a_{mp}^{(k+1)} = a_{mp}^{(k)} \frac{(k-p)(k+p+m+1)}{k(m+k)}, \quad a_{mp}^{(1)} = 1.$$

Систему уравнений (I8) после замены $A_m^{\frac{1}{2}} u_m = y_m$ можно привести к одному операторному уравнению

$$A_m^{\frac{1}{2}} B_m A_m^{\frac{1}{2}} y_m = \mu_m^{(1)} y_m \qquad (20)$$

с самосопряженным неограниченным положительно определенным при $m = 2,3,\ldots$ в H (при $m = 0$ в H_0, при $m = 1$ в H_1) оператором $C_m = A_m^{1/2} B_m A_m^{1/2}$, имеющим вполне непрерывный обратный C_m^{-1}. Поэтому задача (20) (при каждом $m = 0,1,2,\ldots$) имеет дискретный спектр, все собственные числа $\mu_{mp}^{(1)}$ $(p = 1,2,\ldots)$ положительны и сгущаются на бесконечности, а собственные функции ортогональны в H.

При $m = 0$, $p = 1$ задача (I6–I7) имеет, как и в случае $\delta = \frac{\pi}{2}$ (см.п.3), тривиальное решение

$$v_0(x) = 0, \quad u_0(x) = 1, \quad \mu_{01}^{(1)} = 0,$$

а при $m = 1$, $p = 1$ – решение

$$v_1(x) = x\,,\quad u_1(x) = x\,;\quad \mu_{11} = 0,$$

отвечающее перемещению всей массы жидкости как целого вдоль плоскости Σ с постоянной скоростью.

Решение уравнения (20), или эквивалентного ему уравнения

$$A_m u = \mu_m^{(1)} B_m^{-1} u\,, \tag{21}$$

можно найти приближенно по методу Ритца [7], выбрав в качестве полной системы координатных функций собственные функции (19) оператора A_m (при $m = 0,1$ $p = 2,3..$, а при $m = 2,3...$ $p = 1,2....$), ортонормированные в энергетической метрике этого оператора [8]. Оператор B_m^{-1} есть интегральный оператор вида (12) с ядром

$$G_0(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x^2 + \xi^2 + x^2\xi^2) - \ln x\,, & 0 \leqslant \xi \leqslant x\,; \\ \frac{1}{3}(x^2 + \xi^2 + x^2\xi^2) - \ln \xi\,, & x \leqslant \xi \leqslant 1\,; \end{cases}$$

$$G_1(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x\xi^3 + x^3\xi + x^{-1}\xi)\,, & 0 \leqslant \xi \leqslant x\,; \\ \frac{1}{2}(x\xi^3 + x^3\xi + x\xi^{-1})\,, & x \leqslant \xi \leqslant 1\,; \end{cases}$$

$$G_m(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2m}\xi^m\left(\frac{m+1}{m-1}x^m + x^{-m}\right), & 0 \leqslant \xi \leqslant x\,; \\ \frac{1}{2m}x^m\left(\frac{m+1}{m-1}\xi^m + \xi^{-m}\right), & x < \xi \leqslant 1. \end{cases}$$

Собственные числа задачи (21) находятся из приближенного характеристического уравнения

$$\det(\delta_{ik} - \mu\,\alpha_{mik})_{i,k=1}^{n} = 0, \tag{22}$$

где

$$\alpha_{mik} = \frac{(B_m^{-1} f_{mi}\,,\, f_{mk})}{\sqrt{\beta_{mi}\;\beta_{mk}}}\,,\qquad \delta_{ik}\quad \text{– символ Кронекера}$$

Таблица I

$m \backslash p$	I	2	3	4
0	51.535	633.54	2785.2	8123.6
I	0	201.04	1367.0	4818.I
2	10.650	480.24	2461.0	7560.I
3	39.823	922.41	3974.3	$> 10^4$
4	95.272	1560.6	5965.2	$> 10^4$

В таблице I приведены результаты расчетов на ЭЦВМ М-20 решений $\mu^{(1)}_{mp}$ уравнения (22), если число n координатных функций для приближенного решения

$$u^{(n)}_{mp}(x) = \sum_{k=1}^{n} C^{(n)}_{mpk} \frac{f_{mk}(x)}{\sqrt{\beta_{mk}}}$$

равно 7 (при этом уже наблюдалась практическая сходимость в пятой значащей цифре для $\mu^{(1)}_{mp}$ и коэффициентов $C^{(n)}_{mpk}$. Вычисления показали также, что при каждом m первая координатная функция хорошо приближала первую собственную функцию (2I), вторая, соответственно, вторую и т.д.

Таким образом, из(I5) следует, что частоты колебаний имеют асимптотическое поведение $(\mu^{(0)}_{mp} = 0, \quad \varepsilon = \vartheta^2)$

$$\lambda_{mp}(\vartheta) = \mu^{(1)}_{mp}\, \vartheta + O(\vartheta^3).$$

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.Н.Моисеев, В.В.Румянцев, Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., "Наука", 1965.

2. Н.Д.Копачевский, О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости, В кн. " Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости". М., ВЦ АН СССР, 1968.

3. Л.А.Темкин, О нахождении собственных частот и форм малых

колебаний идеальной жидкости в сферическом сосуде в слабом силовом поле. "Известия" АН СССР, МЖГ, № I, 1969.

4. В.И.Смирнов, Курс высшей математики, т. IУ, Физматгиз, 1958.

5. Л.В.Канторович, В.И.Крылов, Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.

6. Н.Н.Моисеев, Асимптотические методы типа узких полос. В сб. " Некоторые проблемы математики и механики", СО АН СССР, Новосибирск, 196I.

7. С.Г.Михлин, "Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.

8. С.Г.Михлин, Численная реализация вариационных методов . М, "Наука", 1966.

Т Р У Д Ы
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г.В.Щербина

В этой заметке рассматривается следующая модельная задача. Пусть на плоскости x, y находится слой идеальной несжимаемой жидкости. Предположим, что в точке $z=0$ имеется сток постоянной малой мощности α, и обозначим коэффициент поверхностного натяжения, ускорение силы тяжести и плотность соответственно σ, g, ρ. Течение будем считать потенциальным, установившимся и осесимметричным. Высоту слоя жидкости над точкой x, y положим равной $h \cdot f(z)$ $(z = h\sqrt{x^2+y^2})$, потенциал скорости $\alpha \cdot \varphi(z, z)$. Тогда $f(z)$ и $\varphi(z, z)$ удовлетворяют следующим уравнениям

$$a\frac{(\nabla\varphi)^2}{2} - \left(\frac{f''}{(\sqrt{1+f'^2})^3} + \frac{f'}{z\sqrt{1+f'^2}}\right) + b(f-1) = 0, \tag{I}$$

$$f'(0) = 0, \quad f(+\infty) = 1;$$

$$\begin{aligned}
&\Delta\varphi = 0 && (z>0,\ -f(z) < z < f(z));\\
&\varphi(z,z) \sim \frac{1}{2\pi z} && (z \to \infty,\ -f(z) < z < f(z));\\
&\varphi(z,z) \sim \frac{1}{2\pi\sqrt{z^2+z^2}} && (z^2+z^2 \to 0)\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 && (z=0,\ z = \pm f(z),\ z=0);
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$a = \frac{\rho\alpha^2}{h^3\sigma}; \quad b = \frac{\rho h^2 g}{\sigma};$$

Из уравнения (I) сразу следует, что $f(z) \leqslant 1$, так как в противном случае в точке максимума функции $f(z)$ мы получили бы

$$f'' = b(f-1) + a\frac{(\nabla\varphi)^2}{2} > 0,$$

что невозможно.

Так как $f'(0)=0$, $\nabla\varphi(0,f(0))=0$ из соображений симметрии, то $f''(0)=b(f-1)$. По доказанному $f(r)\leqslant 1$. Если $f(0)=1$, то $f(r)$ достигает в нуле максимума, если $f(0)<1$, то $f''(0)<0$ и опять $f(r)$ имеет в нуле максимум.

Сделаем замену $\varphi=\Phi+\Phi_0$,

$$\Phi_0=\frac{1}{2\pi(r^2+z^2)}+\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{i=-\infty\\ i\neq 0}}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-2i)^2}}-\frac{1}{2i}\right).$$

Будем искать $\Phi(r,z)$ в виде

$$\Phi(r,z)=\iint_S\frac{\Psi(t)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-f(t))^2}};\quad \left(t=\sqrt{\xi^2+\eta^2}\right),\quad (2')$$

где $\Psi(r)$ суммируема с весом r. Функции $\Psi(r)$, $f(r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Psi(r)-\frac{1}{2\pi}\iint_S\Psi(t)\frac{[f'_x(x-\xi)+f'_y(y-\eta)-(f(r)-f(t))]}{\gamma[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(f(r)-f(t))^2]^{3/2}}\,d\xi\,d\eta=\Psi_0(r),\quad (3)$$

$$a\frac{F^2(r)}{2}-\frac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}-\frac{f'}{r(1+f'^2)^{1/2}}+b(f-1)=0,$$

$$f'(0)=0,\quad f(+\infty)=1.$$

Здесь

$$\Psi_0(r)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{f'_r-(f(r)-2i)}{[r^2+(f(r)-2i)^2]^{3/2}},\quad \gamma=(1+f'^2_r)^{-\frac{1}{2}},\quad (4')$$

$$F(r)=\iint_S\frac{\frac{x}{r}(x-\xi)+\frac{y}{r}(y-\eta)+(f(r)-f(t))f'_r}{\gamma[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(f(r)-f(t))^2]^{3/2}}\Psi(t)\,d\xi\,d\eta,\quad (4'')$$

причем интеграл берется в смысле главных значений, S – поверхность, состоящая из двух кусков $z=f(r)$ и $z=-f(r)$.

Определим пространство $\mathfrak{M}$ следующим образом

$$\|m\|=\max_{r>0}\left\{(r^3+1)[|m''(r)|+|m'(r)|+|m(r)|]\right\},$$

рассмотрим в пространстве $\mathfrak{M}$ область $\mathcal{Y}$:
$\|m\|<1$ и положим $1-m=f$. Интегральный оператор в равенст-

ве (3) имеет вид:

$$K[m,\Psi]=\iint\limits_1 \frac{\Psi(t)k^1(x,\xi,y,\eta,m)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{5/4}}d\xi d\eta+\iint\limits_2 \frac{\Psi(t)k^2(x,\xi,y,\eta,m)d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(m(\tau)-m(t))^2]^{3/2}},$$

где первый интеграл берется по множеству $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\leqslant 1$, второй – по множеству $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\geqslant 1$; $k^1(x,\xi,y,\eta,m)\subset H_\mu$, при $\mu=\frac{1}{2}$, $k^2(x,\xi,y,\eta,m)=m'_\xi(x-\xi)+m'_\eta(y-\eta)-(m(\tau)-m(\rho))$ имеет производные по x и y, удовлетворяющие условию Липшица. Отметим, что постоянные в условиях Гельдера и Липшица на сегменте $[\tau,\tau+1]$ зависят лишь от $\|m\|$ и убывают как $\frac{C(\|m\|)}{\tau^2+1}$.

Определим пространство $\mathfrak{N}$:

$$\|\Psi\|=\max_{\tau>0}\left\{|\Psi(\tau)|+\sup_{\tau_1}\frac{|\Psi(\tau)-\Psi(\tau_1)|}{|\tau-\tau_1|^{1/2}}(1+\tau^2)+\int_{-\infty}^{+\infty}\tau|\Psi(\tau)|d\tau\right\}.$$

Пусть $H=\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N}$. Из сказанного выше следует, что $K[m,\Psi]$ является непрерывным оператором из H в $\mathfrak{N}$ [I].

Функция $\Psi_0(\tau)$ зависит от m и при каждом $m\in\mathfrak{M}$ удовлетворяет условию

$$\iint\limits_S \Psi_0(\tau)ds=0, \qquad (3'')$$

потому что $\Psi_0(\tau)=\left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\right|_S$

Пусть $\Psi(\tau)$ – решение уравнения

$$\Psi=K[m,\Psi]. \qquad (3''')$$

Так как свертка двух ограниченных функций, убывающих не медленнее $\frac{1}{\tau^q+1}$, убывает не медленнее $\frac{C(q)}{\tau^q+1}$ (если хотя бы одна из этих функций суммируема), то из формулы $(3')$ получим

$$|\Psi(\tau)|\leqslant\frac{C_2(\|m\|)}{\tau^2+1}, \quad \|\Psi\|<C_2(\|m\|),$$

и далее, из формулы $2'$

$$|\Phi(\tau,z)|\leqslant\frac{C_3(\|m\|)}{\tau+|z|+1}, \quad \left|\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right|\leqslant\frac{C_3(\|m\|)}{s^2+1}, \quad (s=\sqrt{\tau^2+z^2}).$$

Итак, уравнение $3''$ имеет лишь нулевое решение при любом $m\subset\mathcal{Y}\subset\mathfrak{M}$.

Рассмотрим теперь последовательность гладких областей $\mathcal{Y}_n$, образованных вращением вокруг оси $0z$ линии

$$z=\pm f(\tau) \qquad (n>\tau>0)$$

$$z=\pm\sqrt{f^2(n)(1+f'^2(n))-[\tau-n+f(n)f'(n)]^2}.$$

$$(n \leqslant z \leqslant n - f(n) f'(n) + f(n)\sqrt{1 + f'^2(n)}).$$

Продолжим непрерывно функцию Ψ_0 на ту часть поверхности $\mathcal{Y}_n$, на которой она не определена, так, чтобы для полученной функции $\tilde{\Psi}_{on}$ выполнялись условия:

$$\iint\limits_{S_n} \tilde{\Psi}_{on}\, dS_n = 0$$

на поверхности области $\mathcal{Y}_n$ и

$$|\tilde{\Psi}_{on}(z)| \leqslant \frac{|\int_n^\infty t\Psi(t)\,dt|}{\pi n f(n)}$$

там, где мы доопределяли $\Psi_0(z)$. Пусть $\tilde{\Psi}_n(z)$ – решение соответствующей задачи Неймана. Положим $\Psi_n(z) = \tilde{\Psi}_n(z)$ при $z < n$, $\Psi_n(z) = \frac{\tilde{\Psi}_n(n)n}{z}$ при $z > n$. Если $\|\Psi_{ni}(z)\| \to \infty$, то, как легко видеть, последовательность $\xi_{ni} = \Psi_{ni}/\|\Psi_{ni}\|$ компактна. Будем считать, что $\xi_{ni} \to \xi_0$. Тогда $\xi_0(z)$ удовлетворяет уравнению 3" и $\|\xi_0\| = 1$, что невозможно. Значит, $\Psi_{nj} \to \Psi$.

Итак, уравнение 3 при любом Ψ_0, удовлетворяющем условию 3', имеет решение $\Psi(z)$ и это решение единственно. Поставим каждому $m \subset \mathcal{Y} \subset \mathfrak{M}$ в соответствие $\Psi(z) \subset \mathfrak{N}$, являющееся решением уравнения(3). Тем самым определен оператор Q из $\mathcal{Y}$ в $\mathfrak{N}$. Легко видеть, что этот оператор непрерывен.

Положим $\|F\| = \sup\limits_z |F(z)(z^{3/2}+1)/z^{1/2}|$; $\mathfrak{M} := \{\|F\| < \infty\}$. Формула 4" дает непрерывное отображение $S : \mathfrak{N}$ в $\mathfrak{M}$, поэтому отображение SQ непрерывно.

Рассмотрим теперь решения краевой задачи

$$a\frac{F^2(z)}{2} + \frac{m'}{(\sqrt{1+m'^2})^3} + \frac{m'}{z\sqrt{1+m'^2}} - bm = 0, \tag{5}$$

$$m'(0) = 0, \quad m(+\infty) = 0.$$

Параллельно рассмотрим еще одну краевую задачу

$$a\frac{F^2(z)}{2} + \ell^3(m')m' + \frac{\ell(m')}{z}m' - bm = 0, \tag{5'}$$
$$m'(0) = 0, \quad m(+\infty) = 0,$$

где

$$\ell(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} & (|z|<1), \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & (|z|>1). \end{cases}$$

При любом $F \subset \mathfrak{A}$ существует единственное решение $m(\tau)$, причем если $|F_1| > |F_2|$, то $m_1 > m_2 > 0$, значит, если m^{C_4} – решение задачи (5′) при $F = \frac{C_4\sqrt{\tau}}{(1+\tau^2)^{5/4}}$, то при $C_4 = \sup\limits_{\|\psi\|\le 1} \|S(\psi)\|$ имеем

$$m^{C_4}(\tau) > m(\tau) > 0, \quad m^{C_4} \sim \frac{aC_4^2}{b\tau^2} \quad (\tau \to \infty).$$

Линеаризуем уравнение 5′ :

$$m'' + \frac{m'}{\tau} - bm = -\frac{aF^2}{\ell^3(m')} - \frac{m'^3}{\tau\ell^2(m')} + b\,\frac{m'^2\cdot m}{\tau\ell^3(m')} = \omega(\tau,m,m'). \quad (6)$$

Обращая левую часть уравнения (6), получим

$$m = J_0(\tau)\int_0^\tau \omega\cdot\tau\cdot I_0(\tau)\,d\tau + I_0(\tau)\int_\tau^\infty \tau\cdot\omega\cdot J_0(\tau)\,d\tau. \qquad (7)$$

Полагая a достаточно малым, $m_0(\tau) = 0$, определяя m_n через m_{n-1} из уравнения (7) обычным способом, получим, что $m_n \to m$ в метрике $\mathfrak{M}$.

Эта процедура задает непрерывный оперетор T из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}$. Оператор TSQ действует из $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$, причем, при достаточно малом a он сжимающий и переводит окрестность $\mathcal{Y}$ в себя. Но если $m \subset \mathcal{Y}$, уравнение 5′ совпадает с уравнением 5. Таким образом, мы показали, что при достаточно малых a поставленная задача имеет решение.

Положим $f(a,\tau) = 1 + a\cdot m_0(\tau) + a^2 m_1(\tau) + \dots$.
Функция $m_0(\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$a\frac{(F_0')^2}{2} + m_0'' + \frac{m_0'}{\tau} - bm = 0,$$

$$m_0'(0) = 0, \quad \dot m(+\infty) = 0,$$

где $F_0(\tau) = \Phi(\tau,1)$, а $\Phi(\tau,z)$ определяется из следующей задачи.

Между двумя параллельными плоскостями $z=1$ и $z=0$ находится слой идеальной несжимаемой жидкости. На плоскости имеется сток мощности I. Движение считается установившимся, потенциальным с потенциалом $\Phi(r, z)$. Задача была просчитана в случае кольцевого стока (существование решения соответствующей краевой задачи при малых σ доказывается совершенно аналогично) и для точечного стока.

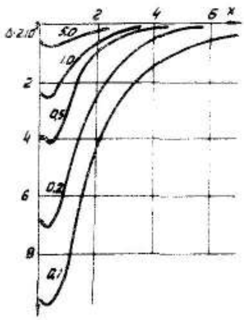

Рис. I.

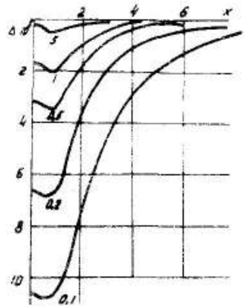

Рис. 2.

На рис. I и 2 приведены графики отклонения свободной поверхности $\Delta = 1 - f$ в том и другом случае. Мы видим, что максимальный прогиб в случае кольцевого стока примерно в два раза меньше, чем в случае точечного стока.

В заключение приношу благодарность Н.Н.Моисееву и В.Б.Рывкину за ценные советы и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения.

2. Г.В.Щербина. Краевая задача на полуоси для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Вестник Харьк. Гос. ун-та, т.33, I967.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

О ДВИЖЕНИИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ.

И.Д.Борисов

Рассматривается задача о движении газового пузыря в идеальной жидкости, заполняющей сферический сосуд. Предполагается, что движение возникает из состояния покоя под действием постоянного однородного поля массовых сил. Поверхность пузыря в начальный момент времени считается сферой, концентричной с поверхностью стенки сосуда.

Для описания движения жидкости принят метод Лагранжа, в котором состояние индивидуальных частиц жидкости определяется в зависимости от времени и параметров (переменных Лагранжа), характеризующих положение частиц в начальный момент времени. Решение задачи (потенциал скорости и перемещения частиц) предполагается аналитическим по времени t. Найдены несколько первых членов разложения решения в степенные ряды по t, определяющих начальную стадию движения. Для предельного случая бесконечной жидкости (радиус сосуда равен ∞) представлены графики форм поверхности пузыря в различные моменты времени.

I. Пусть сферический сосуд радиуса R_1 содержит идеальную несжимаемую жидкость, изолирующую от стенки сосуда газовый пузырь (рис. I). Будем считать, что в начальный момент времени, $t = 0$, жидкость покоится, пузырь имеет сферическую форму (R_2 – радиус пузыря), причем центр пузыря совпадает с центром сосуда. Поле массовых сил (эти силы могут быть силами тяжести и инерционными силами) считаем постоянным и однородным с напряженностью $\vec{\omega}$. Движением газа внутри пузыря и действием сил поверхностного натяжения на границе "жидкость – газ" будем пренебрегать. Задача заключается в определении движения поверхности пузыря.

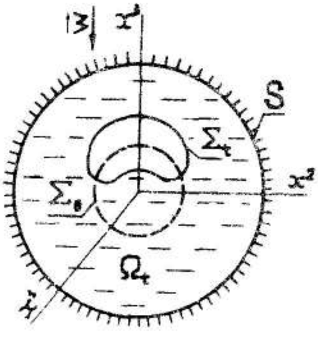

Рис. I.

Введем декартову систему координат $\{x^1, x^2, x^3\}$, жестко связанную с сосудом, поместив ее начало в центре сосуда и направив ось x^3 против направления вектора $\vec{\omega}$.

Пространственные переменные x^i ($i=1,2,3$,) и все вводимые ниже величины считаем безразмерными, приняв за характерные размеры R_2 – радиус пузыря – для длины, $R^{1/2}\ \omega^{-1/2}$ – для времени $(\omega = |\vec{\omega}|$.

Переменные Лагранжа обозначим через λ^i $(i=1,2,3)$. В качестве λ^i выберем значения сферических координат частиц жидкости в начальный момент времени $t = 0$:

$$x^1_{(0)} = \lambda^1 \sin\lambda^2 \cdot \cos\lambda^3, \quad x^2_{(0)} = \lambda^1 \cdot \sin\lambda^2 \cdot \sin\lambda^3, \quad x^3_{(0)} = \lambda^1 \cdot \cos\lambda^2;$$

$$1 \leqslant \lambda^1 \leqslant \varkappa, \quad 0 \leqslant \lambda^2 \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \lambda^3 \leqslant 2\pi.$$

Здесь $x^i_{(0)}$ – значения декартовых координат частиц при $t = 0$; $\varkappa = \frac{R_1}{R_2}$.

Закон движения частиц жидкости запишем в виде

$$\vec{x} = \vec{x}(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, t) \quad (x^i = x^i(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, t)). \qquad (I.I)$$

Напомним, что поверхность, ограничивающая движущийся объем жидкости во все время движения, состоит из одних и тех же частиц [I]. Отсюда следует, в частности, что поверхностям пузыря и стенки сосуда в лагранжевых переменных при любом t будут соответствовать концентрические сферы $\lambda^1 = 1$, $\lambda^1 = \varkappa$. Полагая в (I.I) $\lambda^1 = 1$, получим, очевидно, уравнение поверхности пузыря в параметрической форме (параметрами являются λ^2, λ^3) для любого фиксированного значения t.

Движение идеальной жидкости, возникающее из состояния покоя в однородном поле массовых сил, является, как известно, потенциальным. В пространственных переменных x^i $(i=1,2,3)$ потенциал скорости $\varphi(\bar{x},t)$ должен удовлетворять следующим условиям [I]:

$$\Delta\varphi(\bar{x},t)=0 \qquad (\bar{x}\in\Omega_t), \tag{I.2}$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(\bar{x},t)-\frac{1}{2}\left[\bar{\nabla}\varphi(\bar{x},t)\right]^2+x^3=0 \qquad (\bar{x}\in\Sigma_t), \tag{I.3}$$

$$\frac{\bar{x}}{\varkappa}\cdot\bar{\nabla}\varphi(\bar{x},t)=0 \qquad (\bar{x}\in S), \tag{I.4}$$

$$\varphi(\bar{x},0)=0 \qquad (\bar{x}\in\Omega_0). \tag{I.5}$$

Здесь Δ – оператор Лапласа; $\bar{\nabla}$ – оператор Гамильтона; $\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\bar{\nabla}\varphi(\bar{x},t)\cdot\bar{\nabla}$; Ω_t, Σ_t – соответственно, область, занимаемая жидкостью, и поверхность пузыря в момент времени $t\geqslant 0$; S – поверхность стенки сосуда.

Связь между $\varphi(\bar{x},t)$ и $\bar{x}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)$ очевидна

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{x}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)=\bar{\nabla}\varphi(\bar{x}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t),t). \tag{I.6}$$

Перейдем в (I.2) – (I.6) к лагранжевым переменным. С этой целью введем функции $g_{ij}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)$, $g^{ij}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)$ $(i,j=1,2,3)$, определив их следующими равенствами

$$g_{ij}=\frac{\partial x^m}{\partial\lambda^i}\cdot\frac{\partial x^m}{\partial\lambda^j}, \tag{I.7}$$

$$g_{ik}g^{kj}=\delta_i^j\,, \quad \delta_i^j=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases} \tag{I.8}$$

По дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование от I до 3. Рассматривая (I.I) при фиксированном t как некоторое преобразование координат и применяя это преобразование к (I.2)-(I.6), согласно общим правилам тензорного анализа [2] получим

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\lambda^i}\left(\sqrt{g}\cdot g^{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda^j}\right)=0 \qquad \text{в} \quad \Omega_0 \tag{I.9}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial t}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial t}+x^3=0 \qquad \text{при} \qquad \lambda^1=1 \qquad (I.10)$$

$$\frac{x^i}{æ}\cdot\frac{\partial x^i}{\partial\lambda^j}\cdot g^{jk}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda^k}=0 \qquad \text{при} \qquad \lambda^1=æ \qquad (I.11)$$

$$\varphi(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,0)=0 \qquad (I.12)$$

$$\frac{\partial x^i}{\partial t}=\frac{\partial x^i}{\partial\lambda^j}\cdot g^{jk}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda^k} \quad (i=1,2,3) \quad \text{в} \quad \Omega_0 \qquad (I.13)$$

Здесь $g=\det\|g_{ij}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)\|$.

В силу выбора переменных Лагранжа при $t=0$ имеем

$$\begin{aligned}
x^1(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,0)&=\lambda^1\cdot\sin\lambda^2\cdot\cos\lambda^3,\\
x^2(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,0)&=\lambda^1\cdot\sin\lambda^2\cdot\sin\lambda^3,\\
x^3(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,0)&=\lambda^1\cdot\cos\lambda^2.
\end{aligned} \qquad (I.14)$$

Таким образом, задача о движении газового пузыря заключается в нахождении функций $\varphi(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)$, $x^i(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)$ $(i=1,2,3)$, удовлетворяющих в Ω_0 системе уравнений (I.9), (I.13), условиям (I.10), (I.11) на поверхностях Σ_0 $(\lambda^1=1)$, S $(\lambda^1=æ)$, соответственно, и начальным условиям (I.12), (I.14).

2. Предполагая $\varphi(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)$, $x^i(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)$ $(i=1,2,3)$ аналитическими функциями времени t, решение задачи (I. 9) – (I.14) будем искать в виде

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)\cdot\frac{t^n}{n!}, \qquad (2.1)$$

$$x^i=\sum_{n=0}^{\infty}x^i_{(n)}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)\cdot\frac{t^n}{n!} \qquad (i=1,2,3). \qquad (2.2)$$

Удовлетворяя начальным условиям (I.12), (I.14), найдем

$$\varphi_{(0)}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)=\varphi(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,0)=0, \quad x^i_{(0)}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)=x^i(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,0).$$

Функции $g_{ij}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)$, $g^{ij}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)$ $(i,j=1,2,3)$ также представим в виде

$$g_{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}g_{ij}^{(n)}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)\cdot\frac{t^n}{n!},$$
$$g^{ij}=\sum_{n=0}^{\infty}g^{ij}_{(n)}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)\cdot\frac{t^n}{n!}.$$

Из (I.7), (I.8) дифференцированием по t получим

$$g_{ij}^{(n)} = \sum_{\substack{\ell+p=n \\ \ell,p\geq 0}} \frac{\partial x^m_{(\ell)}}{\partial \lambda^i} \cdot \frac{\partial x^m_{(p)}}{\partial \lambda^j} \cdot \frac{n!}{\ell!\,p!} \qquad (n=0,1,2,\dots); \tag{2.3}$$

$$g_{ik}^{(0)} g^{kj}_{(0)} = \delta_i^j, \quad g_{ik}^{(0)} g^{kj}_{(n)} = -\sum_{\substack{\ell+p=n \\ \ell\geq 1,\, p\geq 0}} g_{ik}^{(\ell)} g^{kj}_{(p)} \frac{n!}{\ell!\,p!} \qquad (n=1,2,3,\dots). \tag{2.4}$$

Так как $x^i_{(0)}$ известны, легко определим $g_{ij}^{(0)}$, $g^{ij}_{(0)}$:

$$g_{11}^{(0)} = 1, \quad g_{22}^{(0)} = (\lambda^1)^2, \quad g_{33}^{(0)} = (\lambda^1)^2 \sin^2\lambda^2, \quad g_{ij}^{(0)} = 0 \quad (i\neq j);$$

$$g^{11}_{(0)} = 1, \quad g^{22}_{(0)} = \frac{1}{(\lambda^1)^2}, \quad g^{33}_{(0)} = \frac{1}{(\lambda^1)^2 \cdot \sin^2\lambda^2}, \quad g^{ij}_{(0)} = 0 \quad (i\neq j).$$

Можно показать, что $\det \| g_{ij}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3,t)\| = \det\| g_{ij}^{(0)}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)\|$, поэтому в (I.9) полагаем

$$g = \det\| g_{ij}^{(0)}(\lambda^1,\lambda^2,\lambda^3)\| = (\lambda^1)^4 \cdot \sin^2\lambda^2. \tag{2.5}$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{x^i_{(0)}}{\varkappa} \cdot \frac{\partial x^i_{(0)}}{\partial \lambda^j} g^{jk}_{(0)} \frac{\partial}{\partial \lambda^k} = \frac{\lambda^1}{\varkappa} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda^1}, \tag{2.6}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \lambda^i} \left(\sqrt{g} \cdot g^{ij}_{(0)} \frac{\partial}{\partial \lambda^j} \right) = \Delta_\lambda, \tag{2.7}$$

где Δ_λ – оператор Лапласа в сферической системе координат $\{\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3\}$.

Учитывая (2.5)-(2.7), из (I.9)-(I.II), (I.I3) дифференцированием по t получим

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_\lambda \varphi_{(n)} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\substack{\ell+p=n \\ \ell\geq 1,\, p\geq 0}} \frac{\partial}{\partial \lambda^i} \left(\sqrt{g} \cdot g^{ij}_{(\ell)} \cdot \frac{\partial \varphi_{(p)}}{\partial \lambda^j} \right) \frac{n!}{\ell!\,p!} \quad (\Omega_0), && (2.8)\\
&\varphi_{(n)} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\ell+p=n+1 \\ \ell,p\geq 1}} x^m_{(\ell)} x^m_{(p)} \frac{(n-1)!}{(\ell-1)!\,(p-1)!} - x^3_{(n-1)} \quad (\lambda^1=1), && (2.9)\\
&\frac{\partial \varphi_{(n)}}{\partial \lambda^1} = -\sum_{\substack{\ell+p+z+s=n \\ \ell,p,z\geq 0,\, s<n}} \frac{x^i_{(\ell)}}{\varkappa} \cdot \frac{\partial x^i_{(p)}}{\partial \lambda^j} \cdot g^{jk}_{(z)} \cdot \frac{\partial \varphi_{(s)}}{\partial \lambda^k} \frac{n!}{\ell!\,p!\,z!\,s!} \quad (\lambda^1=\varkappa). && (2.10)
\end{aligned}\right\} n=1,2,\dots$$

$$x^{i}_{(n+1)}=\sum_{\substack{l+p+s=n\\ l,p,s\geq 0}}\frac{\partial x^{i}_{(l)}}{\partial\lambda^{j}}\,g^{jk}_{(p)}\,\frac{\partial\varphi_{(s)}}{\partial\lambda^{k}}\,\frac{n!}{l!\,p!\,s!}\qquad\begin{pmatrix}i=1,2,3;\\ n=0,1,2,3,\ldots\end{pmatrix}\tag{2.II}$$

Формулы (2.II) ($n = 0$), (2.3), (2.4) (n = I) позволяют определить соответственно $x^{i}_{(1)}$, $g_{ij}^{(1)}$, $g^{ij}_{(1)}$ $(i,j=1,2,3, \ )$, зная которые найдем правые части в (2.8)–(2.I0) при n = I. Решая [3] краевую задачу (2.8)–(2.I0) (n = I), найдем $\varphi_{(1)}$. Аналогично определяются $x^{i}_{(2)}$ $(i=1,2,3)$, $\varphi_{(2)}$ и т.д. Таким образом, отыскание функций $\varphi_{(n)}$, $x^{i}_{(n)}$ сводится к последовательному решению однотипных краевых задач (2.8)–(2.I0) и простому вычислению по формулам (2.3),(2.4),(2.II).

Можно показать, что $\varphi_{(2k)}=x^{i}_{(2k+1)}=0$ $(i=1,2,3;\ k=0,1,2,\ldots)$. Отметим также, что функции $\varphi_{(2k+1)}$ и $x^{3}_{(2k)}$ не зависят от λ^{3}, а $x^{1}_{(2k)}$, $x^{2}_{(2k)}$ имеют вид

$$\left.\begin{matrix}x^{1}_{(2k)}\\ x^{2}_{(2k)}\end{matrix}\right\}=z_{(2k)}(\lambda^{1},\lambda^{2})\left\{\begin{matrix}\cos\lambda^{3}\\ \sin\lambda^{3}\end{matrix}\right.\qquad(k=0,1,2,\ldots),$$

то-есть рассматриваемое течение жидкости симметрично относительно оси x^{3}.

Опуская промежуточные выкладки, приведем выражения для первых (отличных от нуля) двух членов ряда (2.I) и трех членов рядов (2.2):

$$\begin{aligned}\varphi=&-\frac{1}{(2+\varkappa^{3})}\left\{\frac{\varkappa^{3}}{(\lambda^{1})^{2}}+2\lambda^{1}\right\}\cos\lambda^{2}\cdot t+\frac{\varkappa^{3}}{2(2+\varkappa^{3})^{2}}\left\{\left[\frac{3\varkappa^{3}}{(\lambda^{1})^{6}}-\frac{6(6+2\varkappa^{5}+\varkappa^{8})}{3+2\varkappa^{5}}\cdot\frac{1}{(\lambda^{1})^{3}}+\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{9(2-\varkappa^{3})}{3+2\varkappa^{5}}(\lambda^{1})^{2}\right]\cos^{2}\lambda^{2}+\frac{\varkappa^{3}}{(\lambda^{1})^{6}}+\frac{2(6+2\varkappa^{5}+\varkappa^{8})}{3+2\varkappa^{5}}\cdot\frac{1}{(\lambda^{1})^{3}}-\frac{3(2+\varkappa^{3})}{3+2\varkappa^{5}}(\lambda^{1})^{2}\right\}t^{3}+\ldots;\end{aligned}\tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\left.\begin{matrix}x^{1}\\ x^{2}\end{matrix}\right\}=&\,\lambda^{1}\cdot\sin\lambda^{2}\left\{\begin{matrix}\cos\lambda^{3}\\ \sin\lambda^{3}\end{matrix}\right\}+\frac{3\varkappa^{3}}{2(2+\varkappa^{3})}\cdot\frac{1}{(\lambda^{1})^{5}}\cos\lambda^{2}\cdot\sin\lambda^{2}\left\{\begin{matrix}\cos\lambda^{3}\\ \sin\lambda^{3}\end{matrix}\right\}\cdot t^{2}+\\&+\frac{3\varkappa^{3}}{4(2+\varkappa^{3})^{2}}\left\{\left[-\frac{2\varkappa^{3}}{(\lambda^{1})^{7}}+\frac{5(3+\varkappa^{8})}{3+2\varkappa^{5}}\cdot\frac{1}{(\lambda^{1})^{4}}\right]\cos^{2}\lambda^{2}-\frac{\varkappa^{3}}{2(\lambda^{1})^{7}}-\right.\\&\left.-\frac{3+\varkappa^{8}}{3+2\varkappa^{5}}\cdot\frac{1}{(\lambda^{1})^{4}}-\frac{2-\varkappa^{3}}{3+2\varkappa^{5}}\cdot\lambda^{1}\right\}\sin\lambda^{2}\left\{\begin{matrix}\cos\lambda^{3}\\ \sin\lambda^{3}\end{matrix}\right\}\cdot t^{4}+\ldots;\end{aligned}\tag{2.I3}$$

$$\begin{aligned}x^{3}=&\,\lambda^{1}\cdot\cos\lambda^{2}+\frac{1}{2(2+\varkappa^{3})}\left\{\frac{\varkappa^{3}}{(\lambda^{1})^{3}}(3\cos^{2}\lambda^{2}-1)-2\right\}t^{2}+\frac{3\varkappa^{3}}{4(2+\varkappa^{3})^{2}}\left\{\left[-\frac{2\varkappa^{3}}{(\lambda^{1})^{7}}+\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{5(3+\varkappa^{8})}{3+2\varkappa^{5}}\cdot\frac{1}{(\lambda^{1})^{4}}\right]\cos^{2}\lambda^{2}-\frac{3(3+\varkappa^{8})}{3+2\varkappa^{5}}\frac{1}{(\lambda^{1})^{4}}+\frac{2(2-\varkappa^{3})}{3+2\varkappa^{5}}\lambda^{1}\right\}\cos\lambda^{2}\cdot t^{4}+\ldots\end{aligned}\tag{2.I4}$$

Для предельного случая $\varkappa\to\infty$, соответствующего задаче о движении газового пузыря в бесконечной жидкости, (2.I2)–(2.I4) примут вид:

$$\varphi = -\frac{1}{(\lambda^1)^2}\cdot \cos\lambda^2 \cdot t + \frac{1}{2}\left\{3\left[\frac{1}{(\lambda^1)^6} - \frac{1}{(\lambda^1)^3}\right]\cos^2\lambda^2 - \frac{1}{(\lambda^1)^6} + \frac{1}{(\lambda^1)^3}\right\} t^3 + \ldots; \quad (2.15)$$

$$\left.\begin{matrix} x^1 \\ x^2 \end{matrix}\right\} = \lambda^1 \cdot \sin\lambda^2 \left\{\begin{matrix}\cos\lambda^3 \\ \sin\lambda^3\end{matrix}\right\} + \frac{3}{2(\lambda^1)^3}\cos\lambda^2 \cdot \sin\lambda^2 \left\{\begin{matrix}\cos\lambda^3 \\ \sin\lambda^3\end{matrix}\right\} \cdot t^2 +$$
$$+\frac{3}{2}\left\{\left[-\frac{1}{(\lambda^1)^7} + \frac{5}{4(\lambda^1)^4}\right]\cos^2\lambda^2 - \frac{1}{4(\lambda^1)^7} - \frac{1}{4(\lambda^1)^4}\right\}\sin\lambda^2 \left\{\begin{matrix}\cos\lambda^3 \\ \sin\lambda^3\end{matrix}\right\} t^4 + \ldots; \quad (2.16)$$

$$x^3 = \lambda^2 \cdot \cos\lambda^2 + \frac{1}{2(\lambda^1)^3}\left\{3\cos^2\lambda^2 - 1\right\}\cdot t^2 + \frac{3}{2}\left\{\left[-\frac{1}{(\lambda^1)^7} +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{5}{4(\lambda^1)^4}\right]\cos^2\lambda^2 - \frac{3}{4(\lambda^1)^4}\right\}\cos\lambda^2 t^4 + \ldots \, . \quad (2.17)$$

На рис. 2 для случая бесконечной жидкости представлены графики линий пересечения поверхности Σ_t пузыря с полуплоскостью, проходящей через ось x^3, вычисленные по формулам (2.16), (2.17) для различных значений t.

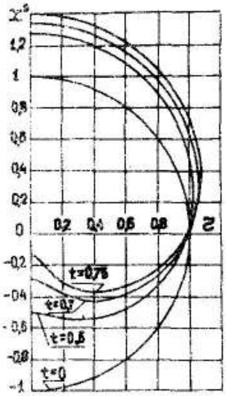

Рис. 2.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.Д.Тюпцову и Н.Д.Копачевскому за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая гидромеханика, ч.I, Физматгиз, 1963.

2. А.Дж.Мак-Коннел, Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике, Физматгиз, 1963.

3. Н.С.Кошляков, Э.Ю.Глинер, М.М.Смирнов, Основные дифференциальные уравнения математической физики, Физматгиз, 1962.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ МАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М.М. Бендерский

Рассматривается система

$$\frac{d\eta}{dt} = A(\xi)\eta, \tag{I}$$

где

$$A(\xi) = B + \sum_{j=1}^{m} \xi^j(t) C_j,$$

B, C_j – квадратные постоянные $n \times n$ матрицы, $\xi(t) = \{\xi^j(t)\}_{j=\overline{1,m}}$ – случайный процесс со значениями из R^m, $\eta(t) = \{\eta_i(t)\}_{i=\overline{1,n}}$ – вектор-столбец.

Задача исследования устойчивости тривиального решения системы (I) в среднем квадратическом сводится к определению моментов второго порядка ее решений. Приняв произведения $\eta_i \eta_j$ за новые переменные, нетрудно построить линейную систему вида (I) относительно этих переменных. Таким образом, задача определения вторых моментов сводится к задаче определения первых моментов решений новой системы. К определению моментов первого порядка можно, аналогично, привести задачу вычисления моментов любого порядка.

Укажем подход к определению математического ожидания решений системы (I) в случае, когда $\xi(t)$ марковский однородный случайный процесс, заданный как решение (при определенном начальном условии) стохастического дифференциального уравнения вида

$$d\xi = a(\xi)dt + b(\xi)dW + \int c(\xi,u)\nu(dt,du), \tag{2}$$

где $a(x)$, $c(x,u)$ – векторные функции со значением из

R^m ($t\in[0,\infty]$, $x\in R^m$, $y\in R^m$), $b(x)$ – операторная функция, линейно отображающая R^m в R^m, $\omega(t)$ – m-мерный винеровский процесс, $\tilde{\nu}(t,A)=\nu(t,A)-t\Pi(A)$, $\nu(t,A)$–пуассоновская мера в R^m, $M\nu(t,A)=t\Pi(A)$. При этом выполнены условия

$$|a(x)|^2+|b(x)|^2+\int|c(x,u)|^2\Pi(du)<K(1+|x|^2), \quad (3)$$

$$|a(x)-a(y)|^2+|b(x)-b(y)|^2+\int|c(x,u)-c(y,u)|^2\Pi(du)\leq C_R|x-y|^2$$

для $|x|\leq R$, $|y|\leq R$.

Как следует из [I], где проведено построение общей теории уравнений рассматриваемого вида, условия (3) обеспечивают существование и единственность решения задачи Коши для (2).

При этом решение представляет однородный марковский процесс. Если $\mathcal{L}$ его производящий оператор, т.е.

$$(\mathcal{L}f)(x)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(\xi_x(t))-f(x)}{t}$$

и $D_{\mathcal{L}}$ состоит из функций, для которых этот предел существует при каждом $x\in R^m$, то каждая функция $f(x)$, которая имеет производные первых двух порядков ограниченные и непрерывные, принадлежит $D_{\mathcal{L}}$ и на таких функциях оператор имеет вид

$$(\mathcal{L}f)(x)=\langle a(x),\nabla f(x)\rangle+\frac{1}{2}Sp\left[\nabla^2 f(x)b(x)b^*(x)\right]+ \quad (4)$$

$$+\int\left[f(x+c(x,u))-f(x)-\langle\nabla f(x),c(x,u)\rangle\right]\Pi(du).$$

При данном определении $\xi(t)$ систему (I) можно рассматривать как стохастическое уравнение для процесса $\zeta(t)=(\xi(t),\eta(t))$ в пространстве R^{m+n}. Это уравнение в силу условий (3) определяет марковский однородный процесс в R^{m+n}, а производящий оператор этого процесса на дважды непрерывно дифференцируемых функциях $f(z)$ ($z=(x,y)$, $x\in R^m$, $y\in R^n$) имеет вид:

$$\mathcal{L}'f=\mathcal{L}f+\langle A(x)y,\nabla_y f\rangle, \quad (5)$$

где $\mathcal{L}$ – производящий оператор $\xi(t)$, ∇_y – градиент по y, $\langle\ldots,\ldots\rangle$ – з н а к скалярного произведения.

Если помимо (3) имеют место условия

$$|\nabla^2 a(x)|^2 + |\nabla^2 b(x)|^2 + \int |\nabla^2 c(x,u)|^2 \Pi(du) \leqslant C, \qquad (6)$$

$$\int (|c(x,u)|^\kappa + |\nabla c(x,u)|^\kappa) \Pi(du) \leqslant C, \quad \kappa = 3 -$$

и $f(x,y)$ дважды непрерывно дифференцируемая, а ее частные производные первого и второго порядка ограничены, то [[I], стр. 298]

$$u(t,x,y) = Mf(\xi_x(t), \eta_z(t))$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}' u \qquad (7)$$

и краевому условию

$$u(+0,x,y) = f(x,y).$$

Опираясь на этот результат получим для определения первых моментов решения системы (I) более простое уравнение. Пусть H пространство функций $f(x,y)$ вида $\langle \alpha(x), y \rangle$, где $\alpha(x) = \{\alpha_i(x)\}_{i=\overline{1,n}}$.

Т Е О Р Е М А I. Если вектор-функция $v(t,x) = \{v_i(t,x)\}_{i=\overline{1,n}}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathcal{L} v + A^*(x) v \qquad (8)$$

и начальному условию

$$v(+0,x) = \alpha(x),$$

то функция $u(t,x,y) = \langle v(t,x), y \rangle$ является решением уравнения (7) при условии

$$u(+0,x,y) = \langle \alpha(x), y \rangle.$$

Для доказательства достаточно подставить $\langle v(t,x), y \rangle$ в уравнение (7).

Следовательно, если начальные данные принадлежат H, а задача Коши для (7) имеет единственное решение, то его можно получить, решая систему (8). При этом решение имеет структуру $\langle v(t,x), y \rangle$. В частности, функция $f(x,y) = y_i \in H$, а поэтому

$$M_{x,y}\,\eta_i(t)=\langle\omega_i(t,x),y\rangle, \qquad (9)$$

где $\omega(t,x)$ решение системы (8) при начальном условии

$$\omega_i(+0,x)=\{\delta_{ij}\}_{j=\overline{1,n}}\,.$$

Если $\xi(t)$ процесс с конечным множеством значений, то (8) приводится к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Эта система может быть получена независимо.

Применим метод Е.Б.Дынкина [2].

Пусть $\{x_i\}_{i=\overline{1,k}}$ – множество возможных значений процесса $\xi(t)$, а P_t его переходная матрица. Как известно матрицу можно представить в виде

$$P_t=\exp\{\mathcal{L}t\},$$

где $\mathcal{L}=\{\ell_{i,j}\}$ – инфинитезимальная матрица рассматриваемого процесса. Обозначим через $\xi_i(t)$ процесс, который определяется начальным условием $\xi_i(0)=x_i$.

Пусть $\Phi(\tau,t)$ – фундаментальная матрица для системы (I.I), т.е. матрица, которая по t удовлетворяет данной системе и условию $\Phi(\tau,\tau)=I$, где I – единичная матрица. Так как каждое решение рассматриваемой системы можно записать в виде

$$\eta(t)=\Phi(0,t)\,\eta(0),$$

то вопрос о вычислении математического ожидания $\eta(t)$ (при условии, что $\eta(0)$ и $\xi(0)$ независимы) сводится к определению $M\,\Phi(0,t)$.

Введем поэтому матрицу

$$H(t,x_i,x_j)=M_i\left\{\Phi(0,t)\,\chi_j(\xi(t))\right\},$$

где усреднение ведется по мере P^i, которая определяется начальным условием $\xi(0)=x_i$, а

$$\chi_j(\xi_i(t))=\begin{cases}0, & \xi_i(t)\neq x_j\\ 1, & \xi_i(t)=x_j.\end{cases}$$

Чтобы получить уравнение для определения $H(t,x_i,x_j)$, потребуются следующие леммы.

Л Е М М А I. Матрица $H(t,x_i,x_j)$ удовлетворяет уравнению при $t\geqslant 0$, $h\geqslant 0$

$$H(t+h,x_i,x_j)=\sum_{r=1}^{k} H(h,x_r,x_j)\,H(t,x_i,x_r). \quad (10)$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Фундаментальная матрица, как известно, удовлетворяет уравнению

$$\Phi(0,t+h)=\Phi(t,t+h)\,\Phi(0,t).$$

Поэтому

$$H(t+h,x_i,x_j)=M_i\sum_{r=1}^{k}\{\Phi(0,t+h)\,\chi_r(\xi_i(t))\,\chi_j(\xi_i(t+h))\}=$$

$$=\sum_{r=1}^{k}M_i\{M_r[\Phi(0,h)\,\chi_j(\xi_r(h))]\,\Phi(0,t)\,\chi_r(\xi_i(t))\}=$$

$$=\sum_{r=1}^{k}H(h,x_r,x_j)\,H(t,x_i,x_r).$$

Л Е М М А 2. Если $P(t,x_i,x_j)$ – переходная функция процесса $\xi(t)$, то

$$H(h,x_i,x_j)=[I+hA(x_i)]\,P(h,x_i,x_j)+\alpha,$$

где $|\alpha|=o(h)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из определения фундаментальной матрицы следует, что

$$\Phi(0,h)=I+hA(\xi(0))+\int_0^h[A(\xi(\tau))\,\Phi(0,\tau)-A(\xi(0))]\,d\tau.$$

Умножая на $\chi_j(\xi_i(h))$ и усредняя по мере P^i, получим

$$H(h,x_i,x_j)=[I+hA(x_i)]\,P(h,x_i,x_j)+\alpha,$$

где

$$\alpha=M_i\{\chi_j(\xi_i(h))\int_0^h[A(\xi_i(\tau))\,\Phi_i(0,\tau)-A(x_i)]\,d\tau\}.$$

Чтобы убедиться в справедливости леммы достаточно заметить, что $|A(\xi_i(\tau))\,\Phi_i(0,\tau)-A(x_i)|$ с вероятностью $1-|e_{ii}|\tau$ имеет порядок τ и $\leqslant C$ с вероятностью $|e_{ii}|\tau$.

Пусть $\eta(0)$ и $\xi(0)$ независимы и $M\eta(0)=y$. Положим

$$v(t,x_i,y,x_j)=M_i\{\eta(t)\chi_j(\xi_i(t))\}=H(t,x_i,x_j)y.$$

Рассмотрим множество элементов

$$v_{jr}(t,x_i,y)=v_r(t,x_i,y,x_j),\quad r=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,k}.$$

Упорядочим элементы этого множества согласно правилу:

$v_{\alpha\beta}$ предшествует $v_{\gamma\delta}$, если

а) $\alpha<\gamma$ или

б) $\alpha=\gamma$ и $\beta<\delta$.

Образуем теперь из этих элементов вектор-столбец $\omega(t,x_i,y)$.

Т Е О Р Е М А 2. Пусть $\mathcal{L}$ – инфинитезимальная матрица марковского процесса с конечным множеством значений. Тогда вектор-столбец $\omega(t,x_i,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\omega}{dt}=\mathbb{D}\omega, \tag{II}$$

где $\mathbb{D}$ –матрица порядка $nk\times nk$ с постоянными коэффициентами, вид которой указан ниже (I2), и начальному условию

$$\omega(0,x_i,y)=\{v_{jr}(0,x_i,y)\},$$

$$v_{jr}(0,x_i,y)=\begin{cases}0 & ; i\neq j,\\ y & ; i=j.\end{cases}$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из формулы (I0) и определения $v(t,x_i,y,x_j)$ следует, что

$$v(t+h,x_i,y,x_j)=\sum_{\ell=1}^{r}H(h,x_\ell,x_j)\,v(t,x_i,y,x_\ell).$$

В силу леммы 2

$$v(t+h,x_i,y,x_j)=\sum_{\ell=1}^{r}[I+hA(x_\ell)]P(h,x_\ell,x_j)\,v(t,x_i,y,x_j)+\beta,$$
$$|\beta|=o(h).$$

Вычисляя теперь

$$\lim_{h\to 0}\frac{v(t+h,x_i,y,x_j)-v(t,x_i,y,x_j)}{h},$$

приходим к системе линейных дифференциальных уравнений для $v_{jl} = v_l(t, x_i, y, x_j)$. При выбраном порядке элементов v_{jl} матрица этой системы легко определяется и равна

$$D = \Lambda + S, \tag{I2}$$

где Λ - клеточная диагональная матрица вида

$$\Lambda = \begin{pmatrix} A(x_1) & & & \\ & A(x_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & A(x_k) \end{pmatrix},$$

а S - клеточная матрица вида

$$S = \begin{pmatrix} \ell_{11} I & \ell_{21} I & \dots & \ell_{1k1} I \\ \ell_{12} I & \ell_{22} I & \dots & \ell_{k2} I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \ell_{1k} I & \ell_{2k} I & \dots & \ell_{kk} I \end{pmatrix},$$

где ℓ_{ij} - элементы матрицы $\mathcal{L}$, а I-единичная матрица порядка $n \times n$.

Начальные условия для ω следуют из определения v и того факта, что

$$H(+0, x_i, x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ I, & i = j. \end{cases} \quad \text{(0-нулевая матрица)}$$

Теорема доказана.

Система (II) может быть также получена на основании результатов работы [3].

Автор благодарен И.М.Сливняку за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

I. И.И.Гихман, А.В.Скороход,Стохастические дифференциальные уравнения. Изд-во" Наукова думка",Киев - I968.

2. Е.Б.Дынкин, Функционалы от траекторий марковских случайных процессов. ДАН СССР, 104. № 5, 1955.

3. Г.И.Мильштейн, Ю.М.Репин, О взаимодействии марковского процесса на систему дифференциальных уравнений. "Дифференциальные уравнения", том У, вып.8, 1969.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

О ТОЧНОСТИ ВОСТАНОВЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ РАССЕЯНИЯ

Д.Ш. Лундина

В работах [I] , [2] были получены оценки, устанавливающие, с какой точностью можно восстановить нормированные собственные функции и потенциал по неполным данным рассеяния в случае одномерного оператора Шредингера. При этом предполагалось, что потенциал в уравнении Шредингера принадлежит классу $V_{\alpha(x)}$, в который входят все вещественные функции $v(x)$, удовлетворяющие условию

$$\int_x^\infty |v(t)|\,dt \leqslant \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ - некоторая неотрицательная невозрастающая и суммируемая на полуоси $(0,\infty)$ функция.

В настоящей статье проводится уточнение оценок для разности собственных функций двух краевых задач при тех же предположениях, а также при дополнительных ограничениях на рассматриваемые потенциалы.

Итак, пусть данные рассеяния на потенциалах $v_1(x)$ и $v_2(x)$ совпадают на конечном интервале энергий $\lambda^2 < N^2$. Так же, как в работах [I] - [2], обозначим через $e_j(x,\lambda)$ решение соответствующего уравнения Шредингера, которое при $x \to \infty$ ведет себя, как $e^{i\lambda x}$. Тогда, как показано в работе [I] , разность двух таких решений может быть представлена в виде:

$$e_1(x,\mu)-e_2(x,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>N} e_2(x,\lambda)\left[e_1'(x,\mu)e_1(x,\lambda)-e_1(x,\mu)e_1'(x,\lambda)\right]\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\,d\lambda . \quad (1)$$

Меняя местами индексы (I), (2) двух краевых задач, получим также

$$e_1(x,\mu)-e_2(x,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>N} e_1(x,\lambda)\left[e_2'(x,\mu)\,e_2(x,\lambda)-e_2(x,\mu)\,e_2'(x,\lambda)\right]\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}d\lambda$$

Введем следующие обозначения $(i=1,2;\quad j=1,2)$:

$$\Delta_{i,k}(x,\mu)=e_i(x,\mu)-e_k(x,\mu), \tag{3}$$

$$a_{i,k}(x,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>N} e_i(x,\lambda)\,e_k(x,\lambda)\,\frac{S_k(\lambda)-S_i(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\,d\lambda, \tag{4}$$

$$b_{i,k}(x,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>N} e_i'(x,\lambda)\,e_k(x,\lambda)\,\frac{S_k(\lambda)-S_i(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\,d\lambda. \tag{5}$$

Тогда объединяя формулы (I)- (2), будем иметь

$$\Delta_{i,k}(x,\mu)=e_i'(x,\mu)\,a_{i,k}(x,\mu)-e_i(x,\mu)\,b_{i,k}(x,\mu). \tag{6}$$

Как известно, функция рассеяния $S(\lambda)$ удовлетворяет условию $\overline{S(\lambda)}=S(-\lambda)$. Кроме того, в силу вещественности потенциалов

$$\overline{e_i(x,\lambda)}=e_i(x,-\lambda),\quad \overline{e_i'(x,\lambda)}=e_i'(x,-\lambda).$$

Поэтому

$$a_{i,k}(x,\mu)=\overline{a_{i,k}(x,\mu)}=-a_{k,i}(x,\mu), \tag{7}$$

$$b_{i,k}(x,\mu)=\overline{b_{i,k}(x,\mu)}, \tag{8}$$

$$b_{i,k}(x,\mu)+b_{k,i}(x,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{e_i'(x,\lambda)e_k(x,\lambda)-e_k'(x,\lambda)e_i(x,\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\left[S_k(\lambda)-S_i(\lambda)\right]d\lambda.$$

Согласно формуле (6) имеем

$$\Delta_{1,2}(x,\mu)\,\overline{\Delta_{1,2}(x,\mu)}=\left[e_1(x,\mu)-e_2(x,\mu)\right]\overline{e_1(x,\mu)}-\left[e_1(x,\mu)-e_2(x,\mu)\right]\overline{e_2(x,\mu)}=$$

$$=-e_2'(x,\mu)\,\overline{e_1(x,\mu)}\,a_{2,1}(x,\mu)+e_2(x,\mu)\,\overline{e_1(x,\mu)}\,b_{2,1}(x,\mu)-$$

$$-e_1'(x,\mu)\,\overline{e_2(x,\mu)}\,a_{1,2}(x,\mu)+e_1(x,\mu)\,\overline{e_2(x,\mu)}\,b_{1,2}(x,\mu).$$

Сложив это равенство с равенством, которое получается из него при переходе к комплексно сопряженным функциям, получим

$$2\Delta_{1,2}(x,\mu)\overline{\Delta_{1,2}(x,\mu)} = f_1(x,\mu) + \overline{f_1(x,\mu)} + f_2(x,\mu) + \overline{f_2(x,\mu)}, \tag{9}$$

где

$$f_1(x,\mu) = -e_2'(x,\mu)\overline{e_1(x,\mu)}\,a_{2,1}(x,\mu) - e_2(x,\mu)\overline{e_1(x,\mu)'}\,\overline{a_{1,2}(x,\mu)}, \tag{I0}$$

$$f_2(x,\mu) = e_1(x,\mu)\overline{e_2(x,\mu)}\left[b_{1,2}(x,\mu) + \overline{b_{2,1}(x,\mu)}\right]. \tag{II}$$

Воспользовавшись соотношениями (7)-(8), перепишем формулы (I0) -(II) в виде

$$f_1(x,\mu) = \left[e_2'(x,\mu)\overline{e_1(x,\mu)} - e_2(x,\mu)\overline{e_1(x,\mu)'}\right]a_{1,2}(x,\mu),$$

$$f_2(x,\mu) = e_1(x,\mu)\overline{e_2(x,\mu)}\left[b_{1,2}(x,\mu) + b_{2,1}(x,\mu)\right].$$

Из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют функции $e_j(x,\lambda)$, следует, что

$$e_2'(x,\mu)\overline{e_1(x,\mu)} - e_2(x,\mu)\overline{e_1(x,\mu)'} = \int_x^\infty [v_1(t) - v_2(t)]\overline{e_1(t,\mu)}e_2(t,\mu)\,dt,$$

откуда, используя соотношение (4), находим, что

$$f_1(x,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_x^\infty [v_1(t) - v_2(t)]\int_{|\lambda|>N}\frac{e_1(x,\lambda)e_2(x,\lambda)\overline{e_1(t,\mu)}e_2(t,\mu)}{\lambda^2-\mu^2}[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\,d\lambda\,dt.$$

Аналогичным образом из формулы (8) получим:

$$f_2(x,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_x^\infty [v_1(t) - v_2(t)]\int_{|\lambda|>N}\frac{e_1(t,\lambda)e_2(t,\lambda)e_1(x,\mu)\overline{e_2(x,\mu)}}{\lambda^2-\mu^2}[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\,d\lambda\,dt. \tag{I3}$$

Из формул (9), (I2), (I3) следует важная для дальнейшего

Т Е О Р Е М А I. Если данные рассеяния на потенциалах $v_1(x)$, $v_2(x)$ совпадают при всех $\lambda^2 < N^2$, то

$$2\Delta_{1,2}(x,\mu)\overline{\Delta_{1,2}(x,\mu)} = f_1(x,\mu) + \overline{f_1(x,\mu)} + f_2(x,\mu) + \overline{f_2(x,\mu)}, \quad (14)$$

где функции $f_1(x,\mu)$, $f_2(x,\mu)$ определены формулами (12) и (13).

Как показано в работе [1], функции $e_j(x,\lambda)$ удовлетворяют неравенствам

$$|e_j(x,\lambda)| \leqslant e^{\alpha_1(x)}, \quad (15)$$

где

$$\alpha_1(x) = \int_x^\infty \alpha(t)\,dt.$$

Пользуясь этим неравенством, а также тем обстоятельством, что $|S_j(\lambda)| = 1$, оценим по модулю функции $f_j(x,\mu)$:

$$|f_j(x,\mu)| \leqslant \frac{4}{\pi} e^{4\alpha_1(x)} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \alpha(x). \quad (16)$$

Теперь, если воспользоваться формулой (14) теоремы I, легко оценить разность решений $e_j(x,\mu)$:

$$|e_1(x,\mu) - e_2(x,\mu)|^2 \leqslant \frac{8}{\pi} e^{4\alpha_1(x)} \quad \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \alpha(x). \quad (17)$$

Нормированные собственные функции $u_j(x,\mu)$, как известно, выражаются формулами

$$u_j(x,\mu) = e_j(x,\mu) - S_j(-\mu)\, e_j(x,-\mu).$$

Поскольку при $\mu \in (-N, N)$ $S_1(-\mu) = S_2(-\mu)$, то

$$|u_1(x,\mu) - u_2(x,\mu)| \leqslant 2\,|e_1(x,\mu) - e_2(x,\mu)|. \quad (18)$$

На основании неравенств (17) и (18) заключаем, что верна

Т Е О Р Е М А 2. Если данные рассеяния на потенциалах $v_1(x)$, $v_2(x)$, принадлежащих классу $V_{\alpha(x)}$, совпадают при всех $\lambda^2 < N^2$, то разность нормированных собственных функций этих краевых задач при всех $\mu \in (-N, N)$ удовлетворяет неравенствам

$$|u_1(x,\mu)-u_2(x,\mu)|^2 \leqslant \frac{32}{\pi} e^{4\alpha_1(x)} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \alpha(x), \tag{I9}$$

$$\int_0^\infty |u_1(x,\mu)-u_2(x,\mu)|^2 dx \leqslant \frac{32}{\pi} e^{4\alpha_1(0)} \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \alpha_1(0). \tag{20}$$

Теорема 2 доказана при тех же предположениях, что и теоремы (I) - (2) работы [I] и является их уточнением. Оказывается, что и эта теорема может быть уточнена, если наложить на число N дополнительное условие.

ТЕОРЕМА 2'. Если данные рассеяния на потенциалах $v_1(x)$, $v_2(x)$, принадлежащих классу $V_{\alpha(x)}$, совпадают при всех $\lambda^2 < N^2$, а число N удовлетворяет условию

$$\varepsilon(N) = \alpha_1(0) - \alpha_1(N^{-1}) < 0{,}5, \tag{2I}$$

то разность нормированных собственных функций краевых задач при всех $\mu \in (-N, N)$ может быть оценена следующим образом:

$$|u_1(x,\mu)-u_2(x,\mu)|^2 \leqslant 32 e^{4\alpha_1(x)} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\varepsilon(N)}{1-2\varepsilon(N)} \alpha(x), \tag{22}$$

$$\int_0^\infty |u_1(x,\mu)-u_2(x,\mu)|^2 dx \leqslant 32 e^{4\alpha_1(0)} \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\varepsilon(N)}{1-2\varepsilon(N)} \alpha_1(0). \tag{23}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано в лемме (8') работы [2], если выполнено условие (2I), то

$$\int_{|\lambda|>N} \left| \frac{1-S(\lambda)}{\lambda} \right| d\lambda \leqslant \frac{2\pi \cdot \varepsilon(N)}{1-2\varepsilon(N)}.$$

Поэтому, согласно формулам (I2),(I3), (I4), получим

$$|e_1(x,\mu)-e_2(x,\mu)|^2 \leqslant \frac{2}{\pi} \alpha(x) e^{4\alpha_1(x)} \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \int_{|\lambda|>N} \left| \frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda} \right| d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant 8\alpha(x) e^{4\alpha_1(x)} \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{\varepsilon(N)}{1-2\varepsilon(N)}. \tag{24}$$

Из этого неравенства и неравенства (I8) вытекают неравенства (22), (23) и теорема доказана.

Теперь, накладывая на потенциалы дополнительные ограничения, мы улучшим и эти оценки.

Предположим, что восстановление собственных функций по неполным данным рассеяния осуществляется в классе $V_{\beta(x)}$ абсолютно непрерывных потенциалов, производные от которых $v'(t)$ удовлетворяют условию

$$\int_x^\infty |v'(t)|dt \leqslant \beta(x), \tag{25}$$

где $\beta(x)$ некоторая неотрицательная невозрастающая функция, причем

$$\int_x^\infty \beta(t)dt = \alpha(x) < \infty, \qquad (0 \leqslant x < \infty) \tag{26}$$

и

$$\int_x^\infty \alpha(t)dt = \alpha_1(x) < \infty, \quad (0 \leqslant x < \infty). \tag{27}$$

Таким образом, $V_{\beta(x)} \subset V_{\alpha(x)}$, где $\alpha(x)$ определена формулой (26).

Обратимся к формуле (I4) теоремы I и рассмотрим соотношение

$$2\int_0^\infty |e_1(x,\mu) - e_2(x,\mu)|^2 dx = \int_0^\infty \{f_1(x,\mu) + \overline{f_1(x,\mu)} + f_2(x,\mu) + \overline{f_2(x,\mu)}\}dx. \tag{28}$$

Обозначим через

$$J(x,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_x^\infty [v_1(t) - v_2(t)] \int_{|\lambda|>N} \frac{e_1(t,\lambda)e_2(t,\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}[S_2(\lambda) - S_1(\lambda)]d\lambda dt, \tag{29}$$

тогда

$$\int_0^\infty f_2(x,\mu)dx = \int_0^\infty e_1(x,\mu)\overline{e_2(x,\mu)}\, J(x,\mu)dx.$$

Перепишем формулу (29) в виде

$$J(x,\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_x^\infty [v_1(t) - v_2(t)] \int_{|\lambda|>N} [e^{2i\lambda t} + \varphi(t,\lambda)] \frac{S_2(\lambda) - S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2} d\lambda dt, \tag{30}$$

где

$$\varphi(t,\lambda)=e^{i\lambda t}[e_2(t,\lambda)-e^{i\lambda t}]+[e_1(t,\lambda)-e^{i\lambda t}]e_2(t,\lambda),$$

причем из неравенства (I5) и интегрального уравнения для $e(x,\lambda)$ следует, что

$$|\varphi(t,\lambda)|\leqslant \frac{\alpha(t)e^{\alpha_1(t)}[1+e^{\alpha_1(t)}]}{|\lambda|}. \qquad (31)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\mathcal{J}(x,\mu)=\frac{1}{2\pi}\Big\{-[v_1(x)-v_2(x)]\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\cdot\frac{e^{2i\lambda x}}{2i\lambda}d\lambda-$$

$$-\int\limits_x^\infty[v_1'(t)-v_2'(t)]\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\cdot\frac{e^{2i\lambda t}}{2i\lambda}d\lambda dt+$$

$$+\int\limits_x^\infty[v_1(t)-v_2(t)]\int\limits_{|\lambda|>N}\varphi(t,\lambda)\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}d\lambda dt\Big\}. \qquad (32)$$

Используя неравенства (25), (3I), находим, что

$$|\mathcal{J}(x,\mu)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\Big[\frac{1}{2}|v_1(x)-v_2(x)|+\beta(x)+2\alpha^2(x)e^{\alpha_1(x)}(1+e^{\alpha_1(x)})\Big]\cdot$$

$$\cdot\int\limits_{|\lambda|>N}\Big|\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{(\lambda^2-\mu^2)\lambda}\Big|d\lambda. \qquad (33)$$

Отсюда следует,что

$$\int\limits_0^\infty|f_2(x,\mu)|dx\leqslant$$

$$\leqslant e^{2\alpha_1(0)}\cdot\frac{1}{2\pi}[2\alpha(0)+2\alpha(0)(1+e^{\alpha_1(0)})(e^{\alpha_1(0)}-1)]\int\limits_{|\lambda|>N}\Big|\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{(\lambda^2-\mu^2)\lambda}\Big|d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\alpha(0)e^{4\alpha_1(0)}\int\limits_{|\lambda|>N}\Big|\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{(\lambda^2-\mu^2)\lambda}\Big|d\lambda. \qquad (34)$$

Поступая аналогичным образом, получим

$$\int\limits_0^\infty f_1(x,\mu)dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\int\limits_x^\infty[v_1(t)-v_2(t)]\overline{e_1(t,\mu)}e_2(t,\mu)\int\limits_{|\lambda|>N}[e^{2i\lambda x}+\varphi(x,\lambda)]\cdot$$

$$\cdot \frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\, d\lambda\, dt\, dx = J_1(\mu)+J_2(\mu), \tag{35}$$

где

$$J_1(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_x^\infty [v_1(t)-v_2(t)]\,\overline{e_1(t,\mu)}\,e_2(t,\mu)\int_{|\lambda|>N} e^{2i\lambda x}\,\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\,d\lambda\, dt\, dx,$$

$$J_2(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\int_x^\infty [v_1(t)-v_2(t)]\,\overline{e_1(t,\mu)}\,e_2(t,\mu)\int_{|\lambda|>N} \varphi(x,\lambda)\,\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\,d\lambda\, dt\, dx.$$

Интегрируя по частям, оценим интеграл $J_1(\mu)$:

$$J_1(\mu)=\frac{1}{2\pi}\Big[-\int_0^\infty [v_1(t)-v_2(t)]\,\overline{e_1(t,\mu)}\,e_2(t,\mu)\,dt\int_{|\lambda|>N}\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\cdot\frac{1}{2i\lambda}\,d\lambda+$$

$$+\int_0^\infty [v_1(x)-v_2(x)]\,\overline{e_1(x,\mu)}\,e_2(x,\mu)\int_{|\lambda|>N}\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{\lambda^2-\mu^2}\cdot\frac{e^{2i\lambda x}}{2i\lambda}\,d\lambda\, dx\Big],$$

при этом, как легко видеть,

$$|J_1(\mu)|\leqslant \frac{1}{\pi}\,\alpha(0)\,e^{2\alpha_1(0)}\int_{|\lambda|>N}\left|\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{(\lambda^2-\mu^2)\,\lambda}\right|d\lambda. \tag{36}$$

Применяя неравенство (32), имеем также

$$|J_2(\mu)|\leqslant\frac{1}{\pi}\,\alpha(0)\,e^{2\alpha_1(0)}(1+e^{\alpha_1(0)})(e^{\alpha_1(0)}-1)\int_{|\lambda|>N}\left|\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{(\lambda^2-\mu^2)\,\lambda}\right|d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\alpha(0)\,e^{2\alpha_1(0)}(e^{2\alpha_1(0)}-1)\int_{|\lambda|>N}\left|\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{(\lambda^2-\mu^2)\,\lambda}\right|d\lambda. \tag{37}$$

На основании равенства (28) и оценок (34), (36), (37) получаем неравенство

$$\int_0^\infty |e_1(x,\mu)-e_2(x,\mu)|^2dx\leqslant\frac{2\alpha(0)\,e^{4\alpha_1(0)}}{\pi}\int_{|\lambda|>N}\left|\frac{S_2(\lambda)-S_1(\lambda)}{(\lambda^2-\mu^2)\,\lambda}\right|d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant\frac{8}{3\pi}\,\alpha(0)\,e^{4\alpha_1(0)}\,\frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}}\cdot\frac{1}{N^2}, \tag{38}$$

которое справедливо при любом N и является улучшением оценки (20).

Если, подобно тому, как это делалось выше, на число N наложить условие (2I), то неравенство (38) может быть улучшено:

$$\int_0^\infty |\Delta_{1,2}(x,\mu)|^2 dx \leqslant \frac{2\alpha(0)e^{4\alpha_1(0)}}{\pi} \cdot \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \cdot \frac{1}{N^2} \cdot 2 \cdot \frac{2\pi \cdot \varepsilon(N)}{1-2\varepsilon(N)} \leqslant$$

$$\leqslant 8\alpha^2(0)e^{4\alpha_1(0)} \cdot \frac{1}{N^3(1-\frac{\mu^2}{N^2})} \cdot \frac{1}{1-2\varepsilon(N)}. \tag{39}$$

Предположим теперь, что $\beta(0) < \infty$ и число N удовлетворяет условию (2I), так что согласно лемме 7 работы [2] при $\lambda > N$

$$|e(x,\lambda)| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon(|\lambda|)} \tag{40}$$

и

$$|e(0,\lambda)| \geqslant \frac{1-2\varepsilon(|\lambda|)}{1-\varepsilon(|\lambda|)}. \tag{4I}$$

Как известно, функция $e(x,\lambda)$ является решением уравнения

$$e(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} v(t) e(t,\lambda) dt,$$

поэтому

$$\begin{aligned} e(x,\lambda) &= e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} v(t) e^{i\lambda t} dt + \\ &+ \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} v(t) \int_t^\infty \frac{\sin\lambda(\xi-t)}{\lambda} v(\xi) e(\xi,\lambda) d\xi dt. \end{aligned} \tag{42}$$

Полагая в этом равенстве $x=0$ и интегрируя по частям, получим

$$e(0,\lambda) = 1 - \frac{1}{2i\lambda}\int_0^\infty v(t)dt + \frac{\delta(\lambda)}{\lambda^2}, \tag{43}$$

где

$$\delta(\lambda) = \frac{1}{4}\left[v(0) + \int_0^\infty v'(t) e^{2i\lambda t} dt\right] + \int_0^\infty \sin\lambda t \cdot v(t) \int_t^\infty \sin\lambda(\xi - t) v(\xi) e(\xi,\lambda) d\xi dt, \tag{44}$$

причем согласно (25) и (40) при $|\lambda| > N$

$$|\delta(\lambda)| \leqslant \frac{\beta(0)}{2} + \frac{\alpha^2(0)}{2[1-\varepsilon|\lambda|]}. \tag{45}$$

Так как

$$S(\lambda) = \frac{e(0,\lambda)}{e(0,-\lambda)},$$

то

$$S_2(\lambda) - S_1(\lambda) = \frac{e_2(0,\lambda)e_1(0,-\lambda) - e_1(0,\lambda)e_2(0,-\lambda)}{e_2(0,-\lambda)\, e_1(0,-\lambda)}.$$

Имеем далее, согласно (43)и (45):

$$e_2(0,\lambda)e_1(0,-\lambda) - e_1(0,\lambda)e_2(0,-\lambda) =$$
$$= \frac{1}{i\lambda}\int_0^\infty [v_1(t) - v_2(t)]\,dt + \frac{\gamma(\lambda)}{\lambda^2},$$

причем при $|\lambda| > N$

$$|\gamma(\lambda)| \leqslant \frac{4|\delta(\lambda)|}{1-\varepsilon(N)} + \frac{\alpha^2(0)}{1-\varepsilon(N)} \leqslant \frac{2\beta(0) + 3\alpha^2(0)}{(1-\varepsilon(N))^2}. \tag{48}$$

Поскольку при $\lambda = N$ $S_2(N) = S_1(N)$, то из формул (46), (47), (48) следует, что

$$\left|\int_0^\infty [v_1(t) - v_2(t)]\,dt\right| \leqslant \frac{2\beta(0) + 3\alpha^2(0)}{(1-\varepsilon(N))^2 N}. \tag{49}$$

Теперь,если воспользоваться соотношениями (4I), (46), (47), (48), (49), легко оценить разность $[S_1(\lambda) - S_2(\lambda)]$ при $|\lambda| > N$:

$$|S_2(\lambda) - S_1(\lambda)| \leqslant \frac{2[2\beta(0) + 3\alpha^2(0)]}{N(1-2\varepsilon(N))^2}\cdot\frac{1}{|\lambda|}. \tag{50}$$

Отсюда следует, что

$$\int_{|\lambda|>N} \left|\frac{S_2(\lambda) - S_1(\lambda)}{(\lambda^2-\mu^2)\lambda}\right| d\lambda \leqslant \frac{4[2\beta(0) + 3\alpha^2(0)]}{3(1-2\varepsilon(N))^2}\,\frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}}\cdot\frac{1}{N^4}. \tag{5I}$$

На основании неравенств (38), (39), (5I) заключаем, что верна

ТЕОРЕМА 3. Пусть данные рассеяния на потенциалах, принадлежащих классу $V_{\beta(x)}$, совпадают при всех $\lambda^2 < N^2$, $\mu \in (N,N)$. Тогда при любом $N > 0$ справедливо неравенство

$$\int_0^\infty |u_1(x,\mu) - u_2(x,\mu)|^2 dx \leqslant \frac{16}{\pi}\alpha(0) e^{4\alpha_1(0)} \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \frac{1}{N^2}. \qquad (52)$$

Если N такое, что $\frac{\alpha(0)}{N} < 0{,}5$ и, следовательно, выполнено условие (2I), то

$$\int_0^\infty |u_1(x,\mu) - u_2(x,\mu)|^2 dx \leqslant 32\alpha^2(0) e^{4\alpha_1(0)} \frac{1}{1-2\varepsilon(N)} \frac{1}{1-\frac{\mu^2}{N^2}} \frac{1}{N^3}. \qquad (53)$$

Если, кроме этого, потребовать, чтобы $\beta(0) < \infty$, то

$$\int_0^\infty |u_1(x,\mu) - u_2(x,\mu)|^2 dx \leqslant \frac{32}{3\pi}\alpha(0) e^{4\alpha_1(0)} \frac{2\beta(0)+3\alpha^2(0)}{(1-2\varepsilon(N))^2} \frac{1}{(1-\frac{\mu^2}{N^2})N^4}. \qquad (54)$$

Приведем таблицу, которая показывает зависимость величины

$$\Delta^2 = \int_0^\infty |u_1(x,\mu) - u_2(x,\mu)|^2 dx, \qquad (|\mu| < N)$$

от того, какому классу принадлежат потенциалы.

Таблица I

Класс потенциалов	Условие	Оценка величины
$V_{\alpha(x)}$	$N > 0$,	$\frac{32\alpha_1(0) e^{4\alpha_1(0)} \cdot N}{\pi(N^2-\mu^2)}$
$V_{\alpha(x)}$	$\varepsilon(N) < 0{,}5$	$\frac{32\alpha_1(0) e^{4\alpha_1(0)} \varepsilon(N) \cdot N}{(N^2-\mu^2)(1-2\varepsilon(N))}$
$V_{\beta(x)}$	$N > 0$, любое	$\frac{16\alpha(0) e^{4\alpha_1(0)}}{\pi(N^2-\mu^2)}$

$V_{\beta(x)}$	$N > 2\alpha(0)$	$\dfrac{32\alpha^2(0)e^{4\alpha_1(0)}}{(N^2-\mu^2)(N-2\alpha(0))}$
$V_{\beta(x)}, \beta(0)<\infty$	$N > 2\alpha(0)$	$\dfrac{32\alpha(0)[2\beta(0)+3\alpha^2(0)]e^{4\alpha_1(0)}}{3\pi(N^2-\mu^2)(N-2\alpha(0))^2}$

В заключение выражаю искреннюю благодарность В.А. Марченко за постоянное внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Д.Ш.Лундина и В.А.Марченко, "Уточнение оценок, характеризующих устойчивость обратной задачи теории рассеяния", Мат. сборник, т. 78 (I20): 4, стр., 375-384, I969.

2. В.А.Марченко, "Устойчивость обратной задачи теории рассеяния", Мат. сборник, т.77 (II9):2, стр. I39-I62, I968.

Т Р У Д Ы
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ С МНОГОСЛОЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В.А.Львов.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим в трехмерном пространстве R_3 область $D^{(n)}$, состоящую из полупространств $z>1$, $z<0$ и слоев $kh<z<(k+1)h$, $h=\frac{1}{n}$, $k=0,1,\ldots,n-1$.

Граница области $D^{(n)}$ состоит, очевидно, из системы параллельных плоскостей $z=0,\ldots,z=kh,\ldots,z=nh=1$. В области рассмотрим следующую краевую задачу :

$$\Delta u^{(n)}(P)-\lambda^2 u^{(n)}(P)=f(P) \qquad P\in D^{(n)}, \tag{I}$$

$$\left[\left(\frac{\partial u^{(n)}(P)}{\partial z}\right)^{+}-\left(\frac{\partial u^{(n)}(P)}{\partial z}\right)^{-}\right]_{z=kh}=0, \tag{2}$$

$$\left[\left(u^{(n)}(P)\right)^{+}-\left(u^{(n)}(P)\right)^{-}\right]_{z=kh}=h\left[\varphi(P)\frac{\partial u^{(n)}(P)}{\partial z}\right]_{z=kh}, \tag{3}$$

где $[g^{+}(P)]_{z=kh}$ $([g^{-}(P)]_{z=kh})$ обозначают предельное значение функции при $z\to kh+0$ $(z\to kh-0)$, $\varphi(P)$ произвольная неотрицательная четырежды непрерывно дифференцируемая функция обращающаяся в нуль вне некоторого цилиндра $0\leqslant z\leqslant 1$, $x^2+y^2\leqslant R^2$.

Такие краевые задачи естественным образом возникают как предельные случаи вторых краевых задач, когда граница состоит из сильно изрешеченных поверхностей [I].

Рассмотрим последовательность областей $D^{(n)}$ и соответствующие им решения $U^{(n)}(P)$ краевой задачи (I), (2), (3). Нас интересует поведение решений $U^{(n)}(P)$ при $n \to \infty$. Рассмотрение частных случаев наводит на мысль, что существует предел последовательности решений $U^{(n)}(P)$ и он является во всем пространстве решением следующего уравнения:

$$\Delta_2 V(P) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1+\varphi(P)} \frac{\partial V(P)}{\partial z}\right] - \lambda^2 V(P) = f(P), \quad (4)$$

где

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только функцию Грина $G^{(n)}(P,Q;\lambda)$ краевой задачи (I), (2), (3) и функцию Грина $G(P,Q;\lambda)$ задачи (4). Нетрудно доказать, что при $\lambda^2 > 0$ они существуют.

Основной результат работы содержится в следующей теореме:

Т Е О Р Е М А I. Если точка Q лежит вне слоя $0 < z < 1$, то при $n \to \infty$ последовательность $G^{(n)}(P,Q;\lambda)$ сходится в метрике пространства $L_2(R_3)$ к функции $G(P,Q;\lambda)$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R_3} \left| G^{(n)}(P,Q;\lambda) - G(P,Q;\lambda) \right|^2 d\tau_P = 0.$$

При этом сходимость равномерна относительно $Q \in K$, где K – любое компактное множество, лежащее вне слоя $0 \leqslant z \leqslant 1$.

§ I. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ $W^{(n)}$.

Существенной частью доказательства теоремы является построение функции $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$, которая в определенном смысле аппроксимирует функцию $G^{(n)}(P,Q;\lambda)$. Вид функции $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ существенно зависит от того, в какой части области находится точка $P = P(x, y, z)$. В слоях $kh < z < (k+1)h$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ функцию $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ будем искать в виде:

$$W_k^{(n)} = a_k^{(n)}(x,y) + (z-kh)\,b_k^{(n)}(x,y) + (z-kh)^2 C_k^{(n)}(x,y), \quad (I.1)$$

где коэффициенты $a_k^{(n)}$, $b_k^{(n)}$, $C_k^{(n)}$ зависят от точки Q и параметра λ ; мы их опускаем, так как в дальнейшем $\lambda > 0$ и точка Q из полупространства $z < 0$ считаются фиксированными.

Для того, чтобы функции $W_k^{(n)}$ удовлетворяли граничным условиям (2), (3) на плоскостях $z = h, \ldots, z = (n-1)h$, необходимо положить

$$C_k^{(n)}(x,y) = \frac{b_{k+1}^{(n)}(x,y) - b_k^{(n)}(x,y)}{2h}, \quad (I.2)$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и выбрать $a_k^{(n)}$ так, чтобы при $k = 0, 1, \ldots, n-1$

$$a_k^{(n)}(x,y) - a_{k-1}^{(n)}(x,y) = h\left(\varphi(P)\Big|_{z=kh} b_k^{(n)}(x,y) + \frac{b_k^{(n)}(x,y) + b_{k-1}^{(n)}(x,y)}{2}\right).$$

Решая эту систему относительно $a_k^{(n)}$ и учитывая, что $\varphi(P)\Big|_{z=0} = 0$, получим:

$$a_k^{(n)}(x,y) = a_0^{(n)}(x,y) + h\sum_{i=0}^{k}\left[1+\varphi(P)\right]_{z=ih} b_i^{(n)}(x,y) - \frac{h}{2}\left[b_0^{(n)}(x,y) + b_k^{(n)}(x,y)\right] \quad (I.3)$$

при $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Определим теперь функцию $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ во всей области $D^{(n)}$ следующими равенствами:

$$W^{(n)}(P,Q;\lambda) = \begin{cases} G(P,Q;\lambda) & z<0 \\ W_k^{(n)}(P,Q;\lambda) & kh<z<(k+1)h \\ G(P,Q;\lambda) + hR^{(n)}(x,y,Q;\lambda)\,\chi(z) & z>1, \end{cases} \quad (I.4)$$

где функции $R^{(n)}$ и χ будут выбраны далее.

Для того, чтобы так построенная функция удовлетворяла краевым условиям (2), (3) на плоскости $z=0$, необходимо положить

$$a_0^{(n)}(x,y) = G(P,Q;\lambda)\Big|_{z=0}, \tag{I.5}$$

$$b_0^{(n)}(x,y) = \frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=0}.$$

Коэффициенты $b_k^{(n)}$ для всех $k=0,1,\dots,n$ полагаем равными

$$b_k^{(n)}(x,y) = \frac{1}{1+\varphi(P)} \; \frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=kh}. \tag{I.6}$$

Мы увидим ниже, что именно такой выбор $b_k^{(n)}$ обеспечит близость $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ к $G^{(n)}(P,Q;\lambda)$. Теперь, чтобы удовлетворить граничным условиям (2), (3) на плоскости $z=1$, необходимо выбрать функции $R^{(n)}$ и χ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\frac{d\chi(z)}{dz}\Big|_{z=1} = 0,$$

$$\left[G(P,Q;\lambda) + hR^{(n)}(x,y,Q;\lambda)\chi(z) - W_{n-1}^{(n)}(x,y,z)\right]_{z=1} = 0.$$

В качестве $\chi(z)$, выберем произвольную бесконечно дифференцируемую функцию равную 1 при $z=1$, 0 при $z \geq 1+\delta$ ($\delta>0$ и фиксировано) и производной равной 0 при $z=1$. Тогда в качестве $R^{(n)}$ следует взять

$$R^{(n)}(x,y,Q;\lambda) = \frac{1}{h}\left[W_{n-1}^{(n)}(P,Q;\lambda) - G(P,Q;\lambda)\right]_{z=1}. \tag{I.7}$$

Таким образом, из формул (I.1) – (I.7) следует, что функция $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ удовлетворяет краевым условиям (2), (3) на всех плоскостях $z=0, \dots, z=kh, \dots, z=nh=1$.

Рассмотрим функцию $G^{(n)}(P,Q;\lambda) - W^{(n)}(P,Q,\lambda)$. Из формулы (I.4) следует, что она удовлетворяет однородному уравнению

$$(\Delta-\lambda^2)\left[G^{(n)}(P,Q;\lambda) - W^{(n)}(P,Q;\lambda)\right] = 0$$

в полупространствах $z<0$ и $z>1+\delta$. В слоях $kh<z<(k+1)h$ эта функция удовлетворяет следующему уравнению

$$(\Delta-\lambda^2)\left[G^{(n)}(P,Q;\lambda)-W^{(n)}(P,Q;\lambda)\right]=-(\Delta-\lambda^2)W_k^{(n)}(P,Q;\lambda),$$

а в слое $1<z<1+\delta$ уравнению

$$(\Delta-\lambda^2)\left[G^{(n)}(P,Q;\lambda)-W^{(n)}(P,Q;\lambda)\right]=$$

$$=-(\Delta-\lambda^2)\left[\left(W_{n-1}^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)\right)_{z=1}\chi(z)\right].$$

Таким образом, функция $G^{(n)}(P,Q;\lambda)-W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ есть решение краевой задачи (I), (2), (3) с

$$f(P,Q;\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad z<0 \\ -\left[(\Delta_2-\lambda^2)a_k^{(n)}(x,y)+2C_k^{(n)}(x,y)\right]- & \\ -(z-kh)(\Delta_2-\lambda^2)B_k^{(n)}(x,y)-(z-kh)^2(\Delta_2-\lambda^2)C_k^{(n)}(x,y) & \\ & \text{при} \quad kh<z<(k+1)h \\ -(\Delta_2-\lambda^2)\left[a_{n-1}^{(n)}(x,y)+hB_{n-1}^{(n)}(x,y)+h^2C_{n-1}^{(n)}(x,y)-G(P,Q;\lambda)\Big|_{z=1}\right]\chi(z)- & \\ -\left[a_{n-1}^{(n)}(x,y)+hB_{n-1}^{(n)}(x,y)+h^2C_{n-1}^{(n)}(x,y)-G(P,Q;\lambda)\Big|_{z=1}\right]\dfrac{d^2\chi(z)}{dz^2} & \\ & \text{при} \quad 1<z<1+\delta \\ 0 & \text{при} \quad z>1+\delta. \end{cases} \tag{I.8}$$

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

Принимая во внимание то, что в дальнейшем нам понадобятся оценки для функции $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ и ее производных, докажем следующую лемму:

Л Е М М А I. Если $\varphi(P)$ четырежды непрерывно дифференцируемая функция обращающаяся в нуль вне цилиндра $0 \leqslant z \leqslant 1$, $x^2 + y^2 \leqslant R^2$ и точка Q лежит в полупространстве $z < 0$, то при $\lambda^2 > 0$ для функции Грина $G(P,Q;\lambda)$ уравнения (4) и ее производных до четвертого порядка включительно в полупространстве $z > 0$ справедливы следующие оценки:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |G(P,Q;\lambda)|^2 dxdy \leqslant C(d;\lambda),$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial x} \right|^2 dxdy \leqslant C(d;\lambda), \tag{2.1}$$

. . . .

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^4 G(P,Q;\lambda)}{\partial z^4} \right|^2 dxdy \leqslant C(d;\lambda),$$

где d расстояние от точки Q до плоскости $z = 0$, $P = P(x, y, z)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Функцию Грина уравнения (4) будем искать в следующей форме

$$G(P,Q;\lambda) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{-\lambda r_{PQ}}}{r_{PQ}} - g(P,Q;\lambda)\right],$$

где $g(P,Q;\lambda)$ есть решение во всем пространстве уравнения

$$\Delta_2 g(P,Q;\lambda) + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1+\varphi(P)} \frac{\partial g(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right] - \lambda^2 g(P,Q;\lambda) =$$
$$= -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\varphi(P)}{1+\varphi(P)} \frac{\partial}{\partial z_P}\left(\frac{e^{-\lambda r_{PQ}}}{r_{PQ}}\right)\right]. \tag{2.2}$$

Очевидно, достаточно получить оценки в метрике пространства $L_2(R_3)$ функции $g(P,Q;\lambda)$ и ее производных до четвертого порядка включительно, так как для функции $\frac{e^{-\lambda r_{PQ}}}{r_{PQ}}$ $(P = P(x,y,z),\ z > 0)$ справедлива оценка

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\lambda r_{PQ}}}{r^2_{PQ}} dxdy \leqslant c(d;\lambda), \tag{2.3}$$

и аналогичные оценки верны для ее производных.

Уравнение (2.2) имеет единственное решение [2]. Из теоремы [3] о гладкости решений уравнений эллиптического типа следует, что функция $g(P,Q;\lambda)$ вместе со своими производными до четвертого порядка включительно непрерывна во всем пространстве R_3.

Причем, существуют такие положительные постоянные a и R_1, что во всех точках, лежащих вне сферы радиуса R_1, функция $g(P,Q;\lambda)$ и ее производные имеют порядок $O(e^{-aR_1})$. Отсюда следует суммируемость с квадратом функции $g(P,Q;\lambda)$ и ее производных до четвертого порядка по любому двумерному сечению пространства R_3. Учитывая при этом оценки вида (2.3), получим (2.I). Лемма доказана.

На основании этой леммы мы можем теперь установить близость между построенной функцией $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ и функцией $G(P,Q;\lambda)$, а именно имеет место

Л Е М М А 2. Справедливы следующие оценки:

$$\Big[\int_{R_3}|W^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)|^2 d\tau_P\Big]^{1/2}\leqslant hC(Q;\lambda), \tag{2.4}$$

$$\Big[\int_{R_2}\big|\big(W^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)\big)_{z=z_0}\big|^2 d\sigma_P\Big]^{1/2}\leqslant hC(Q;\lambda), \tag{2.5}$$

$$\Big[\int_{R_2}\big|\big(\Delta_2 W^{(n)}(P,Q;\lambda)-\Delta_2 G(P,Q;\lambda)\big)_{z=z_0}\big|^2 d\sigma_P\Big]^{1/2}\leqslant hC(Q;\lambda), \tag{2.6}$$

где константа C не зависит от n, и z_0 – любое число из сегмента $[0,I]$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из равенств (I.I), (I.2), (I.3) и (I.6) следует, что в каждом слое $kh < z < (k+1)h$ ($k=0,1,\ldots,n-1$)

$$W_k^{(n)}(P,Q;\lambda)=G(P,Q;\lambda)\Big|_{z=0}+h\sum_{i=0}^{k}\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=ih}-$$

$$-\frac{h}{2}\Big[\frac{1}{1+\varphi(P)}\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=kh}+\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=0}\Big]+$$

$$+(z-\kappa h)\left[\frac{1}{1+\varphi(P)}\;\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\bigg|_{z=\kappa h}\right]+$$

$$+\frac{(z-\kappa h)^2}{2h}\left[\frac{1}{1+\varphi(P)}\;\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\bigg|_{z=(\kappa+1)h}-\frac{1}{1+\varphi(P)}\;\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\bigg|_{z=\kappa h}\right].$$

Замечая, что второе слагаемое в правой части есть интегральная сумма для $\int_0^z \frac{\partial G}{\partial z}\,dz$, перепишем эту формулу так:

$$W_\kappa^{(n)}(P,Q;\lambda)=G(P,Q;\lambda)\Big|_{z=0}+\int_0^z\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\,dz+ \tag{2.7}$$

$$+F_\kappa^{(n)}(P,Q;\lambda)=G(P,Q;\lambda)+F_\kappa^{(n)}(P,Q;\lambda),$$

где

$$F_\kappa^{(n)}(P,Q;\lambda)=\sum_{i=0}^{\kappa}\int_{ih}^{(i+1)h}\left(\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\bigg|_{z=ih}-\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right)dz-$$

$$-\int_z^{(\kappa+1)h}\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\,dz-\frac{h}{2}\left[\frac{1}{1+\varphi(P)}\;\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\bigg|_{z=\kappa h}+\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\bigg|_{z=0}\right]+$$

$$+(z-\kappa h)\left[\frac{1}{1+\varphi(P)}\;\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right]_{z=\kappa h}+\frac{(z-\kappa h)^2}{2h}\left[\frac{1}{1+\varphi(P)}\;\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\bigg|_{z=(\kappa+1)h}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{1+\varphi(P)}\;\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\bigg|_{z=\kappa h}\right].$$

Интегрирование по частям дает:

$$\int_{ih}^{(i+1)h}\left(\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\bigg|_{z=ih}-\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right)dz=\int_{ih}^{(i+1)h}\left[z-(i+1)h\right]\frac{\partial^2 G(P,Q;\lambda)}{\partial z^2}\,dz\,.$$

Используя это равенство и неравенство Коши-Буняковского будем иметь согласно (2.7)

$$|W_k^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)|^2 \leqslant C\left\{h^2\sum_{i=0}^{k}\int_{ih}^{(i+1)h}\left|\frac{\partial^2 G(P,Q;\lambda)}{\partial z^2}\right|^2 dz + \right.$$

$$+h\int_{kh}^{(k+1)h}\left|\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right|^2 dz + h^2\left|\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=0}\right|^2 +$$

$$+\left[h^2+(z-kh)^2+\frac{(z-kh)^4}{h^2}\right]\left|\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=kh}\right|^2 +$$

$$\left.+\frac{(z-kh)^4}{h^2}\left|\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=(k+1)h}\right|^2\right\},$$

поэтому

$$\iint_{-\infty}^{\infty}|W_k^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)|^2\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{h^2\sum_{i=0}^{k}\int_{ih}^{(i+1)h}\iint_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^2 G(P,Q;\lambda)}{\partial z^2}\right|^2 dx\,dy\,dz + \right.$$

$$+h\int_{kh}^{(k+1)h}\iint_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right|^2 dx\,dy\,dz + h^2\iint_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=0}\right|^2 dx\,dy +$$

$$+\left[h^2+(z-kh)^2+\frac{(z-kh)^4}{h^2}\right]\iint_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=kh}\right|^2 dx\,dy +$$

$$+\frac{(z-kh)^4}{h^2}\iint_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=(k+1)h}\right|^2 dx\,dy,$$

откуда, используя лемму I, получим:

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}|W_k^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)|^2dxdy \leqslant C\Big\{h^2C(Q;\lambda)\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{ih}^{(i+1)h}dz +$$

$$+hC(Q;\lambda)\int\limits_{kh}^{(k+1)h}dz + h^2C(Q;\lambda)+\Big[h^2+(z-kh)^2+\frac{(z-kh)^4}{h^2}\Big]C(Q;\lambda)+$$

$$+\frac{(z-kh)^4}{h^2}C(Q;\lambda)\Big\} \leqslant h^2C_1(Q;\lambda), \qquad (2.8)$$

$$(kh < z < (k+1)h \qquad \text{и} \qquad k=0,1,\ldots,n\ 1).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1\iint\limits_{-\infty}^{\infty}|W_k^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)|^2dxdydz \leqslant h^2C_1(Q;\lambda). \qquad (2.9)$$

Рассмотрим слой $1 < z < 1+\delta$. Из равенств (I.4) и (I.7) следует, что $W^{(n)}$ в этом слое можно представить так:

$$W^{(n)}(P,Q;\lambda)=G(P,Q;\lambda)+\Big[W_{n-1}^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)\Big]_{z=1}\chi(z).$$

Из этого равенства, оценки (2.8) и свойств функции $\chi(z)$ получаем

$$\int\limits_1^{1+\delta}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}|W^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)|^2dxdydz \leqslant h^2C_1(Q;\lambda) \qquad (2.10)$$

Так как разность функций $W^{(n)}$ и G в полупространствах $z<0$ и $z>1+\delta$ равна нулю, то из неравенств (2.9) и (2.10) следует оценка (2.4). Оценка (2.5) следует из неравенства (2.8).

Доказательство оценки (2.6) проведем следующим образом. Подействуем оператором $\Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ на левую и правую часть равенства (2.7). Из равенства

$$\int\limits_{ih}^{(i+1)h}\Big[\Delta_2\Big(\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=ih}\Big)-\Delta_2\Big(\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big)\Big]dz=$$

$$=\int\limits_{ih}^{(i+1)h}[z-(i+1)h]\,\Delta_2\Big(\frac{\partial^2G(P,Q;\lambda)}{\partial z^2}\Big)dz$$

и неравенства Коши-Буняковского следует:

$$|\Delta_2 W_\kappa^{(n)}(P,Q;\lambda)-\Delta_2 G(P,Q;\lambda)|^2\leqslant C\Big\{h^2\sum_{i=0}^{\kappa}\Big|\Delta_2\Big(\frac{\partial^2 G(P,Q;\lambda)}{\partial z^2}\Big)\Big|^2 dz+$$

$$+h\int_{\kappa h}^{(\kappa+1)h}\Big|\Delta_2\Big(\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big)\Big|^2 dz+h^2\Big|\Delta_2\Big(\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=0}\Big)\Big|^2+$$

$$+\Big[h^2+(z-\kappa h)^2+\frac{(z-\kappa h)^4}{h^2}\Big]\Big|\Delta_2\Big(\frac{1}{1+\varphi(P)}\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=\kappa h}\Big)\Big|^2+$$

$$+\frac{(z-\kappa h)^4}{h^2}\Big|\Delta_2\Big(\frac{1}{1+\varphi(P)}\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=(\kappa+1)h}\Big)\Big|^2\Big\}.$$

Отсюда, используя лемму I, получим

$$\iint_{-\infty}^{\infty}|\Delta_2 W_\kappa^{(n)}(P,Q;\lambda)-\Delta_2 G(P,Q;\lambda)|^2 dx\,dy\leqslant h^2 C(Q;\lambda)$$

($\kappa h<z<(\kappa+1)h,\ \ \kappa=0,1,\dots,n-1$), откуда и вытекает оценка (2.6). Лемма доказана.

Л Е М М А 3. Для функции $f(P,Q;\lambda)$ (см. формулу I.8) справедлива оценка

$$\Big[\int_{R_3}|f(P,Q;\lambda)|^2 d\tau_P\Big]^{1/2}\leqslant hC(Q;\lambda), \qquad (2.II)$$

где константа C не зависит от n.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из равенств (I.2), (I.6) и равенства $a_\kappa^{(n)}=W_\kappa^{(n)}\big|_{z=\kappa h}$ следует, что в каждом слое $\kappa h<z<(\kappa+1)h$ $(\kappa=0,1,\dots,n-1)$

$$f(P,Q;\lambda)=-\Big[(\Delta_2-\lambda^2)G(P,Q;\lambda)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{1}{1+\varphi(P)}\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big)\Big]_{z=\kappa h}-$$

$$-\Big[\frac{1}{h}\Big(\frac{1}{1+\varphi(P)}\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=(\kappa+1)h}-\frac{1}{1+\varphi(P)}\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Big|_{z=\kappa h}\Big)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=kh}\Bigg]-(\Delta_2-\lambda^2)\left[W_k^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)\right]_{z=kh}-$$

$$-(z-kh)(\Delta_2-\lambda^2)\left[\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right]_{z=kh}-$$

$$-\frac{(z-kh)^2}{2h}(\Delta_2-\lambda^2)\left[\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Bigg|_{z=(k+1)h}-\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\Bigg|_{z=kh}\right].$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю, это следует из определения функции Грина для уравнения (4) (точка Q лежит в полупространстве $z<0$). Второе слагаемое равно

$$-\frac{1}{h}\int\limits_{kh}^{(k+1)h}\left[(k+1)h-z\right]\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right)dz,$$

что легко проверяется интегрированием по частям.

Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского, получим:

$$|f(P,Q;\lambda)|^2\leqslant C\Bigg\{h\int\limits_{kh}^{(k+1)h}\left|\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right)\right|^2 dz+$$

$$+\left|(\Delta_2-\lambda^2)\left[W_k^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)\right]_{z=kh}\right|^2+\left[(z-kh)^2+\frac{(z-kh)^4}{h^2}\right]\cdot$$

$$\left|(\Delta_2-\lambda^2)\left[\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right]_{z=kh}\right|^2+\frac{(z-kh)^4}{h^2}\left|(\Delta_2-\lambda^2)\left[\frac{1}{1+\varphi(P)}\,\frac{\partial G(P,Q;\lambda)}{\partial z}\right]_{z=(k+1)h}\right|^2\Bigg\},$$

откуда, согласно леммам I и 2, следует

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}|f(P,Q;\lambda)|^2\,dx\,dy\leqslant h^2 C_1(Q;\lambda)$$

($kh<z<(k+1)h,\ k=0,1,\dots,n-1$), и, значит,

$$\int\limits_0^1\iint\limits_{-\infty}^{\infty}|f(P,Q;\lambda)|^2\,dx\,dy\,dz\leqslant h^2 C_1(Q;\lambda). \qquad (2.12)$$

В слое $1<z<1+\delta$

$$f(P,Q;\lambda) = -(\Delta_2-\lambda^2)\left[W_\kappa^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)\right]_{z-1}\chi(z)-$$
$$-\left[W_\kappa^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)\right]_{z-1}\frac{d^2\chi(z)}{dz^2}.$$

Из оценок (2.5), (2.6), леммы 2 и свойств функции $\chi(z)$ получаем.

$$\int_1^{1+\delta}\iint_{-\infty}^{\infty}|f(P,Q;\lambda)|^2\,dx\,dy\,dz \leqslant h^2 C_1(Q;\lambda). \qquad (2.13)$$

Так как функция $f(P,Q;\lambda)$ в полупространствах $z<0$ и $z>1+\delta$ равна нулю, то из неравенств (2.12) и (2.13) следует оценка (2.11). Лемма доказана.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.

В § I мы построили функцию $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$, которая в силу леммы 2 близка к функции Грина задачи (4) в метрике пространства $L_2(R_3)$, то есть

$$\left[\int_{R_3}|W^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)|^2 d\tau_p\right]^{1/2} \leqslant hC(Q;\lambda). \qquad (3.1)$$

С другой стороны было показано, что функция $G^{(n)}(P,Q;\lambda)-$ $-W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ есть решение краевой задачи (I), (2), (3) с правой частью $f(P,Q;\lambda)$, для которой справедлива оценка (2.II).

Дадим теперь оценку для функции $G^{(n)}(P,Q;\lambda)-W^{(n)}(P,Q;\lambda)-$ $-\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)$ в метрике пространства $L_2(R_3)$. Для этого рассмотрим последовательность областей $V_\kappa(R)$ $(\kappa=-1,0,1,\dots,n)$, получаемую рассечением шара радиуса R с центром в начале координат системой параллельных плоскостей $z=0,\dots,z=\kappa h,\dots,z=nh=1$. Таким образом, $V_{-1}(R)$ представляет собой полушар ($z<0$); $V_\kappa(R)$ $(\kappa=0,1,\dots,n-1)$ шаровой слой, заключенный между плоскостями $z=\kappa h$ и $z=(\kappa+1)h$; $V_n(R)$ шаровой сегмент ($z>0$), отсекаемый плоскостью $z=1$. Соответственно границы указанных областей обозначим $\Sigma_\kappa(R)$.

Умножив левую и правую часть уравнения

$$\Delta\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda) - \lambda^2\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda) = f(P,Q;\lambda) \qquad (3.2)$$

на $\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)$ и, интегрируя по каждой из указанных областей, получаем:

$$\iiint\limits_{V_K(R)} \Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\,\Delta\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\,dx\,dy\,dz - \qquad (3.3)$$

$$-\lambda^2\iiint\limits_{V_K(R)}\left[\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\right]^2 dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V_K(R)}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)f(P,Q;\lambda)\,dx\,dy\,dz.$$

Заменяя первое слагаемое в левой части по формуле Грина, получаем:

$$-\iiint\limits_{V_K(R)}\left[\nabla\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\right]^2 dx\,dy\,dz + \iint\limits_{\Sigma_K(R)}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\frac{\partial}{\partial n}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\,d\sigma_P - \qquad (3.4)$$

$$-\lambda^2\iiint\limits_{V_K(R)}\left[\left(\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\right]^2 dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V_K(R)}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\,f(P,Q;\lambda)\,dx\,dy\,dz.$$

Складывая все выражения вида (3.4), получим:

$$-\iiint\limits_{V(R)}\left[\nabla\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\right]^2 dx\,dy\,dz - \sum_{K=0}^{n}\iint\limits_{S(R_K)}\Big\{\left(\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\right)^+ \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial z}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\right)^+ - \left(\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\right)^-\left(\frac{\partial}{\partial z}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\right)^-\Big\}_{z=Kh} dx\,dy +$$

$$+\iint\limits_{\Sigma(R)}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\frac{\partial}{\partial n}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\,d\sigma_P - \qquad (3.5)$$

$$-\lambda^2\iiint\limits_{V(R)}\left[\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\right]^2 dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{V(R)}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\,f(P,Q;\lambda)\,dx\,dy\,dz,$$

где $V(R)$ – шар радиуса R, $\Sigma(R)$ – поверхность шара и $S(R_K)$ – площадь сечения шара радиуса R с центром в начале координат плоскостью $z = kh$.

Так как функция $\varphi(P)$ финитна и $\lambda^2 > 0$, то известно, что $G^{(n)}(P, Q; \lambda)$ убывает на бесконечности экспоненциально вместе со своими производными. Из построения функции $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ и свойств функции $G(P,Q;\lambda)$ следует, что $W^{(n)}(P,Q;\lambda)$ вместе со своими производными на бесконечности имеет тот же порядок убывания.

Учитывая это и переходя в (3.5) к пределу при $R \to \infty$ получим:

$$-\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[\nabla\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)]^2\,dxdydz - \sum_{k=0}^{n}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{\big(\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\big)^+ \cdot$$
$$\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\Big)^+ - \big(\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\big)^-\Big(\frac{\partial}{\partial z}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\Big)^-\Big\}_{z=kh}dxdy -$$
$$-\lambda^2\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)]^2\,dxdydz = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)f(P,Q;\lambda)\,dxdydz.$$

Из краевых условий (2), (3) для функции $\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)$ следует, что

$$-\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[\nabla\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)]^2\,dxdydz - h\sum_{k=0}^{n}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{\varphi(P)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)\Big]^2\Big\}_{z=kh}dxdy -$$
$$-\lambda^2\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)]^2\,dxdydz = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)f(P,Q;\lambda)\,dxdydz.$$

Отсюда и из неотрицательности $\varphi(P)$ имеем

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}[\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)]^2\,dxdydz \leqslant -\frac{1}{\lambda^2}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)f(P,Q;\lambda)\,dxdydz.$$

Воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского получим:

$$\Big[\int_{R_3}|\Gamma^{(n)}(P,Q;\lambda)|^2d\tau_P\Big]^{1/2} \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\Big[\int_{R_3}|f(P,Q;\lambda)|^2d\tau_P\Big]^{1/2},$$

откуда, согласно леммы 3, следует

$$\left[\int_{R_3}\left|G^{(n)}(P,Q;\lambda)-W^{(n)}(P,Q;\lambda)\right|^2 d\tau_P\right]^{1/2}\leqslant hC_1(Q;\lambda) \quad (3.6)$$

Из оценок (3.I) и (3.6) получаем:

$$\left[\int_{R_3}\left|G^{(n)}(P,Q;\lambda)-G(P,Q;\lambda)\right|^2 d\tau_P\right]^{1/2}\leqslant hC_2(Q;\lambda),$$

где контанта C_2 не зависит от n. Тем самым теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если носитель финитной функции $f(P)\in L_2$ лежит вне слоя $0\leqslant z\leqslant 1$, то при $n\to\infty$ последовательность $u^{(n)}(P)$ решений краевой задачи (I), (2), (3) сходится в метрике пространства $L_2(R_3)$ к функции $V(P)$, являющейся решением уравнения (4).

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.А.Марченко за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

I. В.А.Марченко и Г.В.Сузиков, Вторая краевая задача в области со сложной границей. Матем. сб. 69 : I, 35-60, I966.

2. К.Миранда, Уравнения с частными производными эллиптического типа. Изд-во иностр. лит., М., I957.

3. Л.Берс, Ф.Джон, М.Шехтер, Уравнения с частными производными. Изд-во иностр. лит., М., I966.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

ГОМЕОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Е.А.Щербаков

1. В плоскости $\zeta=\xi+i\eta$, в области G, ограниченной кривой g, рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка, вырождающихся на части g_0 границы g:

$$\pi_1(\xi,\eta)\Phi_\xi(\xi,\eta)=\Psi_\eta(\xi,\eta),\quad \pi(\xi,\eta)\Phi_\eta(\xi,\eta)=-\Psi_\xi(\xi,\eta). \qquad (1.1)$$

Будем считать, что ограниченная область G расположена в полуплоскости $\eta>0$. Относительно границы g предположим, что ее вид определяется формулой:

$$\eta=\eta(\xi), \qquad (1.2)$$

где $\eta(\xi)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция. Кроме того предположим, что для границы g имеет место параметрическое представление:

$$\eta=\eta(t), \qquad (1.3)$$

$$\xi=\xi(t), \qquad (1.4)$$

где $\eta(t)$, $\xi(t)$ – дважды непрерывно дифференцируемые функции переменной t, первые производные которых отличны от нуля в области T изменения параметра t, функции $\xi(t)$, $\eta(t)$ устанавливают взаимно-однозначное соответствие между T и g, исключая концы T. Относительно границы g предположим дополнительно, что часть g_0 границы g расположена на оси $\eta=0$, причем начало координат находится на отрезке g_0. Правый и левый концы отрезка g_0 обозначим соответственно P_α, P_β.

Относительно функции $\pi(\xi,\eta)$ предположим, что она непрерывна в замкнутой области $\bar{G}=G\cup g$, положительна в $\bar{G}\setminus g_0$, а на линии вырождения g_0 обращается в нуль: $\pi(\xi,0)=0$, причем при приближении точки ς к g_0 имеют место неравенства:

$$B\eta^{1-\alpha}\leqslant\pi(\xi,\eta)\leqslant A\eta^{1-\alpha},\qquad 0<\alpha<\frac{1}{2}. \tag{I.5}$$

Производные первого порядка $\pi_\xi(\xi,\eta)$, $\pi_\eta(\xi,\eta)$ функции $\pi(\xi,\eta)$ непрерывны по Гельдеру внутри G и принадлежат пространству $\mathcal{L}_{2+\beta}(G)$, $\beta>0$.

Т Е О Р Е М А I. Существует решение системы (I.I), осуществляющее топологическое отображение области G на себя.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. I. Пусть $\omega(z)$ – конформное преобразование единичного круга $\bar{S}:|z|\leqslant 1$ из плоскости $z=x+iy$ на область $\bar{G}$, нормированное, например, соответствием трех пар точек: $\omega(z_i)=\varsigma_i$, $i=1,2,3$. Точки z_i принадлежат границе $\Gamma:|z|=1$ круга S. Точки ς_i принадлежат границе g области G, причем ни одна из этих точек не лежит на дуге g_0. Пусть $z_\alpha=\omega^{-1}(P_\alpha)$, $z_\beta=\omega^{-1}(P_\beta)$, здесь $\omega^{-1}(\varsigma)$ – конформное преобразование области $\bar{G}$ на круг $\bar{S}$, обратное к преобразованию $\omega(z)$. Обозначим через Γ_0 дугу с концами z_α, z_β, лежащую на границе Γ и являющуюся прообразом линии вырождения g_0 при отображении $\omega(z)$. Введем функцию $w(z)=\Omega(\omega(z))$, где $\Omega(\varsigma)=\Phi(\varsigma)+i\Psi(\varsigma)$ и функции $\Phi(\varsigma)$, $\Psi(\varsigma)$ удовлетворяют системе (I.I). При таком выборе функций $\Phi(\varsigma)$ и $\Psi(\varsigma)$ функция $w(z)=\varphi(z)+i\psi(z)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$w_{\bar{z}}(z)=q(z)\cdot\overline{w_z(z)}, \tag{I.6}$$

$$q(z)=\frac{1-p(z)}{1+p(z)},\quad p(z)=\pi(\omega(z)). \tag{I.7}$$

Здесь $w_{\bar{z}}(z)$ – производная $\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}$ от функции $w(z)$, $w_z(z)$ – производная $\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}$ от функции $w(z)$.

Введем теперь последовательность гомеоморфизмов $\Omega^n(\varsigma)=\Phi^n(\varsigma)+i\Psi^n(\varsigma)$ области $\bar{G}$ на себя, удовлетворяющих следующим системам уравнений:

$$\pi^n(\xi,\eta)\Phi^n_\xi(\xi,\eta)=\Psi^n_\eta(\xi,\eta),\ \pi^n(\xi,\eta)\Phi^n_\eta(\xi,\eta)=-\Psi^n_\xi(\xi,\eta), \tag{I.8}$$

$$\pi^n(\xi,\eta)=\pi(\xi,\eta)+\frac{1}{n},\qquad n=1,2,\ldots \tag{I.9}$$

и нормированных следующим соответствием граничных точек: $\Omega^n(\xi_i) = W_i$, $i = 1,2,3$. Две точки, например W_1, W_2 из плоскости $w = \varphi + i\psi$ образа области G выбираются на прямой $\varphi = 0$. В остальном нормировка произвольна. Доказательство существования таких гомеоморфизмов см. в [I], стр. 226. Функции $w^n(z) = \Omega^n(\omega(z)) = \varphi^n(z) + i\psi^n(z)$ при указанном выборе функций $\Omega^n(\xi)$ осуществляют топологическое отображение круга S из плоскости z на область $\bar{G}$ из плоскости w и удовлетворяют следующим уравнениям:

$$w^n_{\bar{z}}(z) = q_n(z)\,\overline{w^n_z(z)}, \qquad n = 1, 2, \ldots; \qquad \text{(I.I0)}$$

$$q_n(z) = \frac{1 - p^n(z)}{1 + p^n(z)}, \qquad p^n(z) = \pi^n(\omega(z)) \qquad \text{(I.II)}$$

и нормированы соответствием трех пар граничных точек: $w^n(\xi_i) = W_i$, $i = 1, 2, 3$. В силу условий, наложенных на границу g, касательная к ней составляет с осью ξ угол, который как функция дуги удовлетворяет условию Липшица. Это означает, что производная $\omega_z(z)$ конформного отображения $\omega(z)$ ограничена в $\bar{S}$ (см. [2], стр. 4II). Далее, так как производные $\pi^n_\xi(\xi, \eta)$, $\pi^n_\eta(\xi, \eta)$ принадлежат пространству $W^1_{2+\beta}(G)$ и равномерно в нем ограничены, то производные $p^n_x(x, y)$, $p^n_y(x, y)$ принадлежат пространству $W^1_{2+\beta}(S)$ и равномерно в нем ограничены.

2. Покажем, что некоторая подпоследовательность $w^{n_k}(z)$ последовательности $w^n(z)$ равномерно сходится во всякой замкнутой области $\bar{S} \setminus D(\Gamma_0, \varepsilon)$, $D(\Gamma_0, \varepsilon) = \{z : \rho(z, \Gamma_0) < \varepsilon\}$. Действительно, из (I.I0) следует:

$$|w^n_{\bar{z}}(z)|^2 = \frac{q_n^2(z)}{1 - q_n^2(z)} \cdot J_n(z), \qquad n = 1, 2, \ldots; \qquad \text{(I.I2)}$$

$$|w^n_z(z)|^2 = \frac{1}{1 - q_n^2(z)} \cdot J_n(z), \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad \text{(I.I3)}$$

Здесь $J_n(z)$ – якобиан отображения $w^n(z)$. Из (I.I2), (I.I3) получаем:

$$\iint\limits_{S \setminus D(\Gamma_0, \varepsilon)} [\operatorname{grad}^2 \varphi^n(z) + \operatorname{grad}^2 \psi^n(z)]\, dS \le k(\varepsilon). \qquad \text{(I.I4)}$$

Из (I.I4) следует, что последовательность $\{w^n(z)\}$ компактна в смысле равномерной сходимости в области $\bar{S} \setminus D(\Gamma_0, \varepsilon)$ (см. [3], стр. 53). Выберем сходящуюся подпоследовательность $w^{n_k}(z)$. Предельная функция $w(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ этой подпоследовательности отлична от постоянной в силу нормировки функций $w^n(z)$.

3. Докажем теперь, что предельная функция $w(z)$ имеет производные первого порядка непрерывные по Гельдеру внутри круга S с показателем Гельдера, равным показателю Гельдера функций $\pi_\xi(\xi,\eta)$, $\pi_\eta(\xi,\eta)$, причем эти производные удовлетворяют уравнению (I.6). Для доказательства введем последовательность функций $W^n(z)$:

$$W^n(z) = i(p^n(z)\varphi^n(z) + i\Psi^n(z)), \quad n=1,2,\ldots \qquad (I.15)$$

Производные $W^n_{\bar z}(z)$ функций $W^n(z)$ в силу уравнений (I.10) равны:

$$W^n_{\bar z}(z) = i(p^n_x(z) + ip^n_y(z))\varphi^n(z), \quad n=1,2,\ldots \qquad (I.16)$$

Так как функции $W^n(z)$ и их производные $W^n_{\bar z}(z)$ непрерывны в $\bar S$, то для функций $W^n(z)$ имеют место представления (см. [4], стр. 189):

$$W^n(z) = \Phi^n(z) - \frac{1}{2\pi}\iint_S\Big[\frac{(P_\xi(\zeta)+iP_\eta(\zeta))\varphi^n(\zeta)}{z-\zeta} - \frac{z(P_\xi(\zeta)-iP_\eta(\zeta))\varphi^n(\zeta)}{(1-z\bar\zeta)}\Big]dS_\zeta. \qquad (I.17)$$

$$\Phi^n(z) = u^n(z) + i\vartheta^n(z) = u^n_0 + \frac{i}{2\pi}\oint_\Gamma p^n(\zeta)\varphi^n(\zeta)\times \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\,dt, \quad \zeta=e^{it}, \quad u^n_0 = \oint_\Gamma \Psi^n(\zeta)dt. \qquad (I.18)$$

Так как производные $P_\xi(\xi,\eta)$, $P_\eta(\xi,\eta)$ непрерывны по Гельдеру внутри S и принадлежат пространству $W^1_{2+\beta}(S)$, а производные $\Phi_z(z)$ непрерывны внутри S и, кроме того, функции $\varphi^n(z)$ равномерно ограничены в $\bar S$, то последовательность $\varphi^n(z)$ равномерно ограничена в пространстве Гельдера $C_\mu(\bar S')$, где $\bar S' \subset S$ – любая внутренняя замкнутая подобласть S и показатель μ равен показателю Гельдера функций $\pi_\xi(\xi,\eta)$, $\pi_\eta(\xi,\eta)$. Следовательно, для всякой внутренней подобласти $\bar S' \subset S$ для производных $W^n_z(z)$ функций $w^n(z)$ имеют место представления (см. [1], стр. 73):

$$W^n_z(z) = \Phi^n_z(z) - \frac{1}{2\pi}\iint_{S'}\Big[\frac{(P^n_\xi(\zeta)+iP^n_\eta(\zeta))\varphi^n(\zeta)}{(z-\zeta)^2} - \frac{(P^n_\xi(\zeta)-iP^n_\eta(\zeta))\varphi^n(\zeta)}{(1-z\bar\zeta)^2}\Big]dS_\zeta. \qquad (I.19)$$

Так как сингулярный интегральный оператор $\iint_{S'}\Big[\frac{A(\zeta)}{(z-\zeta)^2} + \frac{B(\zeta)}{(1-z\bar\zeta)^2}\Big]dS_\zeta$ ограничен в пространстве $C_\mu(S')$ (см. [1], стр. 73), то последовательность $W^n_z(z)$ равностепенно непрерывна во всякой замкнутой области $S^1 \subset S$. Как видно из (I.19), эта последовательность ограничена в $\bar{S}^1$, и поэтому в силу теорем Арцеля и Монтеля она компактна в смысле равномерной сходимости внутри S. Ввиду того, что производные функции $w^n(z)$ выражаются через производные функций $W^n(z)$ по следующим формулам

$$
\begin{aligned}
w^n_z(z) = {} & Re\,(W^n_z(z) + W^n_{\bar z}(z))\cdot \frac{1}{2p^n(z)} + \\
& + Re\,(W^n_z(z) - W^n_{\bar z}(z))\cdot \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\, Jm\,(W^n_z(z) + W^n_{\bar z}(z)) + \\
& + i Jm\,(W^n_z(z) - W^n_{\bar z}(z))\cdot \frac{1}{2p^n(z)} - \frac{i}{2p^n(z)} \times \\
& \times (p^n_x(z) - i p^n_y(z))\, \varphi^n(z),
\end{aligned}
\tag{I.20}
$$

$$
\begin{aligned}
w^n_{\bar z}(z) = {} & Re\,(W^n_z(z) + W^n_{\bar z}(z))\cdot \frac{1}{2p^n(z)} - \\
& - Re\,(W^n_z(z) - W^n_{\bar z}(z))\cdot \frac{1}{2} - \frac{i}{2p^n(z)}\cdot Jm\,(W^n_z(z) - \\
& - W^n_{\bar z}(z)) + \frac{i}{2}\, Jm\,(W^n_z(z) + W^n_{\bar z}(z)) - \frac{i}{2p^n(z)} \times \\
& \times (p^n_x(z) - i p^n_y(z)\, \varphi^n(z),
\end{aligned}
\tag{I.21}
$$

то, выбирая сходящиеся подпоследовательности $W^{n_k}_{\bar z}(z)$, $W^{n_k}_z(z)$ и совершая предельный переход в (I.10), мы получим, что предельная функция $w(z)$ удовлетворяет уравнению (I.6). При этом, как следует из вышеприведенных рассуждений, производные первого порядка функции $w(z)$ непрерывны по Гельдеру внутри S с показателем, равным показателю Гельдера функций $\mathcal{J}_\xi(\xi,\eta)$, $\mathcal{J}_\eta(\xi,\eta)$.

4. Покажем, что предельная функция $W(z)$ непрерывна в замкнутом круге $\bar{S}$. С этой целью предварительно докажем следующую лемму:

Л Е М М А. Если аналитическая в круге S функция $\Phi(z)$ с ограниченным интегралом Дирихле имеет угловое предельное значение в точке z_0 и при подходе к точке z_0 по окружности Γ имеет правый и левый пределы, то эти пределы совпадают.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Для доказательства оценим длину дуги $\Phi(\gamma_t)$, являющуюся образом дуги γ_t окружности Γ_t радиуса t с центром в точке z_0 при отображении $\Phi(z) = u(z) + i v(z)$:

$$\mathscr{L}^2[\Phi(\gamma_t)] \leq A\left(\int_{\gamma_t}\sqrt{u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)}\cdot\sqrt{dx^2+dy^2}\right)^2 \leq$$

$$\leq 2A_1\pi t\int_{\gamma_t}(u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y))\sqrt{dx^2+dy^2}\,. \qquad (I.22)$$

Здесь $\mathscr{L}[\Phi(\gamma_t)]$ – длина дуги $\Phi(\gamma_t)$.

Далее, интегрируя обе части неравенства (22) по t , получим:

$$\int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}}\frac{\mathscr{L}^2[\Phi(\gamma_t)]}{t}dt \leq 2A_1\pi\int_{\varepsilon}^{\sqrt{\varepsilon}}\left(\int_{\gamma_t}(u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y))\sqrt{dx^2+dy^2}\right)dt \qquad (I.23)$$

Пусть $\mathscr{L}^2$ – нижняя грань значений $\mathscr{L}^2[\Phi(\gamma_t)]$, $\varepsilon \leq t \leq \sqrt{\varepsilon}$. Тогда из (I.2) получим:

$$\mathscr{L}^2\cdot\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\varepsilon} \leq \Delta\,. \qquad (I.24)$$

Из (I.2) следует, что найдется такая дуга $\gamma_{\tau(\varepsilon)}$, $\varepsilon \leq \tau(\varepsilon) \leq \sqrt{\varepsilon}$, что

$$\mathscr{L}[\Phi(\gamma_{\tau(\varepsilon)})] \leq \Delta_0 \ln^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\varepsilon}\,. \qquad (I.25)$$

Здесь Δ_0 – некоторая константа, независящая от ε . Пусть $\bar{\gamma}_{\tau(\varepsilon)}$ – последовательность дуг, стягивающихся к точке z_0 , $\varepsilon \to 0$, для которых имеет место неравенство (I.25). Для произвольных точек, лежащих на таких дугах, имеем:

$$|w(\zeta) - w(z)| \leq \delta,\ |\zeta - z_0| = |z - z_0| \leq \varepsilon_1(\delta). \qquad (I.26)$$

Пусть точка z при всех ε лежит на фиксированном луче, исходящем из точки z_0 . В таком случае имеем:

$$|w(z) - w(z_0)| \leq \delta,\quad |z - z_0| \leq \varepsilon_2(\delta). \qquad (I.27)$$

Из (I.26), (I.27) получаем

$$|w(\zeta) - w(z_0)| \leq 2\delta,\ |\zeta - z_0| \leq \varepsilon,\ \varepsilon = \min(\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta)). \qquad (I.28)$$

Так как существуют правый и левый пределы $\Phi(z)$, $z \to z_0$, $z \in \Gamma$, то функция $\Phi(z)$ непрерывна на Γ в точке z_0. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь предельную функцию $W(z)$:

$$W(z) = (p(z)\varphi(z) + i\psi(z))i = \Phi(z) - \frac{1}{2\pi}\iint_S\left[\frac{p_1(\zeta)+ip_2(\zeta)}{z-\zeta}\times\right. \qquad (I.29)$$

$$\left.\times\varphi(\zeta) - \frac{z(p_1(\zeta)-ip_2(\zeta))}{1-z\bar{\zeta}}\varphi(\zeta)\right]dS_\zeta\,.$$

$$\Phi(z) = u(z) + i\vartheta(z) = u_0 + \frac{i}{2\pi}\oint_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \frac{\xi + z}{\xi - z}\, p(\xi)\varphi(\xi)\, dt. \qquad (I.30)$$

Для производных $W_z(z)$, $W_{\bar z}(z)$ функции $W(z)$ имеет место представление:

$$W_{\bar z}(z) = i\,(p_x(z) + i p_y(z))\,\varphi(z). \qquad (I.31)$$

$$W_z(z) = p(z)\varphi_y(z) - p_y(z)\varphi(z) - \Psi_x(z) + ip(z)\varphi_x(z) + ip_x(z)\varphi(z) -$$
$$- i\Psi_y(z) - \Phi_z(z) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_S \Big[\frac{(p_3(\xi) + ip_2(\xi))\varphi(\xi)}{(z-\xi)^2} - \frac{(p_1(\xi) - ip_1(\xi))\varphi(\xi)}{(1 - z\bar\xi)^2}\Big] d\varepsilon_S \qquad (I.32)$$

Далее, так как $W^n(z)$ – последовательность отображений класса $B\mathcal{L}_K$ в S (см. [5] ,стр. 22), то и $W(z) \in B\mathcal{L}_K$ (см. [5], стр.22). Поэтому из (I.31), (I.32) следует, что $u(z) \in W_2^1(S)$, $v(z) \in W_2^1(S)$,т.е. интеграл Дирихле аналитической функции $\Phi(z)$ ограничен. Так как функция $p(z)\varphi(z)$ непрерывна по Гельдеру в точках z_α, z_β, то функция $\Phi(z)$ имеет в этих точках угловые предельные значения.

Далее, так как интегралы (I.14), (I.29) ограничены, то функция $w(z)$ однолистна на участке $\Gamma\setminus\Gamma_0$ границы Γ (см. [5], стр.70). Поэтому при подходе к точкам z_α, z_β по дуге $\Gamma\setminus\Gamma_0$ существуют предельные значения W_α, W_β, соответственно. Покажем теперь, что производная $\Phi_{\bar z}(z)$ аналитической функции $\Phi(z)$ суммируема на дуге Γ_0. В круге $\bar S$ введем полярную систему координат (τ, Θ) с центром в нуле. Точки, лежащие на дуге Γ_0, будут иметь координаты $(1, \Theta)$,

$$\Theta_1 \leqslant \Theta \leqslant \Theta_2, \quad z_\alpha = e^{i\Theta_1}, \quad z_\beta = e^{i\Theta_2}.$$

В каждой точке $z \in \Gamma_0 \setminus (z_\alpha \cup z_\beta)$ для производной $\Phi_z(z)$ функции $\Phi(z)$ имеем представление:

$$\Phi_z(z) = \int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \frac{p(\xi)\varphi(\xi)}{(z-\xi)^2}\, dt. \qquad (I.33)$$

Из (I.33) получаем:

$$\int_{\Gamma_0} |\Phi_z(z)|\, d\tau = \int_{\Gamma_0} \Big|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \frac{p(\xi)\varphi(\xi)}{(z-\xi)^2}\, dt\Big|\, d\tau \leqslant \qquad (I.34)$$
$$\leqslant \int_{\Gamma_0}\Big(\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} \frac{|p(\xi)\varphi(\xi)|}{|z-\xi|^2}\, dt\Big)\, d\tau, \quad z = e^{i\tau}.$$

Так как подынтегральное выражение в правой части неравенства (I.34) представляет собой неотрицательную измеримую функцию, то (см. [6], стр.145):

$$\int\limits_{\Gamma_0}\Big(\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_0}\frac{|p(\xi)\varphi(\xi)|}{|z-\xi|^2}dt\Big)d\tau=\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_0}|p(\xi)\varphi(\xi)|\Big(\int\limits_{\Gamma_0}\frac{d\tau}{|z-\xi|^2}\Big)\,dt. \qquad (I.35)$$

Пусть $\Gamma_1\cup\Gamma_2=\Gamma\setminus\Gamma_0$ – следующее разбиение множества

$$\Gamma\setminus\Gamma_0:\ \Gamma_1'=\{z=e^{i\tau}:|\tau-\Theta_1|<\tfrac{\pi}{2}\},$$

$$\Gamma_1''=\{z=e^{i\tau}:|\tau-\Theta_2|<\tfrac{\pi}{2}\},\quad \Gamma_1=\Gamma_1'\cup\Gamma_1''.$$

Интеграл в правой части (I.35) перепишем следующим образом:

$$\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0}|p(\xi)\varphi(\xi)|\Big(\int\limits_{\Gamma_0}\frac{1}{|z-\xi|^2}d\tau\Big)dt=\int_{\Gamma_1}|p(\xi)\varphi(\xi)|\times \qquad (I.36)$$

$$\times\Big(\int\limits_{\Gamma_0}\frac{1}{|z-\xi|^2}d\tau\Big)dt+\int\limits_{\Gamma_2}|p(\xi)\varphi(\xi)|\Big(\int\limits_{\Gamma_0}\frac{1}{(z-\xi)^2}d\tau\Big)dt.$$

Оценим первый интеграл в правой части равенства (I.36). С этой целью запишем:

$$\int\limits_{\Gamma_0}\frac{d\tau}{|z-\xi|^2}=\int\limits_{\Theta_1}^{\Theta_2}\frac{d\tau}{2-2\cos(\tau-t)}<A\int\limits_{\Theta_1}^{\Theta_2}\frac{d\left(\sin\frac{\tau-t}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\tau-t}{2}}< \qquad (I.37)$$

$$<A_1\Big(\frac{1}{\sin\frac{\Theta_2-t}{2}}-\frac{1}{\sin\frac{\Theta_1-t}{2}}\Big)<A_2\Big(\frac{1}{|\xi-z_\alpha|}-\frac{1}{|\xi-z_\beta|}\Big).$$

Из (I.37), учитывая (I.5), получим:

$$\int\limits_{\Gamma_1}|p(\xi)\varphi(\xi)|\Big(\int\limits_{\Gamma_0}\frac{1}{|z-\xi|^2}d\tau\Big)dt\leqslant \qquad (I.38)$$

$$\leqslant A_3\Big[\int\limits_{\Gamma_1'}\frac{|z_\alpha-\xi|^{\alpha_1}}{|z_\alpha-\xi|}dt+\int\limits_{\Gamma_1''}\frac{|z_\beta-\xi|^{\alpha_1}}{|z_\beta-\xi|}dt\Big]\leqslant M<\infty$$

Так как $|\xi-z|\geqslant m_0$, $m_0>0$, когда $\xi\in\Gamma_2$ и $z\in\Gamma_0$, то и второй интеграл в правой части равенства (I.36) ограничен. Следовательно, производная $\Phi_z(z)$ суммируема на дуге Γ_0. Это означает, что существуют пределы, когда $z\to z_\alpha$, $z\in\Gamma_0$ и $z\to z_{\beta_1}$ $z\in\Gamma_0$. Итак, мы находимся в условиях нашей леммы. Следовательно, функция $\Phi(z)$ непрерывна на границе Γ в точках z_α и z_β, причем значения функции $\Phi(z)$ в этих точках совпадают с предельными значениями функции $\Phi(z)$. Непрерывность функции $\Phi(z)$ в остальных точках границы $\Gamma|\Gamma_0$ следует из равномерной сходимости $\Phi^n(z)$ внутри $\Gamma\setminus\Gamma_0$. Непрерывность функции $\Phi(z)$ внутри Γ_0, очевидно, следует из представления (I.30). Так как интеграл Дирихле функции $\Phi(z)$ ограничен, то в точках z_α, z_β функция $\Phi(z)$ непрерывна. Итак, функция $\Phi(z)$ непрерывна в замкнутом круге $\bar{S}$.

5. Докажем теперь, что предельная функция $w(z)$ является однолистной в S функцией. Действительно, $w(z)$ внутри S удовлетворяет уравнению (I.6), причем $q(z) \leq q_0$, $q_0 < 1$, $z \in \bar{S}' \subset S$. Поэтому $w(z) = f(W_0(z))$, $z \in \bar{S}'$, где $f(W)$ – аналитическая функция в $\bar{S}'$, $W_0(z)$ –гомеоморфизм $\bar{S}'$ на себя (см. [I] ,стр. 2I9). Так как последовательность $f^n(W) = w^n(W_0^{-1}(W))$ непрерывных однолистных отображений сходится равномерно к аналитической функции $f(W)$, то последняя должна быть однолистной (см. [7] ,стр. 47I). Поэтому функция $w(z)$ является однолистной в круге S функцией.

6. В силу вышесказанного функция $w(z)$ осуществляет топологическое отображение круга S в область G. Ниже мы докажем, что функция $w(z)$ осуществляет топологическое отображение круга S на область G. Рассмотрим последовательность $\chi^n(w) = F^n(w) + i\, G^n(w)$ обратных отображений:

$$\chi^n(w^n(z)) = z, \quad w^n(\chi^n(w)) = w, \quad z \in \bar{S}, \; w \in \bar{G}, \; n = 1, 2, \ldots \tag{I.39}$$

Из (I.39) следует:

$$\chi^n_w(w) = \frac{1}{J_n(z)} \overline{w^n_z(z)}, \quad z = \chi^n(w), \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{I.40}$$

$$\chi^n_{\bar{w}}(w) = -\frac{1}{J_n(z)} \cdot w^n_{\bar{z}}(z), \quad z = \chi^n(w), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{I.4I}$$

Из (I.40), (I.4I) с учетом (I.I2), (I.I3) получаем:

$$\iint_G |\chi^n_{\bar{w}}(w)|^2 dG = \iint_S \frac{q_n^2(z)}{1 - q_n^2(z)} dS \leq k, \tag{I.42}$$

$$\iint_G |\chi^n_w(w)|^2 dG = \iint_S \frac{1}{1 - q_n^2(z)} dS \leq k. \tag{I.43}$$

Из (I.42), (I.43) получаем:

$$\iint_G [\operatorname{grad}^2 F^n(w) + \operatorname{grad}^2 G^n(w)] dG \leq 2k. \tag{I.44}$$

Из (I.44) следует, что последовательность $\chi^n(w)$ равностепенно непрерывна в замкнутой области $\bar{G}$ (см. [3],стр. 53). Так как функции $\chi^n(w)$ равномерно ограничены, то в силу теоремы Арцеля последовательность $\chi^n(w)$ компактна в смысле равномерной сходимости в замкнутой области $\bar{G}$. Выберем сходящуюся подпоследовательность $\chi^{n_k}(w)$. Предельная функция $\chi(w)$ этой последовательности является обратной к функции $w(z)$ на множестве $K_0 = w(\bar{S} \setminus \Gamma_0)$. Действительно, выберем произвольную точку $w \in K_0$. Найдем прообраз этой точки при отображении $w(z)$:

$: Z = w^{-1}(W)$, где $w^{-1}(W)$ – функция, обратная к функции $w(z)$ (функция $w^{-1}(W)$ существует, так как $w(z)$ осуществляет топологическое отображение $\bar{S}\setminus\Gamma_0$ на K_0). Далее, пусть $W_n = w^n(Z)$. Так как последовательность $w^n(z)$ сходится на множестве $\bar{S}\setminus\Gamma_0$, то $W_n \to W$. Ввиду того, что последовательность $\chi^{n_k}(W)$ сходится равномерно в $\bar{G}$ и $\chi^n(W_n) = Z$, мы получаем, что $\chi(W) = Z$. Совершая предельный переход в (I.39), мы получим, что функция $\chi(W)$ является обратной к функции $(W)\,z$ на множестве K_0 .

7. Покажем теперь, что $\bar{G}\setminus K_0 = \{W : \chi(W) \in \Gamma_0\}$. Предположим, что это не так. В таком случае найдется точка $\tilde{W} \in \bar{G}\setminus K_0$ такая, что $Z = \chi(\tilde{W}) \bar{\in} \Gamma_0$. Пусть $\tilde{Z}_{n_k} = \chi^{n_k}(\tilde{W})$. Так как последовательность $\chi^{n_k}(W)$ сходится равномерно в $\bar{G}$, то $\tilde{Z}_n \to \tilde{Z}$. Совершая предельный переход в равенстве $w(\tilde{Z}_{n_k}) = \tilde{W}$, мы получим $w(\tilde{Z}) = \tilde{W} \in K_0$, что противоречит исходному предположению.

8. Покажем, что существуют предельные в среднем граничные значения $w(z)$, когда $z \to \zeta$, $\zeta \in \Gamma_0$. Докажем, что функции $\varphi^n_z(\theta) = \varphi^n(z)$, $z = re^{i\theta}$, равностепенно непрерывны по r на отрезке $[0,1]$ в пространстве $\mathcal{L}_2(\Gamma_0)$ функций, суммируемых с квадратом на дуге Γ_0 . Действительно:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} |\varphi^n_{r+\Delta r}(\theta) - \varphi^n_r(\theta)|^2 d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big(\int_r^{r+\Delta r} \frac{\partial\varphi^n(r,\theta)}{\partial r} dr\Big)^2 \, d\theta =$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big(\int_r^{r+\Delta r} \frac{1}{(p^n(r,\theta))^{1/2}} \cdot (p^n(r,\theta))^{1/2} \, \frac{\partial\varphi^n(r,\theta)}{\partial r} dr\Big) \, d\theta \leqslant \tag{I.45}$$

$$\leqslant c \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_r^{r+\Delta r} p^n(r,\theta) \Big(\frac{\partial\varphi^n(r,\theta)}{\partial r}\Big)^2 r\,dr\,d\theta \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big(\int_r^{r+\Delta r} \frac{dr}{p(r,\theta)}\Big) d\theta.$$

Из уравнений (I.6) получаем:

$$\iint_S p^n(x,y)\big[(\varphi^n_x(x,y))^2 + (\varphi^n_y(x,y))^2\big] dS = \pi(G), \tag{I.46}$$

здесь $\pi(G)$ – площадь области G . Из (I.45), (I.46) получаем равностепенную непрерывность по r в среднем в пространстве $\mathcal{L}_2(\Gamma_0)$ функций $\varphi^n_r(\theta)$:

$$\|\varphi^n_{r+\Delta r}(\theta) - \varphi^n_r(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma_0)} \leqslant A \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big(\int_r^{r+\Delta r} \frac{dr}{\pi(\omega(r,\theta))}\Big) d\theta \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_r^{r+\Delta r} \frac{dr\,d\theta}{\min\limits_{\theta_1<\theta'<\theta_2} |\omega(r,\theta) - \omega(1,\theta')|^\alpha} < \tag{I.47}$$

$$< A_2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r}^{r+\Delta r} \frac{dr\, d\theta}{(1-r)^{\alpha}} < A_3 [(1-(r+\Delta r))^{\alpha} - (1-r)^{\alpha}].$$

Для функций $\Psi_r^n(\theta)$ также имеет место равностепенная непрерывность в среднем в $\mathcal{L}_2(\Gamma_0)$ по r. Действительно:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} |\Psi_{r+\Delta r}^n(\theta) - \Psi_r^n(\theta)|^2 d\theta \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big(\int_{r}^{r+\Delta r} \Big(\frac{\partial \Psi^n[r,\theta]}{\partial r} \Big) \times \tag{I.48}$$

$$\times\, dr \Big)^2 d\theta \leq c \Delta r,$$

так как

$$\iint_S [(\Psi_x^n(x,y))^2 + (\Psi_y^n(x,y))^2] dS \leq c \iint_S \frac{(\Psi_x^n(x,y))^2 + (\Psi_y^n(x,y))^2}{p^n(z)} dS < \infty. \tag{I.49}$$

9. Покажем теперь, что граничные значения $w^n(z)$ сходятся в пространстве $\mathcal{L}_2(\Gamma_0)$. Действительно, из (1.46) получаем:

$$\iint_S p(x,y) [(\varphi_x^n(x,y))^2 + (\varphi_y^n(x,y))^2] dS \leq J(S), \tag{I.50}$$

в силу теорем вложения для вырождающихся метрик (см. [8], стр.531). Из (I.50) получаем, что последовательность $\varphi_1^n(\theta)$ граничных значений $\varphi^n(z)$ компактна в пространстве $\mathcal{L}_2(\Gamma_0)$. Так как функции $\Psi^n(z)$ в силу (I.50) принадлежат пространству $W_2^1(S)$ и равномерно в нем ограничены, то в силу теорем вложения С.Л.Соболева получаем, что и последовательность $\Psi_1^n(\theta)$ граничных значений $\Psi^n(z)$ компактна в пространстве $\mathcal{L}_2(\Gamma_0)$

Выберем сходящиеся подпоследовательности $\varphi_1^{n_k}(\theta)$, $\Psi_1^{n_k}(\theta)$, и пусть $\varphi_1(\theta)$, $\Psi_1(\theta)$ – соответствующие пределы этих подпоследовательностей. Предельная функция $w(z) = \lim\limits_{n_k \to \infty} w^{n_k}(z)$ на множестве Γ_0 принимает в среднем граничные значения. Действительно, из (I.47) и доказанной сходимости в $\mathcal{L}_2(\Gamma_0)$ граничных значений $\varphi_1^n(\theta)$ следует:

$$\|\varphi_r(\theta) - \varphi_1(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma_0)} \leq \|\varphi_r(\theta) - \varphi_r^n(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma_0)} + \|\varphi_r^n(\theta) - \tag{I.51}$$

$$- \varphi_1^n(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma_0)} + \|\varphi_1^n(\theta) - \varphi_1(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma_0)} \longrightarrow 0, \quad r \to 1.$$

Таким же способом доказывается, что

$$\|\Psi_r(\theta) - \Psi_1(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\Gamma_0)} \longrightarrow 0, \quad r \to 1. \tag{I.52}$$

Из (I.5I), (I.52) следует, что функция $w(z)$ почти всюду на Γ_0 имеет радиальные предельные значения $W_1(\Theta)$, расположенные на дуге $\mathcal{L}_0 \subset \bar{G} \setminus K_0$, имеющей концами точки

$$W_\alpha = \lim_{z_n \to z_\alpha,\, z_n \in \Gamma \setminus \Gamma_0} w(z_n), \qquad W_\beta = \lim_{z_n \to z_\beta,\, z_n \in \Gamma \setminus \Gamma_0} w(z_n).$$

I0. Покажем теперь, что радиальные предельные значения функции $w(z)$ являются всюду плотным множеством на дуге $\mathcal{L}_0 \subset g$. Пусть W_0 – произвольная точка на $\mathcal{L}_0$. Проведем через точку W_0 прямую $\lambda : \{W : \operatorname{Im} W = \operatorname{Im} W_0 = \Psi_0\}$. На прямой λ должна найтись по крайней мере одна точка $\tilde{W} \in K_0 \setminus g$. В противном случае точки W_1, W_2 были бы отделены друг от друга прямой λ, что невозможно в силу связности множества K_0, а также ввиду того, что $w(z)$ является топологическим отображением на множестве $\bar{S} \setminus D(\Gamma_0, \varepsilon)$.

Точка $\tilde{W}$ не может быть точкой сгущения для точек из множества $\bar{G} \setminus K_0$. В противном случае мы бы получили, ввиду того, что $\chi(W)$ непрерывна в $\bar{G}$ и дуга Γ_0 замкнута, что $\tilde{W} \in \bar{G} \setminus K_0$. Пусть U_ε – окрестность точки $\tilde{W}$ на прямой λ, не содержащая ни одной точки из $\bar{G} \setminus K_0$. Пусть $\tilde{W}_0$ – точка из $\bar{G} \setminus K_0$, лежащая на границе U_ε.

В силу вышесказанного найдется последовательность точек $\tilde{W}_0^n \to \tilde{W}_0$. Так как функция $\chi(W)$ непрерывна, то последовательность точек $\tilde{z}_0^n = \chi(\tilde{W}_0^n)$ сходится к $z_0 = \chi(\tilde{W}_0)$, и потому множество предельных значений $w(z)$, когда $z \to z_0$ лежит на прямой λ. Пусть z_0^n такая последовательность точек на дуге Γ_0, сходящаяся к z_0, что в каждой из них существуют радиальные предельные значения $w_0^n = \lim_{z \to z_0^n} w(z)$. Так как функция $\Psi(z) = \operatorname{Im} w(z)$ непрерывна в $\bar{S}$, то $\Psi_0^n = \operatorname{Im} w_0^n \to \Psi_0 = \operatorname{Im}(w(z_0))$. Следовательно, последовательность точек $w_0^n \in \mathcal{L}_0$ стремится к точке, лежащей на пересечении прямой λ и дуги $\mathcal{L}_0$, т.е. к точке W_0. Таким образом, множество радиальных предельных значений функции $w(z)$ на дуге Γ_0 всюду плотно на дуге $\mathcal{L}_0$.

II. Так как множество точек, в которых существуют радиальные предельные значения функции $w(z)$, всюду плотно на Γ_0 и функция $\Psi(z) = \operatorname{Im} w(z)$ непрерывна на Γ, то функцию $W_1(\Theta)$ можно продолжить по непрерывности на всю окружность Γ. Таким образом, мы получим непрерывную на Γ функцию $\tilde{w}(\varsigma) = \tilde{\varphi}_1(\Theta) + i\Psi_1(\Theta)$. Здесь $\tilde{\varphi}_1(\Theta)$ – продолженная по непрерывности функция $\varphi_1(\theta)$, а $\Psi_1(\theta)=\lim\limits_{z\to e^{i\theta}}\Psi(z)$, так как по доказанному $\Psi(z)$ – непрерывная в $\bar{S}$ функция.

I2. Для доказательства того, что множество значений функции $w(z)$ заполняет всю область G, рассмотрим в области G следующую задачу Дирихле:

$$(\pi(\xi,\eta)\,\Phi_\xi(\xi,\eta))_\xi+(\pi(\xi,\eta)\,\Phi_\eta(\xi,\eta))_\eta=0, \qquad (I.53)$$

$$\bar{\Phi}(\xi,\eta)\big|_{\varrho\in g}=\tilde{\varphi}(\omega^{-1}(\varrho)),\quad \varrho=(\xi,\eta). \qquad (I.54)$$

Здесь в качестве граничных значений $\bar{\Phi}(\xi,\eta)$ задается композиция непрерывного продолжения $\tilde{\varphi}_1(\theta)$ функции $\varphi_1(\theta)$ и конформного преобразования $\omega^{-1}(\varrho)$ области $\bar{G}$ на круг $\bar{S}$.

Так как функция $\pi(\xi,\eta)$ удовлетворяет неравенству (I.3) то задача (I.53), (I.54) имеет непрерывное в области $\bar{G}$ классическое решение (см. [9], стр. 448). Покажем теперь, что это решение совпадает с функцией $\Phi(\xi,\eta)=\varphi(\omega^{-1}(\varrho))$, где $\varphi_z=\lim\varphi^{n_k}(z)$. Действительно, ввиду того, что $\Omega(\varrho)=\Phi(\varrho)+i\Psi(\varrho)$ осуществляет топологическое отображение области G в себя, для ее производных имеет место неравенство:

$$\iint\limits_G\pi(\xi,\eta)[\Phi_\xi^2(\xi,\eta)+\Phi_\eta^2(\xi,\eta)]\,dG<\infty. \qquad (I.55)$$

В силу предположений относительно гладкости границы g ее можно разбить на конечное число кусков g_ℓ с локальными криволинейными координатами u_ℓ таким образом, что в окрестности $V(g_\ell)$ каждого куска g_ℓ соответствие $(h_\ell,u_\ell)\leftrightarrow(\xi,\eta)$ будет взаимно-однозначным, здесь h_ℓ – расстояние по нормали от точки ϱ до границы g (см. [I0], стр. 423). Из неравенства (I.55) следует следующее неравенство для граничной функции $\tilde{\varphi}^*(h_\ell,u_\ell)=\tilde{\varphi}(\omega^{-1}(\varrho(h_\ell,u_\ell)))$:

$$\int\limits_{g_\ell}\int\limits_0^\Delta\frac{|\tilde{\varphi}^*(u_\ell,0)-\tilde{\varphi}^*(u_\ell+H,0)|^2}{H^{2-\alpha}}\,dH\,du_\ell<\infty. \qquad (I.56)$$

Из неравенства (I.56) следует, что и функция $\bar{\Phi}(\xi,\eta)$ удовлетворяет неравенству (I.55). Так как обобщенное решение задач (I.53), (I.54) в классе функций, удовлетворяющих неравенству (I.55), единственно (см. [I0], стр.422), то $\bar{\Phi}(\xi,\eta)\equiv\Phi(\xi,\eta)$. Таким образом, доказано, что функция $\Omega(\varrho)$ непрерывна в $\bar{G}$ и область ее значений покрывает границу g. Учитывая, что $\Omega(\varrho)$ является топологическим отображением области G в G, мы получаем, что $\Omega(\xi)$ - топологическое отображение области G на G. Теорема доказана.

II. В области G, описанной в разделе I, рассмотрим систему дифференциальных уравнений такого же вида, как и та, которая исследовалась в разделе I:

$$p(x,y)\varphi_x(x,y)=\Psi_y(x,y);\ p(x,y)\varphi_y(x,y)=-\Psi_x(x,y). \quad (2.I)$$

Относительно функции $p(x,y)$ будем предполагать теперь, что она непрерывна в замкнутой области $\bar{G}=G\cup g$, положительна в $\bar{G}\setminus g_0$, а на линии вырождения g_0 обращается в нуль: $p(x,0)=0$, причем при приближении точки z к g_0 имеют место неравенства:

$$By < p(x,y) < Ay. \quad (2.2)$$

Производные первого порядка $p_x(x,y)$, $p_y(x,y)$ функции $p(x,y)$ непрерывны по Гельдеру внутри G и ограничены в $\bar{G}$.

Пусть H - полоса $0\leqslant\Psi\leqslant 2\pi$ в плоскости $W=\varphi+i\Psi$. Верхнюю часть границы полосы H обозначим через $\mathcal{L}$, нижнюю - через l.

ТЕОРЕМА 2. Существует решение системы (2.I), осуществляющее топологическое отображение области G на полосу H.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем последовательность гомеоморфизмов $w^n(z)=\varphi^n(z)+i\Psi^n(z)$, $n=1,2,\ldots$, области G на полосу H, удовлетворяющих следующим системам уравнений:

$$p^n(x,y)\varphi^n_x(x,y)=\Psi^n_y(x,y),\ p^n(x,y)\varphi^n_y(x,y)=-\Psi^n_x(x,y), \quad (2.3)$$

$$p^n(x,y) = p(x,y)+\frac{1}{n},\ n=1,2,\ldots . \quad (2.4)$$

и нормированных следующим соответствием граничных точек: точка $z_1\in g\setminus g_0$ переводится в $-\infty$, точка $z_2\in g\setminus g_0$ переводится в $+\infty$ и точка $z_3\in g\setminus g_0$ переводится в точку $W_0\in\mathcal{L}$.

I. Покажем, что последовательность $w^n(z)$ сходится равномерно во всякой замкнутой области D_ε, $D_\varepsilon=\{z:\rho(z,g_0)\geqslant \varepsilon\}\cup\{z:|z-z_1|\geqslant\varepsilon\}\cup\{z:|z-z_2|\geqslant\varepsilon\}$.

Действительно, функции $w^n(z)$ можно представить в следующем виде: $w^n(z)=f(\tilde{W}^n(z))$.

Здесь $f(W)$ - аналитическая функция, осуществляющая конформное преобразование круга $\bar{S}:|z|\leqslant 1$ на полосу H

нормированная следующим соответствием трех пар граничных точек: некоторая точка $\tilde{W}_1$ переводится $b-\infty$, точка $\tilde{W}_2$ – $b+\infty$ и точка $\tilde{W}_3$ – $b\, W_0$; $\tilde{W}^n(z)=\tilde{\varphi}^n(z)+i\tilde{\psi}^n(z)$ – -гомеоморфизмы области $\bar{G}$ на круг $\bar{S}$, удовлетворяющие следующим уравнениям:

$$\tilde{W}^n_{\bar{z}}(z)=Q^n(z)\overline{\tilde{W}^n_z(z)},\quad n=1,2,\ldots; \tag{2.5}$$

$$Q^n(z)=\frac{1-p^n(z)}{1+p^n(z)}\cdot\frac{\overline{f_W(W)}}{f_W(W)},\quad W=W^n(z). \tag{2.6}$$

и нормированные соответствием трех пар граничных точек: $\tilde{W}^n(z_i)=\tilde{W}_i$, $i=1,2,3$.

Из (2.5), (2.6) следует:

$$\iint\limits_{\bar{G}\setminus D(g_0,\varepsilon)}[\mathrm{grad}^2\tilde{\varphi}^n(z)+\mathrm{grad}^2\tilde{\psi}^n(z)]\,dS\leqslant k(\varepsilon). \tag{2.7}$$

Из (2.7) получаем, что некоторая подпоследовательность $\tilde{W}^{n_k}(z)$ сходится равномерно во всякой области $D(g_0,\varepsilon)$ (см. [3] , стр.53). Предельная функция $\tilde{W}(z)$ отлична от постоянной в силу нормировки функций $\tilde{W}^n(z)$.

Далее, для обратных отображений $\chi^n(w)=F^n(w)+iG^n(w)$ имеет место оценка:

$$\iint\limits_{\tilde{W}(\bar{G}\setminus D(g_0,\varepsilon))}[\mathrm{grad}^2F^n(w)+\mathrm{grad}^2G^n(w)]\,dS\leqslant k(\varepsilon). \tag{2.8}$$

Здесь $D(g_0,\varepsilon)=\{z:\rho(z,g_0)\leqslant\varepsilon\}$. Докажем сейчас, что функция $W(z)$ однолистна на множестве $\bar{G}\setminus g_0$. Однолистность ее внутри области G доказывается так же, как и в разделе I. Предположим, теперь, что найдется пара точек z', z'', $z'\in g\setminus g_0$, $z''\in g\setminus g_0$, таких, что $\tilde{W}(z')=\tilde{W}(z'')$. В любой окрестности точки z', например, найдется точка z_0'' такая, что $\tilde{W}(z_0')=\tilde{W}(z'')$. В противном случае функция $\tilde{W}(z)$ была бы постоянной в некоторой области, прилегающей к точке z', что невозможно. Соединим точки z_0' и z'' жордановой кривой c такой, что z_0', z'' и начало координат будут принадлежать одному и тому же связному множеству. Пусть γ – дуга границы g , на которую опирается кривая c , и γ_ε – граница области $G\setminus D(g_0,\varepsilon)$. Пусть G_ε – область, ограниченная замкнутой кривой $(\gamma|\gamma_\varepsilon)\cup c$. Граница Γ_ε образа $\tilde{W}(G_\varepsilon)$ области G_ε при отображении $\tilde{W}(z)$ является жордановой кривой. Далее, из (2.7), (2.8), в силу равномерной сходимости $\tilde{W}^{n_k}(z)$ и $\chi^{n_k}(w)$ внутри областей $G\setminus D(g_0,\varepsilon)$, $\tilde{W}(G\setminus D(g_0,\varepsilon))$, соответственно, следует, что и функции $\tilde{W}(z)$, $\chi(w)$ удовлетворяют соотношениям (2.7), (2.8) (см. [5], стр.22). Поэтому функция $\tilde{W}(z)$ однолистна в G_ε, что противоречит исходному предположению (см. [5], стр.70). Следовательно, ни точка $\tilde{W}(P_\alpha)$, ни точка $\tilde{W}(P_\beta)$ не совпадают с точками $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$.

Далее, образ замкнутой области D_ε представляет собой замкнутую область S_ε, не содержащую точек $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$ и дугу $\widetilde{\alpha\beta}$, концами которой являются точки $\tilde{W}(P_\alpha)$, $\tilde{W}(P_\beta)$, $\tilde{W}_3 \in \widetilde{\alpha\beta}$.

Так как функция $\tilde{f}(W)$ имеет особенность лишь в точках $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$, то последовательность $w^n(z)$ является равномерно ограниченной во всякой области S_ε. Кроме того, как уже было показано, последовательность $\tilde{W}^n(z)$ равностепенно непрерывна во всякой замкнутой области $\bar{G} \setminus D_\varepsilon$. Это означает, что последовательность $w^n(z)$ равностепенно непрерывна во всякой замкнутой области S_ε. Следовательно, в силу теоремы Арцеля последовательность $w^n(z)$ компактна в смысле равномерной сходимости во всякой замкнутой области S_ε, $S_\varepsilon \to \bar{S} \setminus (\widetilde{\alpha\beta}) \cup \cup \tilde{W}_1 \cup \tilde{W}_2, \varepsilon \to 0$. Далее, как и в разделе I доказывается, что мнимая часть $\Psi(z)$ предельной функции $w(z) = \varphi(z) + i\Psi(z)$, сходящейся последовательности $w^{n_k}(z)$, непрерывна в $D(g_0, \varepsilon)$. Покажем теперь, что эта функция принимает нулевые граничные значения на g_0. Действительно, ввиду того, что образ области $D(g_0, \varepsilon)$ имеет ограниченную площадь, мы получаем:

$$\iint\limits_{D(g_0,\varepsilon)} [(\Psi_x^n(x,y))^2 + (\Psi_y^n(x,y))^2]\, dG \leq A \iint\limits_{D(g_0,\varepsilon)} \frac{dG}{p^n(z)} [(\Psi_x^n)^2 + (\Psi_y^n)^2] < A_1 \pi(D(g_0,\varepsilon)).$$

Здесь $\pi(D(g_0, \varepsilon))$ – максимальная площадь образов области $D(g_0, \varepsilon)$ при отображениях $w^n(z)$.

Из (2.9) мы получаем, что функция $\Psi(z)$ принимает в среднем нулевые граничные значения на g_0. В силу доказанной непрерывности $\Psi(z)$ в $D(g_0, \varepsilon)$ эта функция тождественно равна нулю на g_0.

Покажем теперь, что образ области G при отображении $w(z)$ совпадает с полосой H. Допустим, что это не так. Пусть H_0 – образ области G при отображении $w(z)$. Так как граничные точки H_0, не лежащие на $\mathcal{L} \cup \ell$, принадлежат предельным множествам $w(z)$, когда $z \to g_0$, то в силу того, что функция $\Psi(z)$ непрерывна в $D(g_0, \varepsilon)$ и принимает нулевые граничные значения на g_0, не существует граничных точек H_0, не принадлежащих $\mathcal{L} \cup \ell$. Следовательно, образ области G совпадает с полосой H . Теорема доказана.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. И.Н.Векуа. "Обобщенные аналитические функции". Госиздат . физ.-мат.литературы.Москва, I959.

2. Г.М.Голузин. "Геометрическая теория функций комплексного переменного". Издат."Наука",Москва, I966.

3. J.Lelong-Ferrand,Representation conforme et Transformations a integrale de Dirichlet bornee,Paris,Gauthier-Villars. Editeur-imprimeur Libraire,1955.

4. Gergen and Dressel,Mapping by p-Regular Functions,Duke Math. Journal,18,N 3,185-215,1951.

5. Г.Д.Суворов. "Семейства плоских топологических отображений", АН СССР,Сибирское отделение,Новосибирск, I965.

6. П.Халмош. "Теория меры", И.Л., I953.

7. Л.Д.Кудрявцев. "О гармонических отображениях". ДАН СССР, 92, № 3, 47I-473, I953.

8. М.И.Вишик. "Краевые задачи для уравнения эллиптического типа, вырождающихся на границе области". Матем.сборник 35(77), 3, 5I3-568, I954.

9. Р.З.Хасьминский." Диффузионные процессы и эллиптические дифференциальные уравнения", "Теория вероятностей и её применения", 3, вып.4., 430-449, I958.

IO. А.Л.Вашарин. "Граничные свойства функций класса $W_2^1(\alpha)$. "Известия АН СССР, сер.матем., 23, 42I-454, I959.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А.С.Сохин

В обратной задаче теории рассеяния существенную роль играют, введенные Б.Я.Левиным [2], операторы преобразования, переводящие решения $e^{i\lambda x}$ ($\Im m\,\lambda \geqslant 0$) уравнения

$$z'' + \lambda^2 z = 0, \quad 0 < x < \infty$$

в решения $e(\lambda, x)$ ($\Im m\,\lambda \geqslant 0$) уравнения

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0, \quad 0 < x < \infty,$$

ведущие себя при $x \to \infty$ как $e^{i\lambda x}$.

Этот оператор существует, если при всех $x > 0$

$$\int_x^\infty t|q(t)|\,dt < \infty,$$

и имеет такой вид

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty K(x,t)\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

В настоящей статье мы построим оператор, переводящий ограниченные при $x \to \infty$ решения $z_\alpha(\lambda x)$ уравнения

$$z_\alpha'' - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} z_\alpha + \lambda^2 z_\alpha = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad \alpha > 0 \tag{I}$$

в решения $y_\alpha(\lambda, x)$ уравнения

$$y_\alpha'' - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} y_\alpha + \lambda^2 y_\alpha - q(x) y_\alpha = 0, \quad 0 < x < \infty, \tag{2}$$

ведущие себя при $x \to \infty$ так же, как $z_\alpha(\lambda, x)$. Существование такого оператора будет доказано для локально суммируемых функций $q(x)$, удовлетворяющих при всех $x > 0$ неравенству

$$\int_x^\infty t^{1+\alpha} |q(t)| dt < \infty.$$

Будем искать решение $y_\alpha(\lambda, x)$ уравнения (2) в виде

$$y_\alpha(\lambda,x) = z_\alpha(\lambda,x) + \int_x^\infty K_\alpha(x,t) z_\alpha(\lambda t)\, dt. \tag{3}$$

Подставляя правую часть этого равенства в уравнение (2) и проведя формальное дифференцирование, получим, учитывая, что $z_\alpha(\lambda x)$ удовлетворяет уравнению (I):

$$-q(x) z_\alpha(\lambda x) - \{K_\alpha(x,x) z_\alpha(\lambda x)\}' - \frac{\partial}{\partial x} K_\alpha(x,t) z_\alpha(\lambda t)\Big|_{t=x}^{+}$$
$$+\int_x^\infty \frac{\partial}{\partial x^2} K_\alpha(x,t) z_\alpha(\lambda t)\, dt - \int_\alpha^\infty K_\alpha(x,t) z_\alpha''(\lambda t)\, dt -$$
$$-\int_x^\infty \left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} - \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2} + q(x)\right] K_\alpha(x,t) z_\alpha(\lambda t)\, dt = 0.$$

Отсюда, после интегрирования по частям, найдем:

$$- z_\alpha(\lambda x)\left[q(x) + 2\frac{d}{dx} K_\alpha(x,x)\right] + \int_x^\infty \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} K_\alpha - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} K_\alpha -\right.$$
$$\left. - q(x) K_\alpha\right] dt + \int_x^\infty \left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} K_\alpha + \frac{\alpha(\alpha+1)}{t^2} K_\alpha\right] dt -$$
$$-\lim_{t\to\infty} \left[K_\alpha(x,t) z_\alpha'(\lambda t) - \frac{\partial}{\partial t} K_\alpha(x,t) z_\alpha(\lambda t)\right] = 0.$$

Поэтому, для того, чтобы правая часть формулы (3) при всех λ удовлетворяла уравнению (2), достаточно, чтобы ядро $K_\alpha(x,t)$ было решением следующей задачи:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) K_\alpha(x,t) + \alpha(\alpha+1)\left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{x^2}\right) K_\alpha(x,t) =$$
$$= q(x) K_\alpha(x,t), \quad 0 < x < t\ ; \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty} K_\alpha(x,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{\partial}{\partial t} K_\alpha(x,t) = 0\ ; \tag{6}$$

$$2\frac{d}{dx}K_\alpha(x,x)+q(x)=0. \qquad (7)$$

Последнее условие перепишем в эквивалентной форме

$$K_\alpha(x,x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\,dt. \qquad (7')$$

Обратно, если существует функция $K_\alpha(x,t)$, удовлетворяющая (5), (6), (7′), то, как легко проверить, формула (3) действительно задает оператор преобразования, т.е. ее правая часть удовлетворяет уравнению (2) и ведет себя при $x\to\infty$ как $\mathcal{Z}_\alpha(\lambda x)$.

Сведем теперь задачу (5), (6), (7) к интегральному уравнению. Полагая

$$\xi=\frac{t+x}{2}, \qquad \eta=\frac{t-x}{2}; \qquad (8)$$

$$u(\xi,\eta)=u\left(\frac{t+x}{2},\frac{t-x}{2}\right)=K_\alpha(x,t)=K_\alpha(\xi-\eta,\xi+\eta), \qquad (8')$$

получаем для функции $u(\xi,\eta)$ следующее уравнение

$$\mathcal{L}[u]\equiv u''_{\xi\eta}+\frac{4\alpha(\alpha+1)\xi\eta}{(\xi^2-\eta^2)^2}u=-q(s-\tau)u, \quad 0<\eta<\xi \qquad (9)$$

и граничные условия

$$u(\xi,0)=\frac{1}{2}\int_\xi^\infty q(t)\,dt, \qquad (9')$$

$$\lim_{\xi\to\infty}u(\xi,\eta)=0 \qquad (9'')$$

при фиксированном $\eta>0$.

Непосредственно проверяется, что если функция $q(x)$ имеет суммируемую производную, то, переходя от решения $u(\xi,\eta)$ задачи (9÷9″) по формуле (8′) к функции $K_\alpha(x,t)$, мы получим решение нужной задачи (5), (6), (7′). Будем пока предполагать, что функция $q(x)$ дифференцируема.

Введем функцию Римана $\vartheta_\alpha(s,\tau;\xi,\eta)$ уравнения $\mathcal{L}[u]=f(s,\tau)$, т.е. функцию, удовлетворяющую уравнению

$$\mathcal{L}[u]\equiv\frac{\partial^2\vartheta_\alpha}{\partial s\,\partial\tau}+\frac{4\alpha(\alpha+1)s\tau}{(s^2-\tau^2)^2}\vartheta_\alpha=0, \quad \begin{array}{l}0<\tau<\eta,\\ \xi<s<\infty,\\ 0<\eta<\xi.\end{array} \qquad (10)$$

и следующим условиям на его характеристиках

$$v_\alpha(s,\tau;\xi,\eta)\Big|_{s=\xi}=1, \qquad 0\leqslant\tau\leqslant\eta; \qquad\qquad (10')$$
$$v_\alpha(s,\tau;\xi,\eta)\Big|_{\tau=\eta}=1, \qquad \xi\leqslant s\leqslant\infty.$$

Тогда, применяя метод Римана к уравнению (9) (мы считаем правую часть этого уравнения временно известной), получим формулу

$$u(\xi,\eta)=-\int_\xi^\infty v_\alpha(s,0;\xi,\eta)\,u'_s(s,0)\,ds-\int_\xi^\infty\int_0^\eta v_\alpha(s,\tau;\xi,\eta)\,\mathcal{L}[u]\,ds\,d\tau,$$

которая, учитывая равенство (9), перепишется в виде:

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\int_\xi^\infty v_\alpha(s,0;\xi,\eta)\,q(s)\,ds+ \qquad\qquad (11)$$
$$+\int_\xi^\infty ds\int_0^\eta q(s-\tau)\,v_\alpha(s,\tau;\xi,\eta)\,u(s,\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, для решения задачи ($9\div9''$) достаточно решить относительно $u(\xi,\eta)$ интегральное уравнение (11). Для исследования этого уравнения нам понадобится явный вид функции Римана $v_\alpha(s,\tau;\xi,\eta)$.

Введем функцию

$$z(s,\tau)=z(s,\tau;\xi,\eta)=v_\alpha(\sqrt{s},\sqrt{\tau};\sqrt{\xi},\sqrt{\eta})$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$z''_{s\tau}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{(s-\tau)^2}z=0, \qquad 0\leqslant\tau<\eta,\ \xi<s<\infty \qquad (12)$$

и граничному условию (10′). Положим далее

$$z(s,\tau)=(s-\tau)^{-\alpha}\varphi(s,\tau). \qquad (13)$$

Для функции $\varphi(s,\tau)$ будем иметь уравнение

$$\varphi''_{s\tau}+\frac{\alpha}{s-\tau}\varphi'_s-\frac{\alpha}{s-\tau}\varphi'_\tau=0, \qquad \begin{matrix}0<\tau<\eta,\\ \xi<s<\infty.\end{matrix} \qquad (14)$$

В работе Б.М. Левитана [3] (стр. 116) показано, что решением уравнения (14) является, в частности, функция

$$\varphi_0(s,\tau)=(s-\eta)^\alpha(\tau-\xi)^\alpha F\left(-\alpha,-\alpha,1;\frac{\eta-\tau}{\xi-\tau}\ \frac{s-\xi}{s-\eta}\right),$$

где F – гипергеометрическая функция. Поэтому, функция

$$z_0(s,\tau)=(s-\tau)^{-\alpha}\varphi_0(s,\tau)$$

является решением уравнения (I2), а функция

$$z(s,\tau) = \left(\frac{-1}{\xi-\eta}\right)^{\alpha} z_0(s,\tau)$$

также является решением уравнения (I2) и, очевидно, удовлетворяет граничным условиям (I0). Таким образом, для функции Римана получаем следующее выражение

$$v_\alpha(s,\tau;\xi,\eta) \equiv z(s^2,\tau^2;\xi^2,\eta^2) = \left(\frac{s^2-\eta^2}{s^2-\tau^2}\cdot\frac{\xi^2-\tau^2}{\xi^2-\eta^2}\right)^{\alpha} F\left(-\alpha,-\alpha,1;\ \frac{s^2-\xi^2}{s^2-\eta^2}\cdot\frac{\eta^2-\tau^2}{\xi^2-\tau^2}\right). \quad (I5)$$

Из разложения гипергеометрической функции в степенной ряд

$$F(-\alpha,-\alpha,1;t) = 1+\left[\frac{(-\alpha)}{1!}\right]^2 t+\ldots+\left[\frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\ldots(-\alpha+n-1)}{n!}\right]^2 t^n+\ldots$$

следует, что при $0 < t \leqslant 1$

$$|F(-\alpha,-\alpha,1;t)| \leqslant F(-\alpha,-\alpha,1;1) - C_\alpha, \quad \alpha>0. \quad (I6)$$

Из равенства (I5) и неравенства (I6) легко следует

$$|v_\alpha(s,\tau;\xi,\eta)| \leqslant C_\alpha\left(\frac{\xi^2}{\xi^2-\eta^2}\right)^{\alpha}. \quad (I7)$$

Вернемся к интегральному уравнению (II). Будем решать его методом последовательных приближений. Свободный член

$$u_0(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\int_{\xi}^{\infty} v_\alpha(s,0;\xi,\eta)\,q(s)\,ds$$

в этом уравнении имеет оценку

$$|u_0(\xi,\eta)| \leqslant \frac{C_\alpha}{2}\left(\frac{\xi^2}{\xi^2-\eta^2}\right)^{\alpha}\sigma(\xi),$$

где

$$\sigma(\xi) = \int_{\xi}^{\infty}|q(t)|\,dt.$$

Введем функции

$$w(\xi,\eta) = \left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2}\right)^{\alpha} u(\xi,\eta), \quad (I8)$$

$$w_0(\xi,\eta) = \left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2}\right)^{\alpha} u_0(\xi,\eta).$$

Тогда исследуемое уравнение принимает вид

$$w(\xi,\eta)=w_0(\xi,\eta)+\int_{\xi}^{\infty}ds\int_0^{\eta}Q(s,\tau;\xi,\eta)\,\omega(s,\tau)\,d\tau, \qquad (\mathrm{I}9)$$

где

$$Q(s,\tau;\xi,\eta)=\left(\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2}\right)^{\alpha}v_{\alpha}(s,\tau;\xi,\eta)\left(\frac{s^2}{s^2-\tau^2}\right)^{\alpha}q(s-\tau). \qquad (20)$$

Интегральное уравнение (I9) будем для краткости обозначать

$$w=w_0+Qw. \qquad (\mathrm{I}9')$$

Свободный член $w_0(\xi,\eta)$ и ядро $Q(s,\tau;\xi,\eta)$ уравнения (I9) имеют оценки

$$|w_0(\xi,\eta)|\leqslant\frac{C_{\alpha}}{2}\sigma(\xi), \qquad (20')$$

$$|Q(s,\tau;\xi,\eta)|\leqslant C_{\alpha}|q\ (s-\tau)|.$$

Формальным решением уравнения $w=w_0+Qw$ является сумма ряда

$$w_0+Qw_0+Q^2w_0+\ \dots\ +Q^nw_0+\ \dots=w. \qquad (2\mathrm{I})$$

Оценим члены этого ряда

$$|Qw_0|=\left|\int_{\xi}^{\infty}ds\int_0^{\eta}Q(s,\tau;\xi,\eta)\,w_0(s,\tau)\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\xi}^{\infty}ds\int_0^{\eta}\frac{C_{\alpha}}{2}\sigma(s)\,C_{\alpha}\,|q\ (s-\tau)|\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_{\alpha}}{2}\sigma(\xi)\,C_{\alpha}\left[\sigma_1(\xi-\eta)-\sigma_1(\xi)\right],$$

где $\quad \sigma_1(\xi)=\int_{\xi}^{\infty}\sigma(t)\,dt.$

Докажем методом индукции, что справедлива оценка

$$|Q^nw_0|\leqslant\frac{C_{\alpha}}{2}\sigma(\xi)\,\frac{\{C_{\alpha}[\sigma_1(\xi-\eta)-\sigma_1(\xi)]\}^n}{n!}. \qquad (22)$$

Пусть оценка (22) справедлива при $n=1,2,\ \dots,\ k.$
Проверим, что она справедлива при $n=k+1.$

$$|Q^{k+1}\omega_0|=|\int\limits_{\xi}^{\infty}ds\int\limits_{0}^{\eta}Q(s,\tau;\xi,\eta)\,Q^k\omega_0(s,\tau)\,d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{\xi}^{\infty}ds\int\limits_{0}^{\eta}\frac{C_\alpha}{2}\sigma(s)\,\frac{\{C_\alpha[\sigma_1(s-\tau)-\sigma_1(s)\}^k}{k!}\,C|q(s-\tau)\,d\tau|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_\alpha}{2}\sigma(\xi)\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{\{C_\alpha[\sigma_1(s-\eta)-\sigma_1(s)\}^k}{k!}\,C_\alpha[\sigma(s-\eta)-\sigma(s)]\,ds=$$

$$=\frac{C_\alpha}{2}\sigma(\xi)\,\frac{\{C_\alpha[\sigma_1(\xi-\eta)-\sigma_1(\xi)]\}^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Таким образом, ряд (21) сходится абсолютно и равномерно в любой конечной области переменных ξ и η, подчиненных условию $0<\eta<\xi$. Для суммы этого ряда справедлива оценка

$$|\omega(\xi,\eta)|\leqslant\frac{C_\alpha}{2}\sigma(\xi)\exp\{C_\alpha[\sigma_1(\xi-\eta)-\sigma_1(\xi)]\},\qquad(25)$$

из которой следует, что

$$|u(\xi,\eta)|\leqslant\frac{C_\alpha}{2}\left(\frac{\xi^2}{\xi^2-\eta^2}\right)^\alpha\sigma(\xi)\{C_\alpha[\sigma_1(\xi-\eta)-\sigma_1(\xi)]\}\qquad(24)$$

Подставив функцию $u(\xi,\eta)$ в уравнение (9), получим тождество, из которого интегрируя по ξ и η, принимая во внимание (9) и (9") и переходя к функции $K_\alpha(x,t)$, получим равенство

$$K_\alpha(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}q(s)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x}^{\frac{x+t}{2}}ds\int\limits_{-s+t+x}^{s+t-x}\left[q(s)+\frac{\alpha(\alpha+1)}{s^2}-\frac{\alpha(\alpha+1)}{u^2}\right]K_\alpha(s,u)\,du+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}ds\int\limits_{s}^{s+t-x}\left[q(s)+\frac{\alpha(\alpha+1)}{s^2}-\frac{\alpha(\alpha+1)}{u^2}\right]K_\alpha(s,u)\,du,\quad 0<x\leqslant t,\qquad(26)$$

которое является интегральным уравнением непосредственно для ядра $K_\alpha(x,t)$. Заметим, что исследование этого уравнения непосредственно для получения хорошей оценки функции $K_\alpha(x,t)$ нам провести не удалось. Именно по этой причине мы воспользовались функцией Римана $v_\alpha(s,\tau;\xi,\eta)$ и интегральным уравнением (11).

Из оценки (24) непосредственно следует, что

$$|K_\alpha(x,t)| \leq \frac{C_\alpha}{2}\left[\frac{(x+t)^2}{4xt}\right]^\alpha \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{C_\alpha\left[\sigma(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]\right\}. \quad (27)$$

Нетрудно видеть, что условие

$$\int_x^\infty t^{1+\alpha}|q(t)|\,dt < \infty, \quad x>0 \quad (28)$$

обеспечивает суммируемость функции $K_\alpha(x,t)$ по t в интервале $x \leq t \leq \infty$, $x>0$.

Из равенства (26), используя неравенство (25), нетрудно получить для производных $\frac{\partial}{\partial x}K_\alpha$, $\frac{\partial}{\partial t}K_\alpha$ следующую оценку

$$|DK_\alpha(x,t)+\frac{1}{4}q\left(\frac{x+t}{2}\right)| \leq$$
$$\leq \frac{C_\alpha}{2}\left[\frac{(x+t)^2}{4xt}\right]^\alpha \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\left[\sigma(x)+2\alpha(\alpha+1)\frac{t-x}{tx}\right]\exp\left[C_\alpha\sigma_1(x)\right], \quad (29)$$

где символ D обозначает производную по x или по t.

Из равенства (26), учитывая дифференцируемость функции $q(x)$, заключаем, что функция $K_\alpha(x,t)$ имеет вторые производные при $0<x<t$ и удовлетворяет уравнению (5).

Итак, существование оператора преобразования для гладкой функции $q(x)$ доказано.

Пусть теперь $q(x)$ - произвольная локально суммируемая функция, удовлетворяющая условию (28), пусть $u(\xi,\eta)$ - решение интегрального уравнения (II) и

$$K_\alpha(x,t) = u\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right).$$

Аппроксимируем функцию $q(x)$ последовательностью гладких функций $q_n(x)$ так, что при любом $x>0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_x^\infty t^{1+\alpha}|q_n(t)-q(t)|\,dt.$$

Тогда последовательность ядер

$$K_\alpha^{(n)}(x,t) = u_n\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right),$$

где $u_n(\xi,\eta)$ - решение интегрального уравнения (II) при $q(x)=q_n(x)$ будет, как нетрудно видеть из оценки (27), сходиться к функции $K_\alpha(x,t)$:

$$\lim_{n\ \infty}\int_x^\infty |K_\alpha^{(n)}(x,t)-K_\alpha(x,t)|\,dt = 0.$$

Отсюда следует, что функция $K_\alpha(x,t)$ является ядром оператора преобразования в случае локально суммируемой функции $q(x)$, подчиненной условию (28). Итак, имеет место следующая

ТЕОРЕМА: Пусть $q(x)$ – локально суммируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_x^\infty t^{1+\alpha}|q(t)|\,dt<\infty, \quad x>0, \quad \alpha>0;$$

тогда уравнение (2) имеет решение $y_\alpha(\lambda,x)$, представимое в виде

$$y_\alpha(\lambda,x)=z_\alpha(\lambda x)+\int_x^\infty K_\alpha(x,t)z_\alpha(\lambda t)\,dt, \quad x>0,$$

где $z_\alpha(\lambda x)$ – любое решение уравнения (I), ограниченное при $x\to\infty$. Функция $K_\alpha(x,t)$ абсолютно непрерывна, удовлетворяет условию

$$K_\alpha(x,x)=\frac{1}{2}\int_x^\infty q(t)\,dt$$

и имеет оценку

$$|K_\alpha(x,t)|\leqslant\frac{C_\alpha}{2}\left[\frac{(x+t)^2}{4xt}\right]^\alpha\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{C_\alpha\left[\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right]\right\},$$

где $$\sigma(x)=\int_x^\infty q(t)\,dt, \quad \sigma_1(x)=\int_x^\infty \sigma(t)\,dt,$$

C_α – постоянная.

Работа выполнена под руководством проф. В.А.Марченко, которому автор выражает глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

1. З.С.Агранович, В.А.Марченко. Обратная задача теории рассеяния. Изд. ХГУ, Харьков, 1960.
2. Б.Я.Левин. Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка. ДАН СССР, 106, № 2, 187-190, 1956.
3. Б.М.Левитан. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье. УМН, т. УI, в.2, 1951.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

УСЛОВИЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ

Ф.С.Рофе-Бекетов

Достаточные условия самосопряженности оператора Шредингера

$$Lu = -\Delta u + q(x_1, \ldots, x_n)u \qquad (I)$$

во всем пространстве E_n дает известная теорема Титчмарша и Сиерса [I].

Различным вопросам, связанным с этой теоремой, посвящены работы Б.М.Левитана [2] x) и автора [3].

В настоящей заметке исследуется самосопряженность оператора (I) в бесконечной области $\Omega \subset E_n$ с кусочно-гладкой границей Γ, простирающейся, в общем случае, до бесконечности. Кроме того, для случая оператора Шредингера во всем пространстве мы получаем признак самосопряженности, являющийся новым обобщением теоремы Титчмарша-Сиерса.

Некоторые предварительные результаты автора по рассматриваемой задаче были приведены в монографии И.М.Глазмана [4] (стр. 93-94). Здесь мы ослабляем ограничения на потенциал и на вид области Ω, принимавшиеся в [4] (в частности, снимаем условие (33) из [4]).

Будем считать, что на границе Γ заданы краевые условия одного из видов:

$$u(x)\big|_\Gamma = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = 0, \qquad (3)$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} - h(x)u\right)\Big|_\Gamma = 0, \quad (h(x) \geq 0), \qquad (4)$$

где ν - внутренняя нормаль к Γ, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

При этом, если некоторые участки границы Γ окажутся внутренними для $\Omega \cup \Gamma$, то на таких участках оба взаимно противоположных направления являются внутренними для области Ω, и

---

x) В работе [2] была, в частности, впервые отмечена справедливость теоремы Титчмарша-Сиерса при любом n, а не только при значениях n = I,2, для которых она была установлена авторами (См. [I]).

краевое условие вида (4) в таких точках учитывается дважды, на одном и на другом берегу разреза, осуществляемого таким участком границы в Ω (мы считаем границу ориентируемым многообразием). При этом значения коэффициента $h(x)$ при одном и том же значении x, но на разных берегах разреза, могут различаться.

Итак, под $\bar{\Omega}$ подразумевается замыкание области Ω, снабженное разрезами вдоль тех участков Γ, которые оказываются внутренними для $\Omega \cup \Gamma$.

Л е м м а I. Если при $x \in \Omega$

$$q(x) \geqslant -Q(x), \tag{5}$$

где $Q(x)$ – кусочно-гладкая в Ω функция,

$$Q(x) \geqslant \alpha > 0, \tag{6}$$

$$|\nabla Q^{-\frac{1}{2}}(x)| \leqslant K - Const, \tag{7}$$

то для любой функции $u(x) \in C^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, удовлетворяющей заданному на Γ краевому условию вида (2)–(4), для которой $Lu \in L^2(\Omega)$, сходятся интегралы

$$\int_\Omega Q^{-1}(x)\,|\nabla u|^2\, d\tau < \infty \tag{8}$$

и, в случае краевого условия (4),

$$\int_\Gamma Q^{-1}(x)\, h(x)\, |u(x)|^2\, d\sigma < \infty \tag{9}$$

($d\tau$ означает элемент объема в E_n, $d\sigma$ – элемент (n–I)-мерной площади поверхности).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω_R, Γ_R части области Ω, соответственно, границы Γ, заключенные в шаре $|x| \leqslant R$. Функцию $u(x)$, очевидно, можно считать вещественной.

Положим

$$J^2(R) = \int_{\Omega_R} \left(1 - \frac{|x|}{R}\right)^2 Q^{-1}(x)\,|\nabla u|^2\, d\tau = \int_{\Omega_R} |\varphi_R(x)\nabla u|^2\, d\tau, \tag{I0}$$

где

$$\varphi_R(x) = \left(1 - \frac{|x|}{R}\right) Q^{-\frac{1}{2}}(x). \tag{II}$$

Очевидно, в силу (6), (7), при $x \in \Omega_R$

$$|\varphi_R(x)| < C, \quad |\nabla \varphi_R(x)| < C, \tag{I2}$$

где C от R не зависит. В силу неотрицательности подынтегральной функции, (8) эквивалентно ограниченности $\mathcal{J}(R)$ при $R\to\infty$.
Заметим, что

$$|\varphi_R(x)\nabla u|^2=\nabla(\varphi_R^2\, u\nabla u)-\\ -2(\varphi_R\nabla u)(u\nabla\varphi_R)-\varphi_R^2\, u\Delta u. \tag{13}$$

Подставляя это выражение в (10), находим с помощью теоремы Гаусса-Остроградского и неравенства Коши-Буняковского, в случае краевого условия (4):

$$\begin{aligned}\mathcal{J}^2(R)&\leqslant-\int_{\Gamma_R}\varphi_R^2\, u\frac{\partial u}{\partial\nu}d\sigma+2C\mathcal{J}(R)\|u\|-\\ &-\int_{\Omega_R}\varphi_R^2\, u\Delta u\, d\tau\leqslant-\int_{\Gamma_R}\varphi_R^2\, h(x)\,u^2\,d\sigma+\\ &+2C\mathcal{J}(R)\|u\|+\int_{\Omega_R}\varphi_R^2\, uLu\, d\tau+\int_{\Omega_R}\varphi_R^2\, Q(x)u^2d\tau\leqslant\\ &\leqslant C_u+2C\|u\|\mathcal{J}(R).\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь было учтено, что $h(x)\geqslant 0$ и

$\varphi_R(x)=0$ при $|x|=R.$

Из полученного квадратного неравенства

$$\mathcal{J}^2(R)\leqslant C_u+2C\cdot\|u\|\ \mathcal{J}(R)$$

непосредственно вытекает, что

$$\lim_{R\to\infty}\mathcal{J}(R)<\infty,$$

а потому (8) доказано. Кроме того, из (14) видно, что

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\varphi_R^2\, h(x)\,u^2\,d\sigma<\infty,$$

и справедливость (9) тоже установлена. Доказанная лемма является обобщением леммы Титчмарша-Сиерса в двух направлениях: функция $Q(x)$ не предполагается сферически симметричной, а область Ω не предполагается совпадающей со всем пространством. В тех же направлениях обобщим и теорему Титчмарша-Сиерса.

Пусть L_r есть замыкание в $L_1^2(\Omega)$ оператора, порожденного операцией (1) на функциях $u(x)\in C^2(\overline{\Omega})$ с компактными носителями, удовлетворяющих на Γ краевому условию указанного выше вида (2) - (4) (можно назвать L_Γ "квазиминимальным" оператором). Не уточняя локальных свойств потенциала $q(x)$ и коэффициента $h(x)$ в краевом условии[1], будем считать их достаточно "хорошими" для того, чтобы оператор L_Γ^* являлся бы замыканием своего сужения на совокупность функций $C^2(\bar{\Omega}) \cap D_{L_\Gamma^*}$, где $D_{L_\Gamma^*} = D_{om} L_\Gamma^*$. Эта совокупность $C^2(\bar{\Omega}) \cap D_{L_\Gamma^*}$ совпадает с множеством тех функций $u(x) \in C^2(\bar{\Omega}) \cap L^2(\Omega)$, которые удовлетворяют заданному на Γ краевому условию и для которых $Lu \in L^2(\Omega)$. (Наше требование эквивалентно условию, что множество $\{Lu\}$ при $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap D_{L_\Gamma^*}$ плотно в совокупности $\{Lv\}$ при $v \in D_{L_\Gamma^*}$).

При сделанных предположениях справедлива следующая

Т е о р е м а I. Оператор Шредингера

$$Lu = -\Delta u + q(x)u \tag{I'}$$

в бесконечной области $\Omega \subset E_n$ с краевым условием вида (2)-(4) на границе Γ оказывается самосопряженным (то-есть $L_\Gamma = L_\Gamma^* = L$ без дополнительных краевых условий на бесконечности), если при $x \in \Omega$ существуют $Q(x)$ и $P(x)$ такие, что

$$q(x) > -Q(x) \geqslant -\frac{1}{|\nabla P(x)|^2}, \tag{I5}$$

где функция $Q(x)$ – та же, что и в лемме, а функция $P(x) \geqslant 0$, кусочно-гладкая в $\bar{\Omega}$,

$$P(x) \to \infty \text{ при } |x| \to \infty \quad (x \in \bar{\Omega}) \tag{I6}$$

и, кроме того, существует последовательность конечных областей Ω_N с кусочно-гладкими границами

$$\partial\Omega_N = \Gamma_N \cup S_N, \; \Gamma_N \cap S_N = \Phi,$$

где

$$\Gamma_N = \Gamma \cap \bar{\Omega}_N,$$

$$P(x) = N \text{ при } x \in S_N, \tag{I7}$$

$$P(x) \leqslant N \text{ при } x \in \Omega_N. \tag{I8}$$

(Любая конечная часть Ω содержится в Ω_N при достаточно больших N).

В том частном случае, когда $q(x) \geqslant -Q(|x|)$, $(x \in \Omega)$,

---

I) В связи с этим вопросом см. книгу Ю.М.Березанского [6].

и

$$\int^{\infty} Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr = \infty,$$

в качестве функции $P(x)$ можно взять

$$P(x) = \int_0^{|x|} Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr.$$

Доказательство. В силу сделанных предположений, достаточно установить, что для любых двух вещественных функций $u, v \in C^2(\bar{\Omega}) \cap D_{L_\Gamma}$

$$(Lu, v) - (u, Lv) = 0,$$

то-есть что

$$J \equiv \int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,d\tau = 0. \tag{I9}$$

Так как $u, v, Lu, Lv \in L^2(\Omega)$, то интеграл J сходится абсолютно, и поэтому

$$J = \lim_{N \to \infty} J_N,$$

где

$$J_N = \int_{\Omega_N} \left\{1 - \frac{P(x)}{N}\right\} (u\Delta v - v\Delta u)\,d\tau.$$

С помощью формулы Грина находим, что

$$J_N = \frac{1}{N} \int_{\Omega_N} (u\nabla v - v\nabla u)\nabla P\,d\tau + \int_{\Gamma_N \cup S_N} \left\{1 - \frac{P(x)}{N}\right\} \left(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\sigma, \tag{20}$$

но $\int_{\Gamma_N} = 0$ в силу краевых условий (2) – (4), а $\int_{S_N} = 0$ в силу (I7).

Кроме того, в силу (I5)

$$|\nabla P(x)|^2 \leqslant Q^{-1}(x), \tag{I5'}$$

и поэтому, применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем из (20):

$$|J_N|^2 = \frac{1}{N^2} \left\{ \|u\|^2 \int_\Omega Q^{-1}(x)\, |\nabla v|^2 d\tau + \|v\|^2 \int_\Omega Q^{-1}(x)\, |\nabla u|^2 d\tau \right\} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0,$$

ибо стоящие в скобках интегралы сходятся в силу леммы I (и не зависят от N).

Таким образом, (I9) установлено. Теорема доказана.

Примеры. I. Пусть Ω есть плоская область $r = |x| > 1$, разрезанная вдоль спирали а) $\quad r(\varphi) = \varphi + 1, \quad (0 \leqslant \varphi < \infty),$ $\quad$ (2I)

или

б) $\quad r(\varphi) = \ln(\varphi + e), \ (0 \leqslant \varphi < \infty).$ $\quad$ (22)

На границе Γ области пусть задано любое из условий (2) – (4), например, пусть

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0. \tag{23}$$

Для точек $x \in \Omega$ выберем однозначную ветвь значений полярного угла φ, считая φ непрерывным в Ω и изменяющимся от 0 до ∞. Положим далее в обоих случаях

$$Q(x) = Q(\varphi),$$
$$P(x) = \int_0^{\varphi} Q^{-\frac{1}{2}}(\varphi) r(\varphi) d\varphi, \tag{24}$$

где $r(\varphi)$ задано одним из уравнений (2I) или (22). Очевидно,

$$|\nabla P(x)| = \frac{r(\varphi)}{|x|} Q^{-\frac{1}{2}}(\varphi) \leqslant K \cdot Q^{-\frac{1}{2}}(\varphi), \tag{25}$$

и второе из неравенств (I5), т.е. (I5'), соблюдено. (Наличие постоянного множителя $K > 0$ не меняет сути дела). Выберем $Q(\varphi)$ так, чтобы интеграл (24) при $\varphi \to \infty$ расходился. Положим, соответственно:

а) $\quad Q = Q_1(\varphi) = (\varphi + 1)^4,$

б) $\quad Q = Q_2(\varphi) = (\varphi + e)^2.$

В силу уравнений (2I), (22) имеем:

а) $\quad \varphi + 1 \geqslant |x|, \quad x \in \Omega,$

б) $\quad \varphi + e \geqslant e^{|x|}, \quad x \in \Omega.$

Поэтому для случаев а) и б) соответственно будет:

$$Q = Q_1(\varphi) \geqslant |x|^4,$$
$$Q = Q_2(\varphi) \geqslant e^{|x|}.$$

Значит, операторы

$$L_1 u = -\Delta u - |x|^4 u$$

и

$$L_2 u = -\Delta u - e^{|x|} u$$

при условии (23) являются самосопряженными в Ω (в случаях а) и б) соответственно) без дополнительных краевых условий на басконечности.

Мы видим на этих примерах, что существуют такие области Ω, в которых даже гладкий сферически симметричный потенциал может сколь угодно быстро стремиться к $-\infty$ при $|x| \to \infty$, не нарушая этим самосопряженность оператора Шредингера.

Непосредственно из теоремы I вытекает

С л е д с т в и е. Если $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы I, а $q_1(x)$ - ограниченная и измеримая в Ω функция, то оператор Шредингера

$$\tilde{L}u = -\Delta u + [q(x) + q_1(x)]u$$

в $L^2(\Omega)$ с краевым условием вида (2) - (4) на Γ является самосопряженным без дополнительных условий на бесконечности. При этом, в случае краевого условия (4), достаточно, чтобы требование $h(x) \geqslant 0$ выполнялось лишь при достаточно больших $|x|$.

Для доказательства здесь достаточно заметить, что ограниченные возмущения не изменяют индексов дефекта оператора.

Таким образом, условие гладкости потенциала в теореме I может быть ослаблено.

Применительно к оператору Шредингера во всем пространстве из теоремы I вытекает следующий результат.

Т е о р е м а 2. Для самосопряженности оператора Шредингера

$$Lu = -\Delta u + q(x)u \qquad (I'')$$

в $L^2(E_n)$ без краевых условий на бесконечности достаточно, чтобы существовали такие кусочно-гладкие в E_n функции $Q(x) \geqslant 1$, $P(x) \geqslant 0$, что при некотором $K > 0$

$$q(x) \geqslant -KQ(x), \qquad (26)$$

$$-Q(x) \geqslant -K\frac{1}{|\nabla P(x)|^2}, \qquad (27)$$

$$|\nabla Q^{-\frac{1}{2}}(x)| \leqslant K,$$

$P(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, причем существует последовательность конечных областей Ω_N с кусочно-гладкими границами S_N такими, что

$$P(x)\Big|_{S_N} = N,$$

$$P(x) \leqslant N \quad \text{при} \quad x \in \Omega_N.$$

(Очевидно, любой шар при достаточно больших N попадает внутрь Ω_N. Потенциал $q(x)$ предполагается представимым в виде суммы ограниченного и достаточно гладкого слагаемых).

В том частном случае, когда $Q(x) = Q(|x|)$ и

$$\int^{\infty} Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr = \infty, \tag{28}$$

мы получим отсюда теорему Титчмарша-Сиерса, полагая,

$$P(x) = \int_0^r Q^{-\frac{1}{2}}(r)\,dr.$$

Пример 2. Пусть $P(x) = P(r, \varphi)$ определена на плоскости следующим образом. ($n = 0, 1, 2, \ldots$)

1) $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$,

$$P(r,\varphi) = \begin{cases} r - n, & 2n \leqslant r \leqslant 2n+1 \\ n+1, & 2n+1 \leqslant r < 2n+2 \end{cases}$$

2) $\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi$,

$$P(r,\varphi) = \begin{cases} n, & 2n \leqslant r \leqslant 2n+1 \\ r-n-1, & 2n+1 \leqslant r \leqslant 2n+2 \end{cases}$$

3) При $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $\frac{3}{2}\pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

P линейна по φ и непрерывна.

Например, при $\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \pi$

$$P(r,\varphi) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(\pi - \varphi)(r - 2n) + n, & 2n \leqslant r < 2n+1, \\ \frac{2}{\pi}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)(r - 2n - 2) + n + 1, & 2n+1 \leqslant r \leqslant 2n \leqslant 2. \end{cases}$$

Замечая, что в каждом кольце имеются участки, где $\nabla P = 0$, убеждаемся, что так можно выбрать отвечающий условиям самосопряженности оператора Шредингера в соответствии с теоремой 2 потенциал

$$q(x) \geqslant -\frac{1}{|\nabla P(x)|^2}, \tag{29}$$

что если взять для него сферически симметричную миноранту

$$-Q(r) = \min_{|x| = r} q(x),$$

то $Q(r)$ будет сколь угодно быстро расти при $r \to \infty$ и для него не будет выполняться условие Титчмарша-Сиерса (28).

Признак самосопряженности оператора Шредингера во всем пространстве, устанавливаемый теоремой 2, допускает обобщение, заключающееся в замене неравенства для потенциала $q(x) \geqslant -Q(x)$ неравенством для операторов:

$$(Lu, u) \geqslant (L_\varepsilon u, u), \tag{30}$$

где

$$Lu = -\Delta u + q(x)u, \tag{I'''}$$

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon \Delta u - Q(x)u \tag{31}$$

при некотором $\varepsilon > 0$. А именно, справедлива

Т е о р е м а 3. Утверждение теоремы 2 о самосопряжености оператора Шредингера (I $''$) остается в силе, если неравенство (26) заменить неравенством (30), выполнение которого при некотором $\varepsilon > 0$ требуется лишь для финитных функций $u(x) \in C^2$ с носителями, расположенными вне произвольно фиксированной сферы.

Для доказательства достаточно заметить, что справедлива следующая

Л е м м а 2. Если при условиях теоремы 3 некоторая функция $u(x) \in C^2 \cap L^2(E_n)$ такова, что $Lu \in L^2(E_n)$, то

$$\int_{E_n} Q^{-1}(x) |\nabla u(x)|^2 d\tau < \infty .$$

Доказательство леммы 2 проводится аналогично доказательству леммы I из работы автора [3], где было получено обобщение теоремы Титчмарша-Сиерса, подобное обобщению, содержащемуся в теореме 3, но только для случая сферически симметричной миноранты $Q(x) = Q(|x|)$.

Подобным же образом обобщением теоремы 2 из работы [3] является

Т е о р е м а 4. Пусть вещественные коэффициенты оператора Шредингера в $L^2(E_n)$

$$Lu = -\Delta u + [q(x) + p(x)]u \tag{32}$$

таковы, что $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 2 и, в частности (26),(27), и, кроме того, при некотором $M > 0$ и любом орте x°

$$\int_0^\infty |p(rx^\circ)| Q^{-\frac{1}{2}}(rx^\circ) dr \leqslant M < \infty .$$

Тогда оператор L (32) - самосопряженный.

Доказательство проводится путем проверки того, что оператор (32) удовлетворяет условиям теоремы 3, а потому самосопряжен (аналогично тому, как это сделано в [3]).

В заключение отметим, что первым примером теоремы о самосопряженности оператора Шредингера, в условии которой вместо неравенства для потенциала ставится неравенство для оператора (требование позитивности оператора) является теорема Глазмана-Повзнера [4] , [5] , являющаяся обобщением известной теоремы Карлемана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э.Ч.Титчмарш. Разложения по собственным функциям (перев.с англ.),ч.П.Изд-во иностр.лит.М., 1961.

2. Б.М.Левитан. Об одной теореме Титчмарша и Сиерса. "Усп.матем. наук"; ХУI, №4, 175-178, 1961.

3. Ф.С.Рофе-Бекетов. О неполуограниченных дифференциальных операторах. Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып.2, 178-184,Харьков, 1966.

4. И.М.Глазман. Прямые методы качественного спектрального анализа. Физматгиз, М., 1963.

5. А.Я.Повзнер. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$."Матем.сб.", 32 (74):1, 109-156, 1953.

6. Ю.М.Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965.

Т Р У Д Ы
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Б.Я.Левин

Обозначим $\mathcal{L}_p^\sigma$ класс целых функций экспоненциального типа не большего σ, принадлежащих $\mathcal{L}_p(-\infty,\infty)$ на вещественной оси. Легко видеть, что при $\sigma \leqslant \pi$ функция этого класса определяется своими значениями в целых точках $\pm n = 0, 1, 2, \ldots$ Поэтому естественно ставить задачу об интерполяции функциями класса $\mathcal{L}_p^\pi$ с узлами интерполяции - целыми точками.

Один из первых относящихся сюда результатов это теорема Котельникова [I], которую можно сформулировать так:

ТЕОРЕМА. При $\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2<\infty$, то есть при $\{c_n\}\in \ell_2$, ряд

$$f(z)=\frac{\sin \pi z}{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot c_n}{z-n} \tag{I}$$

равномерно сходится на любом компакте, дает линейное отображение всего пространства ℓ_2 на все пространство $\mathcal{L}_2^\pi$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

Очевидно, что $f(n)=c_n$ $(\pm n = 0, 1, 2, \ldots)$

В этой статье мы обобщаем теорему Котельникова, рассматривая вместо целых точек более общие множества узлов интерполяции. Кроме того, вместо пространства $\mathcal{L}_2^\pi$ мы рассматриваем более общие пространства $\mathcal{L}_p^\pi$ $(1\leqslant p<\infty)$.

Для характеристики множества узлов интерполяции мы введем специальный класс функций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Целая функция $\mathcal{F}(z)$ называется функцией типа синуса, если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\mathcal{F}(z)$ имеет экспоненциальный тип π в каждой из полуплоскостей $y>0$ и $y<0$ $(z=x+iy)$, то есть $\sigma_+=\sigma_-=\pi$.

в) Все корни $\{\lambda_n\}$ x) функции $\mathcal{F}(z)$ расположены в неко-

x) Корни нумеруются в порядке возрастания их реальных частей торой полосе $|y|\leq h<\infty$.

c) $\inf\limits_{n\neq k}|\lambda_n-\lambda_k|=2\delta>0.$

d) При некотором $H>h$

$$0<C_H^1\leq|\mathcal{F}(x+iH)|\leq C_H^2<\infty \qquad (-\infty<x<\infty).$$

Из этого определения можно получить некоторые свойства функции $\mathcal{F}(z)$, которые мы сформулируем в виде лемм:

ЛЕММА I. Всюду вне кружков $\{K_i\}$ радиуса η $(0<\eta<\delta)$ с центрами в корнях $\{\lambda_n\}$ функции $\mathcal{F}(z)$ выполняется неравенство

$$|\mathcal{F}(z)|\geq m_\eta e^{\pi|y|},$$

в котором m_η – некоторая положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала функцию $\mathcal{F}(z)$ в полосе $|y|\leq H$. Из d) следует, что функция $\mathcal{F}(z)$ ограничена в любой полосе $|y|\leq H_1$ $(H_1>H)$. Поэтому семейство функций $\mathcal{F}(z+\tau)$ $(-\infty<\tau<\infty)$ является в этой полосе условно компактным, если под сходимостью в пространстве аналитических функций понимать, как обычно, равномерную сходимость на каждом компакте. Предположим, в противоположность утверждению, что в полосе $|y|\leq H+\eta$, но вне кружков $K_n:|z-\lambda_n|\geq\eta$, есть такая последовательность точек $z_j=x_j+iy_j$, что $\mathcal{F}(z_j)\to 0$. Выделим из этой последовательности подпоследовательность $z_j'=x_j'+iy_j'$, так чтобы последовательность функций $\mathcal{F}_j(z)=\mathcal{F}(z+x_j')$ сходилась в указанном смысле $\mathcal{F}(z+x_j')\rightrightarrows\mathcal{F}_0(z)$. Предельная функция не равна тождественно нулю, ибо в силу второй части неравенства d) будем иметь

$$|\mathcal{F}_0(x+iH)|\geq C_H^1.$$

С другой стороны мы имеем $\mathcal{F}_j(iy_j')=0$. Пусть y_0 – предельная точка для y_j' . Тогда $\mathcal{F}_0(iy_0)=0$. По теореме Гурвица отсюда следует, что в круге $|z-iy_0|<\frac{\eta}{2}$ каждая функция $\mathcal{F}_j(z)$ (кроме, может быть, конечного числа) имеет корень. Но тогда $\mathcal{F}(z)$ обращается в нуль в точке $z_j''=x_j'+iz_j''$, где $|\tilde{z}_j''-iy_0|<\frac{\eta}{2}$. Очевидно, что $|z_j''-z_j'|<\eta$ при $j>j_0$. С другой стороны расстояние от z_j' до множества корней функции $\mathcal{F}(z)$ не меньше η . Получили противоречие и, следовательно, в полосе $|y|\leq H$, но вне кружков $\{K_n\}$, верно неравенство $|\mathcal{F}(z)| \geqslant m_\eta > 0$. Заметим, что поэтому функция $|\mathcal{F}(x-iH)|$ удовлетворяет неравенствам аналогичным неравенствам d), то есть

$$d')\qquad m_\eta \leqslant |\mathcal{F}(x-iH)| \leqslant C_H^2 e^{2\pi H}.$$

Оценка функции $\mathcal{F}(z)$ вне полосы $|y| \leqslant H$ легко следует из представления

$$\ln|\mathcal{F}(x \pm iy)| = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\mathcal{F}(t \pm iH)|}{|t-z \pm iH|^2}\,dt + \pi(|y|-H).^{x)}$$

ЛЕММА 2. Для функции $\mathcal{F}(z)$ – типа синуса имеет место оценка

$$|\mathcal{F}'(\lambda_n)| \geqslant N > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где N – постоянная (зависящая от функции).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбрав в предыдущей лемме $\eta = \delta$ мы получим

$$\min_{|z-\lambda_n| = \delta} \ln\left|\frac{\mathcal{F}(z)}{z-\lambda_n}\right| \geqslant \frac{m_\delta}{\delta}$$

и принцип минимума для гармонической функции дает нужную оценку.

ТЕОРЕМА I. Пусть $\mathcal{F}(z)$ – функция типа синуса, $\{\lambda_n\}$ – множество ее корней и $\{c_n\}$ произвольная последовательность из ℓ_p $(1<p<\infty)$. Тогда ряд

$$f(z) = \mathcal{F}(z)\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\mathcal{F}'(\lambda_n)(z-\lambda_n)} \qquad (3)$$

сходится равномерно на любом компакте и представляет целую функцию удовлетворяющую условиям $f(\lambda_n) = c_n$ и

$$|f(z)|e^{-\pi|y|} \to 0 \quad \text{при} \quad |z| \to \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отрезок ряда

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\mathcal{F}'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}$$

при $|y| \leqslant H$. По лемме 2

$$\left|\sum_{s}^{z} \frac{c_n}{\mathcal{F}'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}\right| \leqslant \frac{1}{N}\sum_{s}^{z}\left|\frac{c_n}{z-\lambda_n}\right|$$

---

x) см. [2] стр. 306.

и, применяя неравенство Гельдера при $1<p<\infty$, мы получим

$$\left|\sum_{s}^{z} \frac{c_n}{F'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}\right| \leqslant \frac{1}{N}\left(\sum_{s}^{z}|c_n|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|z-\lambda_n|^q}\right)^{1/q}. \quad (4)$$

Из условия c) следует, что число точек $\{\lambda_n\}$ в любом прямоугольнике $|y|\leqslant h$, $T<x\leqslant T+1$ не превосходит некоторого числа R. Поэтому при $|y|\geqslant H$ имеем

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|z-\lambda_n|^2}\leqslant 2R\left[\frac{1}{H^2}+\left(\frac{1}{1+H^2}\right)^{q/2}+\ldots+\left(\frac{1}{n^2+H^2}\right)^{q/2}+\ldots\right].$$

Возвращаясь к (4), получаем

$$\left|\sum_{s}^{z} \frac{c_n}{F'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}\right| < \frac{M_{H\delta}^{1/q}}{N}\left(\sum_{s}^{z}|c_n|^p\right)^{1/p}.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда в области $|y|\geqslant H$.
Применяя теорему Фрагмена и Линделефа к функции

$$f_{s,z}(z)=F(z)\sum_{s}^{z}\frac{c_n}{F'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}$$

в полосе $|y|\leqslant C$, мы получим, что ряд (3) сходится равномерно в любой полосе вида $|y|\leqslant C<\infty$ и

$$|f(z)|<\left|\varepsilon+\sum_{-N}^{N}\frac{c_n}{F'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}\right|\cdot|F(z)|=O(1)e^{\pi|y|}.$$

Теорема доказана.

Для дальнейшего напомним некоторые определения и факты. Классом H_p^+ $(1\leqslant p<\infty)$ называется класс функций $\varphi(z)$ – голоморфных в полуплоскости $y>0$ и удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^p dx\leqslant M<\infty \qquad (y>0).$$

Аналогично определяется класс H_p^-. Известно, что если $f(z)\in \mathcal{L}_p^{\sigma}$, то функция $f(z)e^{i\sigma z}\in H_p^+$. Очевидно также, что если $\varphi(z)\in H_p^+$, то и функция $\varphi(z+i\tau)\in H_p^+$ при $\tau>0$. Класс H_p^+ $(p\geqslant 1)$ образует полное нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_p=\sup_{y>0}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)|^p dx\right)^{1/p}.$$

При $y\downarrow 0$ функция $f(x+iy)$ стремится по норме к некоторой предельной функции $f(x)$ и

$$\|f\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Наконец, при $p>1$, пространство сопряженное H_p^+ изоморфно пространству H_q^+; $\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1\right)$, то есть общий вид функционала в H_p^+ следующий

$$\Psi(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{\Psi(x)}\,dx, \quad (\Psi\in H_q^+) \qquad (5)$$

и $\|\Psi\|\geqslant\frac{1}{N_q}\|\Psi_q\|$, где N_q – постоянная зависящая лишь от q.x)

Л Е М М А 3. Пусть $\varphi(z)\in H_p^+$ и $\{\lambda_n\}$ последовательность точек, удовлетворяющих условиям:

I. $0<\delta<\operatorname{Jm}\lambda_n<h<\infty$; 2. $|\lambda_n-\lambda_k|\geqslant 2\delta>0$ $(n\neq k)$.

Тогда при любом $p>0$

$$\sum_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda_n)|^p\leqslant C_{h,\delta}\|\varphi\|_p^p \qquad \left(C_{h,\delta}=\frac{h}{\pi\delta^2}\right). \qquad (6)$$

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из определения класса H_p^+ следует, что

$$\int_0^h\int_{\infty}^{\infty}|\varphi(x+iy)|^p\,dx\,dy\leqslant h\,\|\varphi\|_p^p.$$

Отсюда

$$\sum\iint_{|z-\lambda_n|\leqslant\delta}|\varphi(z)|^p\,d\sigma\leqslant h\,\|\varphi\|_p^p. \qquad (7)$$

Но, в силу субгармоничности функции $|\varphi(z)|^p$ имеем

$$|\varphi(\lambda_n)|^p\pi\delta^2\leqslant\iint_{|z-\lambda_n|\leqslant\delta}|\varphi(z)|^p\,d\sigma.$$

Из этого неравенства и (7) следует утверждение леммы.

С Л Е Д С Т В И Е. Если $f(z)\in\mathcal{L}_p^\sigma$ и множество $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условиям

$$|\lambda_n-\lambda_k|\geqslant 2\delta>0 \quad (k\neq n);\ |\operatorname{Jm}\lambda_n|\leqslant h<\infty, \qquad (8)$$

---

x) Этот факт легко следует из теоремы М.Рисса об ограниченности в пространстве $\mathcal{L}_p(-\infty,\infty)$ оператора, порожденного преобразованием Гильберта $H_\varphi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t-x}\,dt$

то

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda_n)|^p \leqslant 2c_{\kappa,\delta} \, \| f \|_p^p . \tag{9}$$

Т Е О Р Е М А 2. Пусть $\mathcal{F}(z)$ – целая функция типа синуса и $\{\lambda_n\}$ – последовательность ее корней. Тогда , для произвольной последовательности комплеконых чисел $\{c_n\} \in \ell_p$ $(1<p<\infty)$ ряд

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n \mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}'(\lambda_n)(z-\lambda_n)} \tag{10}$$

сходится на вещественной оси по норме $\mathcal{L}_p(-\infty,\infty)$ и, следовательно, интерполирующая целая функция $f(z) \in \mathcal{L}_p^{\pi}$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. По теореме I ряд (10) сходится равномерно в любой полосе $|y| \leqslant K < \infty$ и представляет целую функцию экспоненциального типа $\sigma \leqslant \pi$ ограниченную на вещественной оси.

Рассмотрим отрезок ряда (10)

$$\Phi_{n,m}(z) = \sum_{n+1}^{m} \frac{c_\kappa \mathcal{F}(z)}{\mathcal{F}'(\lambda_n)(z-\lambda_\kappa)} . \tag{11}$$

Функция $\Phi_{n,m}(z)$ целая, экспоненциального типа π , принадлежащая $\mathcal{L}_p(-\infty,\infty)$ и поэтому,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{n,m}(x)|^p dx \leqslant e^{\pi p H} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{n,m}(x+iH)|^p dx . \tag{12}$$

Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{n,m}(x+iH)|^p dx \leqslant c_2^p \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_{n,m}(x)|^p dx , \tag{13}$$

где

$$\varphi_{n,m}(z) = \sum_{n+1}^{m} \frac{c_\kappa}{\mathcal{F}'(\lambda_\kappa)(z-\lambda_\kappa+iH)} .$$

Для доказательства сходимости ряда (10) в $\mathcal{L}_p(-\infty,\infty)$ достаточно получить соответствующую оценку нормы функции $\varphi_{n,m}(z)$, принадлежащей H_p^+ .

Имеем

$$\|\varphi_{n,m}(z)\|_p \leqslant N_q \sup_{\substack{\psi \in H_q^+ \\ \|\psi\|=1}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n,m}(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx \right|, \qquad (14)$$

N_q – постоянная. Но раз $\psi(x)$ - есть предельная на вещественной оси функция для $\psi(z) \in H_q^+$, то $\overline{\psi(x)}$ есть предельная для функции $\overline{\psi}(z) \in H_q^-$. Вычисляя интеграл в правой части неравенства (14) с помощью вычетов получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n,m}(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx = \sum_{n+1}^{m} \frac{c_k \overline{\psi}(\lambda_k - iH)}{\mathcal{F}'(\lambda_k)}.$$

Применяя лемму 2 и неравенство Гельдера, получаем неравенство

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n,m}(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx \right| \leqslant \frac{1}{N} \left(\sum_{n+1}^{m} |c_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n+1}^{m} |\overline{\psi}(\lambda_k - iH)|^q \right)^{1/q},$$

которое после применения леммы 3, дает

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n,m}(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx \right| \leqslant \frac{(C_{H,\delta})^{1/q}}{N N_q} \left(\sum_{n+1}^{m} |c_k|^p \right)^{1/p}.$$

Принимая во внимание (12), (13) и (14), можем утверждать, что

$$\|\Phi_{n,m}(x)\|_p \leqslant K_p \left(\sum_{n+1}^{m} |c_k|^p \right)^{1/p}, \qquad (15)$$

где K_p – постоянная, зависящая от p и последовательности узлов интерполяции $\{\lambda_n\}$. Итак, ряд (10) сходится в $\mathcal{L}_p(-\infty,\infty)$ и поэтому функция $f(x) \in \mathcal{L}_p(-\infty,\infty)$. Принимая во внимание теорему 1, получаем, что $f(z) \in \mathcal{L}_p$.

Т Е О Р Е М А 3. Ряд (10) дает линейное топологическое отображение всего пространства ℓ_p на все $\mathcal{L}_p^\pi$; $(1<p<\infty)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Из теоремы 2 следует, что ряд (10) каждой последовательности $\{c_n\} \in \ell_p$ ставит в соответствие функцию $f(z) \in \mathcal{L}_p^\pi$ такую, что $f(\lambda_n) = c_n$ и

$$\|f\|_p^p \leqslant K_p \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^p, \qquad (16)$$

то есть дает линейное непрерывное отображение всего ℓ_p в $\mathcal{L}_p^\pi$.

Очевидно, что отличной от нулевой последовательности $\{c_n\}$ отвечает не равная тождественно нулю функция $f(z)$. Остается доказать, что всякая функция из $\mathcal{L}_p^\pi$ есть образ некоторой последовательности $\{c_n\} \in \ell_p$. Действительно, пусть $f(z) \in \mathcal{L}_p^\pi$.

Тогда, как легко видеть,

$$|f(z)|\, e^{-\pi|y|} \to 0 \qquad (17)$$

при $|z| \to \infty$. С другой стороны, по следствию из леммы 3 имеем $\{f(\lambda_n)\} \in \ell_p$. Ряд

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda_n)\, F(z)}{F'(\lambda_n)(z-\lambda_n)}$$

представляет по теореме 2 функцию из $\mathcal{L}_p^\pi$, которая поэтому удовлетворяет условию

$$|\varphi(z)|\, e^{-\pi|y|} \to 0 \qquad (|z| \to \infty). \qquad (17')$$

Из этих условий и леммы I получается, что целая функция

$$\Psi(z) = \frac{f(z) - \varphi(z)}{F(z)}$$

стремится к нулю при $|z| \to \infty$ и $|z - \lambda_n| \geq \delta > 0$, $\pm n = 0, 1, 2, \ldots$. Принцип максимума дает возможность оценить функцию $\Psi(z)$ внутри исключительных кружков и, следовательно, $\Psi(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. По теореме Лиувилля получаем, что $\Psi(z) \equiv 0$, то есть функция $f(z)$ представляется рядом (10). Теорема доказана.

З А М Е Ч А Н И Е. Следствие из леммы 3 и неравенство (16) дают

$$\|f\|_p^p \asymp \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^p \;{}^{*)} \qquad (c_n = f(\lambda_n)). \qquad (18)$$

При $p=1$ утверждение теоремы перестает быть верным. Среди функций из $\mathcal{L}_1^\pi$ нет функции, которая интерполировала бы последовательность $c_n = 0$ при $n \neq 0$ и $c_0 = 1$. В самом деле, такая функция $f(z)$ должна была бы удовлетворять усло-

---

x) Символ $\asymp$ означает, что отношение величин, стоящих в правой и левой частях, находится между двумя положительными постоянными не зависящими от функции.

вию (I7). Целая функция

$$\Psi(z) = \left[f(z) - \frac{\sin \pi z}{\pi z}\right](\sin \pi z)^{-1}$$

равномерно стремится к нулю при $|z| \to \infty$. Отсюда $\Psi(z) = 0$ и $f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$. Но эта функция не принадлежит $\mathcal{L}_1^{\pi}$. При $p = \infty$ ряд (I0) может, конечно, расходиться. Более того, есть такие ограниченные последовательности, которые не могут быть проинтерполированы с узлами в целых точках целой функцией экспоненциального типа $\sigma \leqslant \pi$ ограниченной на вещественной оси.x) Частный случай теоремы 3 (при $p = 2$) дает возможность весьма просто доказать одну теорему из теории базисов показательных функций.

В статье [5] было доказано, что если $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ – все корни целой функции типа синуса, то система функций $\{e^{i\lambda_n t}\}$ является базисом в $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$. Далее в статье В.Д.Головина [6] было доказано, что эта система функций является базисом Рисса в $\mathcal{L}_2(-\pi, \pi)$ xx).

---

x) В [2] на стр. 59I–594 дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы такая интерполяция была возможна. В этой связи следует упомянуть известную теорему M.Certwright, которая формулируется так: Если целая функция $f(z)$ экспоненциального типа ограничена в целых точках, и $h_f(\frac{\pi}{2}) + h_f(-\frac{\pi}{2}) < 2\pi$, то

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| \leqslant C_\sigma \sup_{-\infty < n < \infty} |f(n)|. \qquad (I9)$$

Эта теорема обобщалась многими авторами в разных направлениях. В работе Г.Полиа и А.Планшереля [4] эта теорема была перенесена на функции из $\mathcal{L}_p(-\infty, \infty)$ с заменой $\sup$ в неравенстве (I9) соответственно нормами $\mathcal{L}_p(-\infty, \infty)$ и l_p.

xx) Система $\{x_n\}$ элементов гильбертова пространства H называется базисом Рисса, если каждый элемент $x \in H$ представляется единственным образом в форме

$$x = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n x_n$$

при чем

$$\|x\|^2 \asymp \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

По теореме Лорха [7] для того, чтобы базис был безусловным в H (то есть оставался базисом при любых перестановках) необходимо и достаточно чтобы он был базисом Рисса. Впоследствии эта теорема была независимо доказана И.М.Гельфандом [8].

Т Е О Р Е М А 4. Если $\{\lambda_n\}$ — множество корней функции типа синуса, то система функций $\{e^{i\lambda_n t}\}$ есть базис Рисса в $\mathcal{L}_2(-\pi,\pi)$.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Мы будем опираться на следующее простое утверждение из функционального анализа: для того, чтобы система элементов была базисом Рисса, необходимо и достаточно, чтобы существовала и являлась базисом Рисса биортогональная система.

Построим систему функций

$$\chi_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{F}(x)\, e^{itx}}{\mathcal{F}'(\lambda_n)(x-\lambda_n)}\,dx.$$

По теореме Винера и Пэли $\chi_n(t)=0$ при $|t| \geqslant \pi$ и поэтому

$$\frac{\mathcal{F}(x)}{\mathcal{F}'(\lambda_n)(x-\lambda_n)} = \int_{-\pi}^{\pi} \chi_n(t)\, e^{-ixt}\, dt$$

и, следовательно, $(\chi_n(t), e^{i\lambda_k t}) = \delta_{n,k}$.

Пусть теперь $\psi(t) \in \mathcal{L}_2(-\pi,\pi)$ и

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \psi(t)\, e^{-izt}\, dt.$$

Очевидно, что $f(z) \in \mathcal{L}_2^{\pi}$ и потому, по теореме 2 и 3

$$f(x) - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\lambda_n)\,\mathcal{F}(x)}{\mathcal{F}'(\lambda_n)(x-\lambda_n)}, \tag{20}$$

причем ряд сходится в $\mathcal{L}_2(-\infty,\infty)$ и

$$\|f\|^2 \asymp \sum_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda_n)|^2.$$

Применяя обратное преобразование Фурье к ряду (20), мы получим

$$\psi(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(\lambda_n)\,\chi_n(t),$$

причем

$$\|\psi\|^2 \asymp \sum_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda_n)|^2,$$

то есть последовательность $\{\chi_n(t)\}$, а значит и $\{e^{i\lambda_n t}\}$ является базисом Рисса x).

---

x) Аналогичное доказательство этой теоремы было недавно найдено независимо В.Э.Кацнельсоном [9].

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. В.А.Котельников, "О пропускной способности "эфира" и проволоки в электросвязи". Материалы к I-му Всесоюзному съезду по вопросам связи и развития слаботочной промышленности, I933.

2. Б.Я.Левин,"Распределение корней целых функций", ГИТТЛ, I956.

3. M.Cartwright,On Certain Integral Functions of Order 1, Quartely J.of Math. (Oxford Ser.),7,46-55,1936.

4. A.Plancherel et G.Polya,Fonctions entieres et integrales Fourier multiples,Comm.Math.Helv.,10,110-163,1938.

5. Б.Я.Левин," О базисах показательных функций в $\mathcal{L}_2(-\pi,\pi)$ ". Зап.мат.отд.ф.-м.ф-та и Харьк.матем.об-ва, (сер. 4) 27, 39-48, I96I.

6. В.Д.Головин, "О биортогональных разложениях в $\mathcal{L}^2$ по линейным комбинациям показательных функций".Зап.м.м.фак., ХГУ и Харьк.матем.об-ва (сер. 4), т.XXX, I964.

7. E.R.Lorch,Bicontinuous linear transformations in certain vector spaces,Bull.Amer.Math.Soc.,45,564-569,1939.

8. И.М.Гельфанд, "Замечания к работе Н.К.Бари "Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве", Уч.зап. МГУ, 4, вып. I48, 224-225, I95I.

9. В.Э.Кацнельсон, "О базисах из показательных функций в $\mathcal{L}^2$ " "Функциональный анализ и его приложения" (в печати)

Т Р У Д Ы
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^2(-\infty,\infty)$ С ВЕСОМ

А.М.Рыбалко

I. Обобщение преобразования Фурье на растущие функции производилось и изучалось неоднократно в различных направлениях. Наши рассмотрения носят конструктивный характер и примыкают в первую очередь к построениям Н.И.Ахиезера [I] и В.П.Гурария [2]. В обеих работах [I] и [2] вместо пространства $L^2(-\infty,\infty)$ рассматривается гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\frac{d\lambda}{\Omega(\lambda)} ,$$

где $\Omega(\lambda)$ – целая трансцендентная функция, удовлетворяющая условию

$$\Omega(\lambda)>0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty).$$

Мы будем это гильбертово пространство обозначать H_Ω. Таким образом, в обоих случаях весовая функция

$$W(\lambda)=\frac{1}{\Omega(\lambda)}$$

ни в одной точке интервала интегрирования не обращается в нуль. В настоящей работе мы будем заниматься случаем, когда именно это условие не выполнено. В связи с одной известной теоремой

М.Г.Крейна [3] рассмотрение этого случая в конструктивном направлении представляется нам не лишенным смысла. Однако вначале остановимся на результатах работ [I] и [2] . Н.И.Ахиезер в [I]предполагает, что выполнены следующие условия:

I^а) $\Omega(\lambda)$ –целая функция нулевого рода;

2^а) все корни $\Omega(\lambda)$ лежат в полосе конечной ширины

$$-A < \operatorname{Re}\lambda < A.$$

Предположения В.П.Гурария являются менее ограничительными, а именно:

I^б) $\Omega(\lambda)$ – целая функция заданного экспоненциального типа 2б;

2^б) $$\sup_{R>1}\int_1^R \frac{\ln[\Omega(\lambda)\Omega(-\lambda)]}{\lambda^2}\,d\lambda < \infty.$$

В обоих случаях имеет место представление

$$\Omega(\lambda) = \varphi(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda), \qquad (I)$$

где $\varphi(\lambda)$ – целая трансцендентная функция, все корни которой лежат в верхней полуплоскости, причем $\varphi(\lambda)$ в рассматриваемых случаях соответственно нулевого рода и экспоненциального типа G .

В случае Н.И.Ахиезера любой многочлен $Q_n(\lambda)$ принадлежит H_Ω . Поэтому можно ввести бесконечную ортонормированную последовательность многочленов $\{P_k(\lambda)\}_0^\infty \subset H_\Omega$. В случае В.П.Гурария многочлены могут не принадлежать H_Ω . Однако здесь можно построить другую замечательную ортонормированную последовательность функций. Пусть λ_k ($K = 1,2,3,\ldots$) все корни функции $\varphi(\lambda)$ (так что $\Im\lambda_k > 0$). В таком случае положим

$$\varphi_k(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda_k - \overline{\lambda}_k}{i}}\;\frac{\varphi(\lambda)(\lambda-\overline{\lambda}_1)\ldots(\lambda-\overline{\lambda}_{k-1})}{(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_k)},$$

где корень квадратный имеет положительное значение. Легко проверить, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_k(\lambda)\overline{\varphi_m(\lambda)}\frac{d\lambda}{\Omega(\lambda)} = \delta_{k,m}.$$

Теперь мы можем сформулировать соответственно теоремы

Н.И.Ахиезера и В.П.Гурария.

ТЕОРЕМА А (Н.И.Ахиезер). Всякая функция $F(\lambda)\in H_\Omega$, где $\Omega(\lambda)$ удовлетворяет условиям I^a, 2^a, а $\varphi(\lambda)$ определяется формулой (I), однозначно представима в виде

$$F(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k P_k(\lambda)+\varphi(\lambda)\int_0^{\infty} e^{it\lambda} f(t)\,dt+\bar{\varphi}(\lambda)\int_{-\infty}^{0} e^{it\lambda} f(t)\,dt,$$

где

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2<\infty, \quad f(t)\in L^2(-\infty,\infty).$$

При этом

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\frac{d\lambda}{\Omega(\lambda)}=\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2+\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt.$$

Обратно: всякая функция $F(\lambda)$, представимая указанным образом, принадлежит H_Ω.

ТЕОРЕМА В (В.П.Гурарий). Всякая функция $F(\lambda)\in H_\Omega$, где $\Omega(\lambda)$ удовлетворяет условию $I^б$, $2^б$ однозначно представима в виде

$$F(\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(\lambda)+\varphi(\lambda)\int_0^{\infty} e^{it\lambda} f(t)\,dt+\bar{\varphi}(\lambda)\int_{-\infty}^{0} e^{it\lambda} f(t)\,dt,$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2<\infty, \quad f(t)\in L^2(-\infty,\infty).$$

При этом

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\lambda)|^2\frac{d\lambda}{\Omega(\lambda)}=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2+\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt.$$

Обратно: всякая функция $F(\lambda)$, представимая указанным образом, принадлежит H_Ω.

2. В настоящей работе гильбертово пространство порождается функциями, заданными не на всей оси, а на внешности интервала $[-1,1]$. Иными словами, вместо всей оси мы будем иметь дело с точечным множеством E, образованным двумя полубесконечными интервалами

$$(-\infty, -1), \ (1, \infty).$$

Здесь, как и в других родственных рассмотрениях конструктивной теории функций (см. [4], [5]), оказывается полезным брать весовую функцию с множителем

$$\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} \tag{2}$$

и вводить двухлистную поверхность f, для которой интервалы E являются линиями перехода. Считая радикал (2) положительным на верхнем берегу разреза $(1, \infty)$ в первом листе f, мы однозначно определим этот радикал во всех точках f. В частности, он будет положителен также и на верхнем берегу разреза $(-\infty, -1)$ в первом листе.

Снова возьмем целую функцию $\Omega(\lambda)$ теперь положительную при $\lambda \geqslant 1$ и $\lambda \leqslant -1$, определим весовую функцию $w(\lambda)$ следующим образом:

$$w(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Omega(\lambda)}\sqrt{\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}} & (\lambda > 1), \\ 0 & (-1<\lambda<1), \\ \dfrac{1}{\Omega(\lambda)}\sqrt{\dfrac{\lambda+1}{\lambda-1}} & (\lambda<-1) \end{cases}$$

и введем гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\,w(\lambda)\,d\lambda.$$

Будем его обозначать $\mathcal{H}_w$.

Простейшим случаем является тот, когда $\Omega(\lambda)$ – многочлен, очевидно, четной степени. Для этого случая интересующий факт содержится в статье Н.И.Ахиезера [4].

Прежде всего в статье [4] устанавливается, что $\Omega(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Omega(\lambda) = \omega(\lambda)\omega^*(\lambda),$$

где

$$\omega(\lambda) = \sum_{k=-n}^{n} a_k(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})^k, \quad \omega^*(\lambda) = \sum_{k=-n}^{n} a_k(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})^k,$$

если $2n$ - степень многочлена, причем функции $\omega(\lambda)$, $\omega^*(\lambda)$ (целые на f) удовлетворяют двум условиям:

а) имеет место соотношение

$$\bar{a}_k = a_{-k};$$

б) все корни $\omega(\lambda)$ лежат на первом (верхнем) листе f, а все корни $\omega^*(\lambda)$ - на втором (нижнем) листе. Все многочлены степени $\leqslant n-1$ принадлежат $\mathcal{H}_w$. Пусть $\{Q_k(\lambda)\}_0^{n-1}$ есть система ортонормированных многочленов в $\mathcal{H}_w$. Далее в работе [4] вводятся функции от λ (при $x \geqslant 0$)

$$Q(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\omega(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})} + \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\omega^*(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}.$$

Это - целые функции экспоненциального типа x. При этих обозначениях в [4] устанавливается:

Т Е О Р Е М А C (Н.И.Ахиезер). В с я к а я ф у н к ц и я $F(\lambda) \in \mathcal{H}_w$ д о п у с к а е т п р е д с т а в л е н и е в в и д е

$$F(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k Q_k(\lambda) + \int_0^\infty f(x)Q(x,\lambda)\,dx,$$

г д е $f(x) \in L^2(-\infty,\infty)$, а и н т е г р а л е с т ь l.i.m.. П р и э т о м

$$\frac{1}{2\pi}\int_E |F(\lambda)|^2 w(\lambda)\,d\lambda = \sum_{k=0}^{n-1}|C_k|^2 + \int_0^\infty |f(x)|^2\,dx.$$

Доказательство этой теоремы не распостраняется непосредственно на тот случай, когда $\Omega(\lambda)$ не многочлен, а целая трансцендентная функция.

3. Теперь перейдем к основному вопросу настоящей работы.

Будем рассматривать гильбертово пространство $\mathcal{H}_w$, описанное в предыдущем n°. При этом примем, что $\Omega(\lambda)$ есть целая функция экспоненциального типа 2σ, положительная на внешности интервала (-I,I), неотрицательная на нем и удовлетворяющая условию

$$\sup_{R>1}\int_1^R \frac{\ln[\Omega(\lambda)\Omega(-\lambda)]}{\lambda^2}\,d\lambda<\infty .$$

С помощью формул

$$\lambda=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\quad z=\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}$$

отобразим риманову поверхность f на плоскость z. При этом верхней половине первого листа (I^+) будет отвечать область $\operatorname{Im} z>0,\ |z|>1$, а нижней половине первого листа (I^-) – область $\operatorname{Im} z>0,\ |z|<1$. Интервал $-1<\lambda<1$ первого листа переходит в полуокружность $\operatorname{Im} z>0,\ |z|=1$. Как показано в статье [6], функция $\Omega(\lambda)$ допускает представление

$$\Omega(\lambda)=\omega(\lambda)\,\omega^*(\lambda),$$

где $\omega(\lambda)$, $\omega^*(\lambda)$ – целые трансцендентные функции экспоненциального типа σ на f, причем все корни $\omega(\lambda)$ лежат на первом листе, а все корни $\omega^*(\lambda)$ – на втором. Эти две функции $\omega(\lambda)$, $\omega^*(\lambda)$ соответственно равны

$$\omega(\lambda)=\Theta(z)\,\bar{\Theta}\left(\frac{1}{z}\right),$$
$$\omega^*(\lambda)=\Theta\left(\frac{1}{z}\right)\bar{\Theta}(z),$$

где $\Theta(z)$ – целая функция экспоненциального типа с корнями $\{z_k\}_1^\infty$, лежащими в образе верхней половины листа поверхности f, то есть

$$|z_k|\geqslant 1,\quad \operatorname{Im} z_k>0.$$

Благодаря наложенным на $\Omega(\lambda)$ условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\operatorname{Im}\frac{1}{z_k}\right|<\infty. \tag{3}$$

Теперь введем функции

$$\omega_k(\lambda)=\sqrt{\frac{z_k-\bar{z}_k}{2i}}\left\{\frac{\omega(\lambda)(z-\bar{z}_1)\ldots(z-\bar{z}_{k-1})}{(z-z_1)\ldots(z-z_k)}\left(1+\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)+\right.$$

$$+\frac{\omega^*(\lambda)(\frac{1}{z}-\bar z_1)\dots(\frac{1}{z}-\bar z_{k-1})}{(\frac{1}{z}-z_1)\dots(\frac{1}{z}-z_k)}\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\Bigg\}\qquad (k=1,2,3,\dots).$$

В плоскости z эти функции однозначны, не меняются при замене z на $\frac{1}{z}$ и всюду регулярны, кроме точек $z=\infty$ и $z=0$. Они являются поэтому целыми функциями экспоненциального типа σ от λ не только на $\mathcal{F}$, но и в плоскости λ. Весьма важным свойством последовательности $\{\omega_k(\lambda)\}_1^\infty$ является ее ортонормированность в $\mathcal{H}_w$. В самом деле, принимая $k\le m$ и замечая, что

$$\left(1+\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)^2\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}=2\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right),$$

$$\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)^2\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}=-2\left(1-\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right),$$

$$\left(1+\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}=\frac{2}{\sqrt{\lambda^2-1}},$$

получаем после простых преобразований следующее равенство

$$(\omega_k,\omega_m)=\frac{\sqrt{(z_k-\bar z_k)(z_m-\bar z_m)}}{2\pi i}\left\{J_1+J_2+J_3+J_4\right\},$$

где

$$J_1=\int_E\frac{(z-\bar z_1)\dots(z-\bar z_{k-1})(z-z_1)\dots(z-z_{m-1})}{(z-z_1)\dots(z-z_k)(z-\bar z_1)\dots(z-\bar z_m)}\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right)d\lambda,$$

$$J_2=\int_E\frac{\omega(\lambda)(z-\bar z_1)\dots(z-\bar z_{k-1})(\frac{1}{z}-z_1)\dots(\frac{1}{z}-z_{m-1})}{\omega^*(\lambda)(z-z_1)\dots(z-z_k)(\frac{1}{z}-\bar z_1)\dots(\frac{1}{z}-\bar z_m)}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}},$$

$$J_3=\int_E\frac{\omega^*(\lambda)(\frac{1}{z}-\bar z_1)\dots(\frac{1}{z}-\bar z_{k-1})(z-z_1)\dots(z-z_{m-1})}{\omega(\lambda)(\frac{1}{z}-z_1)\dots(\frac{1}{z}-z_k)(z-\bar z_1)\dots(z-\bar z_m)}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}},$$

$$J_4=\int_E\frac{(\frac{1}{z}-\bar z_1)\dots(\frac{1}{z}-\bar z_{k-1})(\frac{1}{z}-z_1)\dots(\frac{1}{z}-z_{m-1})}{(\frac{1}{z}-z_1)\dots(\frac{1}{z}-z_k)(\frac{1}{z}-\bar z_1)\dots(\frac{1}{z}-\bar z_m)}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}-1\right)d\lambda.$$

Если в интеграле

$$J_1 = \int_E \Phi(z)\left(1 + \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\right) d\lambda$$

принять за переменную интегрирования $z = \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$, то мы найдем, что

$$J_1 = \int_E \Phi(z)\, dz.$$

Подобным образом, если в интеграле J_4 принять за переменную интегрирования $z^* = \frac{1}{z} = \lambda - \sqrt{\lambda^2-1}$, то мы найдем, что

$$J_4 = \int_{-1}^{1} \Phi(z^*)\, dz^*.$$

Поэтому

$$J_1 + J_4 = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-z_{k+1})\dots(z-z_{m-1})}{(z-\bar{z}_k)\dots(z-\bar{z}_m)}\, dz = 0 & (k<m-1) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z-\bar{z}_{m-1})(z-\bar{z}_m)} = 0 & (k=m-1) \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z-z_m)(z-\bar{z}_m)} = \frac{2\pi i}{z_m-\bar{z}_m} & (k=m) \end{cases}$$

Переходя к двум оставшимся интегралам, заметим, что в силу построений статьи [6]

$$\frac{\omega(\lambda)}{\omega^*(\lambda)} = \prod_{q=1}^{\infty} \frac{(z-z_q)(\frac{1}{z}-\bar{z}_q)}{(z-\bar{z}_q)(\frac{1}{z}-z_q)}.$$

Поэтому, принимая в интеграле J_2 за переменную интегрирования $z = \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$, мы получим, что

$$J_2 = \int_E \prod_{q=k+1}^{m} \frac{z-z_q}{z-\bar{z}_q}\, Q_{m+1}(z)\, \frac{dz}{z(z-\bar{z}_k)(\frac{1}{z}-z_m)},$$

где

$$Q_{m+1}(z) = \prod_{q=m+1}^{\infty} \frac{(z-z_q)(\frac{1}{z}-\bar{z}_q)}{(z-\bar{z}_q)(\frac{1}{z}-z_q)}.$$

Подобным образом, принимая в интеграле J_3 за переменную интегрирования $z^* = \frac{1}{z} = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$, получим, что

$$J_3 = \int_{-1}^{1} \prod_{q=k+1}^{m} \frac{z^* - z_q}{z^* - \bar{z}_q} Q_{m+1}(z^*) \frac{dz^*}{z^*(z^* - \bar{z}_k)(\frac{1}{z^*} - z_m)}.$$

Следовательно,

$$J_2 + J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{q=k+1}^{m} \frac{z - z_q}{z - \bar{z}_q} Q_{m+1}(z) \frac{dz}{(z - \bar{z}_k)(1 - z z_m)}$$

и замыкая контур в верхней полуплоскости, получаем

$$J_2 + J_3 = 0.$$

Таким образом, ортонормированность функций $\omega_k(\lambda)$ доказана.

Теперь остается ввести семейство целых функций (экспоненциального типа $x + \sigma$) от λ

$$Q(x;\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\omega(\lambda) e^{\frac{ix}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2-1})} + \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\omega^*(\lambda) e^{\frac{ix}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2-1})}$$

и может быть сформулирована основная

Т е о р е м а. В с я к а я ф у н к ц и я $F(\lambda) \in \mathcal{H}_\omega$ о д н о з н а ч н о п р е д с т а в и м а в в и д е

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(\lambda) + \int_0^{\infty} c(x) Q(x;\lambda) dx,$$

г д е

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty, \quad c(x) \in L^2(0,\infty).$$

П р и э т о м

$$\frac{1}{2\pi}\int_E |F(\lambda)|^2 \frac{1}{\Omega(\lambda)} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}} d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 + \int_0^{\infty} |c(x)|^2 dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $z = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ и используя все введенные в этом п° обозначения, построим по $F(\lambda)$ функцию

$$\Phi(z) = \frac{F(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z})(1 + z)}{2z\bar{\theta}(\frac{1}{z})}.$$

В таком случае

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi(z)|^2\,\frac{dz}{\varphi(z)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E}|F(\lambda)|^2\,\frac{1}{\Omega(\lambda)}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,d\lambda,$$

где

$$\varphi(z)=\theta(z)\,\bar{\theta}(z).$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{E}|\Phi(z)|^2\,\frac{dz}{\varphi(z)}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{E}|F(\lambda)|^2\,\frac{1}{\Omega(\lambda)}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,d\lambda,$$

а с другой стороны, делая слева замену z на $\frac{1}{z}$, получим, что левая часть равна

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}\left|\Phi\left(\frac{1}{z}\right)\right|^2\frac{dz}{z^2\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{1}|\Phi(z)|^2\,\frac{dz}{\varphi(z)}.$$

Мы видим, что к функции $\Phi(z)$ применима теорема B, в силу чего

$$\Phi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\theta_k(z)+\theta(z)\int\limits_{0}^{\infty}f(t)e^{itz}dt+\bar{\theta}(z)\int\limits_{-\infty}^{0}f(t)e^{itz}dt, \quad (4)$$

где

$$Q_k(z)=\sqrt{\frac{z_k-\bar{z}_k}{i}}\;\frac{\theta(z)(z-\bar{z}_1)\dots(z-\bar{z}_{k-1})}{(z-z_1)\dots(z-z_k)},$$

а $\{z_k\}_1^{\infty}$, как и было выше обозначено, последовательность корней функции $\theta(z)$. При этом

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Phi(z)|^2\,\frac{dz}{\varphi(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2+\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt.$$

Равенство (4) перепишем в виде

$$\frac{\Phi(z)}{\bar{\theta}(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\theta_k(z)}{\bar{\theta}(z)}+\frac{\theta(z)}{\bar{\theta}(z)}\int\limits_{0}^{\infty}f(t)e^{itz}dt+\int\limits_{-\infty}^{0}f(t)e^{itz}\,dt. \quad (5)$$

Первые два члена правой части представляют функцию $G(z)$, принадлежащую $L^2(-\infty,\infty)$. При этом

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|G(x)|^2\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2+\int\limits_{0}^{\infty}|f(t)|^2\,dt. \quad (6)$$

Более того, $G(z)$ принадлежит классу H^2 в полуплоскости $y = \operatorname{Im} z > 0$.

Докажем это. Прежде всего мы замечаем, что каждая из регулярных при $y>0$ функций $\frac{\theta_\kappa(z)}{\bar\theta(z)}$ удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{\theta_\kappa(z)}{\bar\theta(z)}\right|^2 = \left|\frac{\theta_\kappa(z)}{\theta(z)}\right|^2 \left|\frac{\theta(z)}{\bar\theta(z)}\right|^2 =$$

$$= \frac{z_\kappa - \bar z_\kappa}{i}\left|\frac{(z-\bar z_1)\dots(z-\bar z_{\kappa-1})}{(z-z_1)\dots(z-z_\kappa)}\right|^2 \left|\prod_{q=1}^{\infty}\frac{z-z_q}{z-\bar z_q}\right|^2 \leqslant \tag{7}$$

$$\leqslant \frac{z_\kappa - \bar z_\kappa}{i}\left|\frac{(z-\bar z_1)\dots(z-\bar z_{\kappa-1})}{(z-z_1)\dots(z-z_\kappa)}\right|^2 \left|\prod_{q=1}^{\kappa}\frac{z-z_q}{z-\bar z_q}\right|^2 = \frac{z_\kappa - \bar z_\kappa}{i|z-\bar z_\kappa|^2} \quad (y>0)$$

и поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{Q_\kappa(x+iy)}{\bar Q(x+iy)}\right|^2 dx \leqslant \frac{z_\kappa - \bar z_\kappa}{i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-x_\kappa)^2+(y+y_\kappa)^2} =$$

$$= \frac{2\pi y_\kappa}{y+y_\kappa} < 2\pi \qquad (y>0).$$

Следовательно, в полуплоскости $y>0$ сумма

$$\sum_{\kappa=1}^{N} a_\kappa \frac{\theta_\kappa(z)}{\bar\theta(z)}$$

принадлежит H^2 при любом конечном N.

Поэтому при любом $y>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\kappa=1}^{N} a_\kappa \frac{\theta_\kappa(x+iy)}{\bar\theta(x+iy)}\right|^2 dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\kappa=1}^{N} a_\kappa \frac{\theta_\kappa(x)}{\bar\theta(x)}\right|^2 dx.$$

В силу ортонормированности в $L^2(-\infty,\infty)$ функций $\frac{\theta_\kappa(x)}{\theta(x)}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\kappa=1}^{N} a_\kappa \frac{\theta_\kappa(x)}{\bar\theta(x)}\right|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\kappa=1}^{N} a_\kappa \frac{\theta_\kappa(x)}{\theta(x)}\right|^2 dx = \sum_{\kappa=1}^{N}|a_\kappa|^2.$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sum_{\kappa=1}^{N} a_\kappa \frac{\theta_\kappa(x+iy)}{\bar\theta(x+iy)}\right|^2 dx \leqslant \sum_{\kappa=1}^{N}|a_\kappa|^2. \tag{8}$$

Если точка z пробегает произвольно взятый компакт Q, лежащий в полуплоскости $y > 0$, то найдется такое положительное число δ, зависящее лишь от Q, что для всех $K = 1,2,3\ldots$

$$\frac{1}{\delta} < \left| \frac{z - \bar{z}_k}{\bar{z}_k} \right| < \delta .$$

Благодаря неравенству (7), мы можем написать (при $z \in Q$)

$$\left|\sum_{k=n}^{N} a_k \frac{\Theta_k(z)}{\bar{\Theta}(z)}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=n}^{N} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k=n}^{N} \frac{2y_k}{|z-\bar{z}_k|^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2}\,\delta \sqrt{\sum_{k=n}^{N} |a_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{|z_k|^2}} .$$

Однако благодаря (3), ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{|z_k|^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \operatorname{Jm} \frac{1}{z_k} \right|$$

сходится. Значит на каждом компакте Q, лежащем в полуплоскости $y > 0$, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\Theta_k(z)}{\bar{\Theta}(z)}$$

сходится равномерно, а его сумма поэтому регулярна, и в силу (8) эта сумма принадлежит классу H^2.

Очевидно также, что в полуплоскости $y > 0$

$$\frac{\Theta(z)}{\bar{\Theta}(z)} \int_0^{\infty} f(t) e^{itz}\, dt \in H^2.$$

Поэтому наше утверждение доказано и, следовательно,

$$G(z) = \int_0^{\infty} g(t) e^{itz}\, dt, \tag{9}$$

где $g(t) \in L^2(0,\infty)$.

Таким образом,

$$\Psi(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{\Phi(z)}{\bar{\Theta}(z)} - \int_0^{\infty} g(t) e^{itz} dt + \int_{-\infty}^{0} f(t) e^{itz}\, dt. \tag{10}$$

Сопоставляя (6) и (9), можем написать равенство

$$\int_0^\infty |g(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + \int_0^\infty |f(t)|^2 dt, \tag{II}$$

связывающее величины, входящие в два представления (5) и (I0) функции $\frac{\Phi(z)}{\Theta(z)}$.

Заданную функцию $F(\lambda) \in \mathcal{H}_w$ можно при достаточно большом n с любой точностью аппроксимировать в метрике $\mathcal{H}_w$ гладкой функцией (непрерывно дифференцируемой) $F_n(\lambda)$ с носителем, лежащим в интервалах

$$\left(-n, -1-\frac{1}{n}\right), \ \left(1+\frac{1}{n}, n\right).$$

По функции $F_n(\lambda)$ построим функцию $\Phi_n(z)$, а затем и функцию $\Psi_n(z)$ (которая уже будет определена на всей оси) в соответствии с соотношением

$$\Psi_n\left(\frac{1}{z}\right) = z\Psi_n(z). \tag{I2}$$

Она будет финитной относительно обеих точек $z = 0$, $z = \infty$.

На основании наших расмотрений

$$\Psi_n(z) = \int_0^\infty g_n(t) e^{itz} dt + \int_{-\infty}^0 f_n(t) e^{itz} dt, \tag{I3}$$

где $g_n(t) \in L^2(0,\infty)$, $f_n(t) \in L^2(-\infty, 0)$. Как видим, целая функция

$$h_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n(z) e^{-iz\zeta} dz$$

почти всюду на вещественной оси удовлетворяет соотношениям

$$h_n(t) = \begin{cases} f_n(t) & (t<0) \\ g_n(t) & (t>0) \end{cases}$$

Из гладкости финитной функции $\Psi_n(z)$ следует, что не только $h_n(t)$, но и $th_n(t)$ принадлежит $L^2(-\infty,\infty)$. Поэтому $h_n(t)$ принадлежит также $L^1(-\infty,\infty)$. Теми же свойствами обладает и $h'_n(t)$. Заметим, между прочим, что из $h_n(t) \in L^2(-\infty,\infty)$, $h'_n(t) \in L^2(-\infty,\infty)$ следует

$$\lim_{t\to-\infty} h_n(t) = \lim_{t\to\infty} h_n(t) = 0.$$

Теперь применим к функции (I3) тождество (I2). Мы получим почти всюду на вещественной оси равенство

$$\int_0^\infty g_n(t)e^{itz}dt - \frac{1}{z}\int_{-\infty}^0 f_n(t)e^{it\frac{1}{z}}dt = -\int_{-\infty}^0 f_n(t)e^{itz}dt + \frac{1}{z}\int_0^\infty g_n(t)e^{it\frac{1}{z}}dt. \qquad (I4)$$

Рассмотрим функцию

$$A_n(z) = \frac{1}{z}\int_{-\infty}^0 f_n(t)e^{it\frac{1}{z}}dt.$$

Используя отмеченные только что свойства $h_n(t)$, получаем равенство

$$A_n(z) = \frac{1}{i}f_n(0) + i\int_{-\infty}^0 f_n'(t)e^{it\frac{1}{z}}dt \qquad (\mathrm{Jm}\, z > 0).$$

Поэтому аналитическая в полуплоскости $\mathrm{Jm}\, z > 0$ функция $A_n(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|A_n(z)| \leqslant |f_n(0)| + \int_{-\infty}^0 |f_n'(t)|dt < \infty \qquad (\mathrm{Jm}\, z > 0).$$

и, поскольку

$$\int_{-\infty}^\infty |A_n(x)|^2 dx = 2\pi\int_{-\infty}^0 |f_n(t)|^2 dt < \infty,$$

то $A_n(z)$ принадлежит в верхней полуплоскости классу H^2 и значит допускает представление

$$A_n(z) = \int_0^\infty \gamma_n(t)e^{itz}dt \qquad (\mathrm{Jm}\, z > 0),$$

где $\gamma_n(t) \in L^2(0,\infty)$.

Таким образом, при $\mathrm{Jm}\, z > 0$

$$\frac{1}{z}\int_{-\infty}^0 f_n(t)e^{it\frac{1}{z}}dt = \int_0^\infty \gamma_n(t)e^{itz}dt.$$

Аналогично убеждаемся в том, что при $\mathrm{Jm}\, z < 0$

$$\frac{1}{z}\int_0^\infty g_n(t)e^{it\frac{1}{z}}dt = \int_{-\infty}^0 \delta_n(t)e^{itz}dt,$$

где $\delta_n(t) \in L^2(-\infty, 0)$. Поэтому из равенства (I4) следует, что почти для всех вещественных X

$$\int_0^\infty [g_n(t) - \gamma_n(t)] e^{itx} dt = -\int_{-\infty}^0 [\delta_n(t) - f_n(t)] e^{itx} dt,$$

но это означает, что

$$g_n(t) = \gamma_n(t) \qquad \text{(почти для всех } t>0 \text{)}$$

и

$$\delta_n(t) = f_n(t) \qquad \text{(почти для всех } t<0 \text{).}$$

Таким образом, как левая, так и правая часть равенства (I4) представляют функции, равные почти всюду на вещественной оси нулю. Поэтому формулу (I3) можно переписать в виде

$$\frac{\Phi_n(z)}{\bar\Theta(z)} = \Psi_n(z) = \int_0^\infty g_n(t) e^{itz} dt + \frac{1}{z}\int_0^\infty g_n(t) e^{it\frac{1}{z}} dt \tag{I5}$$

или, возвращаясь к функции $F_n\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z}\right)$,

$$\frac{F_n\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)(1+z)}{\bar\Theta\left(\frac{1}{z}\right)\bar\Theta(z)\, 2z} = \int_0^\infty g_n(t)\left\{e^{itz} + \frac{1}{z} e^{it\frac{1}{z}}\right\} dt.$$

Отсюда

$$\frac{F_n\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)}{\bar\Theta\left(\frac{1}{z}\right)\bar\Theta(z)} = \int_0^\infty g_n\left(\frac{x}{2}\right)\left\{\frac{z}{1+z} e^{\frac{ixz}{2}} + \frac{1}{1+z} e^{\frac{ix}{2z}}\right\} dx, \tag{I6}$$

а так как

$$\frac{z}{1+z} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right),$$
$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right),$$

то равенство(I6) можно записать в виде

$$\frac{F_n\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)}{\bar\Theta\left(\frac{1}{z}\right)\bar\Theta(z)} = \int_0^\infty g_n\left(\frac{x}{2}\right) P(x;\lambda)\, dx,$$

где $P(x;\lambda)$ есть $Q(x;\lambda)$ для $\Omega(\lambda)=1$.

Заметим теперь, что с одной стороны

$$\frac{1}{2\pi}\int_E \left|\frac{F_n\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)}{\bar\Theta\left(\frac{1}{z}\right)\bar\Theta(z)}\right|^2\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,d\lambda-\frac{1}{2\pi}\int_E |F_n(\lambda)|^2\frac{1}{\Omega(\lambda)}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,d\lambda,$$

а с другой стороны,на основании теоремы C при $n=0$ (см. также [4]) имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_E \left|\frac{F_n\left(\frac{z}{2}+\frac{1}{2z}\right)}{\bar\Theta\left(\frac{1}{z}\right)\bar\Theta(z)}\right|^2\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,d\lambda=\int_0^\infty \left|g_n\left(\frac{x}{2}\right)\right|^2dx.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int_E |F_n(\lambda)|^2\frac{1}{\Omega(\lambda)}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,d\lambda=2\int_0^\infty \left|g_n\left(\frac{t}{2}\right)\right|^2dt. \qquad (17)$$

Если теперь к равенству (I5) и написать формулы, аналогичные (5), (6), (9),(I0) и(II) для функции $\Phi_n(z)$ вместо $\Phi(z)$ то мы получим, что

$$\int_0^\infty |g_n(t)|^2dt=\sum_{k=1}^\infty |a_k^{(n)}|^2+\int_0^\infty |f_n(x)|^2dx,$$

$$\int_0^\infty g_n(t)e^{itz}dt=\sum_{k=1}^\infty a_k^{(n)}\frac{\Theta_k(z)}{\bar\Theta(z)}+\frac{\Theta(z)}{\bar\Theta(z)}\int_0^\infty f_n(t)e^{itz}dt,$$

и равенство (I5) можно будет записать в виде

$$\frac{\Phi_n(z)}{\bar\Theta(z)}=\sum_{k=1}^\infty a_k^{(n)}\left\{\frac{\Theta_k(z)}{\bar\Theta(z)}+\frac{1}{z}\,\frac{\Theta_k\left(\frac{1}{z}\right)}{\bar\Theta\left(\frac{1}{z}\right)}\right\}+$$

$$+\int_0^\infty f_n(t)\left\{\frac{\Theta(z)}{\bar\Theta(z)}e^{itz}+\frac{1}{z}\,\frac{\Theta\left(\frac{1}{z}\right)}{\bar\Theta\left(\frac{1}{z}\right)}e^{it\frac{1}{z}}\right\}dt$$

и,следовательно ,

$$F_n(\lambda)=\frac{\Phi_n(z)\,\bar\Theta\left(\frac{1}{z}\right)2z}{1+z}=$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} \left\{ \Theta_k(z)\bar{\Theta}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{z}{1+z} + \Theta_k\left(\frac{1}{z}\right)\bar{\Theta}(z)\frac{1}{1+z} \right\} +$$

$$+ 2\int_0^{\infty} f_n(t) \left\{ \Theta(z)\bar{\Theta}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{z}{1+z}e^{itz} + \Theta\left(\frac{1}{z}\right)\bar{\Theta}(z)\frac{1}{1+z}e^{it\frac{1}{z}} \right\} dt.$$

Последнее равенство можно представить в виде

$$F_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2}\, a_k^{(n)} \omega_k(\lambda) + \int_0^{\infty} f_n\left(\frac{x}{2}\right) Q(x;\lambda)\, dx. \tag{18}$$

Из (17) и (18) следует, что для функции $F_n(\lambda)$ нужное представление верно. Так как $F_n(\lambda)$ при $n \to \infty$ стремится в $\mathcal{H}_w$ к $F(\lambda)$, то из

$$\frac{1}{2\pi}\int_E |F_n(\lambda) - F_m(\lambda)|^2 \frac{1}{\Omega(\lambda)} \sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\, d\lambda =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(n)} - a_k^{(m)}|^2 + 2\int_0^{\infty} |f_n(t) - f_m(t)|^2\, dt.$$

следует, что теорема верна и для $F(\lambda)$.

Заметим, что обратная теорема очевидно также верна.

В заключение считаю своим долгом принести благодарность проф. Н.И.Ахиезеру за постановку вопроса и помощь.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н.И.Ахиезер. Об одном обобщении преобразования Фурье и теоремы Винер-Палей, ДАН СССР, 96, № 5, 1954.
2. В.П.Гурарий. Преобразование Фурье в $L(-\infty,\infty)$ с весом, Математ. сборник, 58 (100), № 4,1962.
3. М.Г.Крейн,Континуальные аналоги предложений о многочленах ортогональных на единичной окружности, ДАН СССР, 105,№4,1955.
4. Н.И.Ахиезер.Континуальный аналог многочленов, ортогональных на дуге окружности, ДАН СССР, 141, №4, 1961.

5. А.М.Рыбалко, К теории континуальных аналогов, ортогональных многочленов, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 3, Харьков, 1966.

6. А.М.Рыбалко, Об одном представлении целых функций класса A положительных на вещественной оси, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып. 7, Харьков, 1968.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ А.М.РЫБАЛКО "О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^2(-\infty,\infty)$ С ВЕСОМ".

Н.И.Ахиезер.

В этой статье[x)] весом является сужение на множество $E = (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$ целой функции $\Omega(\lambda)$ экспоненциального типа 2σ, удовлетворяющей следующим условиям:

$$1)\quad \Omega(\lambda)>0 \qquad (\lambda\in E),$$

$$2)\quad \Omega(\lambda)\geqslant 0 \qquad (-1<\lambda<1),$$

$$3)\quad \sup_{R>1}\int_1^R \frac{\ln[\Omega(\lambda)\Omega(-\lambda)]}{\lambda^2}\,d\lambda<\infty.$$

Я хочу здесь показать, что условие 2) можно отбросить.

Мы обозначим теперь целую функцию $\tilde{\Omega}(\lambda)$ и примем для простоты изложения, что она имеет лишь простые корни. При этом мы положим

$$\tilde{\Omega}(\lambda)=p(\lambda)\Omega(\lambda),$$

где $p(\lambda)$ -многочлен, все корни которого лежат в интервале (-I,I), а $\Omega(\lambda)$ положительна на всей вещественной оси, и следовательно, удовлетворяет всем условиям статьи [P]. Если $2n$ – степень многочлена $p(\lambda)$, то его можно представить в виде

$$p(\lambda)=\omega_0(\lambda)\,\omega_0^*(\lambda), \tag{I}$$

где

$$\begin{aligned}\omega_0(\lambda)&=\sum_{k=-n}^{n} a_k\,(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})^k,\\ \omega_0^*(\lambda)&=\sum_{k=-n}^{n} a_k\,(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})^k.\end{aligned}\qquad (a_{-k}=\bar{a}_k)$$

x) Она цитируется в дальнейшем как статья [P].

При этом все корни $\omega_0(\lambda)$ лежат на первом, а все корни $\omega_0^*(\lambda)$ – на втором листе римановой поверхности f, определение которой мы можем не напоминать.[x)]

Кроме того мы имеем равенство

$$\Omega(\lambda) = \omega(\lambda)\,\omega^*(\lambda),$$

где $\omega(\lambda)$, $\omega^*(\lambda)$ – целые функции экспоненциального типа σ на f, причем корни $\omega(\lambda)$ лежат на первом, а корни $\omega^*(\lambda)$ на втором листе f.

Напомним, что прообразом верхней половины первого листа, при отображении $\lambda = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, является область $I_1^+ = \{z : |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, прообразом нижней половины первого листа – область $I_1^- = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ прообразы корней функции $\omega_0(\lambda)$ (для них $|z| = 1,\ \operatorname{Im} z > 0$), а через $z_{2n+\tau}$ $(\tau = 1, 2, \ldots)$ прообразы тех корней функции $\omega(\lambda)$, для которых $\operatorname{Im}\lambda > 0$.

Далее положим

$$\tilde{\omega}_k(\lambda) = \sqrt{\frac{z_k - \bar{z}_k}{2i}}\left\{\frac{\omega_0(\lambda)\,\omega(\lambda)(z - \bar{z}_1)\ldots(z - \bar{z}_{k-1})}{(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_k)}\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_0^*(\lambda)\,\omega^*(\lambda)\left(\frac{1}{z} - \bar{z}_1\right)\ldots\left(\frac{1}{z} - \bar{z}_{k-1}\right)}{\left(\frac{1}{z} - z_1\right)\left(\frac{1}{z} - z_2\right)\ldots\left(\frac{1}{z} - z_k\right)}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}}\right)\right\}.$$

Эти целые функции экспоненциального типа σ образуют ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H_{\tilde{\Omega}}$ со скалярным произведением

$$(f, g)_{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{2\pi}\int_E f(\lambda)\,\overline{g(\lambda)}\sqrt{\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}}\,\frac{d\lambda}{\tilde{\Omega}(\lambda)}.$$

Если $\omega_0(\lambda) = 1$, это доказано в статье [P]. В общем случае доказательство аналогично.

Будем символом $H_{\tilde{\Omega}}^{\sigma}$ (соответственно, H_{Ω}^{σ}) обозначать совокупность всех целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, принадлежащих $H_{\tilde{\Omega}}$ (соответственно, H_{Ω}). Весьма существенно, что $\{\tilde{\omega}_k(\lambda)\}_1^{\infty}$ есть базис в пространстве $H_{\tilde{\Omega}}^{\sigma}$. Для последовательности $\{\omega_k(\lambda)\}_1^{\infty}$ из подпространства $H_{\Omega}^{\sigma} \subset H_{\Omega}$

---

x) Доказательство представления (I) дано в статье [4] (см. список литературы в статье [P]).

это вытекает из результата статьи [P] .

Докажем, что утверждение верно для нашего случая.

Пусть $g(\lambda) \in H^c_{\tilde{\Omega}}$ и пусть

$$(g(\lambda), \tilde{\omega}_k(\lambda))_{\tilde{\Omega}} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \dots) \qquad (2)$$

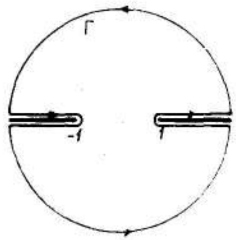

Рис. I.

Введя контур Γ , представленный на рис. I и лежащий на первом листе поверхности f , нетрудно усмотреть, что равенства (2) эквивалентны соотношениям

$$\int_\Gamma \bar{g}(\lambda) \frac{\omega_0(\lambda)\,\omega(\lambda)\,(z-\bar{z}_1)\dots(z-\bar{z}_{k-1})}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_k)} \left(\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}+1\right) \frac{d\lambda}{\bar{\Omega}(\lambda)} = 0.$$

А эти соотношения равносильны следующим:

$$\int_\Gamma \bar{g}(\lambda) \left(\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}+1\right) \frac{d\lambda}{(z-z_k)\,\omega_0^*(\lambda)\,\omega^*(\lambda)} = 0.$$

В области, ограниченной контуром Γ , подынтегральная функция регулярна за возможным исключением точки, прообразом которой является $z = z_k$. Так как интегралы равны нулю, то в этих точках функция $\bar{g}(\lambda)$ обращается в нуль. В частности, $\bar{g}(\lambda)$ обращается в нуль в корнях функции $\omega_0(\lambda)$. Но $\bar{g}(\lambda)$ есть функция однозначная в плоскости λ , а не только на f . Поэтому $\bar{g}(\lambda)$ обращается в нуль также в корнях функции $\omega_0^*(\lambda)$. Следовательно, $\bar{g}(\lambda)$, а значит, и $g(\lambda)$ делится на $p(\lambda) = \omega_0(\lambda)\,\omega_0^*(\lambda)$. Если мы положим

$$\frac{q(\lambda)}{p(\lambda)} = q(\lambda),$$

то $q(\lambda) \in H_{\Omega}^{\sigma}$ и, по доказанному нами, $\bar{q}(\lambda)$ обращается в нуль в прообразах точек z_{2n+z} $(z=1,2,\ldots)$. Поэтому рассмотрения, аналогичные нашим (относящимся к равенствам (2) для пространства $H_{\tilde{\Omega}}$ и проведенные в обратном порядке, дают равенства

$$(q(\lambda), \omega_z(\lambda))_{\Omega} = 0 \qquad (z = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где $\omega_z(\lambda)$ получается из $\tilde{\omega}_{2n+z}(\lambda)$ при $p(\lambda) = 1$, и значит, $n = 0$. Так как $\{\omega_z(\lambda)\}_1^{\infty}$, что уже отмечено выше, есть базис в H_{Ω}^{σ}, то из равенств (3) следует, что $q(\lambda) \equiv 0$; утверждение доказано.

Обобщение основного результата статьи [P] гласит: если $f(\lambda) \in H_{\tilde{\Omega}}$, то

$$f(\lambda) = g(\lambda) + \varphi(\lambda),$$

где, в метрике $H_{\tilde{\Omega}}$,

$$g(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{\omega}_k(\lambda), \quad a_k = (f(\lambda), \tilde{\omega}_k(\lambda))_{\tilde{\Omega}}, \tag{4}$$

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} A(x)\, \tilde{Q}(x;\lambda)\, dx,$$

и

$$\|f\|_{\tilde{\Omega}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + \int_0^{\infty} |A(x)|^2 dx;$$

при этом

$$\tilde{Q}(x,\lambda) = \frac{1}{2}\Big\{\omega_0(\lambda)\omega(\lambda) e^{\frac{ix}{2}(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})}\Big(1+\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\Big) +$$

$$+ \omega_0^*(\lambda)\omega^*(\lambda) e^{\frac{ix}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}\Big(1-\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\Big)\Big\}.$$

Наметим доказательство этого предложения. Итак, пусть дана функция $f(\lambda) \in H_{\tilde{\Omega}}$. По формулам (4) построим функцию $g(\lambda)$, которая будет принадлежать $H_{\tilde{\Omega}}^{c}$, причем будет иметь место равенство

$$\|g\|^2_{\tilde{\Omega}} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Затем определим функцию

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda) - g(\lambda) \in H_{\tilde{\Omega}} \ominus H^{\sigma}_{\tilde{\Omega}}.$$

Таким образом при любой функции $\tilde{\gamma}(\lambda) \in H^{\sigma}_{\tilde{\Omega}}$ справедливо равенство

$$(\varphi(\lambda),\ \tilde{\gamma}(\lambda))_{\tilde{\Omega}} = 0.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\left(\frac{\varphi(\lambda)}{p(\lambda)}, \tilde{\gamma}(\lambda)\right)_{\Omega} = 0. \tag{6}$$

Так как подпространству $H^{\sigma}_{\tilde{\Omega}}$ принадлежат функции

$$\omega(\lambda)(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})^z\left(1+\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right) + \omega^*(\lambda)(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})^z\left(1-\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right) \tag{7}$$

$$(\pm z = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

то каждую из них можно принять в (6) в качестве функции $\tilde{\gamma}(\lambda)$.

С другой стороны, если $\gamma(\lambda) \in H^{\sigma}_{\Omega}$ и $q(\lambda)$ произвольный многочлен степени $< n$, то функция $q(\lambda)\,\gamma(\lambda)$ принадлежит $H^{\sigma}_{\tilde{\Omega}}$, и следовательно, произведение $q(\lambda)\gamma(\lambda)$ может быть принято в (6) в качестве $\tilde{\gamma}(\lambda)$. Поэтому, применяя результат статьи [P], находим, что в метрике H_{Ω}:

$$\frac{\varphi(\lambda)}{p(\lambda)} = \int_0^{\infty} B(x)Q(x;\lambda)\,dx,\quad B(x)\in L^2(0,\infty) \tag{8}$$

и

$$\frac{\varphi(\lambda)}{p(\lambda)}\lambda^n = \int_0^{\infty} M(x)Q(x;\lambda)\,dx,\quad M(x)\in L^2(0,\infty),$$

где

$$Q(x;\lambda) = \frac{1}{2}\left\{\omega(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})}\left(1+\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right) + \omega^*(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}\left(1-\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\right\}.$$

Заметим, что функции (7) представляют, с точностью до постоянных множителей, значения при $x=0$ последовательных производных и интегралов от $Q(x;\lambda)$ по x (если интегралы брать без произвольных констант.). Кроме того отметим, что каждое из двух слагаемых функции (7) принадлежит $H_{\tilde{\Omega}}$.

Используя простые факты из классической теории интеграла Фурье, можно убедиться, на основании сказанного, в том, что

I) $B(x)$ непрерывно дифференцируема $n-1$ раз, причем

$$\lim_{x\to\infty} B^{(z)}(x)=0,\ B^{(z)}(0)=0, \qquad (z=0,1,\dots,n-1);$$

2) $B^{(n-1)}(x)$ абсолютно непрерывна в каждом конечном интервале полуоси $(0,\infty)$,

$$3)\ B^{(z)}(x)\in L^2(0,\infty) \qquad (z=0,1,\dots,n).$$

Можно ввести также функции

$$B^{(z)}(x)=\int_0^x B^{(z+1)}(t)\,dt \qquad (z=-1,-2,\dots,-n)$$

и легко проверить, что

$$4)\ \lim_{x\to\infty} B^{(z)}(x)=0,\quad B^{(z)}(0)=0 \qquad (z=-1,-2,\dots,-n+1).$$

$$5)\ B^{(z)}(x)\in L^2(0,\infty) \qquad (z=-1,-2,\dots,-n).$$

Перепишем теперь равенство (8) в виде

$$\varphi(\lambda)=\omega_0^*(\lambda)\int_0^\infty B(x)\tfrac{1}{2}\omega_0(\lambda)\omega(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})}\Big(1+\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\Big)dx+$$

$$+\omega_0(\lambda)\int_0^\infty B(x)\tfrac{1}{2}\omega_0^*(\lambda)\omega^*(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}\Big(1-\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\Big)dx,$$

или, полагая $\tilde\omega(\lambda)=\omega_0(\lambda)\omega(\lambda)$, $\tilde\omega^*(\lambda)=\omega_0^*(\lambda)\omega^*(\lambda)$,

$$\varphi(\lambda)=\sum_{k=-n}^{n}a_k(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})^k\int_0^\infty B(x)\tfrac{1}{2}\tilde\omega(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})}\Big(1+\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\Big)dx+$$

$$+\sum_{k=-n}^{n}a_k(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})^k\int_0^\infty B(x)\tfrac{1}{2}\tilde\omega^*(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}\Big(1-\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\Big)dx=$$

$$=\varphi_+(\lambda)+\varphi_-(\lambda).$$

Благодаря перечисленным свойствам функции $B(x)$, мы можем произвести интегрирование по частям, которое даст (в метрике L^2):

$$\frac{2\sqrt{\lambda+1}}{\sqrt{\lambda+1}+\sqrt{\lambda-1}}\;\frac{\varphi_+(\lambda)}{\widetilde{\omega}(\lambda)}=\sum_{k=-n}^{n}a_k(2i)^k\int_0^\infty B^{(k)}(x)e^{\frac{ix}{2}(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})}dx.$$

Те же операции приводят к равенству

$$\frac{2\sqrt{\lambda+1}}{\sqrt{\lambda+1}-\sqrt{\lambda-1}}\;\frac{\varphi_-(\lambda)}{\widetilde{\omega}^*(\lambda)}=\sum_{k=-n}^{n}a_k(2i)^k\int_0^\infty B^{(k)}(x)e^{\frac{ix}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}dx.$$

Поэтому

$$\varphi(\lambda)=\int_0^\infty A(x)\frac{1}{2}\Big\{\widetilde{\omega}(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})}\Big(1+\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\Big)+$$

$$+\widetilde{\omega}^*(\lambda)e^{\frac{ix}{2}(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})}\Big(1-\sqrt{\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1}}\Big)\Big\}dx,$$

где

$$A(x)=\sum_{k=-n}^{n}a_k(2i)^kB^{(k)}(x).$$

Основная часть нашего утверждения доказана. Остальное доказывается без труда. Замечу еще, что примененный здесь прием уже был использован мною в статье [4] для случая, когда $\Omega(\lambda)=1,\widetilde{\Omega}(\lambda)=\rho(\lambda)$.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
I969 выпуск I

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ "ХРЕБТА"

В.В. Зимогляд

Любая целая функция $\varphi(z)$, являющаяся характеристической функцией некоторого вероятностного закона, удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant |\varphi(iy)|. \tag{I}$$

Это свойство Ю.В. Линник назвал свойством "хребта", а функции, обладающие им – "хребтовыми". Известно [I], что класс целых хребтовых функций строго шире, чем класс целых характеристических функций. Марцинкевич показал [7], что если хребтовая функция имеет вид $\varphi(z) = exp[P(z)]$, где $P(z)$ – полином, то $\varphi(z)$ является характеристической функцией закона Гаусса и, следовательно, $P(z)$ – степени не больше 2. Этот результат был дополнен И.В. Островским [2], который установил, что если хребтовая функция имеет вид $\varphi(z) = exp[f(z)]$, где $f(z)$ – целая трансцендентная функция, то $f(z)$ – не ниже нормального типа порядка I. В работах [I], [2], [5] изучались условия, при которых целая функция вида

$$\varphi(z) = F(f(z)), \tag{2}$$

где $F(w)$ и $f(z)$ – целые функции, $F(w) \neq const$, является хребтовой. В частности, нами было установлено [5], что если функция вида (2) является хребтовой, то либо $f(z)$ – полином степени не выше 2, либо целая функция, удовлетворяющая условию

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln M(r,f)}{r} > 0.$$

В настоящей работе устанавливается условие, необходимое для того, чтобы целая функция $\varphi(z)$, имеющая вид

$$\varphi(z) = F(\lambda_1 e^{iz} + \lambda_{-1} e^{-iz} + f(z)), \quad \lambda_1, \lambda_{-1} > 0, \tag{3}$$

где $f(z)$ и $F(w)$ – целые функции, удовлетворяла условию хребта. Как известно, характеристическая функция композиции законов

Гаусса и Пуассона имеет вид (3). Для этой функции $F(w)=\exp[w]$, $\lambda_{-1}=0$, а $f(z)$, есть многочлен второй степени. Лукач показал [6], что если $f(z)$ есть многочлен степени выше 2, то функция $\varphi(z)$ вида (3) уже не будет хребтовой. И.В. Островский усилил результаты Лукача. В работе [3] он рассматривал функции вида (3), предполагая, что $f(z)$ – целая трансцендентная функция, и получил следующий результат.

Т е о р е м а. Пусть $F(w)$ и $f(z)$ – целые функции. Предположим, что $F(w) \neq const$ и

$$F(r)=M(r,F), \quad 0<r<\infty.$$

Если функция $\varphi(z)$ вида (3) является хребтовой, то либо $f(z)$ – полином степени не больше 2, либо порядок $f(z)$ не меньше ρ_0, где ρ_0 $(1\geqslant\rho_0\geqslant 0{,}02)$ – абсолютная константа.

Точное значение константы ρ_0 И.В. Островскому найти не удалось.

В настоящей работе мы находим точное значение константы ρ_0. Наш результат формулируется так.

Т е о р е м а. Пусть $f(z)$ и $F(w)$ $(F(w)\neq const)$ – целые функции и $F(w)$ удовлетворяет условию

$$|F(r)| = M(r,F). \tag{4}$$

Если функция $\varphi(z)$ вида (3) является хребтовой, то либо $f(z)$ – полином степени не больше 2, либо порядок $f(z)$ не меньше I.

При доказательстве этой теоремы мы используем представление целой функции в окрестности точки максимального модуля, которое получил И.В. Островский в своей работе [3]. Так как данную работу можно считать продолжением работы [3], то мы предполагаем знакомство читателя с I частью работы [3].

Обозначим через $\Psi(t)$ функцию $\ln M(e^t,f)$, а через $\Phi(t)$ функцию $\exp[t\rho(\exp[t])]$, где $\rho(r)$ – сильный уточненный порядок в смысле Б.Я. Левина (см. [4], стр. 52-60). Из свойств сильного уточненного порядка следует, что

$$\Psi(t)\leqslant\Phi(t) \quad \text{для всех} \quad t>0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\Psi(t)=\Phi(t)\\ \Psi'(t)=\Phi'(t)\end{array}\right\} \quad \text{для некоторого неограниченного множества E оси } t.$$

Разобьем множество целых функций порядка $\rho<1$ на два непересекающиеся класса. Если во множестве E можно выделить такое неограниченное подмножество E_1, что в плоскости z существуют точки ς, $|\varsigma| = \exp[t]$, $t \in E_1 \subset E$, $|f(\varsigma)| = M(|\varsigma|, f)$, для которых выполняется условие

$$|\cos(\arg\varsigma)| \geq \{\Phi'(t)\}^{-q}, \quad 0{,}3 > q > 0{,}25, \qquad (5)$$

то функцию $f(z)$ отнесем к классу $\mathfrak{M}_1$. Отбрасывая те точки множества E, где (5) не выполняется, будем считать, что E_1 совпадает с E.

Остальные функции отнесем к классу $\mathfrak{M}_2$.

Положим

$$N_\kappa = N_\kappa(\varsigma) = \frac{1}{\kappa!}\left(\frac{d}{d\ln z}\right)^\kappa \ln f(z)\Big|_{z=\varsigma}, \quad \kappa = 1, 2, \dots .$$

Относительно N_1 и N_2 известно (см. [3] стр. 154–155), что

$$N_1(\varsigma) = \Phi'(t), \qquad (A)$$

$$\operatorname{Re} N_2(\varsigma) \leq \frac{1}{2}\max\left[\Phi''(t-0), \Phi''(t+0)\right]. \qquad (B)$$

Пусть $f(z)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_1$. Определим величину $\theta = \theta(\varsigma)$ следующим равенством

$$\theta = \{N_1(\varsigma)\}^{-q_1} = \{\Phi'(t)\}^{-q_1}, \qquad (6)$$

где q_1 выбрано так, чтобы выполнялись следующие соотношения

$$0 < q_1 < \frac{1}{4}; \quad q + q_1 < \frac{1}{2}; \quad 2q - q_1 < \frac{1}{2}. \qquad (7)$$

В плоскости τ $(\tau = \mathcal{H} + i\lambda)$ рассмотрим прямоугольник

$$\frac{1}{5}\theta R \leq \mathcal{H} \leq \frac{1}{2}\theta R, \qquad (8^{(1)})$$

$$\frac{1}{2}\theta R - 3\pi\{N_1\}^{-1} \leq s\lambda \leq \frac{1}{2}\theta R, \qquad (8^{(2)})$$

где

$$S = S(\arg\zeta) = \begin{cases} 1, & k\pi \leqslant \arg\xi < k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 0,1 \\ -1, & k\pi + \frac{\pi}{2} < \arg\xi < (k+1)\pi, \quad k = 0,1; \end{cases}$$

а $R = R(t) = \{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2}}$. Функция $z = \zeta \exp[\tau]$ отображает прямоугольник (8) на область G_ζ, которая представляет собой часть кольца

$$|\zeta| \exp[\tfrac{1}{5}\theta R] \leqslant |z| < |\zeta| \exp[\tfrac{1}{2}\theta R] \qquad (9)$$

заключенную между лучами ℓ_1 и ℓ_2, где

$$\ell_1: \arg w = \arg\zeta + \frac{S}{2}\theta R,$$
$$\ell_2: \arg w = \arg\zeta + S(\tfrac{1}{2}\theta R - 3\pi\{N_1\}^{-1}).$$

Из выбора G_ζ ясно, что она вся находится либо в верхней полуплоскости, либо в нижней.

Положим

$$C = C(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{когда } G_\xi \text{ принадлежит верхней полуплоскости,} \\ -1, & \text{когда } G_\xi \text{ принадлежит нижней полуплоскости.} \end{cases}$$

Л е м м а I. Пусть $f(z)$ принадлежит $\mathfrak{N}_1$ и $\lambda_{-c} > 0$. Тогда для всех достаточно больших t в области G_ξ существует линия Γ_ξ такая, что для $z \in \Gamma_\xi$ будем иметь соотношение

$$|\arg f(z) - \arg(\lambda_c e^{icz} + \lambda_{-c} e^{-icz})| < K\theta^2 (\mathrm{mod}\ 2\pi), \qquad (10)$$

где под K здесь и далее понимается подходящим образом выбранная константа. При этом изменение аргумента функции $f(z)$ вдоль линии Γ_ζ будет не меньше $2{,}5\pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . В области G_ζ (рис. I) выделим область $\tilde{G}_\zeta$, являющуюся частью кольца

$$|\zeta| \exp[\tfrac{1}{4}\theta R] < |z| < |\zeta| \exp[\tfrac{1}{3}\theta R],$$

заключенной между лучами ℓ_1 и ℓ_2. Очевидно, что область $\tilde{G}_\zeta$

есть образ при отображении $z = \zeta \exp[\tau]$, $\tau = \mathcal{H} + i\lambda$, прямоугольника

$$\tfrac{1}{4}\theta R \leqslant \mathcal{H} \leqslant \tfrac{1}{3}\theta R,$$

$$(\tfrac{1}{2}\theta R - 3\pi\{N_1\}^{-1} \leqslant S\lambda \leqslant \tfrac{1}{2}\theta R,$$

содержащегося в прямоугольнике (8).

Рассмотрим ту часть границы области $\tilde{G}_\zeta$, которая принадлежит лучу ℓ_1. Оценим снизу величину d-проекцию этой границы на вещественную ось плоскости z.

$$d = |\zeta \cos(\arg\zeta + \tfrac{S}{2}\theta R)|(\exp[\tfrac{1}{3}\theta R] - \exp[\tfrac{1}{4}\theta R]) \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{1}{12}|\zeta \cos(\arg\zeta + \tfrac{S}{2}\theta R| \cdot \theta R. \tag{II}$$

Так как $\theta R = o(\{\Phi'(t)\}^{-q})$, то из (5) получаем, что

$$|\cos(\arg\zeta + \tfrac{S}{2}\theta R)| \geqslant K\{\Phi'(t)\}^{-q}. \tag{I2}$$

Из (II) и (I2) следует, что

$$d > K\exp[t]\{N_1\}^{-(\frac{1}{2}+q+q_1)} \geqslant K\{N_1\}^{\frac{1}{2}-q-q_1}.$$

Так как $\frac{1}{2} - q - q_1 > 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} d = \infty$$

и, следовательно, $d > 2\pi$ для достаточно больших t.

Из построения области G_ζ следует, что для всех $z \in G_\zeta$

$$|\operatorname{Im} z| \geqslant \exp[t + \tfrac{1}{3}\theta R] \cdot |\sin(\arg\zeta + S(\tfrac{1}{2}\theta R - 3\pi\{N_1\}^{-1}))| \geqslant$$

$$\geqslant \exp[t]\,|\sin(\tfrac{1}{2}\theta R - 3\pi\{N_1\}^{-1})| > \{N_1\}^{\frac{1}{2}-q_1} \tag{I3}$$

Используя оценку (I3) мы можем записать

$$\arg(\lambda_c e^{icz} + \lambda_{-c}e^{-icz}) - \arg\lambda_{-c}e^{-icz} + \arg(1 + \tfrac{\lambda_c}{\lambda_{-c}} e^{2icz}) =$$

$$= \arg e^{-icz} + \nu_1, \tag{I4}$$

где

$$|\nu_1| \leqslant K\exp[-2|\operatorname{Jm} z|] \leqslant \leqslant K\exp[-2\{N_1\}^{\frac{1}{2}-q_1}] - O(\Theta^2). \tag{15}$$

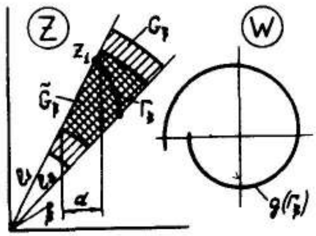

Рис. I

И.В. Островский для целых функций конечного порядка ρ в окрестности точки ζ получил следующее представление

$$f(\zeta e^{\tau}) = f(\zeta)\exp\left[\sum_{1}^{n} \ddot{N}_k(\zeta)\tau^k\right]\{1+\omega_k(\tau)\}, \quad |\tau| \leqslant \Theta R, \tag{16}$$

где $\Theta < e^{-\frac{\rho'}{2}}$, $\rho' > \rho$, $R = \{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2}}$, а для $\omega_k(\tau)$ выполняется оценка

$$|\omega_k(\tau)| \leqslant 2K(n+1)(\Theta e^{\frac{\rho'}{2}})^{n+1}. \tag{17}$$

Отсюда следует, что для $z \in G_3$

$$\arg f(z) = \arg f(\zeta e^{\tau}) = \arg f(\zeta) + N_1\lambda + \nu_2, \tag{18}$$

где

$$|\nu_2| < 4Ke\Theta^2. \tag{19}$$

Используя (I4), (I5), (I8) и (I9) получаем, что

$$\arg f(z) - \arg(\lambda_c e^{icz} + \lambda_{-c} e^{-icz}) = = \arg f(\zeta) + N_1\lambda - \arg e^{-icz} + \nu, \tag{20}$$

где

$$|\nu| < K\Theta^2 \tag{21}$$

для всех $z \in G_\zeta$.

Очевидно, что если мы построим линию Γ_ζ , для всех точек которой выполнялось бы сравнение

$$\arg f(\zeta) + N_1\lambda - \arg e^{-icz} \equiv 0 \pmod{2\pi}, \qquad (22)$$

то она удовлетворила бы условию (I0) леммы, как это следует из (20) и(2I).

Величину $\arg \exp[-icz]$ можно выразить через параметр λ следующим образом

$$\arg \exp[-icz] = -cx = -c|z|\cos(\arg\zeta + \lambda),$$

и сравнение (22) примет вид

$$\arg f(z) + N_1\lambda + c|z|\cos(\arg\zeta + \lambda) = 0 \pmod{2\pi}. \qquad (23)$$

Так как вдоль луча ℓ_1 величина $\arg f(\zeta) + N_1\lambda$ остается постоянной, а часть границы области $\tilde{G}_\zeta$, совпадающая с лучом ℓ_1 , имеет длину проекции на ось x-ов не менее 2π , то на этом участке границы должна найтись точка z_1 , в которой справедливо (23), т.е.

$$\arg f(\zeta) + \frac{S}{2}N_1\Theta R + c|z_1|\cos(\arg\zeta + \frac{S}{2}\Theta R) - 2\pi n_1 = 0, \qquad (24)$$

где n_1 – некоторое целое число. Легко видеть, что для кривой

$$z(\lambda) = \frac{2\pi n_1 - \arg f(\zeta) - N_1\lambda}{c \cdot \cos(\arg\zeta + \lambda)}, \qquad (25)$$

проходящей через точку z_1 , условие (23), а следовательно и условие (22), выполняется. Эту линию мы принимаем за линию Γ_ζ . Линия Γ_ζ проходит через точку z_1 , принадлежащую области $\tilde{G}_\zeta$. Покажем, что отсюда следует, что линия Γ_ζ принадлежит области G_ζ . Для этого достаточно показать, что прообраз линии Γ_ζ в плоскости τ принадлежит прямоугольнику (8). Так как условие $(8^{(2)})$выполняется по определению кривой Γ_ζ , то нам достаточно установить, что для величины $\mathcal{H}(\lambda)$,

$$\mathcal{H}(\lambda) = \ln|z(\lambda)| - \ln|\zeta|,$$

выполняется условие $(8^{(I)})$. Так как линия Γ_ζ проходит через точку z_1, то из (24) получаем

$$|\arg f(\zeta)-2\pi n_1|=|c|\,|z_1|\cos(\arg\zeta+\lambda)+\tfrac{S}{2}\Theta R|\geq$$
$$\geq \exp[t]\{N_1\}^{-q}-\tfrac{1}{2}N_1\Theta R>\tfrac{1}{2}\{N_1\}^{\frac{1}{2}-q}. \tag{26}$$

Поэтому можно записать

$$\mathcal{H}(\tfrac{S}{2}\Theta R)-\mathcal{H}(\lambda)=\ln|z(\tfrac{S}{2}\Theta R)|-\ln|z(\lambda)|=$$

$$=\ln\frac{2\pi n_1-\arg f(\zeta)+\frac{S}{2}\Theta R}{2\pi n_1-\arg f(\zeta)+N_1\lambda}+\ln\frac{\cos(\arg\zeta+\lambda)}{\cos(\arg\zeta+\frac{S}{2}\Theta R)}=$$

$$=\frac{N_1(\frac{S}{2}\Theta R-\lambda)(1+o(1))}{2\pi n_1-\arg f(\zeta)}+(1+o(1))(\tfrac{S}{2}\Theta R-\lambda)\,\mathrm{tg}(\arg\zeta+\tfrac{S}{2}\Theta R). \tag{27}$$

Так как $|\frac{S}{2}\Theta R-\lambda|\leq 3\pi\{N_1\}^{-1}$, а

$$|\mathrm{tg}(\arg\zeta+\tfrac{S}{2}\Theta R)|<K\{N_1\}^{q},$$

то из (26) и (27) получаем

$$|\mathcal{H}(\tfrac{S}{2}\Theta R)-\mathcal{H}(\lambda)\leq\frac{3\pi(1+o(1))}{\frac{1}{2}\{N_1\}^{1-q}}+3\pi K\{N_1\}^{-1+q}=$$
$$=K\{N_1\}^{-1+q}=K\{N_1\}^{-(\frac{1}{2}+q_1)}\cdot\{N_1\}^{-(\frac{1}{2}-q-q_1)}.$$

Учитывая, что $\frac{1}{2}-q-q_1>0$, мы окончательно можем записать

$$\mathcal{H}(\tfrac{S}{2}\Theta R)-\mathcal{H}(\lambda)=o(\Theta R). \tag{28}$$

Так как точка $z_1\in\tilde{G}_\zeta$ и

$$\tfrac{1}{4}\Theta R\leq\mathcal{H}(\tfrac{S}{2}\Theta R)=\ln|\tfrac{z_1}{\zeta}|\leq\tfrac{1}{3}\Theta R$$

(по построению области $\tilde{G}_\zeta$), то из (28) следует, что $\mathcal{H}(\lambda)$ удовлетворяет неравенствам

$$\tfrac{1}{5}\Theta R<\mathcal{H}(\lambda)<\tfrac{1}{2}\Theta R$$

для всех λ, определяемых условием $(8^{(2)})$, а значит кривая Γ_ζ

принадлежит области G_ζ.

Очевидно, что величина $|\arg f(\zeta) + N_1 \lambda|$ имеет вдоль линии Γ_ζ приращение 3π. Но тогда в силу (I8) и (I9) получаем, что приращение $\arg f(z)$ вдоль линии Γ_ζ не менее чем $3\pi - 4K\varepsilon\Theta^2 > 2{,}5\pi$ для достаточно больших t. Лемма доказана.

Для случая, когда выполняется условие (5), мы построили в каждой области G_ζ такую непрерывную кривую Γ_ζ, образ которой в плоскости w, полученный при помощи отображения

$$w = q(z) = \lambda_c \exp[icz] + \lambda_{-c} \exp[-icz] + f(z),$$

будет иметь общие точки с любым лучом, исходящим из начала координат (рис. I), и при этом угол ν между векторами $f(z)$ и $\lambda_c \exp[icz] + \lambda_{-c} \exp[-icz]$ будет удовлетворять оценке

$$|\nu| < K\Theta^2. \qquad (29)$$

Действительно, оценка непосредственно следует из леммы, а так как изменение $\arg f(z)$ вдоль линии Γ_ζ не меньше, чем $2{,}5\pi$, то, в силу (29), изменение аргумента вектора

$$q(z) = \lambda_c \exp[icz] + \lambda_{-c} \exp[-icz] + f(z) \qquad (30)$$

не меньше 2π для достаточно больших t.

Для функций класса $\mathfrak{M}_2$, когда выполняется неравенство обратное неравенству (5), т.е. когда

$$|\cos(\arg\zeta)| < \{\Phi'(t)\}^{-q}, \qquad (31)$$

мы не можем построить такую же непрерывную кривую. Но для любого фиксированного γ, $0 \leqslant \gamma < 2\pi$, мы найдем в окрестности точки ζ такую дугу, образ которой в плоскости w, полученный при отображении (30), будет иметь общую точку с лучом $\arg w = \gamma$. При этом для угла ν между векторами $f(z)$ и $\lambda_c \exp[icz] + \lambda_{-c} \exp[-icz]$ будет также выполняться оценка (29).

Определим функцию $\alpha(t)$ соотношением

$$\alpha(t) = \Phi'(t) e^{-t} \qquad (32)$$

и положим

$$\theta=\theta(\zeta)=\max\left[\{\alpha(t)\}^{\frac{1}{1,5}},\ \{N_1\}^{-4q+1}\right] \tag{33}$$

В плоскости z рассмотрим дугу окружности L, определяемую условиями:

$$[z]=\exp[t], \tag{34(I)}$$

$$-\theta R\leqslant s\lambda<\tfrac{1}{2}\theta R. \tag{34(2)}$$

Л е м м а 2. Пусть z принадлежит дуге L, $x=Re\,z$, $x_\zeta=Re\,\zeta$. Справедлива формула

$$\arg f(z)=\arg f(\zeta)-c\alpha(t)(x-x_\zeta)+\mu(x), \tag{35}$$

где

$$\mu(x)=O(\theta^{1,5}), \tag{36}$$

а величина c определена равенством x)

$$c=\operatorname{sign}(\sin(\arg\zeta)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что

$$x-x_\zeta=\exp[t]\{\cos(\arg\zeta+\lambda)-\cos(\arg\zeta)\}=$$

$$=-2\exp[t]\sin\frac{\lambda}{2}\cdot\sin(\arg\zeta+\frac{\lambda}{2}). \tag{37}$$

Так как $|\lambda|\leqslant\theta R=o(R)$, то, используя (3I), мы можем записать

$$2\sin\frac{\lambda}{2}\sin(\arg\zeta+\frac{\lambda}{2})=c\lambda\left(1+\sum_1^\infty(-1)^k\frac{(\frac{\lambda}{2})^{2k}}{(2k+1)!}\right)\sqrt{1-\cos^2(\arg\zeta+\lambda)}=$$

$$=c\lambda(1+\mu_1(\lambda)), \tag{38}$$

где

$$|\mu_1(\lambda)|\leqslant\{\Phi'(t)\}^{-2q}. \tag{39}$$

---

x) Таким образом, θ и c определяются различно в зависимости от того, выполняется (5) или (3I).

Подставляя (38) в (37), получим

$$X - X_\zeta = -c\lambda\,(1 + \mu_1(\lambda))\exp[t],$$

откуда следует, что

$$\lambda = -c\,\frac{X - X_\zeta}{1+\mu_1(\lambda)}\exp[-t] = -c\,(X - X_\zeta)\exp[-t]\,(1 + \mu_2(X)), \qquad (40)$$

где для $\mu_2(X)$ следует из (39) очевидная оценка

$$|\mu_2(X)| < 2\{\Phi'(t)\}^{-2q}. \qquad (4I)$$

Очевидно, что когда z принадлежит дуге L, то для τ, $\tau = \ln z - \ln \zeta$, выполняется оценка

$$|\tau| \leqslant \Theta R.$$

Поэтому мы можем пользоваться представлением (I6) при $n=1$ с оценкой (I7), а также оценкой (4I). Подставляя (40) в (I6), получим

$$\arg f(z) = \arg f(\zeta) - c\alpha(t)(X - X_\zeta) + \mu(X),$$

где

$$|\mu(X)| = |\mu_2(X)(X - X_\zeta)\exp(-t)N_1 + K\Theta^2| \leqslant$$

$$\leqslant \{N_1\}^{-2q}\,\Theta R N_1 + K\Theta^2 = \Theta\{N_1\}^{\frac{1}{2}-2q} + K\Theta^2 \leqslant K\Theta^{1,5}$$

согласно определению Θ. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $\lambda_{-c} > 0$. Для любого фиксированного γ, $0 \leqslant \gamma < 2\pi$, на дуге L существует точка z, в которой выполняются следующие условия

$$\arg f(z) + \lambda_c\exp[icz] + \lambda_{-c}\exp[-icz] = \gamma \pmod{2\pi}, \qquad (42)$$

$$|\arg f(z) - \arg(\lambda_c\exp[icz] + \lambda_{-c}\exp[-icz])| = K\Theta^{1,5} \pmod{2\pi}. \qquad (43)$$

Доказательство. Легко видеть, что когда $\lambda_{-c} > 0$, то справедливо соотношение

$$\arg(\lambda_c\exp[icz] + \lambda_{-c}\exp[-icz]) = -cx + \mu_3(X), \qquad (44)$$

где

$$\mu_3(X) = o(\Theta^{1,5}). \tag{44(I)}$$

В плоскости w рассмотрим лучи $\arg w = \gamma_1(X)$ и $\arg \omega = \gamma_2(X)$, где

$$\gamma_1(X) = \arg f(\zeta) - c\,\alpha(t)(X - X_\zeta) = \arg f(z) - \mu(X),$$

$$\gamma_2(X) = -c\,[X_\zeta + (X - X_\zeta)] = \arg(\lambda_c \exp[icz] +$$

$$+ \lambda_{-c} \exp[-icz]) - \mu_3(X).$$

Очевидно, что точка $w = f(z)$ лежит внутри угла раствора $2|\mu(X)|$, биссектрисой которого является луч $\arg w = \gamma_1(X)$, а точка $\lambda_c \exp[icz] + \lambda_{-c}\exp[-icz]$ лежит внутри угла раствора $2|\mu_3(X)|$, биссектрисой которого является луч $\arg w = \gamma_2(X)$. Угол между лучами $\arg w = \gamma_1(X)$ и $\arg w = \gamma_2(X)$ равен

$$-cX_\zeta - \arg f(\zeta) - c(1 - \alpha(t))(X - X_\zeta),$$

поэтому, когда X получит приращение равное $2\pi(1-\alpha(t))^{-1}$, то угол между лучами $\arg w = \gamma_1(X)$ и $\arg w = \gamma_2(X)$ изменится на $-2c\pi$. Следовательно, для тех точек X_j, в которых эти два луча совпадают, справедливо соотношение

$$|X_j - X_{j-1}| = \frac{2\pi}{1 - \alpha(t)}.$$

Зная границы изменения величины λ, которые даны в (34(2)), легко оценить с помощью (37) величину проекции дуги L на ось x-ов.

А именно:

$$\text{пр} L \geq \frac{1}{2}\Theta R e^t (1 + o(1)).$$

Таким образом, общее число m_ζ точек X_j, содержащихся в проекции дуги L, имеют оценку снизу

$$m_\zeta \geq \frac{(1-\alpha(t))\Theta R}{4\pi} e^t (1 + o(1)).$$

Очевидно, что если $f(z)$ имеет порядок ρ меньший 1, то

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0,$$

и для достаточно больших t получим

$$m_\zeta \geqslant \frac{1}{8\pi}\Theta Re^{\tau} = \frac{1}{8\pi}\Theta\{N_1\}^{\frac{1}{2}}\{\alpha(t)\}^{-1}. \tag{45}$$

Очевидно, что $\{\alpha(t)\}^{-1}\to\infty$ при $t\to\infty$. Далее, так как $q<0{,}3$, то $\Theta\{N_1\}^{1/2}\to\infty$ при $t\to\infty$ и

$$\{N_1\}^{\frac{1}{2}} > \{N_1\}^{2{,}5(4q-1)}.$$

Теперь из (45), из определения Θ и из последнего неравенства мы можем сделать вывод, что

$$m_\zeta \geqslant \Theta^{-1{,}5}. \tag{46}$$

Таким образом, на дуге L существуют точки z_j в количестве не меньше, чем $\Theta^{-1{,}5}$, в которых, полагая $X_j = Re\, z_j$, имеем

$$\gamma_1(X_j) = \gamma_2(X_j) \pmod{2\pi},$$

откуда легко получаем

$$\arg f(z_j) - \arg(\lambda_c \exp[icz_j] + \lambda_{-c}\exp[-icz_j]) = K\Theta^{1{,}5} \pmod{2\pi}. \tag{47}$$

Рассмотрим теперь взаимное расположение лучей $\arg w = \gamma_1(X_j)$ в плоскости w. Имеем

$$\gamma_1(X_j) - \gamma_1(X_{j-1}) = -c\alpha(t)(X_j - X_{j-1}) = -c\,\frac{2\pi\alpha(t)}{1-\alpha(t)}.$$

Следовательно, вся плоскость w разбивается лучами $\arg w = \gamma_1(X_j)$ на $[(1-\alpha(t))\{\alpha(t)\}^{-1}]+1$ секторов (здесь под $[x]$ понимается целая часть x), каждый из которых имеет раствор не больше, чем $2\pi\alpha(t)(1-\alpha(t))^{-1}$. Так как

$$\alpha(t) < \Theta^{1{,}5},$$

то вся плоскость w разбивается лучами $\gamma_1(X_j)$ на секторы раствора не большего чем, $3\pi\Theta^{-1{,}5}$. Таким образом, какое бы ни было γ, $0\leqslant\gamma<2\pi$, найдется такая точка z_j на дуге L, что для луча $\arg w = \gamma_1(X_j)$ выполняется неравенство

$$|\gamma-\gamma_1(x_j)|\leqslant 3\pi\Theta^{1,5}\cdot(\mathrm{mod}\,2\pi). \tag{48}$$

Из определения лучей $\arg w=\gamma_1(x)$ и $\arg w=\gamma_2(x)$ из (47) и (48) получаем

$$|\gamma-\arg f(z_j)|\leqslant K_1\Theta^{1,5}\ (\mathrm{mod}\,2\pi), \tag{49}$$

$$|\gamma-\arg(\lambda_c\exp[icz_j]+\lambda_{-c}\exp[-icz_j])|\leqslant K_2\Theta^{1,5}(\mathrm{mod}\,2\pi). \tag{50}$$

Теперь на дуге L в окрестности точки z_j найдем точку z о которой говорится в лемме. На оси X-ов рассмотрим отрезок $[\bar{X}_j,\bar{\bar{X}}_j]$,

$$[\bar{X}_j,\bar{\bar{X}}_j]=[X_j-2K_2\Theta^{1,5},\ X_j+2K_2\Theta^{1,5}].$$

Очевидно, что когда $X\in[\bar{X}_j,\bar{\bar{X}}_j]$, то

$$|\gamma_1(X)-\gamma_2(X)|=(1-\alpha(t))|X-X_j|(\mathrm{mod}\,2\pi)\leqslant 2K_2\Theta^{1,5};$$

но тогда из определения лучей $\arg w=\gamma_1(X)$ и $\arg w=\gamma_2(X)$ следует, что для тех точек z, $z\in L$, для которых $\mathrm{Re}\,z\in[\bar{X}_j,\bar{\bar{X}}_j]$ будет выполняться (43).

Для всех точек дуги L

$$|f(z)|<|f(\xi)\exp[N_1 i\lambda]|(1+K\Theta^2)=|f(\zeta)|(1+K\Theta^2),$$

а так как в рассматриваемом случае выполняется условие (3I) и $|\arg z-\arg\xi|\leqslant\theta R$,
то

$$|\lambda_c\exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]|\geqslant\lambda_{-c}\exp[|\Im m\,z|](1+o(1)),$$

где

$$|\Im m\,z|=|\zeta|\cdot|\sin(\arg z)|\geqslant e^{t}(1-o(1)). \tag{5I}$$

Поэтому

$$\left|\frac{f(z)}{\lambda_c\exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]}\right|\leqslant\frac{|f(\zeta)|(1+K\Theta^2)}{\lambda_{-c}\exp[e^{t}(1-o(1))]}<$$

$$<\exp|(\rho'-1)e^{t}|=o(\Theta^{1,5}),$$

где $\rho < \rho' < 1$, и ρ порядок $f(z)$.

Отсюда следует, что

$$\arg(f(z)+\lambda_c e^{icz}+\lambda_{-c}e^{-icz})=\arg(\lambda_c e^{icz}+\lambda_{-c}e^{-icz})+O(\Theta^{1,5}). \qquad (52)$$

Теперь из (52), (44), ($44^{(I)}$) и из определения луча $\arg w=\gamma_2(X)$ следует, что для $z\in L$

$$\arg(f(z)+\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz])=\gamma_2(X)+O(\Theta^{1,5}). \qquad (53)$$

Так как при движении точки X по отрезку $[\bar{X}_j, \bar{\bar{X}}_j]$ в любую сторону от точки X_j вектор $\arg w=\gamma_2(X)$ поворачивается на угол $2K_2\Theta^{1,5}$, то из (50) и (53) следует, что существует такая точка X, $X\in[\bar{X}_j, \bar{\bar{X}}_j]$, что для точки $z\in L$, $\operatorname{Re} z=X$, выполняется условие (42).

Лемма доказана.

Из леммы I и 3 следует, что для любого фиксированного γ, $0\leqslant\gamma<2\pi$, в случае, когда функция $f(z)$ имеет порядок меньше I, а $\lambda_{-c}>0$, при достаточно больших t в окрестности каждой точки ζ существует точка z, $z=\zeta e^{\tau}$, $|\tau|\leqslant\Theta R$, в которой выполняются условия (42) и (43).

Если же $\lambda_{-c}=0$, то

$$|\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]|\leqslant\lambda_c, \quad z=\zeta e^{\tau}, \quad |\tau|\leqslant\Theta R,$$

поэтому в этом случае для функции $g(z)$ в окрестности точки справедливо следующее представление

$$g(z)=g(\zeta e^{\tau})=f(\zeta e^{\tau})(1+O(|f(\zeta e^{\tau})|^{-1}))=$$
$$=f(\zeta)\exp\Big[\sum_1^n N_k\tau^k\Big]\{1+\bar{\omega}_n(\tau)\}, \quad |\tau|<\Theta R,$$

где

$$|\bar{\omega}_n(\tau)|<K(n+1)(\Theta e^{\frac{\rho'}{2}})^{n+1}.$$

Повторяя рассуждения лемм I3 и I4 из [3], мы докажем, что и в этом случае существует такая точка z, $z=\zeta e^{\tau}$, $\tau=\mathcal{H}+i\lambda$, $|\sin(\arg\zeta)|\leqslant\cos\lambda$,

$$|\mathcal{H}|\leqslant\frac{1}{2}\Theta R^{2p}, \quad 1>p>\frac{1}{2}, \qquad (С)$$

$$\frac{1}{4}\Theta R\leqslant|\lambda|\leqslant\frac{1}{2}\Theta R, \qquad (Д)$$

в которой выполняется (42). Выполнение условия (43) в этом случае не требуется.

Переходим теперь к доказательству теоремы. Предположим противное, что функция

$$\varphi(z)=F(g(z))=F(f(z)+\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]),$$

где $F(w)\neq const$, $M(z,F)=|F(z)|$ удовлетворяет условию (I). Пусть для $t>t_0$ доказанные ранее утверждения имеют место. Тогда в окрестности каждой точки ζ найдется точка z, в которой

$$|\varphi(z)|=|F(|f(z)+\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]|)|=$$

$$=M(|f(z)+\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]|,F).$$

Так как для функции $\varphi(z)$ выполняется по предположению (I), то

$$|F(f(iJm\,z)+\lambda_c \exp[-|Jm\,z|]+\lambda_{-c}\exp[|Jm\,z|])|\geqslant$$
$$\geqslant M(|f(z)+\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]|,F).$$

Усиливая последнее неравенство можно записать

$$M(|f(iJm\,z)|+\lambda_c \exp[-|Jm\,z|]+\lambda_c \exp[|Jm\,z|],F)\geqslant$$

$$\geqslant M(|f(z)+\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]|,F). \tag{54}$$

Функция $M(z,F)$ монотонно возрастает, поэтому из (54) следует, что

$$|f(iJm\,z)|+\lambda_c \exp[-|Jm\,z|]+\lambda_{-c}\exp[|Jm\,z|]\geqslant$$

$$\geqslant|f(z)+\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]|. \tag{55}$$

Так как $M(|Jm\,z|,f)\geqslant|f(iJm\,z)|$, то неравенство (55) можно усилить следующим образом

$$M(|Jm\,z|,f)+\lambda_c \exp[-|Jm\,z|]+\lambda_c \exp[|Jm\,z|]\geqslant$$

$$\geqslant|f(z)+\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz]|. \tag{56}$$

Пусть $\lambda_{-c}>0$. Тогда угол между векторами $f(z)$ и $(\lambda_c \exp[icz]+\lambda_{-c}\exp[-icz])$ не превосходит $K\Theta^{1,5}$. Учитывая, что

$$|\exp[icz]| = \exp[-|\Im z|],$$

$$|\exp[-icz]| = \exp[|\Im z|],$$

легко можно получить

$$|f(z) + \lambda_c \exp[icz] + \lambda_{-c} \exp[-icz]| >$$

$$> |f(z)| \cos(K\theta^{1,5}) + \lambda_{-c} \exp[|\Im z|] - \lambda_c \exp[-|\Im z|].$$

Используя последнее неравенство, а также оценку (I3), когда выполняется (5), и оценку (5I), когда выполняется (3I), получим из (56)

$$M(|\Im z|, f)(1 + o(\theta^3)) > |f(z)| \cos(K\theta^{1,5}). \tag{57}$$

Рассмотрим случай, когда $f(z) \in \mathcal{N}_1$. Используя представление (I6) для $f(z)$ с оценкой (I7) при $n = 1$, мы неравенство (57) можем усилить следующим образом

$$M(e^{t+\mathcal{H}} |\sin(\arg z)|, f)(1 + o(\theta^3)) >$$

$$> |f(\zeta)| e^{N_1 \mathcal{H}} (1 - K\theta^2) \cos(K\theta^{1,5}).$$

Логарифмируя последнее неравенство, получим

$$\psi(t) + N_1 \mathcal{H} \leq \psi(t + \mathcal{H} + \ln|\sin(\arg z)|) + K\theta^2. \tag{58}$$

Но из (5), $(8^{(I)})$ и второго условия (7) следует, что

$$\mathcal{H} + \ln|\sin(\arg z)| < \tfrac{1}{2}\theta R + \ln(1 - K\{\Phi'(t)\}^{-2q}) =$$

$$- \tfrac{1}{2}\{\Phi'(t)\}^{-\frac{1}{2} - q_1} - K\{\Phi'(t)\}^{-2q}(1 + o(1)) < 0,$$

а это означает, что $\psi(t) > \psi(t + \mathcal{H} + \ln|\sin(\arg z)|)$, а так как $N_1 \mathcal{H} \to \infty$, то неравенство (58) не может выполняться.

Пусть теперь $f(z) \in \mathcal{N}_2$. В этом случае мы используем (I6) и (I7) при $n = 2$. Неравенство (57) может быть усиленно следующим образом (напомним, что в этом случае $\mathcal{H} = 0$).

$$|f(\zeta)| \exp[-\operatorname{Re} N_2 \lambda^2](1 - K\theta^3) \cos(K\theta^{1,5}) \leq$$

$$\leq M(e^t |\sin(\arg z)|, f)(1 + o(\theta^3)) \leq M(e^t \cos\lambda, f)(1 + o(\theta^3)). \tag{59}$$

Логарифмируя (59) получим

$$\Psi(t+\ell n\cos\lambda)-\Psi(t)+\operatorname{Re}N_2\lambda^2>-K\theta^3.$$

Заменяя $\Psi(t)$ на $\Phi(t)$, мы, исходя из свойств $\Phi(t)$ и условия (B), можем последнее неравенство усилить следующим образом

$$\Phi(t+\ell n\cos\lambda)-\Phi(t)+\frac{\lambda^2}{2}\max[\Phi'(t+0),\Phi'(t-0)]>-K\theta^3. \tag{60}$$

Выражение, стоящее в левой части (60) исследовано И.В. Островским в [3]. Там показано (см. стр. 152-154), что при достаточно больших t, $t\in E$, левая часть неравенства (60) не превосходит величины $\frac{1}{9}\theta^2(\rho-1)$. Следовательно, неравенство (60) не может выполняться для достаточно больших t.

Таким образом, предположив, что $\varphi(z)$ удовлетворяет условию хребта, мы при $\lambda_{-c}>0$ пришли к противоречию как в случае, когда $f(z)\in\mathfrak{N}_1$, так и в случае, когда $f(z)\in\mathfrak{N}_2$.

Пусть теперь $\lambda_{-c}=0$. Так как $|\lambda_c\exp[icz]|\leqslant\lambda_c$, то неравенство (56) можно в этом случае усилить следующим образом

$$M(|\operatorname{Im}z|,f)>|f(z)|-2\lambda_c=|f(z)|(1+o(\theta^3)). \tag{61}$$

Точку z, $z=e^{\tau}$, мы выбрали так, что для τ, $\tau=\mathcal{H}+i\lambda$, справедливы неравенства (C) и (Д) и $|\sin(\arg z)|\leqslant\cos\lambda$. Рассуждая так же как и при доказательстве теоремы I из [3], мы и в этом случае придем к противоречию. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Мы доказали теорему для случая, когда $|F(z)|=M(z,F)$. Почти дословно повторяя вышеприведенное доказательство, можно показать, что теорема остается справедливой и в том случае, когда $M(z,F)=|F(ze^{i\gamma})|$ для любого фиксированного γ, $0\leqslant\gamma<2\pi$.

Выражаю искреннюю благодарность И.В. Островскому за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

I. Ю.В. Линник. Разложение вероятностных законов. Л. Изд-во ЛГУ, I960.

2. И.В. Островский. О применении одной закономерности, установленной Виманом и Валироном, к исследованию характеристических функций вероятностных законов. Доклады АН СССР, I43, №3, 522-535 (I962г.).

3. И.В. Островский. О целых функциях, удовлетворяющих некоторым специальным неравенствам, связанным с теорией характеристических функций вероятностных законов. "Ученые записки механико-математического факультета и Харьковского математического общества, т 29 (I963), стр. I45-I68.

4. Б.Я. Левин. "Распределение корней целых функций", М., ГИТТЛ, I956.

5. В.В. Зимогляд. О росте целых характеристических функций, удовлетворяющих специальным неравенствам. Сборник ХГУ "Теория функций и функциональный анализ", том 6, I968.

6. E.Lukacz, Some Extensions of a Theorem of Marzinkiewicz, Pacif.J.of Math., 8, N 3, 487-501, 1959.

7. J.Marzinkiewicz, Sur une propriete de la loi de Gauss, Math.Zs., 44, 612-618, 1938.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М.Б.БАЛКА

И.В.Островский

Целой полианалитической функцией порядка n называется функция вида

$$f(z)=\sum_{k=0}^{n-1} z^k f_k(z),$$

где $f_k(z)$ $(k=0,\dots,n-1)$ – целые функции, $f_{n-1}(z)\not\equiv 0$. Функция $f(z)$ называется полианалитическим полиномом порядка n, если все функции $f_k(z)$ $(k=0,\dots,n-1)$ являются полиномами.

М.Б.Балк [I] доказал следующую теорему:

Всякая целая полианалитическая функция $f(z)$ порядка n, множество корней которой ограничено, представима в виде

$$f(z)=e^{g(z)}P(z), \tag{I}$$

где $g(z)$ – целая функция, а $P(z)$ – полианалитический полином порядка n.

Предложенное М.Б.Балком [I] доказательство довольно сложно и, кроме того, опирается на некоторые глубокие факты разработанной А.Картаном [5] теории целых кривых. x)
В настоящей заметке мы даем более простое доказательство. Оно также опирается на некоторые результаты о целых кривых, но эти результаты просты и легко получаются. Не предполагая у читателя знакомства с теорией целых кривых, мы все эти результаты приводим с полными доказательствами.

Мы будем пользоваться стандартными обозначениями и некоторыми простыми фактами теории распределения значений мероморфных функций.

I. Сведения из теории целых кривых. Пусть C^n – комплексное n – мерное пространство; $\mathfrak{a}=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, $\mathfrak{b}=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ – его векторы;

x) С этой теорией можно также познакомиться по написанному А.А.Гольдбергом обзору [2]

$$\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}=\sum_{k=1}^{n}a_k b_k, \quad \|\mathfrak{a}\|=\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^2\right)^{1/2}.$$

Определение. Целой n - мерной кривой называется вектор-функция вида

$$\mathfrak{g}(z)=(g_1(z), g_2(z), \ldots, g_n(z)),$$

где $g_1(z), \ldots, g_n(z)$ - линейно независимые целые функции.

В дальнейшем будем рассматривать только такие целые кривые $\mathfrak{g}(z)$, для которых функции $g_1(z), \ldots, g_n(z)$ не обращаются одновременно в нуль.

Введем величины, характеризующие целую кривую.

Пусть $\mathfrak{a}$ - ненулевой постоянный вектор. Обозначим через $n(r, \mathfrak{a})$ число корней (с учетом кратности) целой функции $\mathfrak{g}(z)\cdot\mathfrak{a}$ в круге $|z|\leqslant r$. Положим

$$N(r,\mathfrak{a})=\int_0^r \frac{n(t,\mathfrak{a})-n(0,\mathfrak{a})}{t}\,dt+n(0,\mathfrak{a})\ln r,$$

$$m(r,\mathfrak{a})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{\|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\|\,\|\mathfrak{a}\|}{|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\cdot\mathfrak{a}|}\,d\varphi-\ln\frac{\|\mathfrak{g}(0)\|\,\|\mathfrak{a}\|}{|\tau(\mathfrak{g},\mathfrak{a})|},$$

где $\tau(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ - первый отличный от нуля коэффициент Тейлора целой функции $\mathfrak{g}(z)\cdot\mathfrak{a}$.

Характеристикой целой кривой $\mathfrak{g}(z)$ назовем величину

$$T(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\|\,d\varphi-\ln\|\mathfrak{g}(0)\|.$$

Нам понадобятся такие факты теории целых кривых.

А. Для любого ненулевого постоянного вектора $\mathfrak{a}\in C^n$ выполняется соотношение

$$N(r,\mathfrak{a})+m(r,\mathfrak{a})=T(r). \tag{2}$$

Б. Если

$$T(r)=O(\ln r), \quad r\to\infty, \tag{3}$$

то все отношения $g_j(z)/g_k(z)$ $(j,k=1,2,\ldots,n)$ являются рациональными функциями.

Так как функции $g_k(z)$ $(k=1,\dots,n)$ не обращаются одновременно в нуль, то из Б следует, что при выполнении (3) функции $g_k(z)$ имеют вид

$$g_k(z) = h_k(z)e^{g(z)}, \quad k=1,\dots,n,$$

где $g(z)$ – целая функция, а $h_k(z)$ – полиномы.

Для доказательства утверждения А заметим, что

$$T(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{\|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\|\|\mathfrak{a}\|}{|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\cdot\mathfrak{a}|}d\varphi-\ln\frac{\|\mathfrak{g}(0)\|\|\mathfrak{a}\|}{|\tau(\mathfrak{g},\mathfrak{a})|}+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\cdot\mathfrak{a}|d\varphi-\ln|\tau(\mathfrak{g},\mathfrak{a})|. \tag{4}$$

Так как формула Иенсена в применении к целой функции $\mathfrak{g}(z)\cdot\mathfrak{a}$ дает

$$N(r,\mathfrak{a})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\cdot\mathfrak{a}|d\varphi-\ln|\tau(\mathfrak{g},\mathfrak{a})|,$$

то, вспоминая определение $m(r,\mathfrak{a})$, видим, что из (4) следует (2).

Доказательство утверждения Б опирается на следующее хорошо известное предложение (см.напр., [4] ,стр.404): если характеристика Неванлинны $T(r,f)$ для мероморфной функции $f(z)$ удовлетворяет условию $T(r,f)=O(\ln r)$, то функция $f(z)$ рациональна.

Положим $f_{jk}(z)=g_j(z)/g_k(z)$ $(j,k=1,\dots,n)$

Нам достаточно доказать неравенство

$$T(r,f_{jk})\leqslant T(r)+O(1). \tag{5}$$

Имеем

$$m(r,f_{jk})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+|f_{jk}(re^{i\varphi})|d\varphi\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\sqrt{1+|f_k(re^{i\varphi})|^2}d\varphi=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\sqrt{|g_j(re^{i\varphi})|^2+|g_k(re^{i\varphi})|^2}d\varphi- \tag{6}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g_k(re^{i\varphi})|\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\|g(re^{i\varphi})\|\,d\varphi -$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|g_k(re^{i\varphi})|\,d\varphi = T(r) - N\left(r,\frac{1}{g_k}\right) + O(1).$$

(на последнем шаге мы воспользовались определением характеристики $T(r)$ и формулой Иенсена в применении к целой функции $g_k(z)$).

Так как все полюсы функции $f_{jk}(z)$ лежат в корнях функции $g_k(z)$, то при $r \geqslant 1$ имеем

$$N(r, f_{jk}) \leqslant N\left(r, \frac{1}{g_k}\right)$$

и поэтому из (6) следует (5).

2. Редукция к случаю приведенных полианалитических функций

Приведенной целой полианалитической функцией порядка n называется функция вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} f_k(z), \tag{7}$$

где $f_k(z)$ $(k=0,\ldots,n-1)$ – целые функции, $f_{n-1}(z) \not\equiv 0$. Очевидно, приведенные составляют подкласс класса всех целых полианалитических функций порядка n.

Следуя М.Б.Балку [I], покажем, что можно ограничиться рассмотрением приведенных целых полианалитических функций.

Предположим, что теорема доказана для приведенных функций, причем для них дополнительно установлено, что полином $P(z)$ в (I) тоже является приведенной полианалитической функцией. Покажем, что тогда теорема верна и в общем случае.

Действительно, пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k f_k(z)$$

– произвольная целая полианалитическая функция порядка n с ограниченным множеством корней. Тогда функция

$$F(z) = z^{n-1} f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} f_k(z)$$

будет приведенной и, следовательно,

$$F(z) = e^{g(z)} \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} \varphi_k(z),$$

где $\varphi_k(z)$ $(k=0,\dots,n-1)$ – полиномы. Таким образом, справедливо тождество

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} f_k(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |z|^{2k} e^{g(z)} \varphi_k(z).$$

На окружности $|z| = c$ имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} c^{2k} f_k(z) = \sum_{k=0}^{n-1} c^{2k} e^{g(z)} \varphi_k(z). \tag{8}$$

Обе части этого равенства являются целыми функциями от z. Поэтому из его справедливости на окружности $|z| = c$ вытекает справедливость при всех $z \in C^1$. Таким образом, (8) справедливо при всех $z \in C^1$ и всех $c > 0$. Так как обе части (8) являются полиномами по c, то мы заключаем, что

$$f_k(z) = e^{g(z)} \varphi_k(z), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

и, следовательно,

$$f(z) = e^{g(z)} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z),$$

что и требовалось.

3. Вспомогательные утверждения.

Лемма I (М.Б.Балк [I]). Всякую приведенную целую полианалитическую функцию $f(z)$ порядка n можно представить в виде

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu(|z|^2) g_\nu(z), \tag{9}$$

где $g_\nu(z)$ $(\nu = 1,\dots,s;\ s \leqslant n-1)$ – линейно независимые целые функции, каждая из которых совпадает с одной из функций $f_k(z)$ в представлении $f(z)$ в виде (7), а $p_\nu(t)$ – полиномы, степени которых α_ν удовлетворяют условию

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s = n-1.$$

Для доказательства будем последовательно перебирать функции $f_0(z), \ldots, f_{n-1}(z)$ и каждый раз, когда функция $f_j(z)$ оказывается линейной комбинацией функций $f_k(z)$, $k<j$, заменять ее этой линейной комбинацией. Приводя после этого подобные члены, получим утверждение леммы.

Л е м м а 2 (М.Б.Балк [I]). Сохраняя обозначения леммы I, положим

$$\Phi_c(z) = \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu(c^2)\, g_\nu(z), \quad c>0,$$

Пусть $n(c)$ – число корней целой функции $\Phi_c(z)$ в круге $|z|\leqslant c$. Если функция $f(z)$ не обращается в нуль при $|z|\geqslant\rho$, то $n(c)$ при $c>\rho$ не зависит от c.

Д о к а з а т е л ь с т в о ([I]). Положим

$$m = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=\rho} d\arg f(z).$$

Так как функция $f(z)$ в кольце $\rho\leqslant|z|\leqslant c$, $c>\rho$, не обращается в нуль, то

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=c} d\arg f(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=\rho} d\arg f(z) = m.$$

Но на окружности $|z|=c$ выполняется равенство $\Phi_c(z)=f(z)$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=c} d\arg \Phi_c(z) = m, \quad c\geqslant\rho,$$

и, в силу принципа аргумента, заключаем, что $n(c)=m$ $(c>\rho)$.

4. Доказательство теоремы для приведенных полианалитических функций. Пусть $f(z)$ – приведенная полианалитическая функция порядка n с ограниченным множеством корней. (Очевидно, не уменьшая общности, можно считать, что $g_k(z)$ не имеют общих корней). Пользуясь леммой I, представим ее в виде (9). Рассмотрим s – мерную целую кривую

$$\mathfrak{g}(z) = (g_1(z), \ldots, g_s(z))$$

и s – мерный вектор

$$\mathfrak{A}_c = (p_1(c^2), \ldots, p_s(c^2)).$$

Из (2) следует равенство

$$T(r)=T(1)+N(r,\mathfrak{A}_c)-N(1,\mathfrak{A}_c)+m(r,\mathfrak{A}_c)-m(1,\mathfrak{A}_c).$$

Умножим обе его части на rc^{-2} и проинтегрируем по c от r до ∞. Получим

$$T(r)=T(1)+I_1(r)+I_2(r),$$

где

$$I_1(r)=r\int_r^\infty\{N(r,\mathfrak{A}_c)-N(1,\mathfrak{A}_c)\}\frac{dc}{c^2},$$
$$I_2(r)=r\int_r^\infty\{m(r,\mathfrak{A}_c)-m(1,\mathfrak{A}_c)\}\frac{dc}{c^2}.$$

Если мы докажем, что

$$I_1(r)=O(\ln r),\quad I_2(r)=O(\ln r), \tag{10}$$

то будем иметь

$$T(r)=O(\ln r)$$

и, применяя предложение Б п.2, получим, очевидно, утверждение доказываемой теоремы. Итак, дело сводится к доказательству соотношений (10).

Оценим интегралы $I_1(r)$ и $I_2(r)$.

Имеем

$$N(r,\mathfrak{A}_c)-N(1,\mathfrak{A}_c)=$$
$$=\int_1^r\frac{n(t,\mathfrak{A}_c)-n(0,\mathfrak{A}_c)}{t}\,dt+n(0,\mathfrak{A}_c)\ln r.$$

Очевидно, функция $\Phi_c(z)$, определяемая в лемме 2, совпадает с функцией $\mathfrak{J}(z)\cdot\mathfrak{A}_c$. Применяя лемму 2, заключаем, что при $t\leqslant c$, $c<\rho$, имеем $n(t,\mathfrak{A}_c)\leqslant n(c)-m$, где m – не зависящая от c постоянная. Следовательно, при $1\leqslant r\leqslant c$, $c\leqslant\rho$, выполняется

$$N(r,\mathfrak{A}_c)-N(1,\mathfrak{A}_c)\leqslant m\ln r,$$

откуда

$$I_1(r)\leqslant m\ln r,\quad r\geqslant 1.$$

$$I_2(r) = r\int_r^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\ln\frac{\|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\|\,\|\mathfrak{A}_c\|}{|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\cdot\mathfrak{A}_c|} - \ln\frac{\|\mathfrak{g}(e^{i\varphi})\|\,\|\mathfrak{A}_c\|}{|\mathfrak{g}(e^{i\varphi})\cdot\mathfrak{A}_c|}\right]d\varphi\right\}\frac{dc}{c^2} \leqslant$$

$$\leqslant r\int_r^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{\|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\|\,\|\mathfrak{A}_c\|}{|\mathfrak{A}(re^{i\varphi})\cdot\mathfrak{A}_c|}d\varphi\right\}\frac{dc}{c^2} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{r\int_r^{\infty}\ln\frac{\|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\|}{|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\cdot\mathfrak{A}_c|}\frac{dc}{c^2}\right\}d\varphi + r\int_r^{\infty}\frac{\ln\|\mathfrak{A}_c\|}{c^2}dc .$$

Так как компоненты вектора $\mathfrak{A}_c$ – полиномы, то $\ln\|\mathfrak{A}_c\| = O(\ln c)$, $c\to\infty$, и, следовательно,

$$r\int_r^{\infty}\frac{\ln\|\mathfrak{A}_c\|}{c^2}dc = O(\ln r), \quad r\to\infty.$$

Полагая

$$L(r) = \sup_{|W_1|^2+\ldots+|W_s|^2=1} r\int_r^{\infty}\left\{\ln\frac{1}{|W_1p_1(c^2)+\ldots+W_sp_s(c^2)|}\right\}\frac{dc}{c^2},$$

очевидно, имеем

$$r\int_r^{\infty}\ln\frac{\|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\|}{|\mathfrak{g}(re^{i\varphi})\cdot\mathfrak{A}_c|}\frac{dc}{c^2} \leqslant L(r),$$

откуда следует, что

$$I_2(r) \leqslant L(r) + O(\ln r).$$

Будем оценивать $L(r)$. Фиксируем α, $0<\alpha<1$. Используя известное неравенство, являющееся континуальным аналогом неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, легко получаем

$$z\int_z^{\infty}\left\{\ln\frac{1}{|W_1p_1(c^2)+\ldots+W_sp_s(c^2)|}\right\}\frac{dc}{c^2}=$$

$$=\frac{1}{\alpha}z\int_z^{\infty}\left\{\ln\frac{1}{|W_1p_1(c^2)+\ldots+W_sp_s(c^2)|^{\alpha}}\right\}\frac{dc}{c^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha}\ln\left\{z\int_z^{\infty}\frac{1}{|W_1p_1(c^2)+\ldots+W_sp_s(c^2)|^{\alpha}}\frac{dc}{c^2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha}\ln\left\{2z\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dc}{|W_1p_1(c^2)+\ldots+W_sp_s(c^2)|^{\alpha}(1+c^2)}\right\},\quad z\geqslant 1.$$

Докажем, что при $0<\alpha<2^{-n}$ существует постоянная A, $0<A<\infty$, не зависящая от $W_1,\ldots,W_s$, такая, что при $|W_1|^2+\ldots+|W_s|^2=1$ выполняется

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dc}{|W_1p_1(c^2)+\ldots+W_sp_s(c^2)|^{\alpha}(1+c^2)}\leqslant A. \tag{II}$$

Тем самым будет доказано соотношение $L(z)=O(\ln z)$, а вместе с ним и $I_2(z)=O(\ln z)$.

Положим

$$W_1p_1(c^2)+\ldots+W_sp_s(c^2)=\beta_0+\beta_1c^2+\ldots+\beta_{n-1}c^{2n-2}.$$

В силу леммы I степени α_ν полиномов $p_\nu(t)$ удовлетворяют условию $0\leqslant\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_s=n-1$. Поэтому коэффициенты $\beta_{\alpha_1},\beta_{\alpha_2},\ldots,\beta_{\alpha_s}$ связаны с числами $W_1,W_2,\ldots,W_s$ линейным преобразованием с треугольной матрицей, составленной из коэффициентов полиномов $p_1,\ldots,p_s$. Детерминант этой матрицы равен произведению старших коэффициентов полиномов $p_1,\ldots,p_s$ и, следовательно, отличен от нуля. Поэтому из условия $|W_1|^2+\ldots+|W_s|^2=1$ следует, что

$$\max_{0\leqslant k\leqslant n-1}|\beta_k|\geqslant\delta>0, \tag{I2}$$

где δ не зависит от $W_1,\ldots,W_s$. Очевидно также, что

$$|W_s|\leqslant\gamma\,|\beta_{n-1}|, \tag{I3}$$

где γ, $0<\gamma<\infty$, не зависит от $W_1, \dots, W_s$.

При доказательстве (II) мы можем, не уменьшая общности, считать $W_s \neq 0$, иначе наша задача сведется к такой же, но с меньшим значением s. В силу (I3) из $W_s \neq 0$ следует $\beta_{n-1} \neq 0$.

Обозначим через $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ корни многочлена $\beta_0+\beta_1 c^2+\dots+\beta_{n-1} c^{2n-2}$, занумерованные в порядке неубывания модулей, и положим $|\lambda_k| = \rho_k$ $(k=1,\dots,n-1)$. Обозначая интеграл, стоящий в левой части (II), через $\mathcal{J}$, имеем

$$\mathcal{J} = \frac{1}{|\beta_{n-1}|^{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc}{\left\{\prod_{k=1}^{n-1} |c^2-\lambda_k|^{\alpha}\right\}(1+c^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\beta_{n-1}|^{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc}{\left\{\prod_{k=1}^{n-1} |c^2-\rho_k|^{\alpha}\right\}(1+c^2)}.$$

Применяя $n-1$ раз неравенство Буняковского, получим

$$\mathcal{J} \leqslant \frac{1}{|\beta_{n-1}|^{\alpha}} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc}{|c^2-\rho_1|^{2\alpha}(1+c^2)}\right\}^{1/2} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc}{\left\{\prod_{k=2}^{n-1}|c^2-\rho_k|\right\}(1+c^2)}\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\beta_{n-1}|^{\alpha}} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc}{|c^2-\rho_1|^{2\alpha}(1+c^2)}\right\}^{1/2} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc}{|c^2-\rho_2|^{4\alpha}(1+c^2)}\right\}^{1/4} \times$$

$$\times \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc}{\left\{\prod_{k=3}^{n-1}|c^2-\rho_k|^{4\alpha}\right\}(1+c^2)}\right\}^{1/4} \leqslant \dots \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\beta_{n-1}|^{\alpha}} \prod_{k=1}^{n-1} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc}{|c^2-\rho_k|^{2^k\alpha}(1+c^2)}\right\}^{2^{k}}. \tag{I4}$$

Далее нам потребуется следующая легко проверяемая оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dc}{|c^2-\rho|^{\varkappa}(1+c^2)} \leqslant \frac{\mathcal{B}}{\tilde{\rho}^{\varkappa}}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \infty, \ 0<\varkappa<\frac{1}{2}, \ \tilde{\rho} = \max(\rho, 1),$$

где $\mathcal{B}$, $0<\mathcal{B}<\infty$, – не зависящая от ρ постоянная.

Применяя эту оценку, из (I4) выводим неравенство

$$\mathcal{J} \leqslant \mathcal{D}\, |\beta_{n-1}|^{-\alpha} (\tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2 \cdots \tilde{\rho}_{n-1})^{-\alpha}, \tag{I5}$$

где $0 < D < \infty$ не зависит от $w_1, \dots, w_s$. Так как $\rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \dots \leqslant \rho_{n-1}$, то,в силу формул Виета, для любого h, $0 \leqslant h \leqslant n-2$, выполняется

$$C_{n-1}^{h} \rho_{n-1-h} \rho_{n-h} \cdots \rho_{n-2} \rho_{n-1} \geqslant |\beta_n| / |\beta_{n-1}|.$$

Поэтому

$$\tilde{\rho}_1 \tilde{\rho}_2 \dots \tilde{\rho}_{n-1} \geqslant \max_{0 \leqslant h \leqslant n-2} (\rho_{n-1-h} \rho_{n-h} \cdots \rho_{n-2} \rho_{n-1}) \geqslant$$

$$\geqslant \max_{0 \leqslant h \leqslant n-2} \frac{|\beta_h|}{|\beta_{n-1}| C_{n-1}^{h}} \geqslant 2^{-n+1} \max_{0 \leqslant h \leqslant n-2} (|\beta_h| / |\beta_{n-1}|).$$

Поскольку произведение $\tilde{\rho}_1 \dots \tilde{\rho}_{n-1}$ не меньше единицы, то мы заключаем, что

$$\tilde{\rho}_1 \dots \tilde{\rho}_{n-1} > 2^{-n+1} \max_{0 \leqslant h \leqslant n-1} (|\beta_h| / |\beta_{n-1}|).$$

Используя (I2), мы получаем неравенство

$$\tilde{\rho}_1 \dots \tilde{\rho}_{n-1} \geqslant 2^{-n+1} \delta / |\beta_{n-1}|,$$

откуда в силу (I5) вытекает

$$\gamma \leqslant D \, \delta^{-\alpha} \, 2^{(n-1)\alpha},$$

и тем самым соотношение (II) доказано.

В заключение заметим, что как показал М.Ф.Зуев [3] , условие ограниченности множества всех корней в теореме М.Б.Балка можно ослабить.

М.Ф.Зуев [3] доказал следующую теорему. Всякая целая полианалитическая функция $f(z)$ однозначно представима в виде

$$f(z) = f_1(z) \, \Pi(z),$$

где $f_1(z)$ – целая полианалитическая функция, имеющая лишь изолированные корни (их будем называть изолированными корнями функции $f(z)$), а $\Pi(z)$ – полианалитический полином, принимающий лишь вещественные значения и удовлетворяющий некоторым дополнительным условиям.

Из этой теоремы непосредственно следует, что требование ограниченности множества всех корней в теореме М.Б.Балка можно заменить требованием ограниченности множества изолированных корней.

ЛИТЕРАТУРА

I. М.Б.Балк. Целые полианалитические функции с ограниченным множеством нулей. Изв.АН Арм.ССР,матем., I, № 5 (1966),341-357.

2. А.А.Гольдберг. Некоторые вопросы теории распределения значений. В кн. Виттих "Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям", Физматгиз,М., 1960.

3. М.Ф.Зуев. О факторизации целых полианалитических функций. Изв. АН Арм.ССР, матем., 4, 1969 .

4. М.А.Евграфов. Аналитические функции. "Наука", М., 1965.

5. H.Cartan, Sur les zeros des combinaisons lineares de p fonctions holomorphes donnees, Mathematica, 7, 5-31, 1933.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ C^n.

Л.И.Ронкин

В работе Мартино [I] имеется следующая теорема.

ТЕОРЕМА I. Пусть $f(z_1, \dots, z_n)$ – целая функция первого порядка. Пусть, далее, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $C_1^{(\varepsilon)}$ и $C_2^{(\varepsilon)}$, что при всех вещественных $x_1, \dots, x_n$

$$|f(x_1, \dots, x_n)| \leqslant C_1^{(\varepsilon)} e^{\varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_j|},$$

а при всех комплексных $z_1, \dots, z_n$ и некоторых $\sigma_1 \geqslant 0, \dots, \sigma_n \geqslant 0$

$$|f(z_1, \dots, z_n)| \leqslant C_2^{(\varepsilon)} e^{\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon)|z_j|}.$$

Тогда существует такая константа $C_3^{(\varepsilon)}$, что при любых $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$

$$|f(z_1, \dots, z_n)| \leqslant C_3^{(\varepsilon)} \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon)|y_j| + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_j|\right\}.$$

Доказательство этой теоремы в [I] основано как на чисто аналитических соображениях, так и на некоторых фактах из развиваемой в [I] теории аналитических функционалов, т.е. функционалов над пространством целых функций.

Здесь мы докажем несколько усиленный вариант этой теоремы, используя лишь специфические методы теории целых функций. При этом мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$k = (k_1, \dots, k_n)$ – мультииндекс, $k! = k_1! \dots k_n!$,

$$\|k\| = k_1 + \dots + k_n, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \quad z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n},$$

$$\mathbb{I} = (1, \dots, 1), \quad \langle z, \xi \rangle = z_1 \xi_1 + \dots + z_n \xi_n .$$

Т Е О Р Е М А 2. Пусть $f(z_1, \dots, z_n)$ – целая функция нормального типа при порядке I. Пусть, далее для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $C_1^{(\varepsilon)}$ и $C_2^{(\varepsilon)}$, что при всех вещественных $x_1, \dots, x_n$

$$|f(x_1, \dots, x_n)| < C_1^{(\varepsilon)} e^{\varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_j|}, \tag{I}$$

а при всех вещественных $y_1, \dots, y_n$ и некоторых $\sigma_1 \geq 0, \dots, \sigma_n \geq 0$

$$|f(iy_1, \dots, iy_n)| \leq C_2^{(\varepsilon)} e^{\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon) |y_j|}. \tag{2}$$

Тогда существует такая константа $C_3^{(\varepsilon)}$, что при любых $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, n$,

$$|f(z_1, \dots, z_n)| \leq C_3^{(\varepsilon)} \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon) |y_j| + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_j| \right\}.$$

Доказательству этой теоремы предпошлем изложение некоторых, используемых в нем, результатов В.К.Иванова и автора.

Пусть

$$f(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k$$

– целая функция нормального типа при порядке I, а $\mathcal{F}(z)$ – функция, ассоциированная к $f(z)$ по Борелю, т.е.

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^{k+\mathbb{I}}} .$$

Известно, что

$$f(z) = \int_{\ell_1} \dots \int_{\ell_n} e^{\langle z, \xi \rangle} \mathcal{F}(\xi) \, d\xi_1 \dots d\xi_n , \tag{3}$$

где простые контуры $\ell_1, \dots, \ell_n$ таковы, что функция $\mathcal{F}(\xi)$ является аналитической, когда $\xi_j \in \ell_j$, или, когда ξ_j лежит вне контура ℓ_j, $j = 1, 2, \dots, n$. Обозначим через $C_f(\varphi)$ x) множество тех точек $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, $\nu \in R^n$, для которых функция $\mathcal{F}(z)$ является аналитической в области $\{z ; \operatorname{Re} z_j e^{-i\varphi_j} > \nu_j, j = 1, 2, \dots, n\}$. Справедливо следующее утверждение.

---

x) Множества $C_f(\varphi)$ также, как и вводимые далее множества $T_f(\varphi)$, впервые были рассмотрены В.К.Ивановым [2], см. также [3], [4].

Л Е М М А I. Множество

$$A=\{\nu;-\nu\in C_f(\varphi_1+\pi,\dots,\varphi_n+\pi)\}\cap C_f(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$$

не имеет внутренних точек.

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Примем для определенности $\varphi_1=\frac{\pi}{2},\dots,\varphi_n=\frac{\pi}{2}$ и предположим, что точка ν^0 является внутренней точкой множества A. Тогда при достаточно малом $\varepsilon>0$ функция $\mathcal{F}(z)$ будет аналитической в областях

$$\{z;\,\mathrm{Im}\, z_j>\nu_j^0-\varepsilon,\ j=1,\dots,n\}$$

и

$$\{z;\,\mathrm{Im}\, z_j<\nu_j^0+\varepsilon,\ j=1,\dots,n\},$$

а значит и в их объединении, являющемся трубчатой областью с основанием

$$B=\underset{j=1,\dots,n}{\{y;y_j<\nu_j^0+\varepsilon\}}\cup\underset{j=1,\dots,n}{\{y;y_j>\nu_j^0-\varepsilon\}}\qquad(y_j=\mathrm{Im}\, z_j).$$

Известно,x) что функция голоморфная в трубчатой области с некоторым основанием B продолжается голоморфно на трубчатую область, основанием которой является выпуклая оболочка области B. В рассматриваемом случае выпуклой оболочкой области B является все пространство R^n. Следовательно, функция $\mathcal{F}(z)$ – целая, что невозможно. Лемма доказана.

Введем теперь в рассмотрение множество $T_f(\varphi)$ тех точек $\nu\in R^n$, для которых при некоторой константе C_ν и всех $z_1\geqslant 0,\dots,z_n\geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\ln|f(z_1e^{i\varphi_1},\dots,z_ne^{i\varphi_n})|\leqslant C_\nu+\nu_1z_1+\dots+\nu_nz_n.$$

В работах В.К.Иванова [2], [3] и автора [4] было показано, что при любом $\varphi\in R^n$ имеет место равенство

$$\overline{T}_f(-\varphi)=C_f(\varphi).\tag{4}$$

x) См., например, [5].

Для доказательства теоремы 2 нам, наряду с этим равенством и леммой 1, понадобится также следующая лемма, доказанная в [3] при $n=2$ и в [4] при произвольном n.

ЛЕММА 2. Пусть функция $g(z)$ – аналитическая в поликруге $D=\{z;|z_j|<R_j;\ j=1,\dots,n\}$. Пусть, далее, лежащая на границе этого поликруга точка $z^0=(z_1^0,\dots,z_n^0)$ является особой для функции $g(z)$, и пусть P – множество тех значений индекса j, для которых $|z_j^0|<R_j$.

Тогда любая точка многообразия

$$D_0=\{z;\ z_{\substack{j\\ j\bar{\in} P}}=z_j^0\ ,\ |z_{\substack{j\\ j\in P}}|<R_j\}.$$

является особой точкой функции $g(z)$.

Пусть теперь $f(z)$ – функция, фигурирующая в условии теоремы 2. Из неравенства (I) согласно соотношению (4) и лемме 1 следует, что для любой точки $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, координаты которой принимают только значения 0 и π, множество $C_f(\varphi)$ определяется следующим образом

$$C_f(\varphi)=\{\nu;\ \nu_j\geqslant 0\ ,\quad j=1,\dots,n\}.$$

Следовательно, точка z может быть особой точкой ассоциированной функции $\mathcal{F}(z)$ только в том случае, когда хотя бы для одного значения индекса j $\operatorname{Re} z_j=0$. Далее, таким же образом, из неравенства (2) следует, что для любой точки φ, координаты которой принимают только значения $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$, имеет место вложение

$$\{\nu;\ \nu_j\geqslant \sigma_j\ ,\ j=1,\dots,n\}\subset C_f(\varphi).$$

Следовательно, никакая точка z, у которой при любом j $|y_j|>\sigma_j$, не может быть особой точкой функции $\mathcal{F}(z)$. Покажем теперь, что функция $\mathcal{F}(z)$ голоморфна в области D, являющейся декартовым произведением плоскостей z_j с разрезами вдоль отрезков мнимых осей $-\sigma_j\leqslant y_j\leqslant \sigma_j$. Действительно, из сказанного здесь об особых точках функции $\mathcal{F}(z)$ следует, что в области D особыми могут быть только точки z^0, имеющие непустое множество P тех значений индекса j, для которых $\operatorname{Re} z_j^0=0$ и $\operatorname{Im} z_j^0>\sigma_j$. Предположим, что одна из таких точек в самом деле является особой. Рассмотрим тогда поликруг

$$\{z;\, |z_j - z_j^0 - 1| < 1,\ _{j \in P}\ \ |z_j - i(1+\sigma_j) - R \operatorname{sign} y_j^0| < R\ _{j \bar{\in} P}\},$$

где R выбрано так, чтобы при $j \bar{\in} P$

$$|z_j^0 - i(\sigma_j + 1) - R \operatorname{sign} y_j^0| < R.$$

Функция $\mathcal{F}(z)$ очевидно голоморфна в этом полицилиндре, а точка z^0 является его граничной точкой. Тем самым выполнены условия леммы 2, применяя которую заключаем, что все точки z, для которых $z_j = z_j^0$ при $j \in P$ и $|z_j - i(1+\sigma_j) - R \operatorname{sign} y_j^0| < R$ при, $j \bar{\in} P$, являются особыми точками функции $\mathcal{F}(z)$. В частности, особой будет точка z с координатами $z_j = z_j^0$ при $j \in P$ и $z_j = i(\sigma_j + 1)$ при $j \bar{\in} P$, что противоречит отмечавшейся выше голоморфности функции в тех точках z, в которых $|\operatorname{Im} z_j| > \sigma_j$, $j = 1, \dots, n$. Следовательно, функция $\mathcal{F}(z)$ голоморфна в области $\mathbb{D}$.

Возьмем теперь в представлении (3) в качестве контуров ℓ_j границы прямоугольников $\{z_j;\, |x_j| < \varepsilon,\ |y_j| < \sigma_j + \varepsilon\}$. Это возможно ввиду голоморфности функции $\mathcal{F}(z)$ в области $\mathbb{D}$. Функция $f(z)$ оценится тогда следующим образом:

$$|f(\xi)| = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \left| \int_{\ell_1} \dots \int_{\ell_1} e^{\langle z, \xi \rangle} \mathcal{F}(\xi)\, d\xi_1 \dots d\xi_n \right| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot \max_{\xi_j \in \ell_j,\ j=1,\dots,n} e^{\operatorname{Re}\langle z, \xi \rangle} =$$

$$= \text{const} \cdot \exp\left\{\varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon)|y_j|\right\}.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. A. Martineau, Sur les fonctionelles analytiques et la transformation Forier. Borel, J. Analyse Math., 11, 1963, 1–163.

2. В.К.Иванов, Связь между ростом целой фукции многих переменных и распределением особенностей ассоциированной с ней функции. Матем. сб., 43, 1957.

3. В.К.Иванов, Характеристики роста целой функции и ее применение к суммированию двойных степенных рядов. Матем.сб. 47, 1959.

4. Л.И.Ронкин, Об одном свойстве расположения особенностей на границе полицилиндра и применении его к целым функциям многих переменных. ДАН СССР, 153, № 2, 1963.

5. Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ. ФМ, 1969.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ КОЛЬЦЕВЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Г.Р.Белицкий.

Пусть A – комплексная или вещественная, не обязательно коммутативная, алгебра, а T – ее эндоморфизм. Если $S=\{\lambda_j\}_j$ – произвольный набор собственных чисел T, отвечающих собственным векторам $x_j \in A$, соответственно, то число $\lambda=\prod_{j=1}^{m} \lambda_j^{n_j}$ будет собственным для T тогда и только тогда, если существует отличное от нуля произведение, в котором x_j встречается n_j раз (в коммутативном случае это означает просто, что $\prod_{j=1}^{m} x_j^{n_j} \neq 0$). В частности, если A – алгебра без делителей нуля, то множество собственных чисел является полугруппой. Обозначим в общем случае через $S_0(T)$ множество всех собственных чисел эндоморфизма T, а через $G_0(T)$ полугруппу, порожденную $S_0(T)$. Возникает вопрос об описании возможных систем образующих этой полугруппы.

Пусть $L \subset A$ – подпространство, инвариантное относительно T. Тогда T индуцирует оператор T_L в фактор-пространстве A/L (в частности, $T_0 = T$). Обозначим через $S_L(T)$ множество всех собственных чисел оператора T_L, а через $G_L(T)$ полугруппу, порожденную множеством $S_L(T)$. В частности, если $L=\{0\}$, то $S_L(T)=S_0(T), G_L(T)=G_0(T)$. Имеет место импликация

$$L_2 \subset L_1 \Longrightarrow S_{L_1}(T) \subset S_{L_2}(T) \qquad (I)$$

и, следовательно, $G_{L_1}(T) \subset G_{L_2}(T)$. Это последнее включение (и тем более включение в правой части импликации (I)) является, вообще говоря, строгим. В самом деле, пусть A – алгебра с нулевым умножением, $A = L' + L''$ – разложение в прямую сумму, а оператор T в A таков, что $T/L' = I$, $T/L'' = 0$. Тогда $G_0(T)=\{1\}, G_{L''}(T)=\{0\}$. Оказывается, однако, что для некоторых классов подпространств $L \subset A$ полугруппа $G_L(T)$ совпадает с $G_0(T)$, так что в качестве системы образующих полугруппы $G_0(T)$ можно взять подмножество $S_L(T)$.

Сейчас мы опишем класс подпространств с этим свойством.

Назовем алгебру R обобщенно-нильпотентной, если $\bigcap_{k=1}^{\infty} R^k = 0$. Имеет место

Т е о р е м а. Если инвариантное относительно эндоморфизма T подпространство $L \subset A$ содержится в квадрате обобщенно-нильпотентной инвариантной подалгебры $R \subset A$, то $G_L(T) = G_0(T)$.

С л е д с т в и е. Если R – обобщенно-нильпотентная алгебра без делителей нуля, то множество собственных чисел любого эндоморфизма T совпадает с полугруппой, порожденной множеством $S_{R^2}(T)$ собственных чисел оператора T_{R^2}, который оператор T индуцирует в фактор-пространстве R/R^2.

Обобщенная нильпотентность подалгебры $R \subset A$ является, вообще говоря, необходимым для равенства $G_L(T) = G_0(T)$. В самом деле, пусть A – алгебра ростков в нуле бесконечно-дифференцируемых функций от двух переменных, равных нулю при $x = 0$, а T –автоморфизм этой алгебры, действующий по правилу

$$(T\varphi)(\xi, \eta) = \varphi(\lambda\xi, \mu\eta), \quad 0 < \lambda < 1, \quad \mu > 1.$$

Фактор-пространство A/A^2 изоморфно двумерной плоскости, а T_{A^2} – линейный оператор в этой плоскости с собственными числами λ и μ. Следовательно, $G_{A^2}(T) = \{\lambda^n \mu^m\}_{n,m=1}^{\infty}$. В то же время, множество всех собственных чисел автоморфизма T есть множество всех положительных чисел. Чтобы это доказать, рассмотрим функцию:

$$\omega(\xi, \eta) = \begin{cases} \xi^\alpha \eta^\beta e^{-\frac{1}{\xi^\gamma \eta^\delta}}, & \xi, \eta > 0, \\ 0 & , \xi \leq 0 \vee \eta \leq 0, \end{cases}$$

где числа $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ таковы, что $\lambda^\gamma \mu^\delta = 1$. Тогда

$$T\omega = \lambda^\alpha \mu^\beta \omega.$$

Выбирая α и β, можно получить любое положительное число в качестве собственного значения эндоморфизма T. Если к тому же $\lambda\mu = 1$, то и замыкание полугруппы $G_{A^2}(T)$ не совпадет с замыканием полугруппы $G_0(T)$.

Доказательство теоремы опирается на следующее простое утверждение

Л е м м а. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – система представителей в R базиса Гамеля пространства R/R^2. Тогда для всякого $x \in R$ и любого $k > 0$ найдется такой полином $P(t_1, \dots, t_n)$ степени k, что $x - P(e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_n}) \in R^{k+1}$ для некоторых $e_{\alpha_1} \dots e_{\alpha_n}$.

Доказательство теоремы. Пусть $L \subset R^2 \subset A$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} R^k = 0$. Так как $G_{R^2}(T) \subset G_L(T) \subset G_0(T)$, то достаточно показать, что $G_{R^2}(T) \supset G_0(T)$. Пусть λ – собственное число, T – и x – соответствующий собственный вектор: $Tx = \lambda x$. Если $x \bar{\in} R^2$, то класс эквивалентности x по R^2 отличен от нуля, и тогда $\lambda \in S_{R^2}(T) \subset G_{R^2}(T)$. Пусть теперь $x \in R^2$. В силу обобщенной нильпотентности найдется такой номер $K \geq 2$, что $x \in R^K$, $x \bar{\in} R^{K+1}$. Допустим, для простоты, что $K = 2$ (общий случай рассматривается аналогично). Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – система представителей в R базиса Гамеля фактор-пространства R/R^2. Тогда, в силу леммы, вектор x допускает представление

$$x = \sum_{i,j=1}^{m} x_{\alpha_i \alpha_j} e_{\alpha_i} e_{\alpha_j} + \theta, \quad \theta \in R^3$$

для некоторых $\{e_{\alpha_i}\}_{i=1}^{m}$, а равенство $Tx = \lambda x$ влечет

$$\sum_{i,j=1}^{m} x_{\alpha_i \alpha_j} T e_{\alpha_i} T e_{\alpha_j} = \lambda \sum x_{\alpha_i \alpha_j} e_{\alpha_i} e_{\alpha_j} + \theta_1, \quad \theta_1 \in R^3. \qquad (2)$$

Обозначим через $\mathcal{M}(I)$ пространство квадратных матриц размером IxI, у которых лишь конечное число элементов отлично от нуля. Далее, пусть $\mathcal{M}_{R^2} \subset \mathcal{M}(I)$ – подпространство таких матриц $(a_{\alpha,\beta})$, что

$$\sum a_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta \in R^3.$$

Непосредственным подсчетом проверяется, что равенство (2) влечет равенство

$$T'_{R^2} X T_{R^2} = \lambda X \qquad (\operatorname{mod} \mathcal{M}_{R^2}), \qquad (3)$$

где $X = (x_{\alpha_i \alpha_j})$, T'_{R^2} – транспонированная матрица к матрице T_{R^2} оператора T_{R^2} в базисе $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Так как $x \bar{\in} R^3$, то $X \bar{\in} \mathcal{M}_{R^2}$. Поэтому из (3) следует, что λ является собственным числом оператора $T'_{R^2} \cdot T_{R^2}$ в пространстве $\mathcal{M}(I)$. Как известно, собственные числа такого оператора являются произведениями собственных чисел оператора T_{R^2}. Теорема доказана.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ

И.Е.Овчаренко

Рассматриваются линейные множества Φ_1, Φ_2 и линейные операторы A_1, A_2, переводящие Φ_1, Φ_2 в себя. Пусть на алгебраическом тензорном произведении $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ задана эрмитова билинейная форма $\langle \varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2 \rangle$, в которой операторы $\hat{A}_1 = A_1 \otimes I_2$ и $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$, задаваемые равенствами $\hat{A}_1(\varphi \otimes \psi) = A_1\varphi \otimes \psi$; $\hat{A}_2(\varphi \otimes \psi) = \varphi \otimes A_2\psi$. Операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ формально перестановочные симметрические операторы. При определенных условиях операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ могут быть расширены до самосопряженных операторов, коммутирующих между собой. Установлению условий, обеспечивающих такую возможность посвящено большое число работ, подробное изложение которых приводится в книге Ю.М.Березанского [I].

С другой стороны, из работ А.П.Кальдерона, Р.Пепинского [2], Р.Б.Зархиной [3] и В.Рудина [4] следует, что существуют формально перестановочные симметрические операторы, которые не могут быть расширены до самосопряженных операторов, коммутирующих между собой ни при каком расширении пространства. Ниже указывается ситуация, при которой форма $\langle\ ,\ \rangle$ может быть разложена в прямую ортогональную сумму форм более простой структуры, а оператор $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$ допускает аналогичное разложение в ортогональную сумму симметрических операторов, являющихся его частями. Полученное разложение позволяет получить самосопряженные коммутирующие расширения операторов $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ из самосопряженных расширений частей оператора $\hat{A}_2$.

I. В дальнейшем будем предполагать, что существует такой элемент $g \in \Phi_2$, что при любых $\varphi \in \Phi_1$ и $\psi \in \Phi_2$ справедливо неравенство

$$\langle \varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle \leqslant C_\psi \langle \varphi \otimes g, \varphi \otimes g \rangle. \qquad (I)$$

Введем в рассмотрение "ограничения" формы $\langle\ ,\ \rangle$. Пусть h элемент пространства $\mathfrak{H}_g = \Phi_1 \otimes g$, пополнения множества $\Phi_1 \otimes g$ по форме $\langle\ ,\ \rangle$, $\varphi_n \otimes g$ – последовательность элементов из $\Phi_1 \otimes g$, сходящаяся в $\mathfrak{H}_g$ к h. На множестве Φ_2 введем структуру скалярного произведения, полагая

$$\langle \Psi_1, \Psi_2 \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \varphi_n \otimes \Psi_1,\ \varphi_n \otimes \Psi_2 \rangle. \qquad (2)$$

В силу (I) правая часть (2) не зависит от выбора последовательности $\varphi_n \otimes g \to h$. Гильбертово пространство, получаемое при пополнении Φ_2 согласно (2) будем называть " ограничением" формы $\langle\ ,\ \rangle$.

Т Е О Р Е М А I. Пусть на алгебраическом тензорном произведении множеств Φ_1 и Φ_2 задана неотрицательная эрмитова билинейная форма $\langle \varphi_1 \otimes \Psi_1, \varphi_2 \otimes \Psi_2 \rangle$, удовлетворяющая соотношению(I). Пусть далее на Φ_1 определен линейный оператор A_1, переводящий его в себя ,такой, что:

а) оператор $\hat{A}_1 = A_1 \otimes I_2$ симметрический в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, полученном при пополнении множества $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ по форме $\langle\ ,\ \rangle$.

в) оператор $A_{1,g}$ – сужение оператора $\hat{A}_1$ на подпространство $\Phi_1 \otimes g$ в существенном самосопряженный оператор, спектр которого дискретен и прост.

Тогда оператор $\hat{A}_1 = A_1 \otimes I_2$ самосопряженный в $\mathfrak{H}$.

Оператор V, задаваемый на элементах вида $\varphi \otimes \Psi \in \Phi_1 \otimes \Phi_2$ равенством

$$V[\varphi \otimes \Psi] = \sum \langle \varphi \otimes g, h_k \rangle (h_k \otimes \Psi) \qquad (3)$$

(h_k – собственные векторы $A_{1,g}$, $\| h_k \| = 1$ определяет изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}$ на пространство $\sum \oplus \mathfrak{H}_k$ – прямую ортогональную сумму ограничений формы $\langle\ ,\ \rangle$, определяемых элементами h_k. x)

Если $\hat{E}_1$ – спектральная функция оператора $\bar{\hat{A}}_1$, то подпространства $\hat{E}_1(\Delta)\mathfrak{H}$ переходят при отображении V в подпро-

x) Нам будет удобно отождествлять пространства $\mathfrak{H}_k$,введенные при помощи равенства (2) с гильбертовым пространством, являющимся замыканием формальных линейных комбинаций символов $h_k \otimes \Psi$ по метрике, вводимой соотношением (2).

странства вида $\sum \oplus \mathfrak{h}_k$, суммирование производится по всем k , для которых соответствующие собственные значения λ_k принадлежат Δ .

Д О К А З А Т Е Л Ь С Т В О. Не нарушая общности, можно считать, что форма $\langle\ ,\ \rangle$ строго положительна. Общий случай сводится к этому стандартным путем перехода к факторпространству. Пусть при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, $\varphi \otimes g = \lim_{n\to\infty} (A_1 - \lambda I)\varphi_n \otimes g$.

С помощью соотношения (I) убеждаемся в справедливости равенства $\varphi\otimes\Psi = \lim_{n\to\infty}(A_1 - \lambda I)\varphi_n \otimes \Psi$. Поэтому оператор $A_{1,\Psi}$ -сужение оператора $A_1 \otimes I_2$ на подпространство $\mathfrak{h}_\Psi = \overline{\Phi_1 \otimes \Psi}$ в существенном самосопряженный при любом Ψ из Φ_2 и множество $[\hat{A}_1 - \lambda(I_1 \otimes I_2)][\Phi_1 \otimes \Phi_2]$ плотно в $\mathfrak{h}$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Отсюда следует, что оператор $\hat{A}_1$, самосопряженный в $\mathfrak{h}$ x).

Введем оператор $J_\Psi : \mathfrak{h}_g \to \mathfrak{h}$, определяя его на элементах вида $\varphi \otimes g$ равенством

$$J_\Psi[\varphi\otimes g] = \varphi\otimes\Psi$$

и продолжая затем по линейности и непрерывности. Справедливо соотношение

$$V\hat{R}_\lambda[\varphi\otimes\Psi] = VJ_\Psi R_{\lambda,g}[\varphi\otimes g],$$

$R_{\lambda,g}$ - резольвента оператора $A_{1,g}$.

Для доказательства (4) представим элемент $\varphi\otimes g$ в виде $\varphi\otimes g = \lim_{n\to\infty}(A_1 - \lambda I)\varphi_n \otimes g$, тогда

$$\varphi\otimes\Psi = \lim_{n\to\infty}(A_1 - \lambda I)\varphi_n\otimes\Psi$$

и, следовательно,

$$\hat{R}_\lambda[\varphi\otimes\Psi] = \lim_{n\to\infty}\varphi_n\otimes\Psi.$$

С другой стороны

$$R_{\lambda,g}[\varphi\otimes g] = \lim_{n\to\infty}[\varphi_n\otimes g], \quad J_\Psi R_{\lambda,g}[\varphi\otimes g] = \lim_{n\to\infty}\varphi_n\otimes\Psi.$$

Таким образом,

$$\hat{R}_\lambda[\varphi\otimes\Psi] = J_\Psi R_{\lambda,g}[\varphi\otimes g].$$

---

x) В работе (5) показано, что если оператор $\hat{A}_1$ имеет " a priori " самосопряженные расширения в $\mathfrak{h}$, то из самосопряженности операторов $A_{1,\Psi}$ при любом $\Psi \in \Phi_2$ следует самосопряженность $\hat{A}_1$.

Законность предельных переходов обеспечивается соотношением (I). Применяя к обеим частям последнего равенства оператор V получаем (4)

Интегрируя (4) по контуру, охватывающему интервал Δ вещественной оси, и используя представление Рисса

$$E(\Delta) = -\frac{1}{2\pi i}\int R_\mu \, d\mu ,$$

получаем

$$V\hat{E}_1(\Delta)[\varphi \otimes \Psi] = \sum \langle \varphi \otimes g,\ h_k \rangle\, h_k \otimes \Psi .$$

Суммирование ведется по всем k, для которых $\lambda_k \in \Delta$. Если Δ_k - интервал, содержащий точно одну точку λ_k, то

$$\hat{E}_1(\Delta_k)[\varphi \otimes \Psi] = \langle \varphi \otimes g,\ h_k \rangle\ V^{-1}[h_k \otimes \Psi] .$$

По определению операторов J_Ψ и V

$$V J_\Psi h_k = h_k \otimes \Psi .$$

Возьмем любую последовательность $\varphi_n^{(k)} \otimes g$, такую, что $\varphi_n^{(k)} \otimes g \longrightarrow h_k$. Учитывая (5) имеем

$$\|V^{-1}[h_k \otimes \Psi]\|^2 = \|J_\Psi h_k\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n^{(k)} \otimes \Psi\|^2 .$$

С другой стороны в силу (2)

$$\|h_k \otimes \Psi\|^2 = \lim \|\varphi_n^{(k)} \otimes \Psi\|^2 .$$

Таким образом:

$$\|V^{-1}[h_k \otimes \Psi]\|^2 = \|h_k \otimes \Psi\|^2 . \tag{6}$$

В пространстве $\sum \oplus \mathfrak{h}_k$

$$\|V[\varphi \otimes \Psi]\|^2 = \sum |\langle \varphi \otimes g,\ h_k \rangle|^2 \|h_k \otimes \Psi\|^2 . \tag{7}$$

В силу ортогональности спектральной функции $\hat{E}_1$ вектора вида $V^{-1}[h_i \otimes \Psi_1]$ и $V^{-1}[h_j \otimes \Psi_2]$ при $i \neq j$ и любых $\Psi_1, \Psi_2 \in \Phi_2$ ортогональны.

Следовательно

$$\|\varphi \otimes \Psi\|^2 = \sum \|\hat{E}_1(\Delta_k)[\varphi \otimes \Psi]\|^2 =$$

$$= \sum |\langle \varphi \otimes g, h_k \rangle|^2 \| V^{-1}[h_k \otimes \Psi] \|^2 = \sum |\langle \varphi \otimes g, h_k \rangle|^2 \| h_k \otimes \Psi \|^2. \quad (8)$$

Равенства (7) и (8) доказывают изометрию отображения V.

2. Рассмотрим теперь пару формально перестановочных операторов $\hat{A}_1 = A_1 \otimes I_2$ и $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$. Относительно оператора $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$ будем предполагать его симметричность в $\mathfrak{H}$, $\hat{A}_1$ – удовлетворяет условиям теоремы I.

Определим операторы $A_{2,k}$, действующие в $\mathfrak{H}_k$, равенством $A_{2,k}(h_k \otimes \Psi) = h_k \otimes A_2\Psi$, Ψ – любой элемент из Φ_2, и продолжаем $A_{2,k}$ по линейности на формальные конечные суммы элементов вида $\sum c_j (h_k \otimes \Psi_j)$. Теорема I приводит к следующей реализации оператора $I_1 \otimes A_2$.

ТЕОРЕМА 2. При условиях теоремы I оператор V осуществляет унитарную эквивалентность оператора $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$ и оператора $\sum \oplus A_{2,k}$.

Ортогональность пространств $\mathfrak{H}_k$ приводит к следующему описанию дефектного пространства оператора $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathfrak{N}_{\lambda,k}$ дефектные пространства операторов $A_{2,k}$ в $\mathfrak{H}_k$, отвечающие невещественному λ, $\mathfrak{N}_\lambda$ дефектное подпространство оператора $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$, тогда

$$\mathfrak{N}_\lambda = \sum \oplus V^{-1} \mathfrak{N}_{\lambda,k}. \quad (9)$$

Из представления (9) непосредственно вытекает следующая формула для дефектных чисел оператора $\hat{A}_2$

$$(n, m) = \left(\sum n_k, \sum m_k\right). \quad (10)$$

(n,m) – дефектные числа оператора $\hat{A}_2$, (n_k, m_k) – дефектные числа оператора $A_{2,k}$.

ТЕОРЕМА 4. Для того, чтобы оператор $\bar{\hat{A}}_2 = I_1 \otimes A_2$ был самосопряженным в $\mathfrak{H}$ необходимо и достаточно, чтобы при любом k операторы $A_{2,k}$ были в существенном самосопряженными операторами. В этом случае спектральные семейства операторов $\hat{A}_1$ и $\bar{\hat{A}}_2$ перестановочны.

Доказательство следует из формулы (IO) теорем 2,3 и получающегося из них равенства

$$\hat{E}_2(\Delta)=\sum \oplus V^{-1} E_{2,k}(\Delta), \qquad (11)$$

где $\hat{E}_2(\Delta)$ – спектральная функция оператора $\bar{\hat{A}}_2$,

$E_{2,k}$ – спектральные функции замыканий операторов $A_{2,k}$.

3. Построения пунктов 1,2 могут быть применены к исследованию простоты оператора $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$.

Л Е М М А. Пусть пространство $\mathfrak{h}$ распадается в прямую ортогональную сумму $\mathfrak{h} = \sum \oplus \mathfrak{h}_k$, и симметрический в $\mathfrak{h}$ оператор A распадается в прямую сумму своих симметрических ограничений A_k на подпространства $\mathfrak{h}_k$, тогда для простоты оператора A необходимо и достаточно, чтобы все операторы A_k были простыми.

Приведенная лемма и разложения теорем 1 и2 позволяют сформулировать следующий критерий простоты оператора $I_1 \otimes A_2$, именно:

При соблюдении условий теоремы 1 необходимым и достаточным условием простоты оператора $\hat{A}_2 = I_1 \otimes A_2$ является простота всех операторов $A_{2,k}$.

Известно, что простой симметрический оператор с индексами дефекта (1; 1) является вещественным относительно некоторой инволюции, поэтому если операторы $A_{2,k}$ имеют дефектные числа (1; 1), то $I_1 \otimes A_2$ является вещественным в некоторой инволюции (прямой сумме инволюций операторов $A_{2,k}$).

З А М Е Ч А Н И Е. И.Е.Луценко [6] было показано, что простой симметрический оператор, индексы дефекта которого больше единицы, может не быть вещественным ни для какой инволюции пространства. Опираясь на это, можно построить симметрические операторы вида $I_1 \otimes A_2$, которые не являются вещественными ни в какой инволюции и,тем не менее, как показывается ниже, могут быть расширены до самосопряженных операторов, спектральные семейства которых перестановочны со спектральным семейством оператора $\overline{A_1 \otimes I_2}$.

4. Перейдем к построению коммутирующих самосопряженных расширений, полученных реализацией операторов $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$. Пусть $\tilde{\mathfrak{h}}_k \supseteq \mathfrak{h}_k$ гильбертовы пространства, в которых действуют операторы $\hat{\bar{A}}_{2,k}$ самосопряженные расширения операторов $A_{2,k}$. Образуем тензорные произведения $\{\alpha h_k\} \otimes \tilde{\mathfrak{h}}_k$ гильбертовых пространств $\{\alpha h_k\}$ и $\tilde{\mathfrak{h}}_k$. Единичные операторы, действующие в пространствах $\{\alpha h_k\}$ и $\mathfrak{h}_k$ будем обозначать соответс-

венно через $1_{k,1}$ и $1_{k,2}$. Теорема 2 приводит к следующей реализации операторов $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$.

$$\tilde{A}_1 = \sum \oplus (\lambda_k 1_{k,1} \otimes 1_{k,2}) = V \hat{A}_1 V^{-1},$$

$$\tilde{A}_2 = \sum \oplus (1_{k,1} \otimes A_{2,k}) = V \hat{A}_2 V^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 5. Операторы $\sum \oplus \{\lambda_k 1_{k,1} \otimes 1_{k,2}\}$ и $\sum \oplus \{1_{k,1} \otimes \tilde{A}_{2,k}\}$, действующие в пространстве $\sum \oplus \{\alpha h_k\} \otimes \tilde{\mathfrak{H}}$, являются самосопряженными расширениями операторов $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, коммутирующими между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как видно из структуры операторов $\sum \oplus \{\lambda_k 1_{k,1} \otimes 1_{k,2}\}$ и $\sum \oplus \{1_{k,1} \otimes \tilde{A}_{2,k}\}$ при любом $\mu \subset \operatorname{Im} \mu \neq 0$ их резольвенты перестановочны между собой. Отсюда стандартным путем следует перестановочность спектральных семейств.

СЛЕДСТВИЕ. При условиях теорем I и2 формально перестановочные симметрические операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ могут быть расширены до самосопряженных операторов, коммутирующих между собой.

В случае, если у всех операторов $A_{2,k}$ дефектные числа равные (в том числе может быть и бесконечные) теоремы I,2,5 в сочетании с результатами работы [7] позволяют получить аналитические формулы для функций

$$W(\lambda; \mu; u) = (\hat{R}_\lambda^{(1)} \hat{R}_\mu^{(2)} u, u),$$

где $u \in \mathfrak{H}$, $\hat{R}_\lambda^{(1)}$, $\hat{R}_\mu^{(2)}$ – резольвенты коммутирующих самосопряженных расширений операторов $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. В случае если оператор $A_{1,g}$ обладает непрерывным спектром, справедливы аналоги основных теорем, однако вместо дискретной суммы гильбертовых пространств приходится рассматривать прямой интеграл гильбертовых пространств по некоторой мере.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Разложения операторов $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, задаваемые теоремами I и 2, позволяют в ряде случаев исследовать вопрос, когда операторы $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ имеют в совокупности простой спектр.

В заключение выражаю глубокую благодарность М.Г.Крейну и

Г.Е.Шилову за внимание к работе.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ю.М.Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев, "Наукова думка", 1965.

2. A.P.Calderon, R.Pepinsky, On the Phase of Forier Coefficients for Positive Definite Real Functions, Computing Methods and the Phase Problems in X-ray Analysis, 339-348, 1952.

3. Р.Б.Зархина, " О двумерной проблеме моментов". ДАН СССР, 124, № 4, 1959.

4. W.Rudin, On Extensions Problem for Positive Definite Functions, Illinois Journal of Mathematics, 3, 1963.

5. А.Г.Костюченко, Б.С.Митягин, Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах. Труды Моск. Матем. об-ва, 9, 1959.

6. И.Е.Луценко, "Об инволюциях линейных операторов". НДВШ, ф,м.науки, 1958, № 6.

7. М.Г.Крейн, Ш.Н.Саакян, "О некоторых новых результатах в теории резольвент-эрмитовых операторов". ДАН СССР, 169, №6, 1966.

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

О ГИПЕРФИНИТНЫХ ФАКТОРАХ ТИПА Ш

В.Я.Голодец

В [5] Р.Пауэрс ввел естественное понятие гиперфинитного фактора. Для факторов типа II_1 это понятие совпадает с понятием аппроксимативно конечного фактора, который систематически изучали Ф.Муррей и Дж.фон Нейман [I]. В частности, они доказали, что коммутант для аппроксимативно конечного фактора типа II_1 является аппроксимативно конечным фактором типа П.

В настоящей статье доказано, что коммутант для гиперфинитного фактора типа Ш также является гиперфинитным фактором (типа Ш). При доказательстве этого факта существенно используются результаты И.М.Гельфанда и М.А.Наймарка о позитивных функционалах на C^*-алгебрах [2]. Наш метод доказательства применим к гиперфинитным факторам любого типа, и, в частности, к факторам типа II_∞.

Отсюда следует, что все гиперфинитные факторы типа П – изоморфны между собой. Статья с доказательством этого факта послана для опубликования.

§ I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

I. О ФАКТОРАХ ТИПА П и Ш. Слабозамкнутое симметрическое кольцо $\mathfrak{M}$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H, содержащее единичный оператор I, называется неймановской алгеброй. Через $\mathfrak{M}'$ принято обозначать коммутант $\mathfrak{M}$, т.е. множество всех ограниченных линейных операторов в H, перестановочных с каждым оператором из $\mathfrak{M}$. Отметим следующие свойства неймановской алгебры $\mathfrak{M}$: I) $\mathfrak{M}''=\mathfrak{M}$, 2) $\mathfrak{M}$ замкнута относительно сильной топологии [2], [3].

Неймановская алгебра называется фактором, если ее центр состоит только из операторов вида λI, где λ – комплексное число, или $\mathfrak{M}'\cap\mathfrak{M}=\{\lambda I\}$. Хорошо известно [2],[3], что на элементах алгебры $\mathfrak{M}$ можно определить линейный однородный позитивный функционал T_z, называемый следом, обладающий свойствами: I) Если P – проектор из $\mathfrak{M}$ и $T_r(P)=0$, то $P=0$ (точность), 2) $T_r(A)=T_r(U^*AU)$, где $A\in\mathfrak{M}$, а U – унитарный оператор из $\mathfrak{M}$ и 3) Если A_n – последовательность эрмитовых положительно определенных операторов из $\mathfrak{M}$, и если ряд $\sum_n A_n$ сильно сходится к $A\in\mathfrak{M}$, то $T_r(A)=\sum_{n=1}^{\infty}T_r(A_n)$ (нормальность).

Если след, как функция проекторов из $\mathfrak{M}$, принимает все значения из замкнутого интервала $[0,\alpha]$, где $0<\alpha<\infty$, то принято считать, что $\mathfrak{M}$ имеет тип II_1; если след, как функция проекторов, может принимать все значения из $[0,\infty]$, то $\mathfrak{M}$ имеет тип II_∞; и $\mathfrak{M}$ имеет тип III, если T_r принимает только значения 0 и ∞.

Два проектора P_1 и P_2, принадлежащие фактору $\mathfrak{M}$, называют эквивалентными, если $T_{r_\mathfrak{M}}(P_1)=T_{r_\mathfrak{M}}(P_2)$. Для эквивалентных проекторов P_1 и P_2 существует частично изометрический оператор $U\in\mathfrak{M}$, для которого $U^*U=P_1$ и $UU^*=P_2$.

Пусть элементы фактора $\mathfrak{M}$ действуют в гильбертовом пространстве H. Если P – проектор из $\mathfrak{M}$, то можно рассмотреть кольца $\mathfrak{M}_{PH}$ и $\mathfrak{M}'_{PH}$, являющиеся сужением $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ на PH.

Оказывается $\mathfrak{M}_{PH}$ совпадает с подкольцом $P\mathfrak{M}P$ кольца $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{M}'_{PH}$ – с $P\mathfrak{M}'$. Отсюда можно вывести, что $\mathfrak{M}_{PH}$ и $\mathfrak{M}'_{PH}$ – факторы в гильбертовом пространстве PH и $(\mathfrak{M}_{PH})'=\mathfrak{M}'_{PH}$. Более того, $\mathfrak{M}'_{PH}$ алгебраически изоморфно $\mathfrak{M}'$. При этом под алгебраическим изоморфизмом двух факторов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ понимается взаимно однозначное отображение $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}_2$, сохраняющее инволюцию и алгебраические операции.

Далее, для всякого вектора $\xi\in H$ можно рассмотреть линейное многообразие $\mathfrak{M}\xi$, т.е. множество всех векторов $m\xi$, где $m\in\mathfrak{M}$. Замыкание $\mathfrak{M}\xi$ относительно нормы в H обозначим через $[\mathfrak{M}\xi]$. Если $P_{[\mathfrak{M}\xi]}$ – проектор на $[\mathfrak{M}\xi]$, то очевидно, $P_{[\mathfrak{M}\xi]}\in\mathfrak{M}'$.

В настоящей статье мы будем изучать факторы типа III в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Доказательства, результатов, изложенных в этом разделе. можно найти в [2], [3].

2. ПОНЯТИЕ ГИПЕРФИНИТНОГО ФАКТОРА. Пусть $\{n_i;\, i=1,2,\dots\}$ –последовательность натуральных чисел, причем $n_i<n_{i+1}$, $n_i\to\infty$ при $i\to\infty$ и n_i является делителем n_{i+1}. Фактор $\mathfrak{M}$ называется гиперфинитным фактором класса $\{n_i,\, i=1,2.\}$, если в $\mathfrak{M}$ существует возрастающая последовательность факторов M_i типа I_{n_i}, такая, что слабое (сильное) замыкание $M=\bigcup_{i=1}^{\infty}M_i$ сов-

падает с $\mathfrak{M}$ [5]. (Заметим, что гиперфинитный фактор класса $\{n_i;\ i=1,2,\ldots\}$ является гиперфинитным фактором любого другого класса [6]; в дальнейшем нам этот факт не понадобится)

Лемма 2.I. Пусть N – фактор типа I_n, а N_1 его подфактор типа I_{n_1}. Если N_2 коммутант N_1 в N, то N_2 – фактор типа I_{n/n_1} и N порожден факторами N_1 и N_2 ($N \approx N_1 \otimes N_2$).

В заключение этого раздела приведем несколько фактов о позитивных линейных функционалах на факторах типа I_n.

Пусть M – фактор типа I_n ($n<\infty$) и F – линейный функционал на M, причем $F(I)=1$, где I – единица M. Функционал F называется позитивным, если $F(a^*a)\geqslant 0$ для $a\in M$. Известно, что всякий позитивный линейный функционал F на M определяет, с точностью до унитарной эквивалентности, представление π фактора M в конечномерном гильбертовом пространстве H, причем $F(a)=(\pi(a)\xi,\xi)$, где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в H, а ξ – вектор из H. Более того, оказывается, что $\pi(M)\xi=H$, т.е. ξ является циклическим вектором. Описанная конструкция принадлежит И.М.Гельфанду и М.А.Наймарку [2].I)

Линейный позитивный функционал F_1 на M называется подчиненным функционалу F ($F_1<F$), если существует положительное число λ такое, что $\lambda F-F_1$ также позитивный функционал на M. Далее, линейный функционал F_2, не обязательно позитивный, называется подчиненным позитивному функционалу F, если F_2 есть линейная комбинация с комплексными коэффициентами позитивных функционалов, подчиненных F.

Лемма 2.2. (И.М.Гельфанд, М.А.Наймарк)
Пусть $a\to\pi(a)$ – циклическое представление фактора M типа I_n в гильбертовом пространстве H, определенное позитивным функционалом F, а ξ – циклический вектор. Тогда всякий линейный функционал F_1, подчиненный F, имеет вид

$$F_1(a) = (\pi(a)B\xi,\xi), \tag{2.I}$$

где B – ограниченный оператор в пространстве H, переста-

I) Здесь излагаются результаты о позитивных функционалах применительно к факторам типа I_n ($n<\infty$) в той форме, в которой они будут использованы в дальнейшем. Эти результаты, однако, установлены для C^*- алгебр.

новочный с каждым оператором $\pi(a)$, $a\in M$, или иначе $B\in(\pi(M))'$. Обратно, всякий такой оператор B определяет по формуле (2.I) позитивный функционал F_B , подчиненный F

Соответствие $F_B \sim B$ взаимно однозначно.

По поводу доказательства леммы см. [2] , § I9.

§ 2. ГИПЕРФИНИТНЫЕ ФАКТОРЫ ТИПА Ш.

В этом параграфе будет доказано, что коммутант гиперфинитного фактора типа Ш (см. § I, р.2) также является гиперфинитным фактором типа Ш.

I. ЦИКЛИЧЕСКИЙ ВЕКТОР ДЛЯ ФАКТОРА ТИПА Ш. Напомним, что если $\mathfrak{M}$ - фактор типа Ш в гильбертовом (сепарабельном) пространстве H , то его коммутант $\mathfrak{M}'$ - также фактор типа Ш.

Факторы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно называются пространственно изоморфными, если существует линейная изометрия H_1 на H_2 , которая изоморфно отображает $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}_2$.

Л е м м а I.I. Пусть $\mathfrak{M}$ - фактор типа Ш в сепарабельном гильбертовом пространстве H , а P - проектор из $\mathfrak{M}$. Тогда факторы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_{PH}$ в пространствах H и PH соответственно пространственно изоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как мы отмечали в р. I §I, $(\mathfrak{M})_{PH}$ алгебраически изоморфно кольцу $P\mathfrak{M}P$, а $(\mathfrak{M}')_{PH}=(\mathfrak{M})'_{PH}$ изоморфно кольцу $P\mathfrak{M}'$. Далее, поскольку $T_{z_{\mathfrak{M}}}(I)=T_{z_{\mathfrak{M}}}(P)=\infty$ (см. определение фактора типа Ш р. I § I), то существует частично изометрический оператор $U\in\mathfrak{M}$ со свойствами $U^*U=I$ и $UU^*=P$. Очевидно, U осуществляет изометрическое отображение H на PH , при этом $\mathfrak{M}$ отображается на $U\mathfrak{M}U^*$. Нетрудно проверить, что $U\mathfrak{M}U^*= P\mathfrak{M}P$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Пусть выполнены предположения леммы I.I. Если, дополнительно, $\mathfrak{M}$ - гиперфинитный фактор, то $(\mathfrak{M})_{PH}$ - также гиперфинитный фактор, изоморфный $\mathfrak{M}$.

Если $\mathfrak{M}$ - фактор в гильбертовом пространстве H , то вектор $\xi\in H$ условимся называть циклическим для $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ при выполнении следующего условия: $[\mathfrak{M}\xi]=[\mathfrak{M}'\xi]= H$.

Л е м м а I.2. В предположении, что выполнены условия леммы I.I, существует циклический вектор для фактора $\mathfrak{M}$ и для $\mathfrak{M}'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\eta\in H$. Тогда проекторы $P=P_{[\mathfrak{M}'\eta]}$ и $P'=P_{[\mathfrak{M}\eta]}$ принадлежат $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, соответственно,(см. конец р. I § I). Рассмотрим факторы $(\mathfrak{M})_{PP'H}$ и $(\mathfrak{M}')_{PP'H}=(\mathfrak{M})'_{PP'H}$. Имеем $[(\mathfrak{M}_{PP'H})\eta]=[P\mathfrak{M}PP'\eta]=[P'P\mathfrak{M}\eta]=$ $=P'P[\mathfrak{M}\eta]=P'PH$(здесь мы пользуемся соотношением $P_\eta=P'_\eta=P'P_\eta=\eta$ и перестановочностью P' и $\mathfrak{M}$). Аналогично, $[\mathfrak{M}'_{PP'H}\eta]=P'PH$. Таким образом, $\eta\in PP'H$ является циклическим вектором для $(\mathfrak{M})_{PP'H}$ и $(\mathfrak{M})'_{PP'H}$. Можно показать, с помощью соображений, использованных при доказательстве леммы I.I, что факторы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_{PP'H}$ пространственно изоморфны. Следовательно, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ также обладают циклическим вектором. Лемма доказана.

Установим некоторые свойства циклического вектора.

Т е о р е м а I. Пусть $\mathfrak{M}$ - фактор типа Ш в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а ξ - циклический вектор ($\xi\in H$) для $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, т.е. $[\mathfrak{M}\xi]=[\mathfrak{M}'\xi]=H$. Вектор ξ обладает следующими свойствами: I) Если $a\in\mathfrak{M}$ и $(a^*a\xi,\xi)=0$, то $a=0$; 2) Если $\{a_n\}$ равномерно ограниченная по норме последовательность операторов из $\mathfrak{M}$, то a_n сильно сходится к нулю при $n\to\infty$, тогда и только тогда, когда $\|a_n\xi\|\to 0$ при $n\to\infty$. 3) Пусть M - подфактор $\mathfrak{M}$ типа I_n $(n<\infty)$, то линейно независимым элементам a Тогда и из отвечают линейно независимые векторы $a\xi$ и $b\xi$; более того, линейное пространство $M\xi$ имеет размерность n^2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Очевидно, достаточно доказать, что из $(P\xi,\xi)=0$, где P - проектор из $\mathfrak{M}$, вытекает $P=0$. Если $a'\in\mathfrak{M}'$, то $(Pa'\xi,a'\xi)=(P\xi,a'^*a'\xi)$. Но $|(P\xi,a'^*a'\xi)|\leqslant\|P\xi\|\cdot\|a'^*a'\xi\|$, а поскольку $\|P\xi\|^2=(P\xi,P\xi)=(P\xi,\xi)=0$, то $(Pa'\xi,a'\xi)=0$ для любого $a'\in\mathfrak{M}'$. Так как $[\mathfrak{M}'\xi]=H$, то из непрерывности $(Pf,f)=0$ для любого $f\in H$. Следовательно, .Доказательство свойства I) закончено.

2) Доказательство свойства 2) не требует новых соображений по сравнению с доказательством свойства I), поэтому мы его опустим.

3) Пусть a и b - линейно независимые элементы из $M\subset\mathfrak{M}$, а $\lambda a\xi+\mu b\xi=0$, где λ и μ - комплексные числа. Тогда $(\lambda a+\mu b)\xi=0$., поэтому $((\lambda a+\mu b)^*(\lambda a+\mu b)\xi,\xi)=0$. Из свойства I) получаем, что $(\lambda a+\mu b)^*(\lambda a+\mu b)=0$, т,е. $\lambda a+\mu b=0$. Но это противоречит предположению. Таким образом, $a\xi$ и $b\xi$ линейно независимы, а пространство $M\xi$ имеет размерность n^2.

Свойство 3) доказано.

2. О КОММУТАНТЕ $\mathfrak{M}'$ ДЛЯ ГИПЕРФИНИТНОГО ФАКТОРА $\mathfrak{M}$ ТИПА Ш. В этом разделе будет доказан основной результат статьи.

Т е о р е м а 2. Коммутант гиперфинитного фактора типа Ш также является гиперфинитным фактором типа Ш.

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму.

Л е м м а 2.I. Пусть $\mathfrak{M}$ – гиперфинитный фактор типа Ш в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а $\{M_i\}$ -возрастающая последовательность факторов типа I_{n_i} $(n_i < \infty)$, порождающая $\mathfrak{M}$ (см. р. 2 § I). Если ξ – циклический вектор для $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, то положим $H_i = M_i \xi$. Обозначим через M_i' коммутант M_i в пространстве H_i. Тогда M_i' – фактор типа I_{n_i}, а каждый оператор из M_i' может быть расширен до оператора в пространстве H, принадлежащего $\mathfrak{M}'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из свойства 3) теоремы I следует, что $\dim H_i = n_i^2$. Поскольку M_i – фактор типа I_{n_i}, следовательно M_i' – также фактор типа I_{n_i}. Итак, первое утверждение леммы доказано.

Пусть $b_1 \in M_1'$ продолжим его до оператора b_2 в пространстве H_2. Поскольку $M_1 \subset M_2$, то обозначим через N_2 коммутант M_1 в M_2. Тогда N_2 – фактор типа I_{m_2}, где $m_2 = n_2/n_1$ (см.лемму 2.I. § I). Пусть G_2 – подгруппа группы всех унитарных операторов N_2, которая состоит из m_2^2 линейно независимых элементов. (В конце доказательства мы построим пример такой группы для произвольного натурального n). Тогда $H_2 = \sum_{i=1}^{m_2^2} g_i H_1$, где $g_i \in G_2$ и $g_1 = e$ (e – единица G_2). Определим теперь b_2 на $g_i H_1$ $(i = 1,\dots,m_2^2)$, положив $b_2 = g_i b_1 g_i^{-1}$ на $g_i H_1$. Покажем, что $b_2 \in M_2'$. Для этого достаточно доказать, что b_2 коммутирует со всеми операторами из G_2. Итак, докажем, что $g_k b_2 = b_2 g_k$ $(k = 1,\dots,m_2^2)$. Если $\eta \in g_i H_1$, то

$$g_k b_2 \eta = g_k g_i b_1 g_i^{-1} \eta = g_s b_1 (g_i^{-1} \eta),$$

где $g_s = g_k g_i$, а $g_i^{-1}\eta \in H_1$. С другой стороны

$$b_2 g_k \eta = g_s b_1 g_s^{-1} g_k \eta = g_s b_1 (g_s^{-1} g_k \eta) = g_s b_1 (g_i^{-1} \eta).$$

Следовательно, $g_k b_2 \eta = b_2 g_k \eta$ $(\eta \in g_i H_1)$. Так как любой вектор v из H_2 есть линейная комбинация векторов из

$g_i H_1$ $(i=1,\dots,m_2^2)$, то $g_k b_2 v = b_2 g_k v$ и $g_k b_2 = b_2 g_k$.

Аналогично поступая, можно продолжить b_2 до оператора b_3 в пространстве H_3, причем $b_3 \in M_3'$ и т.д. В результате мы построим последовательность $\{b_i\}_1^\infty$, где b_i – оператор в H_i, являющийся продолжением оператора $b_1 \in M_1'$ и $b_i \in M_i'$. Обозначим через $\bar{b}_i$ оператор в пространстве H, равный b_i на H_i и нулю на ортогональном дополнении к H_i в H. Последовательность операторов $\{\bar{b}_i\}_{i=1}^\infty$ равномерно ограничена по норме, поэтому существует подпоследовательность $\{\bar{b}_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ слабо сходящаяся к некоторому линейному ограниченному оператору b в пространстве H. Поскольку $b_j \eta = b_i \eta$ для $j > i$ и $\eta \in H_i$, то $b\eta = b_i \eta$. Но тогда b – единственный оператор, к которому последовательность $\{\bar{b}_i\}_{i=1}^\infty$ сходится слабо, благодаря тому, что $[\bigcup_{i=1}^\infty H_i] = H$. Оператор b назовем каноническим продолжением оператора $b_1 \in M_1'$. Так как ограничение b на H_i совпадает с $b_i \in M_i'$, а замыкание по норме $\bigcup_{i=1}^\infty H_i$ есть H, то $b \in \mathfrak{M}'$. Таким образом, второе утверждение леммы также доказано.

Построим для фактора M_n типа I_n ($n = 2,3,\dots$) подгруппу G_n группы всех унитарных операторов в M_n, которая состоит из n^2 линейно независимых элементов. Так как M_n изоморфен полной матричной алгебре $n \times n$ над комплексным полем, то в качестве генераторов G_n можно взять образы следующих матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где ε – первообразный корень из единицы степени n. Очевидно также, что $AB = \varepsilon BA$. Группа G_n, построенная описанным способом, будет группой лишь по модулю корней n-ой степени из единицы. Из доказательства леммы 2.I заключаем, что это ограничение не существенно для наших целей.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть выполнены все предположения леммы 2.I. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_i'$ ($i = 1,2,\dots$) всех операторов из $\mathfrak{M}'$, которые строятся как продолжение операторов из M_i' методом, обсужденным при доказательстве леммы 2.I. Понятно, что $\mathfrak{M}_i'$ – фактор типа I_{n_i} и $\mathfrak{M}_i' \subset \mathfrak{M}_{i+1}'$ $(i = 1,2,\dots)$.

Докажем, что слабое замыкание $\bigcup_{i=1}^\infty \mathfrak{M}_i'$ совпадает с $\mathfrak{M}$. Пусть a' – произвольный оператор из $\mathfrak{M}'$. Рассмотрим функционал $F_{a'}(m)$ на операторах m из M_i ($i = 1,2,\dots$):

$$F_a(m) = (am\xi, \xi),$$

где ξ – циклический вектор для $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$. Функционал $F_{a'}$ подчинен (см. р. 2 § I) функционалу F на операторах из M_i, который определяется следующим образом: $F(m) = (m\xi, \xi)$, где $m \in M_i$. (Это следует, например, из теоремы I (3).) Согласно лемме 2.2 § I существует оператор $a_i' \in M_i'$, для которого

$$F_{a'}(m) = (a_i' m\xi, \xi) \qquad (m \in M_i)$$

и, следовательно, на операторах m из M_i

$$((a' - a_i')m\xi, \xi) = 0. \tag{2.I}$$

Согласно лемме 2.I всякий оператор из M_i' можно каноническим способом расширить до оператора в пространстве H, принадлежащего $\mathfrak{M}'$. Подобное расширение для оператора a_i' обозначим, по-прежнему, через a_i'. Тогда $a_i' \in \mathfrak{M}_i'$. Фиксируем натуральное число $i_0 > 1$. Для всякого $j > i_0$ получаем, что при $m_1, m_2 \in M_{i_0} \subset M_j$

$$((a' - a_j')m_1\xi, m_2\xi) - (m_2^*(a' - a_j')m_1\xi, \xi) - ((a' - a_j')m_2^* m_1\xi, \xi) = 0. \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) означает, что последовательность операторов a_j' из $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_i'$ слабо сходится к оператору $a \in \mathfrak{M}'$ для векторов из $\mathfrak{M}_\xi^{i_0}$. Поскольку $[\mathfrak{M}\xi] = H$, то слабое замыкание $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_i'$ совпадает с $\mathfrak{M}'$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

I. F.Murray, J.von Neumann, On Rings of Operators, Ann.Math., 44, 716-808, 1943.

2. М.А.Наймарк. Нормированные кольца, М, I956.

3. J.Dixmier, Les algebres d'operateurs dan l'espase hilbertienne. Gauthier.Villars, Paris, 1957.

4. И.Е.Сигал. Некоммутативное обобщение абстрактного интегрирования. Математика (сб.переводов) 6:I (I962) 65-I3I

5. R.Powers, Representation of Uniformly Hyperfinite Algebres and their Associated von Neumann Rings, Ann.Math., 86, N 1, 138-171, 1967.

6. В.Я.Голодец. Об аппроксимативно конечных группах преобразований УМН. 24, вып. 4 (1969).

ТРУДЫ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

О ФАКТОРАХ ТИПА II_1 СО СВОЙСТВОМ Г

В.Я.Голодец, А.М.Степин

Одна из центральных проблем теории колец операторов в гильбертовом пространстве - проблема классификации факторов типа II_1.

Ф.Муррей и Дж.фон Нейман [2] в 1943г. доказали, что существуют два класса алгебраически не изоморфных факторов типа II_1: аппроксимативно конечные (гиперфинитные, по терминологии Ж.Диксимье [7]) и не аппроксимативно конечные (не гиперфинитные). Более того, они установили, что все аппроксимативно конечные факторы алгебраически изоморфны между собой. Однако вопрос об изоморфизме не гиперфинитных факторов долго оставался не выясненным. Лишь в 1963 году Дж.Шварц [4] доказал, что существуют два не изоморфных не гиперфинитных фактора типа II_1, причем один из них обладает, а второй не обладает свойством Г, инвариантом, введенным Мурреем и фон Нейманом [2]. Совсем недавно С.Сакаи [I] построил два примера не изоморфных не гиперфинитных фактора типа II_1 со свойством Г.

В настоящей статье мы докажем, что существуют, по крайней мере, пять не изоморфных не гиперфинитных факторов типа II_1 со свойством Г. Основные результаты этой статьи были известны ее авторам и до появления работы [I]. Появление этой работы заставило нас поторопиться с публикацией. x)

Статья состоит из двух параграфов. В § I изложены предварительные результаты. По существу этот параграф является кратким обзором по данному вопросу. В § 2 сформулированы наши четыре инварианта и построены пять не изоморфных не гиперфинитных факторов со свойством Г.

x) После того, как была написана статья, авторы узнали о работе I.Dixmier et E.C.Lance, Inventiones math. 7, 226-234, 1969, в которой рассматриваются близкие вопросы.

§ I. ГИПЕРФИНИТНЫЕ И НЕ ГИПЕРФИНИТНЫЕ ФАКТОРЫ.

В этом параграфе излагаются вспомогательные результаты.

I. НЕЙМАНОВСКАЯ КОНСТРУКЦИЯ ФАКТОРОВ ТИПА II_1. Напомним, что фактором $\mathfrak{M}$ называется слабо (сильно) замкнутое симметрическое кольцо операторов в гильбертовом пространстве H, центр которого состоит только из операторов вида λI, где I - единичный оператор в H, а λ - число. В настоящей статье предполагается, что пространство H - сепарабельно Если $\mathfrak{M}$ - фактор типа II_1 по Муррею и фон Нейману, то на элементах из $\mathfrak{M}$ определен линейный, позитивный функционал $T_{\tau_{\mathfrak{M}}}$, называемый относительным следом (или просто следом), обладающий свойствами [8],[9] :

I. $T_\tau(I) = 1$ (нормируемость)

2.Если -проектор из $\mathfrak{M}$ и $T_\tau(P) = 0$, то $P = 0$(точность)

3. $T_\tau(A) = T_\tau(U^* A U)$, где $A \in \mathfrak{M}$, а U - произвольный унитарный оператор из $\mathfrak{M}$.

4. Если A_n - последовательность эрмитовых положительно определенных операторов из $\mathfrak{M}$ и если ряд $\sum A_n$ сильно сходится к оператору $A \in \mathfrak{M}$, то $T_\tau(A) = \sum_n T_\tau(A_n)$ (нормальность).

Можно показать, что из свойств I - 4 вытекает свойство

5. $T_\tau(AB) = T_\tau(BA)$, где $A, B \in \mathfrak{M}$.

Факторы $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ называются алгебраически изоморфными, если существует $*$ - изоморфизм φ кольца $\mathfrak{M}_1$ на $\mathfrak{M}_2$, причем $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$, $\varphi(AB) = \varphi(A) \cdot \varphi(B)$; $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$, где $A, B \in \mathfrak{M}$, а λ - константа. Оказывается φ непрерывен относительно слабой (сильной) топологии в $\mathfrak{M}$ и

$$T_{\tau_{\mathfrak{M}_1}}(A) = T_{\tau_{\mathfrak{M}_2}}(\varphi(A)) \qquad (A \in \mathfrak{M}).$$

В настоящей статье рассматривается вопрос об описании факторов типа II_1 с точностью до алгебраического изоморфизма.

Один из стандартных способов построения факторов типа II_1, принадлежащий Муррею и фон Нейману [2], состоит в следующем:

Пусть G - счетная дискретная группа. Рассмотрим гильбертово пространство $\ell_2(G)$ комплексно значных функций $f(g)$ на G со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \sum_{g \in G} f_1(g) \bar{f}_2(g).$$

Определим в $\ell_2(G)$ операторы правого и левого регулярного представления группы G

$$(R_{g_0}f)(g)=f(gg_0) \qquad (g_0\in G), \tag{I.I}$$

$$(L_{g_0}f)(g)=f(g_0^{-1}g). \tag{I.2}$$

Если каждый класс сопряженных элементов группы G, кроме тривиального, содержит бесконечное число элементов, то операторы L_g и R_g порождают, соответственно, факторы $\mathfrak{M}_e(G)$ и $\mathfrak{M}_z(G)$ типа II_1 в пространстве $\ell_2(G)$, причем $\mathfrak{M}_e(G)=\mathfrak{M}_z'(G)$ и $\mathfrak{M}_e'(G)=\mathfrak{M}_z(G)$, где через $\mathfrak{M}'$ мы, как и обычно, обозначаем коммутант $\mathfrak{M}$ (т.е. множество всех линейных ограниченных операторов в $\ell_2(G)$, перестановочных с каждым оператором из $\mathfrak{M}$).

Пусть $f_{g_0}(g)$ - функция из $\ell_2(G)$, равная единице при $g=g_0$ и нулю при $g\neq g_0$. Любопытно отметить, что если $T\in\mathfrak{M}(G)$, то

$$T_{z\mathfrak{M}}(T)=(Tf_g,f_g)=(Tf_e,f_e), \tag{I.3}$$

где e - единица группы G, а

$$T_{z\mathfrak{M}}(T^*T)=\sum_{g\in G}|(Tf_e,f_g)|^2.$$

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ - фактор типа II_1 в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Относительно нормы

$$[\![Q]\!]=T_{z\mathfrak{M}}(Q^*Q)^{1/2} \tag{I.4}$$

$\mathfrak{M}$ становится предгильбертовым пространством. Пополнение $\mathfrak{M}$ по этой норме обозначим через $H(\mathfrak{M})$. $H(\mathfrak{M})$ может содержать и неограниченные операторы B, действующие в H, которые присоединены к $\mathfrak{M}$, причем $T_{z\mathfrak{M}}(B^*B)<+\infty$ [7]. Напомним, что неограниченный оператор B в H называется присоединенным к фактору $\mathfrak{M}$, если каждая ограниченная функция от B принадлежит $\mathfrak{M}$.

В заключение раздела приведем примеры дискретных счетных групп, регулярное представление которых порождает фактор типа II_1: I) G_1 - группа всех перестановок счетного числа предметов, причем каждый элемент из G_1 переставляет лишь конечное число предметов. Заметим, что G_1 - возрастающая последовательность конечных симметрических групп. 2) G_2 -свободная группа с двумя образующими b_1 и b_2. 3) $G_3=G_2\otimes G_1$ и 4) $G_4=\overset{\infty}{\underset{i=1}{\otimes}} G_2^{(i)}$ - неполное прямое произведение счетного числа экземпляров групп G_2 .

2. ГИПЕРФИНИТНЫЕ И НЕ ГИПЕРФИНИТНЫЕ ФАКТОРЫ

Определение 2.I. Фактор $\mathfrak{M}$ типа II_1 в сепарабельном гильбертовом пространстве H называется гиперфинитным, или аппроксимативно конечным, если существует возрастающая последовательность факторов $\mathfrak{M}_i$ $(i=1,2,\ldots)$, где $\mathfrak{M}_i\subset\mathfrak{M}_{i+1}$, типа I_{n_i} $(n_i<\infty)$ такая, что слабое замыкание $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\mathfrak{M}_i$ есть $\mathfrak{M}$. В противном случае фактор $\mathfrak{M}$ называется не гиперфинитным, или не аппроксимативно конечным.

Муррей и фон Нейман [2] доказали, что все аппроксимативно конечные факторы алгебраически изоморфны. Более того, они доказали, что если в определении 2.I предполагать, что $\mathfrak{M}_i$ есть прямая конечная сумма факторов типа I_n $(n<\infty)$ и $\mathfrak{M}_i\subset\mathfrak{M}_{i+1}$, то фактор, порожденный $\mathfrak{M}_i$ $(i=1,2,\ldots)$, по-прежнему будет гиперфинитным. Следовательно, фактор $\mathfrak{M}(G_1)$, построенный в р.I является гиперфинитным.

Покажем, что факторы $\mathfrak{M}(G_i)$ $(i=2,3,4\ldots)$ уже не будут гиперфинитными. Для этого нам понадобятся новые понятия.

Дискретная группа G называется допустимой, если она обладает Банаховым средним, т.е. на $\ell_\infty(G)$ существует линейный функционал $\Phi(x(g))=\int x(g)dg$, $x(g)\in\ell_\infty(G)$ со свойствами:

I. $\Phi(\alpha x+\beta y)=\alpha\Phi(x)+\beta\Phi(y)$ (α,β - комплексные числа)

2. $\Phi(x)\geq 0$, если $x(g)\geq 0$ для всех $g\in G$.

3. $\Phi(x(gh))=\Phi(x(g))$.

4. $\Phi(I)=1$.

Известно, что G_2 , свободная группа с двумя образующими, не является допустимой [6] . Более того, поскольку всякая подгруппа допустимой группы допустима, то группы G_3 и G_4 , рассмотренные в конце р. I, так же не являются допустимыми, так как они содержат в качестве подгруппы группу G_2 .

Определение 2.2. Фактор $\mathfrak{M}$ типа II_1 обладает свойством "Q ", если существует допустимая подгруппа G группы всех унитарных операторов $\mathfrak{M}$, порождающая $\mathfrak{M}$. В этом случае G называется допустимым генератором $\mathfrak{M}$.

Свойство " Q " ввели Х.Чода и М.Ичиго [5]. Если фактор обладает свойством " Q " то он также обладает свойством " P ", которое впервые изучал Дж.Шварц [4]. Для наших целей достаточно рассмотрения свойства " Q ".

Нетрудно убедиться, что свойство " Q " есть инвариант относительно алгебраического изоморфизма алгебр. Всякий гиперфинитный фактор обладает свойством " Q ". Оказывается, факторы $\mathfrak{M}_e(G)$ и $\mathfrak{M}_z(G)$ тогда и только тогда обладают свойством " Q ", когда группа G допустима [4], [5].

Поскольку группы G_i $(i=2,3,4)$ не являются допустимыми, то факторы $\mathfrak{M}(G_i)$ не аппроксимативно конечны.

3. О СВОЙСТВЕ Γ. В этом разделе мы сформулируем свойство Γ, инвариант, введенный Мурреем и фон Нейманом [2] и докажем, что факторы $\mathfrak{M}(G_i)$ $(i=3,4)$ обладают этим свойством.

О п р е д е л е н и е 3.1. Фактор $\mathfrak{M}$ типа II_1 обладает свойством Γ, если для любого конечного множества элементов $a_1,\dots,a_m$ из $\mathfrak{M}$ и любого числа $\varepsilon>0$ существует унитарный оператор $v\in\mathfrak{M}$, для которого

$$[\![a_i v - v a_i]\!] = [\![v^* a_i v - a_i]\!] < \varepsilon \quad (i = 1,\dots,m) \tag{3.1}$$

и $$T_z(v) = 0.$$

О п р е д е л е н и е 3.2. Фактор $\mathfrak{M}$ типа II_1 обладает свойством $\Gamma\mathcal{L}$, если существует последовательность унитарных операторов $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $v_n\in\mathfrak{M}$ и $T_z(v_n)=0$ $(n=1,2,\dots)$, таких, что

$$\lim_{n\to\infty}[\![a v_n - v_n a]\!] = \lim_{n\to\infty}[\![v_n^* a v_n - a]\!] = 0 \tag{3.2}$$

для каждого $a\in\mathfrak{M}$, кроме того, v_n слабо сходится к нулю при $n\to\infty$. Последовательность $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ с такими свойствами назовем $\Gamma\mathcal{L}$ - последовательностью для фактора $\mathfrak{M}$.

Свойство $\Gamma\mathcal{L}$ есть, очевидно, перефразировка свойства $\mathcal{L}$ Пуканского [3] применительно к факторам типа II_1. Понятно, что свойства Γ и $\Gamma\mathcal{L}$ - инварианты относительно алгебраического изоморфизма.

Отметим, что если фактор $\mathfrak{M}$ типа II_1 обладает свойством $\Gamma\mathcal{L}$, то он обладает и свойством Γ. Если же он не обладает свойством Γ, то он, очевидно, не обладает и свойством $\Gamma\mathcal{L}$.

Л е м м а 3.1. Всякий гиперфинитный фактор обладает свойством $\Gamma\mathcal{L}$.

(По поводу доказательства см. [4]).

С л е д с т в и е. Фактор $\mathfrak{M}(G_3)=\mathfrak{M}(G_2)\otimes\mathfrak{M}(G_1)$ обладает свойством "$\Gamma\mathcal{L}$".

Действительно, всякая $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность для аппроксимативно конечного фактора $I\otimes\mathfrak{M}(G_1)$ является $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательностью для $\mathfrak{M}(G_3)$.

Л е м м а 3.2. Фактор $\mathfrak{M}(G_4)$ обладает свойством "$\Gamma\mathcal{L}$".

Д о к а з а т е л ь с т в о. G_4 есть, по определению, неполное прямое произведение счетного числа групп G_2: $G_4=\overset{\infty}{\underset{i=1}{\otimes}} G_2^{(i)}$. Пусть b_1 и b_2 – генераторы G_2. Обозначим

$$b_{i,n}=\underbrace{1\otimes\ldots\otimes 1}_{n-1}\otimes b_i\otimes 1\otimes\ldots \qquad (i=1,2;\ n=1,2,\ldots)$$

Докажем, что $\{L_{b_{i,n}}\}_{n=1}^{\infty}$ есть $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность для $\mathfrak{M}_e(G_4)$. Во-первых, из результатов р. I $Tr(L_{b_{i,n}})=0$ $(i=1,2;\ n=1,2,\ldots)$ (см. (I.3). Далее, свойство (3.2) достаточно проверить лишь для генераторов фактора $\mathfrak{M}(G_4)$, а значит и генераторов группы G_4. Но для $a=L_{b_{j,n}}$ $(j=1,2;\ n=1,2,\ldots$ (3.2) следует из самого определения G_4 как неполного прямого произведения групп G_2. Простая проверка показывает, что слабый $\lim\limits_{n\to\infty} L_{b_{i,n}}=0$. Лемма доказана.

4. ФАКТОРЫ ТИПА II_1, НЕ ОБЛАДАЮЩИЕ СВОЙСТВОМ Γ.

В этом разделе докажем, что фактор $\mathfrak{M}(G_2)$ свойством Γ не обладает.[2].

Л е м м а 4.I. Пусть G – счетная дискретная группа, каждый сопряженный класс которой, кроме e (e – единица G), содержит бесконечное число элементов. Пусть G обладает следующими свойствами: (a) существует множество $F\subseteq G$, для которого (a_1) найдется такое $c_1\in G$, что

$$F\cup c_1Fc_1^{-1}=G-\{e\},$$

(a_2) найдется такое $c_2\in G$, что множества F, $c_2Fc_2^{-1}$ и $c_2^{-1}Fc_2$ дизъюнктны.

Обозначим через $\mathfrak{M}(G)$ фактор, порожденный операторами левого (правого) регулярного представления G (см. (I.I) и (I.2)). Если B – оператор, действующий в $\ell_2(G)$, присоединенный к $\mathfrak{M}(G)$ и обладающий свойствами

$$(b)\quad Tr_{\mathfrak{M}}(B^*B)=1,\quad Tr_{\mathfrak{M}}(B)=0,$$

то существует число η $(>\frac{I}{I4})$, не зависящее от B, и такое, что

$$\max_{i=1,2} [\![B - L_{c_i} B L_{c_i}^{-1}]\!] \geqslant \eta. \qquad (4.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы проводится параллельно доказательству леммы 6.2.I [2] . В конце настоящего раздела мы приведем доказательство аналогичной леммы.

С л е д с т в и е (лемма 6.2.I [2]). Пусть группа G обладает всеми свойствами, перечисленными в предыдущей лемме. Если U – унитарный оператор из $\mathfrak{M}(G)$ и $T_2(U) - O$, то для числа η (> I/I4)

$$\max_{i=1,2} \{ [\![U^* L_{c_i} U - L_{c_i}]\!] \} \geqslant \eta. \qquad (4.2)$$

В качестве примера, иллюстрирующего лемму возьмем группу G_2 с двумя образующими b_1 и b_2 . Если через F обозначить множество всех слов из G_2, оканчивающихся на b_1^k , где $k = \pm 1$, $\pm 2, \ldots$, а в качестве c_1 и c_2 леммы взять b_1 и b_2 , то все условия леммы выполнены. Теперь из следствия заключаем, что $\mathfrak{M}(G_2)$ не обладает свойством Γ (см. [2]), а следовательно и свойством $\Gamma\mathcal{L}$. Поскольку $\mathfrak{M}(G_3)$ и $\mathfrak{M}(G_4)$ – факторы со свойством $\Gamma\mathcal{L}$ (р.3), то $\mathfrak{M}(G_2)$ не изоморфен ни $\mathfrak{M}(G_3)$, ни $\mathfrak{M}(G_4)$.

В заключение раздела приведем доказательство леммы Л. Пуканского [3] , которая является полезной модификацией леммы 6.I.2 [2] .

Л е м м а 4.2. Пусть G – дискретная счетная группа, а E –подмножество G . Предположим, что существует подмножество $F \subset E$ и два элемента g_1 и $g_2 \in G$ со свойствами:

(i) $F \cup g_1 F g_1^{-1} = E$,

(ii) $F, g_2 F g_2^{-1}, g_2^{-1} F g_2$

содержатся в E и взаимно дизъюнктны.

Если $f(g)$ – функция из $\ell_2(G)$, причем

$$\Big(\sum_{g \in G} | f(g_i g g_i^{-1}) - f(g) |^2 \Big)^{1/2} < \varepsilon,$$

то

$$\Big(\sum_{g \in E} | f(g) |^2 \Big)^{1/2} < K\varepsilon,$$

где K = I4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если X подмножество G , то положим

$$\nu(X) = \sum_{g\in X} |f(g)|^2.$$

Тогда из неравенства Шварца

$$\varepsilon > \Big(\sum_{g\in G} |f(g_1 g g_1^{-1}) - f(g)|^2\Big)^{1/2} \geq |\nu(g_1 F g_1^{-1})^{1/2} - \nu(F)^{1/2}|.$$

Если обозначить $s = \nu(E)^{1/2}$, то

$$|\nu(g_1 F g_1^{-1}) - \nu(F)| = |\nu(g_1 F g_1)^{1/2} + \nu(F)^{1/2}| \cdot |\nu(g_1 F g_1^{-1})^{1/2} - \nu(F)^{1/2}| < 2s\varepsilon,$$

откуда выводим, что $\nu(g_1 F g_1^{-1}) < \nu(F) + 2s\varepsilon$, следовательно

$$s^2 \leq \nu(g_1 F g_1^{-1}) + \nu(F) < 2(\nu(F) + s\varepsilon)$$

и

$$\nu(F) > \frac{s^2}{2} - s\varepsilon.$$

Поскольку

$$\Big(\sum_{g\in G} |f(g_2 g g_2^{-1}) - f(g)|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{g\in G} |f(g_2(g_2^{-1} g g_2) g_2^{-1}) - f(g_2^{-1} g g_2)|^2\Big)^{1/2},$$

то из аналогичных соображений получаем

$$|\nu(g_2 F g_2^{-1}) - \nu(F)| < 2s\varepsilon$$

и

$$|\nu(g_2^{-1} F g_2) - \nu(F)| < 2s\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\nu(g_2 F g_2^{-1}) > \nu(F) - 2s\varepsilon > \frac{s^2}{2} - 3s\varepsilon$$

и

$$\nu(g_2^{-1} F g_2) > \frac{s^2}{2} - 3s\varepsilon.$$

Теперь

$$s^2 = \nu(E) \geq \nu(F) + \nu(g_2^{-1} F g_2) + \nu(g_2 F g_2^{-1}) > \frac{3}{2}s^2 - 7s\varepsilon$$

и

$$s < 14\varepsilon.$$

Лемма доказана.

§ 2. НЕ ГИПЕРФИНИТНЫЕ ФАКТОРЫ СО СВОЙСТВОМ Г.

В настоящем параграфе будет показано, что существует пять не гиперфинитных не изоморфных факторов типа II_1 со свойством Г

I. О ФАКТОРАХ СО СВОЙСТВОМ $Б_1$. Сформулируем наш первый инвариант.

Определение I.I. Пусть $\mathfrak{M}$ – не гиперфинитный фактор типа II_1 со свойством $\Gamma\mathcal{L}$. Условимся считать, что $\mathfrak{M}$ обладает свойством $Б_1$ (в честь Ф.А.Березина), если для произвольного числа $\varepsilon>0$ и любого конечного набора $\Gamma\mathcal{L}$ —последовательностей (см. определение 3.2: § I) $\{\vartheta_k^i\}$ $(i=1,\dots,N)$ существует натуральное число K такое, что при $k>K$ для множества ϑ_k^i $(i=1,\dots,N)$ существует подфактор $\mathfrak{M}_m\subset\mathfrak{M}$ типа I_m такой, что

$$\sup_{b\in\mathfrak{M}_m}[\![b-\vartheta_k^i]\!]<\varepsilon \qquad (k(>k) \qquad i=1,\dots,N). \tag{I.I}$$

В частности, фактор $\mathfrak{M}$ обладает свойством $Б_1$, если всякая $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность асимптотически принадлежит гиперфинитному подфактору $\mathfrak{N}$ фактора $\mathfrak{M}$, т.е. если $\{\vartheta_k\}$ - $\Gamma\mathcal{L}$ - – последовательность, то для $\varepsilon>0$ найдется натуральное K такое, что при $k>K$

$$\sup_{b\in\mathfrak{N}}[\![b-\vartheta_k]\!]<\varepsilon. \tag{I.I'}$$

Так как след – инвариант относительно алгебраического изоморфизма, то свойство $Б_1$ так же – инвариант при алгебраическом изоморфизме. В дальнейшем удобно подфактор $\mathfrak{N}$ с описанными свойствами называть $\Gamma\mathcal{L}$ – подфактором.

Лемма I.I. Фактор $\mathfrak{M}(G_4)$ свойством $Б_1$ не обладает.

Доказательство. Сохраняя обозначения леммы 3.2 § I, рассмотрим две $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательности $\{L_{b_{1,n}}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{L_{b_{2,n}}\}_{n=1}^{\infty}$. Так как $L_{b_{1,n}}$ и $L_{b_{2,n}}$ порождают не аппроксимативно конечный фактор $1\otimes\dots\otimes\mathfrak{M}(G_2^{(n)})\otimes1\otimes\dots$, то ясно, что для $\mathfrak{M}(G_4)$ свойство $Б_1$ не выполнено.

Лемма I.2. Фактор $\mathfrak{M}(G_3)$ обладает свойством $Б_1$, а $\mathfrak{M}(G_1)\otimes e$ является его $\Gamma\mathcal{L}$ – подфактором.

Доказательство. Пусть $\{\vartheta_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность для $\mathfrak{M}(G_3)$. Относительно скалярного произведения $(a,b)=T_2(b^*a)$, где $a,b\in\mathfrak{M}(G_3)$, $\mathfrak{M}(G_3)$- предгильбертово пространство, пополнение которого обозначим через $H(\mathfrak{M}(G_3))$. Очевидно, операторы L_g, $g\in G_3$, левого регулярного представления образуют полный ортонормированный базис в $H(\mathfrak{M}(G_3))$. Так как $\vartheta_n\in H(\mathfrak{M}(G_3))$, то

ϑ_n отвечает ортогональный ряд

$$\vartheta_n \sim \sum_{g\in G_3} f_n(g) L_g , \tag{I.2}$$

где $f_n(g)$ – комплекснозначная функция на G_3 и

$$[\![\vartheta_n]\!]^2 = \sum_{g\in G_3} |f_n(g)|^2 \ (=1).$$

Пусть g_1 и g_2 – генераторы группы $e \otimes G_2$. Поскольку $\{\vartheta_n\}$ – $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность, то

$$\lim_{n\to\infty} [\![L_{g_i^{-1}} \vartheta_n L_{g_i} - \vartheta_n]\!] = 0 \qquad (i=1,2),$$

или принимая во внимание (I.2),

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{g\in G_3} |f_n(g_i g g_i^{-1}) - f_n(g)|^2 \Big)^{1/2} = 0 \qquad (i=1,2). \tag{I.3}$$

Обозначим теперь через E дополнение к $G_1 \otimes e$ во множестве $G_3 = G_1 \otimes G_2$. Пусть F множество всех слов из E, которые оканчиваются на g_1^k $(k \neq 0)$, либо, которые будут оканчиваться на g_1^k $(k \neq 0)$, если выполнить допустимые перестановки. Тогда, очевидно, $F \cup g_1 F g_1^{-1} = E$, а множества F, $g_2 F g_2^{-1}$, $g_2^{-1} F g_2$ дизъюнктны и $F \cup g_2 F g_2^{-1} \cup g_2^{-1} F g_2 \subset E$. Учитывая (4.3), из леммы 4.2, § I, находим, что

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{g\in E} |f_n(g)|^2 \Big)^{1/2} = 0. \tag{I.4}$$

Но это и означает, что последовательность $\{\vartheta_n\}$ асимптотически принадлежит гиперфинитному фактору $\mathfrak{M}(G_1) \otimes 1$. Лемма доказана.

Подведем итог.

Т е о р е м а I. Пусть G_3 и G_4 – счетные дискретные группы, определенные в конце р. I § I. Обозначим через $\mathfrak{M}(G_3)$ и $\mathfrak{M}(G_4)$ факторы типа II_1, порожденные операторами левого (правого) регулярного представления групп G_3 и G_4. $\mathfrak{M}(G_i)$ $(i=3,4)$ – не гиперфинитные факторы со свойством $\Gamma\mathcal{L}$ (§ I,р.р.2,3). Эти факторы не изоморфны, так как $\mathfrak{M}(G_3)$ обладает, а $\mathfrak{M}(G_4)$ не обладает свойством $Б_1$ (см.опред.I.I §2).

2. С в о й с т в о $Б_2$. В этом разделе мы построим новый пример не изоморфного не гиперфинитного фактора.

О п р е д е л е н и е 2.I. Пусть $\mathfrak{M}$ – гиперфинитный фактор типа II_1 в сепарабельном гильбертовом пространстве, обладающий свойством $\Gamma\mathcal{L}$. (Опред.3.2 §I).

Условимся считать, что $\mathfrak{M}$ обладает свойством $Б_2$, если в $\mathfrak{M}$ существует коммутативное неймановское подкольцо $\mathfrak{A}$ такое, что всякая $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность фактора $\mathfrak{M}$, асимптотически принадлежит $\mathfrak{A}$. Иными словами, любые две $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательности $\{v_n\}$ и $\{u_n\}$ из $\mathfrak{M}$ асимптотически коммутируют, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} [\![u_n v_n - v_n u_n]\!] = 0. \tag{2.I}$$

Подкольцо $\mathfrak{A}$ удобно называть коммутативным $\Gamma\mathcal{L}$ – подкольцом $\mathfrak{M}$. Очевидно, свойство $Б_2$ – инвариант при алгебраическом изоморфизме факторов.

Л е м м а 2.I. Фактор $\mathfrak{M}(G_4)$ свойством $Б_2$ не обладает.

Этот факт легко увидеть из доказательства леммы I.I.

Л е м м а 2.2. Гиперфинитный фактор $\mathfrak{M}$ также не обладает свойством $Б_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{M}_2$ – фактор типа I_2. Нетрудно видеть, что в $\mathfrak{M}_2$ имеются два генератора A и B со свойствами: $A^2 = B^2 = \Gamma$ и $AB = -BA$. Действительно,

$$A \sim \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно [IO], что гиперфинитный фактор можно представить в виде счетного прямого произведения факторов $\mathfrak{M}_2^{(i)}$ типа I_2: $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_2^{(i)}$. Пусть A_i, B_i – генераторы $\mathfrak{M}_2^{(i)}$ $(i=1,2,\ldots)$. Нетрудно проверить, что $\{A_i\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_i\}_{n=1}^{\infty}$ – $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательности для $\mathfrak{M}$. Однако $A_i B_i - B_i A_i = 2A_i B_i$ и $[\![A_i B_i - B_i A_i]\!] = 2$, таким образом, эти последовательности асимптотически не коммутируют. Следовательно, $\mathfrak{M}$ свойством $Б_2$ не обладает. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. Фактор $\mathfrak{M}(G_3)$ свойством $Б_2$ не обладает.

Перейдем к построению фактора со свойством $Б_2$. Обозначим через G_5 группу с генераторами g_i $(i=1,2,3)$ и $b_{i,n}$, где $i = 1,2$; $n = 1,2\ldots$: генераторы g_i $(i=1,2,3)$ порождают свободную подгруппу $G(g_1, g_2, g_3)$ группы G_5 с тремя образующими g_i $(i = 1,2,3)$; генераторы $b_{i,n}$ $(i = 1,2;$ $n = 1,2\ldots)$ порождают подгруппу группы G_5, изоморфную группе G_4; генераторы g_i $(i = 2,3)$ коммутируют со всеми генераторами $b_{i,n}$ $(i = 1,2;$ $n = 1,2,\ldots)$; генераторы g_1 и

$b_{2,n}$ (n = I,2...) порождают свободную подгруппу G (g_1 , $b_{2,n}$) (n = I,2...) с двумя образующими , и, наконец, генераторы g_1 и $b_{1,n}$ (n = I,2,...) коммутируют.

Из определения видно, что G_5 не является допустимой (см. р.2 § I). Далее, каждый класс смежности G_5, кроме тривиального, содержит бесконечное число элементов. Следовательно, слабо (сильно) замкнутое кольцо $\mathfrak{M}(G_5)$, порожденное операторами левого или правого регулярного представления G_5 , есть не гиперфинитный фактор (р.2 § I).

Л е м м а 2.3. Фактор $\mathfrak{M}(G_5)$ обладает свойством $\Gamma\mathcal{L}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения G_5 легко следует, что $\{L_{b_{1,n}}\}_{n=1}^{\infty}$ – $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность для $\mathfrak{M}(G_5)$. Доказательство закончено.

Л е м м а 2.4. Фактор $\mathfrak{M}(G_5)$ обладает свойством B_2 , а коммутативное неймановское подкольцо $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}(G_5)$, порожденное операторами $L_{b_{1,n}}$ (n = I,2,...) является $\Gamma\mathcal{L}$ – подкольцом для $\mathfrak{M}(G_5)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через B коммутативную подгруппу G_5 , порожденную $b_{1,n}$ (n = I,2,...),а через E дополнение к B во множестве G_5 . Пусть F – подмножество всех слов из E , оканчивающихся на g_1^{k} $(k\neq 0)$. Очевидно, $F \cup g_1 F g_1^{-1} = E$, далее, множества F , $g_2 F g_2^{-1}$, $g_2^{-1} F g_2$ дизъюнктны. и принадлежат E .

Пусть теперь $\{v_n\}$ – произвольная $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность для $\mathfrak{M}(G_5)$. Предположим, что v_n (n =I,2...) отвечает ортогональный ряд

$$v_n \sim \sum_{g\in G_5} f_n(g) L_g,$$

где $f_n(g)$ – функция из $\ell_2(G_5)$ и $1 = \|v_n\|^2 = \sum_{g\in G_5} |f_n(g)|^2$.

Повторяя, далее рассуждения, использованные при доказательстве леммы I.2 настоящего параграфа, мы получим, что

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{g\in E} |f_n(g)|^2\Big)^{1/2} = 0.$$

Но это означает (см.также определение множества E), что v_n асимптотически принадлежит коммутативному подкольцу $\mathfrak{A}$, порожденному $L_{b_{1,n}}$, n =I,2... Лемма доказана.

Т е о р е м а 2. Пусть G_5 – счетная дискретная группа, определенная в настоящем разделе. Пусть $\mathfrak{M}(G_5)$ – фактор типа II_1 , порожденный операторами левого (правого) регулярного представления группы G_5 , тогда $\mathfrak{M}(G_5)$ обладает свойством $Б_2$.

В заключение отметим, что нам известен еще один пример фактора $\mathfrak{M}$ типа II_1 со свойством $Б_2$. Пусть G_5' группа с четырьмя образующими a_1, a_2, a_3 и c со следующими правилами коммутации: c принадлежит центру G_5' ; $a_1 a_2 = c a_2 a_1$; $a_1 a_3 = a_3 a_1$, а a_2 и a_3 порождают свободную подгруппу группы G_5' с двумя образующими. Пусть $\mathfrak{M}_\lambda(G_5')$ фактор типа II_1 , порожденный операторами точного фактор-представления для G_5' , при котором элементу центра c отвечает оператор умножения на число $e^{2\pi i\lambda}$ (λ – иррациональное число на единичном интервале). Тогда $\mathfrak{M}_\lambda(G_5')$ обладает свойством $Б_2$, а коммутативное кольцо $\mathfrak{A}_\lambda$, порожденное операторами представления, отвечающими элементам a_1^k ($k = 0, \pm 1, \ldots$), является $\Gamma\mathcal{L}$ – кольцом для $\mathfrak{M}_\lambda(G_5')$. Вопрос о том, изоморфны ли факторы $\mathfrak{M}(G_5)$ и $\mathfrak{M}_\lambda(G_5')$, остается открытым.

3. О ФАКТОРАХ ТИПА II_1 СО СВОЙСТВОМ N . В этом разделе мы рассмотрим новый инвариант, свойство N , который является ослаблением свойства $Б_2$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Пусть $\mathfrak{M}$ – фактор типа II_1 . Условимся считать, что $\mathfrak{M}$ обладает свойством N (в честь М.А.Наймарка), если в $\mathfrak{M}$ существует $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, которая асимптотически коммутирует с любой $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательностью $\{u_k\}$ из $\mathfrak{M}$, т.е. для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число K такое, что при $k > K$

$$[\![u_k v_k - v_k u_k]\!] < \varepsilon . \tag{3.1}$$

Нетрудно понять, что свойство N остается инвариантным при алгебраическом изоморфизме факторов. Далее всякий фактор, обладающий свойством $Б_2$ обладает и свойством N .

Для исследования факторов со свойством N полезно ввести естественное понятие эквивалентности $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательностей.

О п р е д е л е н и е 3.2. Пусть $\{v_k\}$ – $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность для фактора $\mathfrak{M}$ типа II_1 . Последовательность операторов $\{u_k\}$ из $\mathfrak{M}$ назовем эквивалентной последовательности $\{v_k\}$ ($\{u_k\} \approx \{v_k\}$) , если

$$\lim_{k\to\infty} [\![u_k - v_k]\!] = 0. \tag{3.2}$$

Непосредственно из этого определения легко устанавливаются следующие свойства последовательности $\{u_k\}$. Поскольку $|[\![u_k]\!]-[\![\vartheta_k]\!]|\leqslant[\![u_k-\vartheta_k]\!]$ и $[\![\vartheta_k]\!]=1$, , то $\lim\limits_{k\to\infty}[\![u_k]\!]=1$. Нетрудно также показать, что $\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{Tr}(u_k^{*})=0$ и слабый $\lim\limits_{k\to\infty} u_k=0$. Далее, пусть $\{u_k\}$ и $\{u'_k\}$ – две последовательности из $\mathfrak{M}$, причем $\lim\limits_{k\to\infty}[\![u_k-u'_k]\!]=0$, если $\{u_k\}$ эквивалентна $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательности $\{\vartheta_k\}$ для $\mathfrak{M}$, то также $\{u'_k\}\approx\{\vartheta_k\}$. Наконец, для того, чтобы $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность для фактора $\mathfrak{M}$ асимптотически коммутировала с любой другой $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательностью, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладала любая эквивалентная ей последовательность.

Т е о р е м а 3. Фактор $\mathfrak{M}(G_4)$, где $G_4=\bigotimes\limits_{i=1}^{\infty}G_2^{(i)}$, (см.р.I. § I) свойством N не обладает.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Л е м м а 3.I. Пусть $\{\vartheta_k\}$ - $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность из $\mathfrak{M}(G_4)$. Тогда существует последовательность операторов $\{u_k\}$ из $\mathfrak{M}(G_4)$, эквивалентная $\{\vartheta_k\}$, обладающая следующим свойством. Для всякого натурального числа K найдется натуральное число $N=N(K)$ такое, что для $k>N$,

$$u_k\in\mathfrak{M}\,(\bigotimes_{i=K+1}^{\infty}G_2^{(i)}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждому оператору ϑ_k поставим в соответствие ортогональный ряд

$$\vartheta_k\sim\sum_{g\in G_4}f_k(g)L_g \tag{3.3}$$

(см.начало доказательства леммы I.2 § 2), где $f_k(g)$ – функция из $\ell_2(G_4)$ и $\sum\limits_{g\in G_4}|f_k(g)|^2=[\![\vartheta_k]\!]^2=1$.

Для произвольного натурального числа n рассмотрим подгруппы $L^n=\bigotimes\limits_{i=1}^{n}G_2^{(i)}$ и $L_n=\bigotimes\limits_{i=n+1}^{\infty}G_2^{(i)}$ группы $G_4=\bigotimes\limits_{i=1}^{\infty}G_2^{(i)}$. Сохраняя обозначения леммы 3.2 § I, положим $g_1=b_{1,1}\,b_{1,2}\ldots b_{1,n}$ и $g_2=b_{2,1}\cdot b_{2,2}\ldots b_{2,n}$.

Обозначим, далее, через F' подмножество слов из L^n , оканчивающихся на g_1^s $(s\neq0)$. Пусть $F=F'\otimes L_n$, тогда

$$g_1Fg_1^{-1}=g_1F'g_1^{-1}\otimes L_n \quad \text{и} \quad F\cup g_1Fg_1^{-1}=(F'\cup g_1F'g_1^{-1})\otimes L_n=(e\otimes L_n)^c,$$

где $(\cdot)^c$ – дополнение к $(\cdot)$. Очевидно, что $F,\ g_2^{-1}Fg_2$ и $g_2Fg_2^{-1}$ – дизъюнктны и содержатся в $E=(e\otimes L_n)^c$.

Далее, поскольку ϑ_k является $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательностью, то $\lim\limits_{k\to\infty} [\![L_{g_i}^{-1}\vartheta_k L_{g_i} - \vartheta_k]\!] = 0 \quad (i=1,2)$. Принимая во внимание (3.3) из леммы 4.2 § I заключаем, что

$$\lim \Big(\sum_{g\in(e\otimes L_n)^c} |f_k(g)|^2\Big)^{1/2} = 0. \tag{3.4}$$

Соотношение (3.4), в виду произвольности n, показывает, что возможно построить последовательность $\{u_k\}$ с искомым свойством. Доказательство закончено.

Л е м м а 3.2. Пусть $\{\vartheta_k\}$ есть $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность из $\mathfrak{M}(G_4)$. Тогда существует последовательность $\{u_k\}$, где $u_k \in \mathfrak{M}(G_4)$, эквивалентная ϑ_k, обладающая следующим свойством. Для каждого индекса n существует натуральное число $N = N(n)$ такое, что

$$u_n \in \mathfrak{M}(L^N) = \mathfrak{M}\Big(\bigotimes_{i=1}^{N} G_2^{(i)}\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из того, что, по определению, группа G_4 является индуктивным пределом возрастающей последовательности групп $L^n = \bigotimes\limits_{i=1}^{n} G_2^{(i)}$.

Л е м м а 3.3. Если $\{\vartheta_k\}$ – $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность для фактора $\mathfrak{M}$ типа II_1, то любая ее подпоследовательность $\{\vartheta_{k_i}\}$ также является $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательностью. Более того, если $\{\vartheta_k\}$ асимптотически коммутирует с каждой $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательностью, то $\{\vartheta_{k_i}\}$ также необходимо обладает этим свойством.

Доказательство очевидно.

Доказательство теоремы 3. Для того, чтобы показать, что $\mathfrak{M}(G_4)$ не обладает свойством N достаточно доказать, что для каждой $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательности $\{\vartheta_k\}$ существует $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность $\{W_k\}$, которая с ней не коммутирует асимптотически (см. опред. 3.I). Из рассуждений, поясняющих определение 3.2 и из леммы 3.3 следует, что это требование можно ослабить. А именно, достаточно выделить из $\{\vartheta_k\}$ подпоследовательность $\{\vartheta_{k_i}\}$ и для нее указать $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность $\{W_i\}$ из $\mathfrak{M}(G_4)$, которая не коммутирует асимптотически с $\{\vartheta_{k_i}\}$. Опять вместо $\{\vartheta_{k_i}\}$ достаточно рассматривать эквивалентную ей последовательность $\{\tilde{u}_i\}$.

Из лемм 3.I и 3.3 заключаем, что можно построить последовательность $\{u_k\}$, эквивалентную $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательности $\{\vartheta_k\}$, которая содержит такую подпоследовательность $\{u_{k_i}\}$, что

$$u_{k_i} \in \mathfrak{M}\left(\bigotimes_{j=s_i}^{s_{i+1}} G_2^{(j)}\right),$$

где $\{s_i\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. Поскольку $\lim_{i\to\infty} [\![u_{k_i}]\!] = 1$ и $\lim Tr(u_{k_i}) = 0$, то к $\bigotimes_{j=s_i}^{s_{i+1}} G_j^{(2)}$ и u_{k_i} при достаточно больших i применима лемма 4.I § I. Согласно этой лемме существует унитарный оператор w_i, $Tr(w_i) = 0$ из $\bigotimes_{j=s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{M}(G_2^{(j)})$, для которого

$$[\![u_{k_i} w_i - w_i u_{k_i}]\!] \geq \frac{\eta}{2} > \frac{1}{28} \qquad (3.5)$$

независимо от i, где i предполагаются достаточно большими. В частности, в качестве w_i может быть взят оператор L_{d_i}, где d_i элемент из $\bigotimes_{j=s_i}^{s_{i+1}} G_2^{(j)}$, равный *либо* $b_{1,s_i}, b_{1,s+1} \dots b_{1,s_{i+1}}$, либо $b_{2,s_i} \dots b_{2,s_{i+1}}$ (По поводу обозначений см. доказательство леммы 3.2 § I).

Из построения видно, что $\{w_i\}$ - $\Gamma\mathcal{L}$ — последовательность для $\mathfrak{M}(G_4)$. Формула (3.5) показывает, что $\{u_{k_i}\}$ и $\{w_i\}$ асимптотически не коммутируют. Теорема доказана.

Для гиперфинитного фактора мы умеем доказывать лишь, что он обладает некоторым усиленным вариантом свойства N.

Определение 3.I'. Пусть $\mathfrak{M}$ — фактор типа II_1. Условимся считать, что $\mathfrak{M}$ обладает свойством N', если в $\mathfrak{M}$ существует $\Gamma\mathcal{L}$ — последовательность $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $v_k^n = I$ для фиксированного натурального n, которая асимптотически коммутирует с любой $\Gamma\mathcal{L}$ — последовательностью из $\mathfrak{M}$.

Теорема 4. Гиперфинитный фактор $\mathfrak{M}$ свойством N' не обладает.

Докажем теорему в предположении, что натуральное число $n = 2$. Для наших целей этого достаточно.

Лемма 3.4. Пусть $\mathfrak{M}_m$ - фактор типа I_{2m} ($m < \infty$) и v — унитарный оператор из $\mathfrak{M}_m$ такой, что $v^2 = I$ и $Tr(v) = 0$. Тогда существует унитарный оператор $u \in \mathfrak{M}_m$, $u^2 = I$, $Tr(u) = 0$, для которого

$$[\![uv - vu]\!] \geq \sqrt{2}\,. \qquad (3.6)$$

Доказательство. Так как $v^2 = I$, то собственные значения v равны $\pm I$. Поскольку $Tr(v) = 0$, то

$\vartheta = P-(I-P)$, где P – проекционный оператор из $\mathfrak{M}_{2m}$, причем $Tr(P) = 1/2$ (Tr – нормированный след в $\mathfrak{M}_{2m}$). Заметим, что $Tr(P) = Tr(I-P) = 1/2$, следовательно, в $\mathfrak{M}_{2m}$ существует унитарный оператор u, для которого $uPu = I-P$ и $u(I-P)u = P$, но тогда $u\vartheta u = -\vartheta$, следовательно,

$$[\![u\vartheta u - \vartheta]\!] = 2.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.5. Пусть $\mathfrak{M}$ – гиперфинитный фактор типа II_1. Представим $\mathfrak{M}$ в виде тензорного произведения факторов $\mathfrak{M}_2$ типа I_2: $\mathfrak{M} = \overline{\bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_2^{(i)}}$ [10]. Обозначим через $\{\vartheta_k\}$ – $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность из $\mathfrak{M}$. Тогда существует последовательность $\{u_k\}$, эквивалентная $\{\vartheta_k\}$ (см. опред. 3.2 § 2), обладающая следующим свойством: для всякого натурального числа K найдется натуральное число $N = N(K)$ такое, что при $k > N$

$$u_k \in \overline{\bigotimes_{i=K+1}^{\infty} \mathfrak{M}_2^{(i)}}.$$

Доказательство. Пусть A_i и B_i – генераторы фактора $\mathfrak{M}_2^{(i)}$ типа I_2 (см. доказательство леммы 2,2 § 2). Тогда операторы A_i и B_i ($i = 1,2,\ldots$), удовлетворяющие соотношениям

$$A_i^2 = B_i^2 = I, \quad A_i A_j = A_j A_i, \quad B_i B_j = B_j B_i, \tag{3.7}$$

$$A_i B_i = -B_i A_i, \quad A_i B_j = B_j A_i \quad (i \neq j),$$

порождают $\mathfrak{M}$.

Обозначим через Γ множество всех двоичных последовательностей $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots$, где $\alpha_i = 0$ или 1, у которых лишь конечное число компонент отлично от нуля. Множество Γ превращается в коммутативную группу, если для последовательностей ввести покомпонентное сложение по $\mathrm{mod}\ 2$. Пусть δ_k – последовательности из Γ, у которых k-ая компонента равна единице, а остальные-нулю. Очевидно, δ_k – генераторы группы Γ.

Поставим каждому элементу δ_k в соответствие оператор A_k (соответственно B_k), а каждому элементу $\alpha = \delta_{i_1} + \ldots + \delta_{i_s}$ оператор $A_\alpha = A_{i_1} \ldots A_{i_s}$ (соответственно, $B_\alpha = B_{i_1} \ldots B_{i_s}$). Тогда $\alpha \to A_\alpha$ и $\beta \to B_\beta$ есть представления группы Γ в унитарные операторы фактора $\mathfrak{M}$.

Обозначим через $H(\mathfrak{M})$ гильбертово пространство, которое является пополнением $\mathfrak{M}$ относительно нормы $[\![a]\!] = (Tr(a^*a))^{1/2}$, где Tr — след в $\mathfrak{M}$. Тогда операторы $A_\alpha B_\beta$ $(\alpha,\beta\in\Gamma)$ образуют полный ортонормированный базис в $H(\mathfrak{M})$, и каждому ϑ_κ пусть отвечает ортогональный ряд

$$\vartheta_\kappa \sim \sum_{(\alpha,\beta)\in\Gamma} \lambda_\kappa(\alpha,\beta) A_\alpha B_\beta, \tag{3.8}$$

где $\lambda_\kappa(\alpha,\beta)$ — комплексные числа и $[\![\vartheta_\kappa]\!] = \sum_{(\alpha,\beta)} |\lambda_\kappa(\alpha,\beta)|^2 = 1$.

Заметим, что

$$A_i \vartheta_\kappa A_i - \vartheta_\kappa = 2\sum_{(\alpha,\beta)}' \lambda_\kappa(\alpha,\beta) A_\alpha B_\beta,$$

где $\sum'$ означает, что суммирование распространено на все пары (α,β), для которых β содержит в качестве слагаемого δ_i. Поскольку $\lim_{\kappa\to\infty} [\![A_i \vartheta_\kappa A_i - \vartheta_\kappa]\!] = 0$, то

$$\lim_{\kappa\to\infty} \Big(\sum_{(\alpha,\beta)}' |\lambda_\kappa(\alpha,\beta)|^2\Big)^{1/2} = 0. \tag{3.9}$$

Фиксируем натуральное число K и рассмотрим подфактор $M_K = \bigotimes_{i=1}^{K} \mathfrak{M}_2^{(i)}$ типа I_{2^K} фактора $\mathfrak{M}$. Операторы A_i, B_i ($i = 1, \ldots, K$) являются генераторами M_K. Из только что приведенных рассуждений следует, что

$$\lim_{s\to\infty} \Big(\sum_{(\alpha,\beta)}'' |\lambda_s(\alpha,\beta)|^2\Big)^{1/2} = 0, \tag{3.10}$$

где $\sum''$ означает, что суммирование производится по всем парам (α,β), для которых либо α, либо β содержит в качестве слагаемого δ_i ($i = 1,\ldots, K$).

Остальные рассуждения, необходимые для завершения доказательства стандартны и мы их опустим. Доказательство закончено.

Л е м м а 3.6. Пусть $\mathfrak{M} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathfrak{M}_2^{(i)}$ — гиперфинитный фактор, представленный в виде бесконечного тензорного произведения факторов $\mathfrak{M}_2^{(i)}$ типа I_2. Если $\{\vartheta_\kappa\}$ — $\Gamma\mathcal{L}$ — последовательность из $\mathfrak{M}$, то существует последовательность $\{u_\kappa\}$ элементов из $\mathfrak{M}$, эквивалентная $\{\vartheta_\kappa\}$, такая, что для всякого индекса n существует натуральное число $N = N(n)$, для которого

$$u_n \in \bigotimes_{i=1}^{N} \mathfrak{M}_2^{(i)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы следует из определения гиперфинитного фактора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Идея доказательства та же, что и доказательства теоремы 3 (см. начало доказательства теоремы 3).

Пусть $\{\vartheta_\kappa\}$ — произвольная $\Gamma\mathcal{L}$ — последовательность из

$\mathfrak{M}$, причем $v_k^2 = I$. Используя леммы 3.5 и 3.6 можно построить последовательность $\{u_k\}$, где $u_k \in \mathfrak{M}$, эквивалентную $\{v_k\}$ и такую, что для некоторой последовательности $\{u_{k_i}\}$ имеем

$$u_{k_i} \in \bigotimes_{j=s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{M}_2^{(j)},$$

где $\{s_i\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел. Отметим, что $\lim_{i\to\infty} Tr(u_{k_i}) = 0$ и $\lim_{i\to\infty} [\![u_{k_i} - v_{k_i}]\!] = 0$, причем $v_{k_i}^2 = I$. Используя результаты [2] § 4, можно построить последовательность операторов $\{u_i\}$, где $\tilde{u}_i \in \bigotimes_{j=s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{M}_2^{(j)}$ и $Tr(\tilde{u}_i) = 0$, $\tilde{u}_i^2 = I$, для которой $\lim_{i\to\infty} [\![v_{k_i} - \tilde{u}_i]\!] = 0$. Согласно лемме 3.4 для каждого $\tilde{u}_i$ $\bigotimes_{j=s_i}^{s_{i+1}} \mathfrak{M}_2^{(j)}$ существует оператор w_i , $Tr(w_i) = 0$, $w_i^2 = 1$, для которого $w_i \tilde{u}_i - \tilde{u}_i w_i = 2 w_i \tilde{u}_i$. Нетрудно проверить, что $\{w_i\}$ является $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательностью для $\mathfrak{M}$.

Итак, последовательности $\{u_{k_i}\}$ и $\{w_i\}$ не коммутируют асимптотически. Из леммы 3.3 заключаем, что последовательность $\{u_i\}$,а также эквивалентная ей $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность $\{v_i\}$, не коммутирует асимптотически с любой последовательностью из $\mathfrak{M}$. Так как $\{v_i\}$ – произвольная $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность из $\mathfrak{M}$ с условием $v_i^2 = I$, то $\mathfrak{M}$ свойством N' не обладает. Доказательство закончено.

4. ПРИМЕРЫ ФАКТОРОВ СО СВОЙСТВОМ N . В этом разделе мы построим два новых примера не изоморфных фактора типа II_1 со свойством N .

Теорема 5. Пусть $G_6 = G_5 \otimes G_4$ – дискретная счетная группа, являющаяся тензорным произведением групп $G_4 = \bigotimes_{i=1}^{\infty} G_2^{(i)}$ (см.р.I § I) и G_5 (см.р.2 § 2). Если $\mathfrak{M}(G_6)$ – фактор типа II_1 , порожденный операторами левого (правого)регулярного представления группы G_6 , то $\mathfrak{M}(G_6)$ не обладает свойством $Б_i$ ($i = I,2$) и обладает свойством N (а поэтому $\mathfrak{M}(G_6)$ не изоморфен $\mathfrak{M}(G_4)$).

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ – коммутативное $\Gamma\mathcal{L}$ –подкольцо для $\mathfrak{M}(G_5)$ (см.доказательство леммы 2.4). Используя лемму 4.2 § I можно показать, что кольцо $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{M}(G_4)$ асимптотически содержит любую $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность из $\mathfrak{M}(G_6)$. Далее, легко видеть, что любая $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность из $\mathfrak{M}(G_6)$,асимптотически принадлежащая $\mathfrak{A}$, коммутирует асимптотически со всякой другой $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательностью. Следовательно, $\mathfrak{M}(G_6)$ обладает свойством N. Так как $\mathfrak{M}(G_6)$ содержит в качестве прямого сомножителя $\mathfrak{M}(G_4)$, то $\mathfrak{M}(G_6)$ не обладает свойством $\text{Б}_i\ (i=1,2)$. Доказательство закончено.

Построим теперь фактор типа II_1 со свойством N'.

Определение 4.I. Условимся, что фактор $\mathfrak{M}$ типа II_1 обладает свойством Б_3, если всякая $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательность из $\mathfrak{M}$ асимптотически принадлежит подкольцу из $\mathfrak{M}$ вида $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{A}$ – коммутивная неймановская подалгебра $\mathfrak{M}$, а $\mathfrak{N}$ -гиперфинитный подфактор $\mathfrak{M}$, причем существуют $\Gamma\mathcal{L}$ – последовательности для $\mathfrak{M}$, асимптотически принадлежащие и $\mathfrak{A}$, и $\mathfrak{N}$.

Из определения 4.I и теоремы 4 заключаем, что всякий фактор типа II_1 со свойством Б_3 обладает свойством N'.

Теорема 6. Пусть группа $G_7 = G_5 \otimes G_3$ есть тензорное произведение групп G_5 (см.р.2 § 2) и G_3 (p.I § I), Если $\mathfrak{M}(G_7)$ – фактор типа II_1, порожденный операторами левого (правого) регулярного представления группы G_7, то $\mathfrak{M}(G_7)$ обладает свойством Б_3 и не обладает свойством Б_i ($i = 1,2$). $\mathfrak{M}(G_7)$ не изоморфен ни $\mathfrak{M}(G_4)$, ни $\mathfrak{M}(G_6)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ - $\Gamma\mathcal{L}$ – подфактор для $\mathfrak{M}(G_3)$, а $\mathfrak{A}$ – коммутативное $\Gamma\mathcal{L}$ – подкольцо для $\mathfrak{M}(G_5)$. Используя лемму 4.2 § I можно показать, что $\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{N}$ асимптотически содержит любую $\Gamma\mathcal{L}$ – подпоследовательность из $\mathfrak{M}(G_7)$. Повторяя рассуждение леммы I.I находим, что $\mathfrak{M}(G_7)$ не изоморфен ни $\mathfrak{M}(G_4)$, ни $\mathfrak{M}(G_6)$. Поскольку $\mathfrak{M}(G_7)$ обладает свойством N', а $\mathfrak{M}(G_3)$ этим свойством не обладает, то эти факторы не изоморфны. Наконец, очевидно, что $\mathfrak{M}(G_7)$ не обладает свойством Б_2. Доказательство закончено.

В заключение отметим, что все результаты этой статьи могут быть перенесены на не гиперфинитные факторы типа III с помощью метода, предложенного Л.Пуканским [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А.

I. S.Sakai, Asymptotically Abelian II_1-Factors, Publ.RIMS, Kyoto Univ., ser. A, 4, 299-307, 1968.

2. F.Murray and S. von Neumann, On Rings of Operators Ann.Math., 44, 716-808, 1943.

3. L.Pukanszky, Some Example of Factors Publ.Math.Debrezen, 4, 135-156, 1956.

4. J.Schwartz, Two Finite, Non-hyperfinite, Non-isomorphic Factors, Comm.Pure Appl.Math., 16, 19-26, 1963.

5. H.Choda, M.Echigo, A Remark on Construction of Finite Factors, Proc.Japan.Acad., 34, 9, 651-655, 1963.

6. E.Folner, On Groups with Full Banach Mean Value, Math.Scand., 3, 243-254, 1955.

7. J.Dixmier, Les Algebres d'operateurs dans l'espase hilbertienne. Gauthier-Villars, Paris, 1957.

8.

9. J.Schwartz, Two Non-isomorphic Factors Type III. Comm.Pure Appl. Math., 16, 111-120, 1963.

10. A.Guichardet, Produits tensoriel infinis et representations des relations d'anticommutation Ann.sc.Ec.Norm., 83, 1-52, 1966.

Т Р У Д Ы
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
АН УССР
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА,ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
1969 выпуск I

АППРОКСИМАТИВНО КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И АППРОКСИМАТИВНО КОНЕЧНЫЕ ФАКТОРЫ

В.Я.Голодец

I. Пусть A – коммутативная неймановская алгебра в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а μ – точный и нормальный след для A, причем $\mu(I)=1$, где I – единичный оператор в H.

Абстрактную счетную дискретную группу G назовем аппроксимативно конечной, если всякое точное представление G в группу $*$ – автоморфизмов A, сохраняющих μ и действующих свободно, определяет аппроксимативно конечную группу преобразований A согласно Г.А.Даю. [I].

Примером аппроксимативно конечной группы может служить любая счетная коммутативная группа $\cdot$ 2 .

Абстрактную счетную дискретную группу G назовем почти аппроксимативно конечной, если существует, по крайней мере, одно точное представление G в группу $*$ – автоморфизмов A, сохраняющих μ и действующих свободно, которое определяет аппроксимативно конечную группу преобразований A согласно Даю [I].

Примером почти аппроксимативно конечной группы может служить любая дискретная счетная разрешимая группа.

Вопрос о том, будет ли всякая почти аппроксимативно конечная группа аппроксимативно конечной, в настоящее время не решен. Во всяком случае справедлива следующая теорема, которая дает возможность предположить, что проблема имеет положительное решение:

Т Е О Р Е М А . Пусть G – дискретная счетная почти аппроксимативно конечная (например, разрешимая) группа. Тогда имеют место следующие результаты:

(i) Пусть A – коммутативная неймановская алгебра со следом μ в сепарабельном гильбертовом пространстве H (см. начало n°1). Если G точно представлена, совершенно произвольным образом, в виде эргодической группы $*$ – автоморфизмов A , сохраняющих след μ и действующих свободно, то скрещенное произведение $\mathfrak{M} = G \times A$ есть аппроксимативно конечный фактор типа II_1 (По поводу определения скрещенных произведений см. [4] , [5]).

(ii) Пусть M – аппроксимативно конечный фактор типа II_1 в сепарабельном гильбертовом пространстве H , а G изоморфно отображена в группу внешних $*$ – автоморфизмов M , тогда $\mathfrak{M} = G \times M$ – аппроксимативно конечный фактор типа II_1.

(iii) Если каждый класс сопряженных элементов G , кроме тривиального, содержит бесконечное число элементов, то правое (левое) регулярное представление G в $\ell_2(G)$ порождает аппроксимативно конечный фактор $\mathfrak{M}_r(G)$ (соответственно $\mathfrak{M}_\ell(G)$) типа II_1.

2. В этом разделе мы изложим основные моменты доказательства утверждения (ii) теоремы, в предположении, что G – произвольная счетная коммутативная группа.

ЛЕММА 2.I. Пусть $\langle M_n \rangle$ – убывающая последовательность гиперфинитных факторов типа II_1 в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Если $M = \bigcap_{n=1} M_n$ – фактор типа II_1 в H , то M необходимо является гиперфинитным фактором.

Действительно, пусть M'_n – коммутант M_n , а M' – коммутант M в H . Тогда M'_n – гиперфинитный фактор типа II (II_1 или II_∞) по Р.Пауэрсу [7] . Но тогда фактор M' типа II порожден возрастающей последовательностью гиперфинитных факторов M'_n типа II . Поэтому M' также является гиперфинитным фактором типа II по Пауэрсу. Из рассуждений, аналогичных [9] , заключаем, что M – гиперфинитный фактор типа II_1 .

Рассмотрим теперь множество X_G всех последовательностей $x = \{x_g\}$, $g \in G$, где $x_g = 0$ или 1. Если для последовательностей x из X_G определить покомпонентное сложение по $\operatorname{mod} 2$, то X_G превращается в коммутативную компактную группу, меру Хаара, которой обозначим через μ_G . Для каждого $g_0 \in G$ определим автоморфизм X_G , положив

$$g_0 : x = \{x_g\} \to g_0 x = \{x_{g_0 g}\}. \qquad (2.1)$$

Хорошо известно [I], что μ_G является инвариантной и эргодической относительно группы автоморфизмов G, определенных согласно (2.I), более того, каждый $g \in G$ действует свободно.

Пусть A_G – коммутативная неймановская алгебра в $L_2(X_G, \mu_G)$, образованная ограниченными μ_G – измеримыми функциями. Тогда μ_G – точный, нормальный след на A_G и $\mu_G(I) = 1$, где I_G – единичный проектор в A_G. Далее, каждому $g \in G$ отвечает $*$ – автоморфизм A_G, индуцируемый (2.I), сохраняющий μ_G. Если $a \in A_G$, то через a^g обозначим образ a относительно автоморфизма g.

Построим коммутативную неймановскую алгебру $\tilde{A}_G = \bigotimes_{i=1}^{\infty} A_G^i$, где $A_G^i = A_G$ ($i = 1, 2 \ldots$), со следом $\nu_G = \prod_{i=1}^{\infty} \mu_G^i$, где $\mu_G^i = \mu_G$ ($i = 1, 2, \ldots$) в пространстве $L_2(\bigotimes_{i=1}^{\infty} X_G^i, \nu_G)(X_G^i = X_G, i=1,2,\ldots)$ [5]. Пусть $\tilde{A}_G^n$ – подалгебра $\tilde{A}_G$ вида $\bigotimes_{i=n+1}^{\infty} A_G^i$ со следом $\nu_G^n = \prod_{i=n+1}^{\infty} \mu_G^i$. Алгебра $\tilde{A}_G$ порождена последовательностями $\tilde{a} = \{a_1, a_2, \ldots\}$, где $a_i \in A_G$ и $a_i = I_G$ для всех i, кроме конечного числа [5]. Подалгебра $\tilde{A}_G^n$ порождена такими же последовательностями, у которых, дополнительно, первые n компонент равны I_G, единице A_G.

Для каждого $g \in G$ определим $*$ – автоморфизм $\tilde{A}_G$, положив

$$g : \tilde{a} = \{a_i\} \longrightarrow (\tilde{a})^g = \{a_i^g\}, \qquad (2.2)$$

где отображение $a \to a^g$ алгебры A_G мы уже определили ранее. Очевидно, подалгебра $\tilde{A}_G^n$ ($n=1,2,\ldots$) инвариантна относительно каждого g из G. Понятно, что каждый автоморфизм $g \in G$ сохраняет меры ν_G и ν_G^n ($n=1,2,\ldots$).

Л Е М М А 2.2. Меры ν_G и ν_G^n ($n=1,2,\ldots$) являются эргодическими относительно группы автоморфизмов G, определенных согласно (2.I) и (2.2).

Доказательство использует стандартную технику [I].

Предложение. Пусть M аппроксимативно конечный фактор типа II_1, в сепарабельном гильбертовом пространстве H, а G – дискретная счетная группа внешних автоморфизмов M, сохраняющая след, тогда $\mathfrak{M} = G \times M$ – аппроксимативно конечный фактор типа II_1. Справедливо обратное.

Пусть $\mathfrak{N}$ – неймановская алгебра $M \otimes \tilde{A}_G$ (Отождествим M, $\tilde{A}_G$ и $\tilde{A}_G^n$ ($n=1,2,\ldots$) с соответствующими подалгебрами $\mathfrak{N}$). Тогда $\mathfrak{N}$ – аппроксимативно конечная алгебра с конечным следом

[3] , а $\tilde{A}_G$ - центр $\mathfrak{N}$. Для каждого $g \in G$ можно определить автоморфизм $\mathfrak{N}$, если положить

$$g : (m \otimes \tilde{a}) \to (m \otimes \tilde{a})^g = m^g \otimes \tilde{a}^g,$$

где $m \in M$, а $\tilde{a} \in \tilde{A}_G$, причем $m \to m^g$ $(g \in G)$ есть автоморфизм M , а автоморфизм $\tilde{a} \to \tilde{a}^g$ $(g \in G)$ мы определим согласно (2.2). Поскольку G индуцирует эргодическую группу $*$ - автоморфизмов $\tilde{A}_G$ (лемма 2.2), центра $\mathfrak{N}$, то из теоремы 3 [3] выводим, что скрещенное произведение $\tilde{\mathfrak{M}} = G \times \mathfrak{N}$ аппроксимативно конечный фактор типа II_1 .

Пусть теперь $\mathfrak{N}_n$ - неймановская подалгебра $\mathfrak{N}$ вида $M \otimes \tilde{A}^n_G$. Тогда $\tilde{\mathfrak{M}}_n = G \times \mathfrak{N}_n$ - неймановская подалгебра $\tilde{\mathfrak{M}}$. Аналогично тому, как было доказано, что $\tilde{\mathfrak{M}}$ - аппроксимативно конечный фактор типа II_1 , устанавливаем, что $\tilde{\mathfrak{M}}_n$ - гиперфинитный фактор типа II_1 . Поскольку $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{A}^n_G = \{\lambda I\}$, то $\bigcap_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathfrak{M}}_n = \mathfrak{M}$. Но $\mathfrak{M} = G \times M$ - фактор типа II_1 [4] , из леммы 2.I заключаем, что $\mathfrak{M}$ - гиперфинитный фактор. Прямое утверждение предложения доказано. Обратное доказывается с помощью леммы 2.I и некоторых дополнительных соображений.

ЛИТЕРАТУРА

I. H.A.Dye, Amer.J.Math., 81, 119, 1959.

2. H.A.Dye, Amer.J.Math., 55, 551, 1963.

3. В.Я.Голодец, ДАН, I8I, I307, I968.

4. N.Suzuki, Tohoku Math.J., 11, 113, 1959.

5. A.Guichardet, Ann.Sci.Ecole Norm Supr., 83, 1, 1966.

6. F.J.Murray, J.von Neumann, Ann.Math., 44, 716, 1943.

7. R.T.Powers, Ann.Math., 86, 138, 1967.

8. М.А.Наймарк, Нормированные кольца. М, I969

9. В.Я.Голодец, Сб.Мат.-физ. и функцион.анализ, вып.I, стр.220-228, ФТИНТ АН УССР, Харьков, I969.

Р Е Ф Е Р А Т Ы

УДК 532. 0

О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ПОЛНОЙ ИЛИ ЧАСТИЧНОЙ НЕВЕСОМОСТИ. Н.Д.Копачевский, А.Д.Мышкис, А.Д.Тюпцов. Сб,"Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 5 - 23.

Рассматриваются задачи теории линейных колебаний жидкости в частично заполненном сосуде, находящейся в условиях частичной или полной невесомости. Поверхностные силы, существенные в этих условиях, привносят дополнительные математические трудности, связанные с тем обстоятельством, что в граничном условии на свободной поверхности жидкости появляется дифференциальный оператор, порядок которого равен или даже выше порядка дифференциального оператора в уравнении.

Рассматриваются следующие задачи.

I. Задача об устойчивости равновесного состояния жидкости в сосуде. Определение запаса устойчивости.

2. Задача Коши и соответствующая спектральная задача о колебаниях идеальной жидкости в произвольном сосуде.

3. Задача Коши о малых колебаниях вязкой жидкости.

4. Структура спектра в задаче о колебаниях вязкой жидкости.

5. Асимптотические методы определения частот колебаний идеальной жидкости в осесимметричном сосуде (случай малых и больших глубин заполнения).

6. Приближенные методы расчета частот колебаний жидкости (метод Ритца и др.).

Рисунков 5, библиографических ссылок 33.

УДК 532. 0

О РОЛИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ ВОЗНИКНОВЕНИИ СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ШАРОВОМ СЛОЕ САМОГРАВИТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ. В.Г.Бабский, И.Л.Скловская. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 24-36.

В статье рассмотрена классическая задача о тепловой неустойчивости самогравитирующего шарового слоя жидкости со свободной поверхностью. Возникнув в гео- и астрофизике, эта задача может найти применение при решении некоторых проблем новой техники.

Благодаря более правильной записи граничных условий на свободной поверхности в работе получено уточнение известных результатов для границы устойчивости. Соответствующая спектральная задача подробно исследована с привлечением теории положительных операторов.

Таблиц I, библиографических ссылок IO.

УДК 532. 0

О КОЛЕБАНИЯХ КАПЛИ ЖИДКОСТИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ПЛОСКОСТИ, В УСЛОВИЯХ НЕВЕСОМОСТИ. Н.Д.Копачевский, Л.А.Темкин, В.С.Темкина. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, I969, 37-48.

Рассматривается классическая задача об определении частот и форм малых колебаний капли идеальной жидкости, лежащей на плоскости, в условиях полной невесомости. Линейная задача на собственные значения для случая произвольного краевого угла приводится к системе одномерных интегральных уравнений, которая затем решается численно на ЭВМ М-20. Отдельно исследуется случай малого краевого угла, а также случай, когда краевой угол равен прямому.

Рисунков 6, библиографических ссылок 8.

УДК 532. 0

О ФОРМЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. Г.В.Щербина. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, I969, 49-55.

В работе рассматривается следующая задача: на плоскости x, y, находится слой идеальной несжимаемой жидкости, в точке $x = 0$, $y = 0$ расположен сток малой мощности α. В предположении, что течение установившееся, потенциальное, осесимметричное, задача об отыскании свободной поверхности жидкости сводится к нелинейному уравнению в некотором функциональном пространстве. Показывается, что это уравнение имеет решение, которое можно искать методом последовательных приближений. В работе приводятся графики отклонения свободной поверхности от плоскости, посчитанные по первому приближению.

Рисунков 2, библиографических ссылок 2.

УДК 532.5

О ДВИЖЕНИИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. И.Д.Борисов. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, I969 56-63.

Рассматривается задача о движении газового пузыря в идеальной жидкости, заполняющей сферический сосуд. Предполагается, что движение возникает из состояния покоя под действием постоянного однородного поля массовых сил Поверхность пузыря в начальный момент времени считается сферой, концентричной с поверхностью стенки сосуда.

Для описания движения жидкости принят метод Лагранжа, в котором состояние индивидуальных частиц жидкости определяется в зависимости от времени и параметров (переменных Лагранжа), характеризующих положение частиц в начальный момент времени. Решение задачи (потенциал скорости и перемещение частиц) предполагается аналитическим по времени t. Найдены несколько первых членов разложения решения в степенные ряды по t, определяющих начальную стадию движения. Для предельного случая бесконечной жидкости (радиус сосуда равен ∞) представлены графики форм поверхности пузыря в различные моменты времени. Рисунков 2, библиографических ссылок 3.

УДК 517.9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ МАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. М.М.Бендерский, Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 64-71.

В работе дан вывод уравнения для определения моментов решений системы линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой образуют однородный марковский процесс, задаваемый стохастическим уравнением с произвольным спектром скачков. Если коэффициенты образуют конечнозначный процесс, то полученное уравнение сводится к системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Библиографических ссылок 5.

УДК 517.9

О ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПО НЕПОЛНЫМ ДАННЫМ РАССЕЯНИЯ. Д.Ш.Лундина. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 72-83.

В работе проводится уточнение оценок для разности собственных функций двух краевых задач, данные рассеяния которых совпадают на конечном интервале энергии $\lambda^2 < N^2$ Так,например,показано,что если восстановление осуществляется в том же классе потенциалов, который рассматривался в работе [I] , то справедливо неравенство

$$\int_0^\infty |u_1(x,\mu) - u_2(x,\mu)|^2 dx \leqslant \frac{32\alpha_1(0)e^{4\alpha_1(0)}N}{\pi(N^2-\mu^2)} .$$

При дополнительных ограничениях на класс потенциалов получены более точные оценки. В частности, если потенциалы абсолютно непрерывны, то имеет место оценка

$$\int_0^\infty |u_1(x,\mu) - u_2(x,\mu)|^2 dx \leqslant \frac{16\alpha(0)e^{4\alpha_1(0)}}{\pi(N^2-\mu^2)} .$$

[I] Д.Ш.Лундина и В.А.Марченко. "Уточнение оценок, характеризующих устойчивость обратной задачи теории рассеяния", Мат.сборник, т.78 (I20):4,стр. 375-384, I969.

Таблица I, библиографических ссылок 2.

УДК 5I7.9

ПРЕДЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ОБЛАСТИ С МНОГОСЛОЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ. В.А.Львов. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, I969, 84-99.

В работе рассматривается краевая задача в области, граница которой состоит из системы параллельных плоскостей. Краевые условия типа сопряжения. Исследован случай, когда число плоскостей возрастает и расстояния между ними стремятся к нулю. Доказанно, что решение исходной краевой задачи стремится к решению во всем пространстве некоторого уравнения эллиптического типа.

Библиографических ссылок 3.

УДК 5I3.83

ГОМЕОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ. Е.А.Щербаков. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, I969, I00-II6.

В работе рассматривается вырождающаяся эллиптическая система вида:

$$p(x,y)\varphi_x(x,y) = \Psi_y(x,y), \quad p(x,y)\varphi_y(x,y) = -\Psi_x(x,y).$$

Вырождение обеспечивается функцией $p(x,y)$, обращающейся в нуль на некотором множестве в области определения функций φ, Ψ .

В работе доказывается существование таких решений приведенной

системы, которые осуществляют топологическое отображение заданных областей на канонические.

Библиографических ссылок 10.

УДК 517.9 ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. А.С.Сохин, Сб."Математическая физика, функциональный ачализ", вып.I, 1969, 117-125.

В статье построен оператор, переводящий ограниченные при $x \to \infty$ решения $Z_\alpha(\lambda x)$ уравнения

$$z'' - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} z + \lambda^2 z = 0, \qquad 0 < x < \infty, \ \alpha > 0$$

в решения уравнения

$$y'' - \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} y + \lambda^2 y - q(x) y = 0, \ 0 < x < \infty,$$

ведущие себя при $x \to \infty$ так же как $Z_\alpha(\lambda x)$.

Существование оператора и его оценка доказаны для локально суммируемых функций $q(x)$, подчиненных условию

$$\int_x^\infty t^{1+\alpha} |q(t)| dt < \infty, \ x > 0.$$

Библиографических ссылок 3.

УДК 517.9 УСЛОВИЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТИ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ. Ф.С.Рофе-Бекетов. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 126-135.

Получены достаточные условия самосопряженности оператора Шредингера в бесконечных областях с самосопряженным краевым условием на границе области, но без дополнительных краевых условий на бесконечности. В случае оператора Шредингера во всем пространстве полученные условия обобщают теорему Титчмарша и Сиерса, в отличие от которой не требуется сферической симметричности от миноранты потенциала.

Библиографических ссылок 5.

УДК 517.53

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЦЕЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА. Б.Я.Левин. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 136-146.

В статье изучаются вопросы интерполирования целыми функциями класса $\mathcal{L}_p^\sigma$, то есть, экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ и принадлежащих $\mathcal{L}_p(-\infty, \infty)$. За узлы интерполяции выбираются корни $\{\lambda_n\}$ специальных целых функций, называемых функциями "типа синуса". В частном случае $\lambda_n = n$ $/\pm n = 0, 1, 2, \ldots/$. Доказано, что каждой последовательности $\{C_n\}_{-\infty}^{\infty} \in \ell_p$ $/1 < p < \infty/$ отвечает такая $F(z) \in \mathcal{L}^\pi_p$, что $F(\lambda_n) = C_n$. Это соответствие линейное и топологическое.

Результаты применяются к теории базисов показательных функций $\{e^{i\lambda_n t}\}$.

Библиографических ссылок 9.

УДК 517.512.2/.4

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^2(-\infty,\infty)$ С ВЕСОМ. А.М.Рыбалко. Сб. "Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 147-164.

В работе дано обобщение теории Планшереля-Фурье на случай пространства растущих функций L^2_W, где весовая функция $W(\lambda)$ обращается в нуль на целом интервале интегрирования.

Библиографических ссылок 6.

УДК 517.512.2/4

ЗАМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ А.М.РЫБАЛКО "О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ $L^2(-\infty,\infty)$ С ВЕСОМ". Н.И.Ахиезер. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 165-171.

В статье А.М.Рыбалко рассматривается гильбертово пространство H_Ω со скалярным произведением

$$(f,g)_\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_E f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\sqrt{\frac{\lambda+1}{\lambda-1}}\,\frac{d\lambda}{\Omega(\lambda)},$$

где $E = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$, а $\Omega(\lambda)$ - целая функция экспоненциального типа $2\sigma > 0$, удовлетворяющая условиям

I) $\Omega(\lambda) > 0 \quad (\lambda \in E)$

2) $\Omega(\lambda) > 0 \qquad (-1 < \lambda < 1)$

3) $\sup\limits_{R>1} \int\limits_{1}^{R} \frac{\ln[\Omega(\lambda)\Omega(-\lambda)]}{\lambda^2} d\lambda < \infty .$

Обозначая H_Ω^σ подпространство H_Ω, образованное целыми функциями экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, автор строит в H_Ω^σ ортонормированный базис $\{\omega_k(\lambda)\}^\infty$, а также однопараметрическое семейство целых функций $Q(x, \lambda)$ экспоненциального типа $x \geqslant \sigma$ и доказывает, что любая функция $f(\lambda) \in H_\Omega$ однозначно представима в виде

$$f(\lambda) = g(\lambda) + \varphi(\lambda),$$

где

$$g(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \omega_k(\lambda), \quad a_k = (f, \omega_k)_\Omega$$

и

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_0^\infty A(x) Q(x, \lambda) dx, \quad A(x) = (f, Q)_\Omega .$$

При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\|f\|_\Omega^2 = \sum |a_k|^2 + \int\limits_0^\infty |A(x)|^2 dx.$$

2^0. В статье Н.И.Ахиезера показано, что условие 2) можно отбросить. Приведенная конструкция основана на работе Н.И.Ахиезера, опубликованной в ДАН СССР за 1961 год, том 141, № 4.

Рисунков 1.

УДК 517.53 ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ СВОЙСТВОМ "ХРЕБТА". В.В.Зимогляд. Сб."Математическая физика и функциональный анализ",вып.I, 1969, 172-190.

В 1958г. Э.Лукач доказал, что целая функция вида

$$\varphi(z) = \exp\{\lambda_1 \exp[iz] + \lambda_2 \exp[-iz] + f(z)\},$$

где $f(z)$ – полином, может быть характеристической функцией вероятностного закона лишь в том случае, когда $f(z)$ – полином степени не больше 2. 1963г. И.В.Островский доказал более общую теорему:

Если целая функция вида

$$\varphi(z) = F(\lambda_1 \exp[iz] + \lambda_2 \exp[-iz] + f(z)),$$

где $\max\limits_{|\xi|=r} |F(\xi)| = F(r)$, является хребтовой, т.е.

$$|\varphi(z)| \leq |\varphi(i\,\mathrm{Jm}\,z)|$$

(таким свойством обладают все целые характеристические функции), то $f(z)$ либо полином степени не выше 2, либо целая функция порядка не менее ρ_0, где $\rho_0 \geq 0{,}02$ – абсолютная постоянная.

Точное значение постоянной ρ_0 И.В.Островскому найти не удалось.

В настоящей работе автор доказывает, что точное значение константы ρ_0 есть I.

Рисунков I, библиографических ссылок 7.

УДК 517.53

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ М.Б.БАЛКА. И.В.Островский. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 191-202.

Дается новое более простое и элементарное доказательство теоремы М.Б.Балка об общем виде целой полианалитической функции с ограниченным множеством нулей.

Библиографических ссылок 5.

УДК 517.53

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВЕ C^n.
Л.И.Ронкин.Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 203-208.

Доказана следующая

ТЕОРЕМА. Пусть $f(z)$, $z \in C^n$, – целая функция нормального типа при порядке I. Пусть, далее, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $C_1^{(\varepsilon)}$ и $C_2^{(\varepsilon)}$, что

$$|f(x)| \leq C_1^{(\varepsilon)} e^{\varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_j|} \qquad \forall x \in R^n$$

и

$$|f(iy)| \leq C_2^{(\varepsilon)} e^{\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon)|y_j|} \quad \forall y \in R^n.$$

Тогда, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая константа $C_3^{(\varepsilon)}$, что

$$|f(z)| \leq C_3^{(\varepsilon)} \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} (\sigma_j + \varepsilon)|y_j| + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} |x_j|\right\}.$$

Эта теорема является усилением соответствующего результата А.Мартино, см. A.Martineau, Sur les fonctionelles analytiques..., J.Analyse Math., 11, 1-162. 1963.

Библиографических ссылок 5.

УДК 512.8

О СОБСТВЕННЫХ ЧИСЛАХ КОЛЬЦЕВЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ. Г.Р.Белицкий. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 209-211.

В работе доказано, что полугруппа, порожденная собственными числами эндоморфизма, индуцированного в фактор-алгебре по обобщенно-нильпотентной подалгебре, совпадает с полугруппой, порожденной собственными числами исходного эндоморфизма.

УДК 517.785

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ ЭРМИТОВЫХ ФОРМ. И.Е.Овчаренко. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 212-219.

Устанавливаются условия, при которых эрмитова билинейная форма, заданная на тензорном произведении $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ линейных множеств Φ_1 и Φ_2 распадается в прямую ортогональную сумму форм более простой структуры. Устанавливаются также условия, при которых симметрические операторы, действующие в $\Phi_1 \otimes \Phi_2$ распадаются в прямую ортогональную сумму своих симметрических ограничений.

Библиографических ссылок 7.

УДК 517.519.5

О ГИПЕРФИНИТНЫХ ФАКТОРАХ ТИПА Ш. В.Я.Голодец. Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 220-228.

В статье доказано, что коммутант для гиперфинитного фактора типа Ш есть снова гиперфинитный фактор типа Ш. При доказательстве использованы результаты И.М.Гельфанда и М.А.Наймарка о позитивных функционалах на C^* - алгебрах. Метод доказательства применим к гиперфинитным факторам любого типа, и, в частности, к факторам типа Π_∞.

Библиографических ссылок 6.

УДК 517.519.5

О ФАКТОРАХ ТИПА Π_1 СО СВОЙСТВОМ Γ. В.Я.Голодец, А.М.Степина, Сб."математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 229-249.

В статье доказывается существование пяти не изоморфных не гиперфинитных факторов со свойством

Библиографических ссылок 10.

УДК 517.519.5

АППРОКСИМАТИВНО КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И АППРОКСИМАТИВНО КОНЕЧНЫЕ ФАКТОРЫ. В.Я.Голодец, Сб."Математическая физика и функциональный анализ", вып.I, 1969, 250-253.

В статье получены новые результаты о построении гиперфинитных факторов типа Π_I с помощью скрещенных произведений.

Библиографических ссылок 9.

БЦ 20463, подписано к печати I5.XП-I969,физ.п.л.I7;усл.п.л.I7,
заказ 424, тираж 500. Цена I рб.20к.

Ротапринт ФТИНТ АН УССР г.Харьков,86, пр.Ленина, 47.