Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
Физико-технический институт низких температур

ОПЕРАТОРЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Сборник научных трудов

Киев Наукова думка 1987

УДК 512 + 517 + 519 + 962.22

Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций: Сб. науч. тр. / Редкол.: В.А.Марченко (отв. ред.) и др. - Киев: Наук. думка, 1987. - 148 с.

В сборнике помещены статьи, посвященные современным вопросам математической физики, функционального анализа и теории функций. Предложен новый метод оценок показателей Ляпунова для конечно-разностных уравнений. Доказано существование и единственность решений стохастической системы уравнений Кармана. Изучены марковские состояния на C^x-алгебрах, а также когомологии эргодических динамических систем. Установлена полнота и минимальность системы функций Рэлея.

Для специалистов в области математической физики и функционального анализа.

Редакция информационной литературы

О $\frac{1702050000-567}{М221(04)-87}$ 178-87

СОДЕРЖАНИЕ

Пастур Л.А. Оценки снизу показателя Ляпунова некоторых конечно-разностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами 3
Фиготин А.Л. Эргодические свойства и существенная самосопряженность случайных матричных операторов 13
Новицкий М.В. Спектральные инварианты оператора Шредингера на торе с константой связи при потенциале 27
Чуешов И.Д. О построении решений стохастической модифицированной системы уравнений Кармана 32
Чудинович И.Ю. Осреднение цилиндрических оболочек, ослабленных большим числом отверстий 43
Робук В.Н. О классификации эволюционных уравнений второго порядка 58
Безуглый С.И. Внешняя сопряженность автоморфизмов из нормализатора потока 66
Жолткевич Г.Н. Марковское свойство для состояний на алгебрах квазилокальных наблюдаемых квантовых систем 74
Гефтер С.Л. О когомологиях эргодического действия Γ-группы на однородном пространстве компактной группы Ли 77
Кацнельсон В.Э., Хейфец А.Я., Юдицкий П.М. Абстрактная интерполяционная задача и теория расширений изометрических операторов 83
Островский М.И., Пличко А.Н. Свойства Банаха - Сакса и задача трех пространств 96
Любич Ю.И. О покрытиях линейного пространства нетривиальными подпространствами 105
Чистяков Г.П. Замечание к теореме Н.А.Сапогова об устойчивости разложений нормального распределения 108
Любарский Ю.И. Полнота и минимальность системы Релея . . . 116
Бейдар К.И., Столин А.А. О группе Пикара проективного предела колец 126
Смилянский В.Р. Множители Стокса для дифференциального уравнения для сфероидальных волновых функций 131

УДК 517.4

Л.А.Пастур

ОЦЕНКИ СНИЗУ ПОКАЗАТЕЛЯ ЛЯПУНОВА НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Показатели Ляпунова являются важными характеристиками решений дифференциальных и конечно-разностных уравнений, представляющих интерес с точки зрения как самой теории этих классов уравнений, так и теории устойчивости, эргодической и спектральной теорий. В простейшем, но чрезвычайно содержательном случае конечно-разностного уравнения II порядка вида

$$u_{n+1}+u_{n-1}+b_n u_n=\lambda u_n \qquad (1)$$

для решения задачи Коши, задаваемого условиями

$$u_0=\cos\alpha,\quad u_1=\sin\alpha,\quad \alpha\in[0,\pi), \qquad (2)$$

показатель Ляпунова γ определяется как

$$\gamma=\sup_{\alpha\in[0,\pi)}\lim_{n\to\infty}(2n)^{-1}\ln\left(|u_n|^2+|u_{n+1}|^2\right) \qquad (3)$$

в предположении, что имеется предел справа. Он обычно существует*, когда коэффициенты соответствующего уравнения как функции координаты характеризуются достаточно регулярным поведением. Наиболее изучен случай периодических коэффициентов, для которого новые важные результаты, касающиеся роли показателей Ляпунова в спектральной теории оператора Шредингера (непрерывного аналога (1)), были получены В.А.Марченко и И.В.Островским [2]. Достаточно много известно о показателях Ляпунова уравнений II порядка со случайными стационарными независимыми или марковскими коэффициентами [3,4].

---

* В общем случае [1] можно определить верхние и нижние показатели Ляпунова, заменяя в (3) операцию предела операциями верхнего и нижнего пределов. Уравнения, для которых эти пределы совпадают, называют правильными.

Как показали данные, полученные в последние годы [5], свойства показателей Ляпунова уравнений с почти периодическими коэффициентами, занимающими, очевидно, промежуточное положение между периодическими и случайными, могут весьма значительно отличаться от свойств этой величины для указанных "крайних" случаев. Так, в работе [6] высказаны эвристические соображения, согласно которым для уравнения (1)* при

$$b_n = 2g \cos 2\pi \alpha_n, \tag{4}$$

$$\alpha_n = \alpha n + \omega, \quad \omega \in [0, \pi) \quad g \in R \tag{5}$$

и иррациональном α показатель Ляпунова удовлетворяет оценке

$$\gamma \geqslant \ln |g| \tag{6}$$

и, следовательно, положителен при $g \geqslant 1$ и всех значениях ω и $\lambda \in R$. Однако при рациональном α (периодический случай) $\gamma = 0$, при тех и только тех значениях λ, которые лежат в зонах устойчивости (непрерывного спектра) соответствующего уравнения, и любых величинах ω и g, а при независимых при разных $n \in \mathbb{Z}$ и одинаково распределенных случайных α_n из (4) γ положителен при всех значениях g и λ [3,4].

Результаты работы [6] обоснованы в [7,8]. В настоящей работе, обобщая метод дуальности, использованный в [6-8], а также учитывая результаты [9], мы получаем ряд оценок снизу для показателя Ляпунова уравнения (1) для весьма широкого класса коэффициентов b_n, представляющих собой тригонометрические полиномы. С помощью этих оценок удается найти примеры "потенциалов" b_n в (1), представляющих собой, в отличие от (4) - (5), квазипериодическую функцию дискретного аргумента с любым числом базисных частот (см. формулы (25), (26)).

1. Оценки, основанные на дуальности. Пусть даны:

а) прямоугольная $L \times M$-матрица

$$\hat{\alpha}: R^L \to R^M; \tag{7}$$

б) точки $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_M)$ и $\tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_L)$, ω_j, $\tilde{\omega}_j \in [0,1)$, M- и L-мерных торов T^M и T^L.

в) две финитные функции A_p и B_Q, заданные на решетках $\mathbb{Z}^L$ и $\mathbb{Z}^M$:

$$A_p = \{a_p\}_{p \in R}, \qquad B_Q = \{b_q\}_{q \in Q},$$
$$a_p^* = a_{-p}, \qquad b_q^* = b_{-q}, \tag{8}$$

---

* Уравнения (1), (4), (5) принято называть уравнениями почти Матье.

где P и Q – конечные множества в $\mathbb{Z}^L$ и $\mathbb{Z}^M$. Эти объекты определяют конечно-разностную операцию вида

$$l_{A,B}[u]_n = \sum_{p\in P} a_p u_{n+p} + \sum_{q\in Q} b_q e^{2\pi i q(\hat{\alpha} n+\omega)} u_n \quad n\in \mathbb{Z}^L, \tag{9}$$

а также дуальную операцию вида

$$\tilde{l}_{B,A}[v]_m = \sum_{q\in Q} b_q v_{m+q} + \sum_{p\in P} a_p e^{2\pi i p(\tilde{\alpha}_m+\tilde{\omega})} v_m \quad m\in \mathbb{Z}^M, \tag{10}$$

где $\tilde{\alpha}$ – матрица, трансионированная к $\hat{\alpha}$.

Рассмотрим сначала случай $L=1$, когда операция (9) является одномерной конечно-разностной операцией порядка $k=\max_{p\in P} p\geq 2$, и матрица $\hat{\alpha}$ есть столбец $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_M)$. Будем предполагать, что эти числа линейно независимы, т.е. сравнение $\alpha_1 q_1+\ldots+\alpha_M q_M\equiv 0 \pmod 1$ возможно лишь при $q_1=\ldots=q_M=0$. Тогда операция $l_{A,B}$ определяет в пространстве $l^2(\mathbb{Z})$ самосопряженный оператор $H_{A,B}$, который, в силу известной [14] теоремы Вейля о равномерном распределении вектора α_n по $\mathbb{T}^M$, будет метрически транзитивным [4]. Следовательно, ему можно сопоставить нормированную функцию распределения собственных значений (НФР) $N(\lambda;\ A,B)$ [10], в которой обозначены зависимости от наборов коэффициентов недиагональной и диагональной частей (9).

Аналогичным образом дуальная операция (10) определяет метрически транзитивный оператор $\tilde{H}_{B,A}$ в пространстве $l^2(\mathbb{Z}^M)$ с НФР $\tilde{N}(\lambda;\ B,\ A)$.

<u>Лемма 1</u>. Имеет место равенство

$$N(\lambda;A,B)=\tilde{N}(\lambda;B,A) \quad M=1. \tag{11}$$

Эта лемма в случае $M=1$ и множеств P и Q вида $\{1,-1\}$, т.е. уравнения почти Матье, доказана в [8] путем аппроксимации иррационального числа α рациональными и применением к полученному уравнению с периодическими коэффициентами подхода Гельфанда к спектральной теории таких уравнений. В рассматриваемом более общем случае соотношение (11) доказывается идейно по тому же плану, но технически более сложно. Другое доказательство (11) может быть получено с помощью обобщенного преобразования Фурье, которое для псевдоконечно-разностных операторов с квазипериодическими коэффициентами развито в работе [11].

Обозначим через q^* точку множества Q, у которой все координаты максимальны,

$$q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*), \quad q_i^* = \max_{q \in Q} q_i.$$

Лемма 2. Если $|b_{q^*}| < 1$, то величина

$$\tilde{\Gamma}(\lambda; B, A) \equiv \int \ln|\lambda - \mu| \tilde{N}(d\mu; B, A) \tag{12}$$

неотрицательна при всех вещественных λ:

$$\tilde{\Gamma}(\lambda; B, A) \geq 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Эта лемма в случае уравнения II порядка (1) с метрически транзитивным и ограниченным коэффициентом b_n также доказана в [6-8], где она приводится как следствие так называемой формулы Таулесса

$$\gamma(\lambda) = \int \ln|\lambda - \mu| N(d\mu) \tag{14}$$

и неотрицательности показателя Ляпунова уравнения (1). В случае обыкновенного конечно-разностного уравнения более высокого порядка величина $\tilde{\Gamma}(\lambda, B, A)$ уже не совпадает с $\gamma(\lambda)$, а равна определенным образом нормированной сумме всех положительных характеристических показателей этого уравнения. Для уравнения в частных разностях, порождаемого в рассматриваемой ситуации дуальной операцией $\tilde{l}_{B,A}$, неравенство (13) доказывается предельным переходом от случая "бруса", для которого координата m в (10) по всем направлениям, кроме одного, изменяется в конечных пределах и, следовательно, соответствующее уравнение превращается в систему конечного числа одномерных уравнений. Для конечно-разностного оператора Лапласа, когда множество Q в (10) есть совокупность ближайших к началу координат точек $\mathbb{Z}^M$, соотношение (13) доказано в [13]. Более общий необходимый для наших целей случай требует некоторых дополнительных аргументов и будет рассмотрен в другой работе.

Теорема. Пусть в уравнении (1) коэффициент b_n имеет вид

$$b_n = \sum_{q \in Q} b_q \, e^{2\pi i (q \alpha n + \omega)}, \tag{15}$$

где $Q \subset \mathbb{Z}^M$ и конечно, коэффициенты b_q удовлетворяют условию (8), $\omega \in \mathbb{T}^M$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_M)$ и 1 - набор рационально независимых чисел. Тогда для показателя Ляпунова (3) и уравнения (1) имеет место оценка

$$\gamma(\lambda) \geq \ln|b_{q^*}|. \tag{16}$$

Доказательство. Обозначим через $N(\lambda; B)$ НФР метрически транзитивного оператора, порождаемого уравнениями (1), (15). Тогда согласно (11)

$$N(\lambda;B)=N(\lambda;\{-1,1\},B)=\tilde N(\lambda;B,\{-1,1\}). \qquad (17)$$

Кроме того, для НФР $N(\lambda;A,B)$ оператора, порождаемого произвольной операцией вида (9), справедливо очевидное соотношение

$$N(\lambda;A,B)=N\left(\frac{\lambda}{c};\ \frac{B}{c};\ \frac{A}{c}\right) \quad c\in\mathbb{R}. \qquad (18)$$

Выбирая $c=|b_{q^*}|$, найдем из (17), (18)

$$N(\lambda;B)=\tilde N\left(\frac{\lambda}{|b_{q^*}|};\frac{B}{|b_{q^*}|},\ |b_{q^*}|^{-1}\{1,-1\}\right).$$

Используя это соотношение и формулу Таулесса (14), получаем

$$\gamma(\lambda)=\ln|b_{q^*}|+\tilde\Gamma\left(\frac{\lambda}{|b_{q^*}|};\ \frac{B}{|b_{q^*}|},\ |b_{q^*}^{-1}|\{1,-1\}\right).$$

В силу леммы 2 второе слагаемое справа неотрицательно, в результате чего и получаем неравенство (16). Теорема доказана.

Рассмотрим несколько примеров использования оценки (16).

1. Пусть в (15) $M=1$, так что

$$b_n=\sum_{q=-Q}^{Q} b_q e^{2\pi i q(\alpha n+\omega)} \qquad Q\in\mathbb{N},$$

где α – иррациональное число. В этом случае из (16) следует

$$\gamma(\lambda)\geqslant \ln|b_Q|. \qquad (19)$$

Это неравенство, обобщающе доказанное в [6–8], на случай $Q>1$ установлено в работе [9] другим методом, о котором речь пойдет ниже. Таким образом, показатель Ляпунова дискретного одномерного уравнения Шредингера (1) с потенциалом $b_n=\mathcal{P}_Q(e^{2\pi i\alpha n})$, где

$$\mathcal{P}_Q(z)=\sum_{|q|\leq Q} b_q e^{2\pi i q\omega} z^q, \qquad b_q^*=b_{-q}, \qquad (20)$$

положителен при всех значениях $\lambda\in\mathbb{R}$, если $|b_Q|>1$. Отсюда, в частности, вытекает отсутствие абсолютно непрерывного спектра у соответствующего оператора в $l^2(\mathbb{Z})$ [4,8].

2. В общем случае ($M>1$) последовательность (15) также может быть представлена в виде

$$b_n=\mathcal{P}_Q\left(e^{2\pi i\alpha_1 n},\dots,e^{2\pi i\alpha_M n}\right) \quad n\in\mathbb{Z}, \qquad (21)$$

где

$$\mathcal{P}_Q(z_1,\dots,z_M)=\sum_{q\in Q} b_q\, e^{2\pi i q\omega} z_1^{q_1},\dots,z_M^{q_M}. \tag{22}$$

При этом оценка (16) оказывается тривиальной для простейшего обобщения (4), (5) на случай двух частот

$$b_n=2g_1\cos 2\pi(\alpha_1 n+\omega_1)+2g_2\cos 2\pi(\alpha_2 n+\omega_2), \tag{23}$$

когда $b_{q*}=b_\Pi=0$, и дает нетривиальный результат для другого столь же простого потенциала

$$b_n=4g\cos 2\pi(\alpha_1 n+\omega_1)\cos 2\pi(\alpha_2 n+\omega_2), \tag{24}$$

поскольку здесь $b_{q*}=b_\Pi=1$ и, следовательно,

$$\gamma(\lambda)\geqslant \ln|g|, \tag{25}$$

как и для потенциала (4), (5). Функция (24) – пример квазипериодического потенциала с более чем одной базисной частотой, для которого показатель Ляпунова положителен. Потенциал вида $b_n=2g\cos\times$ $\times[2\pi(\alpha_1+\alpha_2)n+\omega_1+\omega_2]$, имеющий две базисные частоты, следует считать тривиальным, поскольку он сводится к потенциалу (4), (5) с одной частотой. Аналогом (25) для произвольного M является, очевидно, потенциал

$$b_n=2^M g\prod_{j=1}^{M}\cos 2\pi(\alpha_j n+\omega_j). \tag{26}$$

Сформулируем теперь общее условие положительности $\gamma(\lambda)$.

С л е д с т в и е. Показатель Ляпунова уравнения (1) с потенциалом b_n вида (15) положителен, если модуль коэффициента b_q с номером q^*, представляющим собой лежащую в области $q_j\geqslant 0$, $j=1,\dots,M$ вершину прямоугольного, описанного вокруг множества Q, параллелепипеда, грани которого перпендикулярны координатным осям.

2. Оценки, основанные на субгармоничности. Будем предполагать в соответствии с общей теорией [4,12], что последовательность b_n представляет собой реализацию метрически транзитивного процесса. Это означает, что существует абстрактная динамическая система (Ω, $\mathcal{F}$, P, T), где Ω – множество; $\mathcal{F}$ – σ-алгебра его подмножеств; P – вероятностная мера и T – сохраняющее меру и метрически транзитивное преобразование Ω в себя, а также измеримая функция $V(\omega)$ на Ω, такая, что $b_n=V(T^n\omega)$. Тогда [12]

$$\gamma(\lambda)=\lim_{n\to\infty} n^{-1}E\{\ln\|\mathcal{T}_n(\omega)\|\}, \tag{27}$$

где символ $E\{\dots\}$ обозначает операцию математического ожидания (интегрирования) по мере P, а $\mathcal{T}_n(\omega)$ – матрица II порядка вида

$$\mathcal{T}_n(\omega)=\tau(T^n\omega),\dots,\tau(T\omega)\,\tau(\omega), \tag{28}$$

где

$$\tau(\omega)=\begin{pmatrix} \lambda-V(\omega) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

В рассмотренном выше случае $\Omega=\mathbb{T}^M$; P – мера Лебега; $d\omega=d\omega_1,\dots,d\omega_M$; T задается в виде

$$(T\omega)_j\equiv\omega_j+\alpha_j \qquad (\mathrm{mod}\ 1). \tag{30}$$

Это преобразование, очевидно, сохраняет меру $d\omega$ на $\mathbb{T}^M$ и из известной теоремы Г.Вейля о равномерном распределении вытекает, что T метрически транзитивно [4]. Рассматривая $\mathbb{T}^M$ как многообразие в $\mathbb{C}^M$ вида

$$\mathbb{T}^M=\{(z_1,\dots,z_M)\in\mathbb{C}^M,\quad |z_j|=1\},$$

преобразование T можно представить следующим образом:

$$(z_1,\dots,z_M)\xrightarrow{T}(\beta_1 z_1,\dots,\beta_M z_M),\quad \beta_j=e^{2\pi i\alpha_j}. \tag{31}$$

Получаемые оценки показателя Ляпунова имеют основой следующее простое, но важное, установленное в [9], предложение.

Предложение. Пусть f – голоморфное отображение полидиска $\mathbb{D}^M=\{(z_1,\dots,z_M)\in\mathbb{C}^M,\ |z_j|\leq 1\}$ в себя, причем:

а) $f(0)=0$;

б) $f\,\mathbb{T}^M\subset\mathbb{T}^M$; (32)

в) сужение преобразования f на $\mathbb{T}$ сохраняет меру Лебега $d\omega$.

Пусть $\tilde{\tau}(z)$ – голоморфное в $\mathbb{D}^M$ семейство матриц порядка m и

$$\tilde{\mathcal{T}}_n(z)\equiv\tilde{\tau}(f^n z),\dots,\tau(fz)\,\tilde{\tau}(z). \tag{33}$$

Тогда для величины

$$\Lambda=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\int_{\mathbb{T}^M}\ln\|\tilde{\mathcal{T}}_n(\omega)\|\,d\omega \tag{34}$$

имеет место оценка

$$\Lambda\geqslant\ln R_{spec}\,\tilde{\tau}(0), \tag{35}$$

где

$$R_{spec}\,\tilde{\tau} = \lim_{n\to\infty} \|\tilde{\tau}^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|\tilde{\tau}^n\|^{1/n}$$

спектральный радиус матрицы $\tilde{\tau}$.

Доказательство этого предложения вытекает из того, что $\ln\|\tilde{\mathcal{T}}_n(z)\|$ является плюрисубгармонической функцией в D^M, для которой стоящий справа в (34) интеграл является средним значением и оценивается снизу величиной указанной функции в нуле.

Возможность использования этого предложения для оценок снизу показателя Ляпунова, записываемого согласно (27) аналогичным образом, основана на возможности аналитического продолжения матриц функций (28), (29) или матриц, имеющих ту же норму, с тора T^M в полидиск D^M. Приведем примеры такого продолжения.

1. Рассмотрим случай (15). Для этого определим преобразование $f: D^M \to D^M$ следующим образом: $(f(z))_j = e^{2\pi i\alpha_j} z_j$. Легко видеть, что так определенное f удовлетворяет условиям (32). Тогда, если

$$\zeta_n = \prod_{j=1}^{M} \left(f^n(z)\right)_j^{q_j^*},$$

то на основании (22) можем утверждать, что функция на D^M вида $\tilde{\mathcal{P}}_Q(z) = \zeta_n \mathcal{P}_Q(z)$ является полиномом только по неотрицательным степеням z_j и поэтому аналитична в D^M. Кроме того, так как $|\zeta_n|_{z\in T} = 1$, то показатель Ляпунова (27) может быть записан в виде

$$\gamma(\lambda) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \int_{T^M} \ln\|\tilde{\mathcal{T}}_n(\omega)\|\,d\omega, \tag{36}$$

где $\tilde{\mathcal{T}}_n(\omega)$ строится по формуле (33), в которой согласно (28), (29)

$$\tilde{\tau}(z) = \begin{pmatrix} \lambda\zeta_n - \tilde{\mathcal{P}}_Q & -\zeta_n \\ \zeta_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Таким образом, все условия предложения выполнены и поэтому в силу (35) и того, что $\tilde{\mathcal{P}}_Q(0) = b_{-q^*}$, приходим к оценке (16).

2. Рассмотрим теперь более сложный пример, когда аргументы тригонометрических функций, из которых составляется коэффициент b_n в (1), содержат полиномы по n степени, большей 1.

Пусть $p_M(x) = \alpha_0 x^M + \ldots + \alpha_{M-1}x + \alpha_M$ – полином степени M, у которого коэффициент α_0 иррационален и

$$b_n = \sum_{|q| \le Q} b_q\, e^{2\pi i q p_M(n)}, \tag{38}$$

где коэффициенты b_q, $q \in \mathbb{Z}$ – такие же, как в (20). Как показано в [14], для любого полинома описанного вида найдутся натуральные числа p_{jk}, $1 \le k \le j \le M$ и иррациональное число α, задающие преобразование T тора $\mathbb{T}^M$ в себя

$$T\omega = (\omega_1 + \alpha_1\, \omega_2 + p_2\, \omega_1, \ldots, \omega_M + p_{M,M-1} + p_{MM}\, \omega_M) \tag{39}$$

и точка ω_0 тора $\mathbb{T}^M$ такие, что значения полинома $p_M(n)$ по модулю 1 равны M-й координате точки $\mathbb{T}^n(\omega_0)$:

$$p_M(n) \equiv (\mathbb{T}^n \omega_0)_M, \quad mod\ 1.$$

Преобразование (39) сохраняет меру Лебега на $\mathbb{T}^M$ и является метрически транзитивным (T – так называемый сложный косой сдвиг на $\mathbb{T}^M$). Поэтому коэффициенты вида (38) являются реализациями метрически транзитивного процесса и соответствующий показатель Ляпунова может быть записан в виде (27) – (29). Например, в случае $M = 2$:

$$T\omega = (\omega_1 + \alpha, \quad \omega_2 + 2\omega_1)$$

и

$$T^n\omega = (\omega_1 + n\alpha, \ \omega_2 + 2n\omega_1 + n(n-1)\alpha),$$

так что соответствующий полином имеет вид

$$p_2(x) = \alpha x^2 + (2\omega_1 - \alpha)x + \omega_2,$$

где α – иррациональное число.

В дальнейшем, чтобы избежать громоздких формул, ограничимся этим простейшим нетривиальным случаем. Общий случай $M > 2$ принципиально ничем не отличается от этого. Для того чтобы воспользоваться в рассматриваемом примере Предложением, достаточно заметить, что выражение (38) может быть записано в виде

$$b_n = \tilde{P}_Q(f^{(n)}(z))/\zeta_n(z)\Big|_{z \in \mathbb{T}^2},$$

где

$$\tilde{P}_Q(z) = \sum_{r=0}^{2Q} b_{r-Q}\, z_1^{2r} z_2^{r};$$

$$f(z) = (\beta z_1, \beta z_1^2 z_2); \quad \beta = e^{2\pi i\alpha};$$

$$\zeta_n = (f^{(n)}(z))_1^Q\, (f^{(n)}(z))_2^Q; \ |\zeta_n|\Big|_{z \in \mathbb{T}^2} = 1.$$

Нетрудно убедиться, что с помощью этих объектов $\gamma(\lambda)$ может быть снова записан в виде (33), (34). Поэтому на основании Предложения имеем оценку

$$\gamma(\lambda) \geqslant \ln|b_0|,$$

совпадающую с оценкой (19), справедливой при $M = 1$. Можно показать, что эта оценка будет име[illegible] место при любом натуральном M.

Таким образом, метод оценки снизу показателя Ляпунова, описанный в п. 2 и основанный на приведенном в работе [9] неравенстве (35), быстрее приводит к цели и является более общим, чем метод, изложенный в п. 1*. Однако свойство дуальности конечноразностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, на котором основан метод п. 1, представляется весьма важным с концептуальной точки зрения и уже неоднократно позволял получать весомые результаты в спектральной теории таких уравнений [5]. Поэтому следует установить по возможности более широкие рамки его и понять общий механизм использования. Именно эти соображения явились основанием рассмотрений, проведенных нами в п. 1.

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.Н., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова. - М. : Наука, 1966. - 571 с.
2. Марченко В.А. Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения. - Киев : Наук. думка, 1977. - 328 с.
3. Ishii K. Locali[illegible]ation of eigenstates and transport phenomena in one-dimensional disordered system // Progr.Theor.Phys.Suppl.- 1973. - N 53.-P.77-120.
4. Pastur L. Spectral properties of disordered systems in one-body approximation // Commun.Math.Phys. - 1980. - 75., N 1. - P. 179-196.
5. Simon B. Almost periodic schrödinger operation : A Review // Adv.Appl.Math. - 1982. - 3, N 3. - P.469-490.
6. Aubry G., Andre G. Analyticity breaking and Anderson localization in incommensurate lattices // Ann.Israel Phys.Soc.- 1980. - 3, N 1. - P.133-140.
7. Avron Y., Simon B. Singular continuous spectrum for a class of almost periodic jacobi matrices // Bull.Amer.Math.Soc.-1982.- 6, N 1. - P.81-83.
8. Figotin A.L., Pastur L.A. The positivity of Lyapunov exponent and tue absence of absulutely continuous spectrum for the Almost-Mathieu equation // J.Math.Phys.-1984.-25, N 4. - P. 774-777.
9. Hermann M. Une methode pour minorer des Exposants de Lyapunov. Palaiseau, 1982. -57 p.-(Preprint / C.N.R.S. Ecale Polytechnique, N 557).
10. Пастур Л.А., Фиготин А.Л. Эргодические свойства распределения собственных значений некоторых классов случайных самосопряженных операторов // Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. - Киев : Наук. думка, 1978. - с. 117-133.

* Так, неясно, как, метод, изложенный в п. 1, можно использовать в случае коэффициентов вида (38), не являющихся квазипериодическими функциями.

11. Bellissard J., Testard D. Almost periodic Hamiltonians.- Marseille, 1981. - 90 p.-(Preprint / C.N.R.S. Centre de Physique Theorique, N CPI-81).
12. Оселедец В.И. Мультипликативная эргодическая теорема // Труды Московского математического общества, М.: Изд-во Москов. гос. ун-та, 1966. - с. 179-210.
13. Craig W., Simon B. Log Hölder continuity of the integrated density of States for stochastic jacobi matrices // Commun. Math.Phys.-1983. -90, N 2. - P.207-218.
14. Корнфельд Н.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. - М. : Наука, 1980. - 381 с.

УДК 517.4

А.Л.Фиготин

ЭРГОДИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И СУЩЕСТВЕННАЯ САМОСОПРЯЖЕННОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей работе рассматриваются случайные метрически транзитивные (МТР) матрицы $\{a(x,y)\}$, $x,y\in\mathbb{Z}^d$ и, отвечающие им, случайные операторы, задаваемые равенством

$$(A\psi)(x)=\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y)\psi(y). \qquad (1)$$

При этом под метрической транзитивностью понимается следующее. На вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ действует группа автоморфизмов, сохраняющих меру P, T_x, $x\in\mathbb{Z}^d$, которая обладает следующими свойствами:

а) если $F\in\mathcal{F}$: $T_xF=F$, $x\in\mathbb{Z}^d$, то $P(F)$ равно либо 0, либо 1;

б) $a(x,y;T_z(\omega))=a(x+z,\ y+z;\omega)$, $x,y\in\mathbb{Z}^d$, $\omega\in\Omega$.

При изучении эргодических свойств и существенной самосопряженности матричных МТР операторов оказывается удобным выделить определенные их классы. Обозначим через $\mathcal{L}_{1,1}$, $\mathcal{L}_{2,1}$ и $\mathcal{L}_{2,2}$ банаховы пространства случайных МТР матриц A с нормами

$$\|A\|_{1,1}=M\{\sum_x |a(x,0)|\}, \qquad (2)$$

$$\|A\|^2_{2,1}=M\{(\sum_x |a(x,0)|)^2\}, \qquad (3)$$

$$\|A\|^2_{2,2}=M\{\sum_x |a(x,0)|^2\}, \qquad (4)$$

где $M\{\cdot\}$ - математическое ожидание.

То обстоятельство, что $\mathcal{L}_{1,1}$, $\mathcal{L}_{2,1}$ и $\mathcal{L}_{2,2}$ являются банаховыми пространствами, легко проверяется. Кроме того, в случае $\mathcal{L}_{1,1}$ и $\mathcal{L}_{2,2}$ норма оператора и норма сопряженного к нему - совпадают. МТР матрицы, для которых конечна норма $\|A\|_{2,2}=M\{\|Ae_0\|^2\}^{1/2}$, где e_0 - вектор из $l_2(\mathbb{Z}^d)$ с координатами: $e_0(0)=1$, $e_0(x)=0$, $x\neq 0$, являются аналогами операторов Гильберта - Шмидта. В пользу такой аналогии свидетельствует то, что норму $\|\cdot\|_{2,2}$ можно в силу эргодической теоремы [1] представить в виде

$$\| A \|_{2,2}^2 = \lim_{V \to \infty} V^{-1} Sp\, \pi_\Lambda A^* A \pi_\Lambda ,$$

где Λ пробегает последовательность расширяющихся во все $\mathbb{Z}^d$ кубов с центрами в начале координат; V – их объем; π_Λ – оператор проектирования в пространстве $l_2(\mathbb{Z}^d)$ на функции, носитель которых содержится в Λ. Так как норма МТР оператора неслучайна, что легко следует из свойства метрической транзитивности, то умножение МТР оператора из $\mathcal{L}_{2,2}$ на ограниченный МТР оператор не выведет из $\mathcal{L}_{2,2}$. Более общий смысл имеет следующее предложение.

1. Предложение. Пусть A и B – МТР матричные операторы, а π_S – ортогональный проектор на функции из $l_2(\mathbb{Z}^d)$ с носителем в множестве $S \subset \mathbb{Z}^d$. Тогда

а) $\|A\|_{1,1}$, $\|A\|_{2,2} \le \|A\|_{2,1}$ и, следовательно, $\mathcal{L}_{2,1} \subset \mathcal{L}_{1,1}, \mathcal{L}_{2,2}$;

б) если $A \in \mathcal{L}_{1,1}$ или $A \in \mathcal{L}_{2,2}$, то соответственно $A^* \in \mathcal{L}_{1,1}$, $A^* \in \mathcal{L}_{2,2}$ и $\|A^*\|_{1,1} = \|A\|_{1,1}$, $\|A^*\|_{2,2} = \|A\|_{2,2}$;

в) если $A^* \in \mathcal{L}_{2,1}$ и $\|B\| < \infty$, а $\{l_x\}$, $x \in \mathbb{Z}^d$ – базис пространства $l_2(\mathbb{Z}^d)$, т.е. $l_x(y) = \delta(x,y)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, то $\forall x \in \mathbb{Z}^d$ $M\{\|A\pi_S B e_x\|^2\} \le \|B\|^2 \|A^*\|_{2,1}^2$.

Доказательство. Утверждения а) и б) очевидны. Утверждение в) ввиду метрической транзитивности A и B вытекает из следующих неравенств:

$$M\{\|A\pi_S B e_x\|^2\} = M\{\sum_{y,z \in S} B^*(x,y)(A^*A)(y,z)B(z,x)\} \le$$

$$\le \sum_{y,z} M\{|(A^*A)(y,z)||B^*(x,y)||B(z,x)|\} =$$

$$= \sum_{y,z} M\{|(A^*A)(y-z;0)||B^*(x-z,y-z)||B(0,x-z)|\} =$$

$$= \sum_{y} M\{|(A^*A)(y,0)| \sum_{z} |B^*(z,y)||B^*(z,0)|\} \le$$

$$\le \sum_{y} M\{|(A^*A)(y,0)|\|B^* e_y\|\|B^* e_0\|\} \le$$

$$\le \|B^*\|^2 \sum_{y,z} M\{|a^*(y,z)||a(z,0)|\} =$$

$$= \|B\|^2 \sum_{y,z} M\{|a^*(y-z,0)||a(0-z)|\} =$$

$$= \|B\|^2 M\{(\sum_{y} |a^*(y,0)|)^2\}.$$

Существенная самосопряженность

2. Теорема. Пусть $\{a(x,y)\}$, $x,y\in\mathbb{Z}^d$ – случайная, эрмитова, МТР матрица из $\mathcal{L}_{2,1}$, т.е.

$$M\{(\sum_x |a(x,0)|)^2\}<\infty.$$

Тогда с вероятностью 1 эта матрица задает симметрический оператор A, определенный на множестве $\mathcal{D}$ финитных векторов из $l_2(\mathbb{Z}^d)$, и A является существенно самосопряженным оператором на $\mathcal{D}$.

Доказательство. Обозначим через e_x, $x\in\mathbb{Z}^d$ базис пространства $l_2(\mathbb{Z}^d)$, т.е. $e_x(y)=\delta(x,y)$, $x,y\in\mathbb{Z}^d$, где $\delta(x,y)$ – символ Кронекера. Тогда из (1) ввиду метрической транзитивности матрицы A и ее принадлежности классу $\mathcal{L}_{2,1}$ получим, используя предложение 1,а): $M\{\|Ae_x\|^2\}=\|A\|^2_{2,2}\le\|A\|^2_{2,1}<\infty$, $x\in\mathbb{Z}^d$. Отсюда вытекает, что с вероятностью 1 оператор A определен на линейной оболочке векторов e_x, совпадающей с множеством $\mathcal{D}$.

Доказательство существенной самосопряженности оператора будет состоять в проверке совпадения $l_2(\mathbb{Z}^d)$ и замыкания $(A-zI)\mathcal{D}$, $(Im\,z\neq 0)$ с вероятностью 1. Для этого достаточно установить, что $(A-zI)\mathcal{D}$ содержит все базисные векторы e_x. Аппроксимируем с этой целью случайный МТР симметрический оператор A последовательностью $\{A^{(p)}\}$, $p\in\mathbb{Z}_+$, случайных МТР ограниченных и самосопряженных операторов, которые строятся следующим образом. Введем характеристическую функцию $\chi_b(t)$ интервала $[0,b]$, где $b>0$, которая равна 1, если $t\in[0,b]$ и 0 в противном случае. Пусть теперь $A^{(p)}=\{a_p(x,y)\}$, $x,y\in\mathbb{Z}^d$, $p=0,1,2,\ldots$, где

$$a_p(x,y)=\begin{cases}0, & |x-y|>p,\\ \chi_p(|a(x,y)|)\,a(x,y), & |x-y|\le p.\end{cases}\tag{5}$$

Тогда, очевидно,

$$\lim_{p\to\infty}\|A-A^{(p)}\|_{2,1}=0.\tag{6}$$

Рассмотрим резольвенты операторов $A^{(p)}\ R^{(p)}=(A^{(p)}-zI)^{-1}$, $Im\,z\neq 0$, и обозначим через $\pi_l^{\pm}$, $\pi_l^{+}+\pi_l^{-}=I$ проекторы π_S при $S=\{x:|x|\le l\}$, $\{x:|x|>l\}$ соответственно. Тогда, используя предложение I, с) и очевидное неравенство $\|R^{(p)}\|\le|Im\,z|^{-1}$, получаем

$$M\{\|(A-zI)\pi_l^{+}R^{(p)}e_x-e_x\|^2\}\le$$

$$\le 2M\{\|(A-A^{(p)})\pi_l^{+}R^{(p)}e_x\|^2+\|(A^{(p)}-zI)\pi_l^{-}R^{(p)}e_x\|^2\}\le$$

$$\le 2|Im\,z|^{-2}\|A-A^{(p)}\|^2_{2,1}+2c^2(p)\,M\{\|\pi_l^{-}R^{(p)}e_x\|^2\},\tag{7}$$

где $c(\rho)$ – неслучайная константа, ограничивающая норму операторов $A^{(\rho)}-zI$. Существование подобной константы вытекает из определения $A^{(\rho)}$. Поскольку $\|\pi_l^- R^{(\rho)} e_x\| \le |Im\, z|^{-1}$, а при $l \to \infty$ и фиксированном ρ $\|\pi_l^- R^{(\rho)} e_x\| \to 0$, то

$$\lim_{l\to\infty} M\{\|\pi_l^- R^{(\rho)} e_x\|^2\} = 0.$$

Из последнего равенства следует, что можно так выбрать $l = l(\rho, x)$, чтобы

$$c^2(\rho) M\{\|\pi_l^- R^{(\rho)} e_x\|^2\} \le \rho^{-1}. \tag{8}$$

Если теперь ввести обозначение $f_x^{(\rho)} = \pi^+_{l(\rho,x)} R^{(\rho)} e_x$, то из (6) – (8) получим

$$\lim_{\rho\to\infty} M\{\|(A-zI) f_x^{(\rho)} - e_x\|^2\} = 0.$$

Следовательно, для некоторой последовательности натуральных чисел ρ_n при $n\to\infty$, с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \|(A-zI) f_x^{(\rho_n)} - e_x\| = 0. \tag{9}$$

Поскольку $f_x^{(\rho)} \in \mathcal{D}$, то равенство (9) означает, что с вероятностью 1 $(A-zI)\mathcal{D}$ содержит все векторы $e_x, x\in \mathbb{Z}^d$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 имеем следующее простое следствие.

3. Следствие. Пусть $A=\{a(x,y)\}$, $x, y\in\mathbb{Z}^d$, – случайная МТР эрмитова матрица и

$$\sum_x M^{1/2}\{|a(x,0)|^2\} < \infty. \tag{10}$$

Тогда с вероятностью 1 оператор A определен на множестве $\mathcal{D}$ финитных последовательностей из $l_2(\mathbb{Z}^d)$ и существенно самосопряжен на $\mathcal{D}$.

Действительно, ввиду метрической транзитивности A из (10) следует, что $A\in\mathcal{L}_{2,1}$, так как

$$M\{(\sum_x |a(x,0)|)^2\} = \sum_{x,y} M\{|a(x,0)|\} \le$$

$$\le \sum_{x,y} M^{1/2}\{|a(x,0)|^2\} M^{1/2}\{|a(y,0)|^2\}.$$

Эргодические свойства

Пусть A – случайный симметрический МТР оператор вида (1). Рассмотрим последовательность эрмитовых матриц $A_\Lambda = \{a(x,y)\}$, $x, y\in\Lambda$, где Λ – куб в $\mathbb{Z}^d$ с центром в начале координат. Порядок матрицы A_Λ равен, очевидно, объему V куба Λ. Введем неубывающую функцию

$N_\Lambda(\lambda)$ так, что $VN_\Lambda(\lambda)$ – число собственных значений матрицы A_Λ, не превосходящих λ. Меру, соответствующую этой функции $N_\Lambda(\lambda)$, будем обозначать $N_\Lambda(d\lambda)$. Сходимость мер ниже будет пониматься как слабая сходимость [2].

4. Теорема. Пусть A – случайный МТР симметрический оператор в $l_2(\mathbb{Z}^d)$. Предположим, что существует числовая последовательность $\{c(r)\}$, $r\in\mathbb{Z}^d$ такая, что:

1) $0\le c(r)<\infty$, $c(r)=c(-r)$, $r\in\mathbb{Z}^d$;

2) для некоторой константы ρ: $\sum\limits_{|r|\ge\rho} c(r)<\infty$;

3) $\sum\limits_{r\in\mathbb{Z}^d} P\{|a(r,0)|>c(r)\}<\infty$.

Тогда существует неслучайная, положительная мера $N(A,d\lambda)$ такая, что $N(A,\mathbb{R})\le 1$ и с вероятностью 1

$$\lim_{V\to\infty} N_\Lambda(d\lambda)=N(A,d\lambda). \tag{11}$$

Если при этом случайный оператор A существенно самосопряжен и $E_A(d\lambda)$ – его разложение единиц, то имеет место формула

$$N(A,d\lambda)=M\{(l_0,\ E_A(d\lambda)\,l_0)\}, \tag{12}$$

где $l_0(x)=\delta(0,x)$.

Доказательство теоремы начнем с ее частного случая, когда оператор A является обобщенной якобиевой матрицей, элементы которой ограничены по модулю некоторой положительной неслучайной константой.

5. Лемма. Пусть случайный МТР симметрический оператор $A=\{a(x,y)\}$, $x,y\in\mathbb{Z}^d$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $|a(x,y)|\le c$, x, $y\in\mathbb{Z}^d$, где c – неслучайная положительная константа;

2) существует натуральное R такое, что $a(x,y)=0$, если $|x-y|>R$.

Тогда случайный оператор A ограничен по норме неслучайной константой и, следовательно, самосопряжен, для него имеют место равенства (11), (12).

Доказательство. Из условий 1), 2) леммы легко получим

$$\|A_\Lambda\|\le\|A\|\le c\,(2R+1)^d=c_1.$$

Отсюда следует, что спектры операторов A_Λ и A, а с ними меры $N_\Lambda(d\lambda)$ и проекторнозначные меры $E_{A_\Lambda}(d\lambda)$ сосредоточены на конеч-

* $N(A,d\lambda)$ будем называть нормированной функцией распределения (НФР).

ном отрезке $[-c_1, c_1]$. Поэтому для доказательства слабой сходимости мер $N_\Lambda(d\lambda)$ достаточно установить сходимость моментов этих мер. Перепишем эти моменты в следующем виде:

$$V\int_{-c_1}^{c_1} \lambda^p N_\Lambda(d\lambda) = Sp\, A_\Lambda^p =$$

$$= \sum_{x_1,\dots,x_p\in\Lambda} a(x_1,x_2)\,a(x_2,x_3)\dots a(x_p,x_1), \qquad p\in Z_+. \tag{13}$$

Из условий 1), 2) леммы следует, что при $V\to\infty$ правая часть равенства (13)

$$\sum_{x_1\in\Lambda}\ \sum_{x_2,\dots,x_p\in Z^d} a(x_1,x_2)\dots a(x_p,x_1) + O\left(V^{\frac{d-1}{d}}\right) =$$

$$= \sum_{x\in\Lambda} (A^p)(x,x) + O\left(V^{\frac{d-1}{d}}\right).$$

Отсюда и из равенства (13) получим

$$\lim_{V\to\infty} \int_{-c_1}^{c_1} \lambda^p N_\Lambda(d\lambda) =$$

$$= \lim_{V\to\infty} V^{-1} \sum_{x\in\Lambda} (A^p)(x,x) \tag{14}$$

при условии, что предел в правой части равенства (14) существует. Так как A – ограниченный МТР оператор, то таким же будет и оператор A^p и, следовательно, случайное поле $(A^p)(x,x)$, на Z^d – МТР, ограниченное неслучайной константой c_1^p поле. Применяя к этому полю эргодическую теорему [1], получаем из равенства (14) с вероятностью 1

$$\lim_{V\to\infty} \int_{-c_1}^{c_1} \lambda^p N_\Lambda(d\lambda) = M\{(A^p)(0,0)\}.$$

Поскольку разложение единицы $E_A(d\lambda)$ оператора A является случайным МТР проектором [3], то последнее равенство можно переписать в виде

$$\lim_{V\to\infty} \int_{-c_1}^{c_1} \lambda^p N_\Lambda(d\lambda) = \int_{-c_1}^{c_1} \lambda^p M\{(\zeta_0, E_A(d\lambda)\zeta_0)\}.$$

Ввиду произвольности p в полученном равенстве и очевидной его справедливости при $p = 0$ имеем утверждения леммы.

Для того чтобы перейти от частного случая ограниченных по норме операторов A, изложенного в предыдущей лемме, к общему случаю понадобятся следующие вспомогательные леммы.

6. <u>Лемма.</u> Пусть $A^{(p)}$, $p \in \mathbb{Z}_+$ – последовательность симметрических операторов в $l_2(\mathbb{Z}^d)$, а $N_\Lambda^{(p)}(d\lambda)$ – соответствующие им допредельные функции. Предположим, что для каждого $p \in \mathbb{Z}_+$ существует предел

$$\lim_{V\to\infty} N_\Lambda^{(p)}(d\lambda) = N(A^{(p)}, d\lambda)$$

и, кроме того, существует такой симметрический оператор A в $l_2(\mathbb{Z}^d)$, что

$$\lim_{p\to\infty} \| A - A^{(p)} \| = 0.$$

Тогда, отвечающая оператору A, последовательность $N_\Lambda(d\lambda)$ сходится, т.е.

$$\lim_{V\to\infty} N_\Lambda(d\lambda) = N(A, d\lambda),$$

$$N(A, d\lambda) = \lim_{p\to\infty} N(A^{(p)}, d\lambda).$$

Доказательство сформулированных утверждений легко следует из оценки

$$N_\Lambda^{(p)}(\lambda - \varepsilon_p) \le N_\Lambda(\lambda) \le N_\Lambda^{(p)}(\lambda + \varepsilon_p),$$

где $\varepsilon_p = \| A - A^{(p)} \|$, которая, в свою очередь, непосредственно вытекает из условий леммы и определения НФР оператора.

7. <u>Лемма.</u> Пусть случайный МТР симметрический оператор $A = \{a(x,y)\}$, $x,y \in \mathbb{Z}^d$, с вероятностью 1 удовлетворяет следующему условию: существует последовательность неслучайных неотрицательных чисел $\{c(r)\}$, $r \in \mathbb{Z}^d$ такая, что

$$\sum_r c(r) < \infty; \qquad \forall x,y \in \mathbb{Z}^d: \ |a(x,y)| \le c(x-y).$$

Тогда с вероятностью 1 $\|A\| \le \sum_r c(r)$ и

$$\lim_{V\to\infty} N_\Lambda(d\lambda) = M\{(l_0, E_A(d\lambda) l_0)\}.$$

Данная лемма является непосредственным следствием леммы 5, 6.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Рассмотрим наряду с последовательностью $\{c(r)\}$, $r \in \mathbb{Z}^d$, фигурирующей в условиях теоремы, набор последовательностей $\{c_p(r)\}$, $r \in \mathbb{Z}^d$, $p \in \mathbb{Z}_+$, определяемых следующим образом: $c_p(r) = p$, если $|r| \le p$; $c_p(r) = c(r)$, $|r| > p$. Введем характеристические функции $\chi_\delta^\pm(\lambda)$ интервалов $(-\infty, \delta)$ и $(\delta, +\infty)$ и пусть $A^{(p)}$, $p \in \mathbb{Z}_+$ – аппроксимирующие оператор A операторы с матричными элементами вида

$$a_p(x,y) = \chi^-_{c_p(x-y)}(|a(x,y)|)\, a(x,y), \quad x,y \in \mathbb{Z}^d.$$

Операторы $A^{(\rho)}$ удовлетворяют условиям леммы 6, так как $|a_\rho(x,y)| \leq c_\rho(x-y)$ и $\sum_r c_\rho(r) < \infty$. Поэтому существуют неслучайные меры $N(A^{(\rho)}, d\lambda)$ такие, что с вероятностью 1

$$\lim_{V\to\infty} N_\Lambda^{(\rho)}(d\lambda) = N(A^{(\rho)}, d\lambda) = M\{(l_0, E_{A^{(\rho)}}(d\lambda) l_0)\}. \tag{15}$$

Воспользуемся теперь следующим простым утверждением: если A_1, A_2 – эрмитовы матрицы порядка n, то отвечающие им функции $N_1(\lambda), N_2(\lambda)$ удовлетворяют неравенству $|N_1(\lambda) - N_2(\lambda)| \leq n^{-1} \operatorname{rank}(A_1 - A_2)$. Принимая во внимание то обстоятельство, что ранг матрицы не превосходит числа отличных от нуля ее элементов, получаем

$$|N_\Lambda(\lambda) - N_\Lambda^{(\rho)}(\lambda)| \leq V^{-1} \sum_{x,y\in\Lambda} \chi^+_{c_\rho(x-y)}(|a(x,y)|) \leq$$

$$\leq V^{-1} \sum_{x\in\Lambda} \sum_r \chi^+_{c_\rho(r)}(|a(x,x-r)|) = \varepsilon_\Lambda^{(\rho)}. \tag{16}$$

Заметим теперь, что $\sum_r \chi^+_{c_\rho(r)}(|a(x,x-r)|)$, $x \in \mathbb{Z}^d$ – МТР поле, и с учетом условия 3) теоремы 4 имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_\rho &= M\{\sum_r \chi^+_{c_\rho(r)}(|a(x,x-r)|) = \\ &= \sum_r P\{|a(r,0)| > c(r)\} < \infty. \end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда в силу эргодической теоремы [1] и условия 3) теоремы 4 следует с вероятностью 1

$$\lim_{V\to\infty} \varepsilon_\Lambda^{(\rho)} = \varepsilon_\rho, \quad \lim_{\rho\to\infty} \varepsilon_\rho = 0. \tag{18}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что существует неубывающая функция $N(\lambda)$ такая, что при всех значениях λ, за исключением, быть может, счетного множества,

$$\lim_{\rho\to\infty} N^{(\rho)}(\lambda) = N(\lambda), \tag{19}$$

где $N^{(\rho)}(\lambda) = N(A^{(\rho)}, \lambda)$. Если бы это было не так, то следовало бы из $\mathbb{Z}_+$ выбрать сходящуюся к бесконечности последовательность $\{\rho_j\}$, для которой бы (19) выполнялось, и рассматривать далее только $\rho \in \{\rho_j\}$. Обозначим через Ω_1 множество тех $\omega \in \Omega$, для которых справедливы равенства (15) и первое равенство (18), при этом, очевидно, $P(\Omega_1) = 1$. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и зафиксируем λ-произвольную точку непрерывности функций $N(\lambda)$ и $N^{(\rho)}(\lambda)$, $\rho \in \mathbb{Z}_+$, а также $\omega \in \Omega_1$. В силу второго равенства (18) и равенства (19) $\exists \rho_0 : \forall \rho \geq \rho_0 : \varepsilon_\rho \leq \varepsilon/4$ и $|N^{(\rho)}(\lambda) - N(\lambda)| \leq \varepsilon/3$. В соответствии с равенствами (15), первым равенством (18) и неравенством (16) можно выбрать Λ_0 так, чтобы при $\Lambda \supset \Lambda_0$:

$$|N_\Lambda(\lambda) - N_\Lambda^{(p_0)}(\lambda)| \le \varepsilon_\Lambda^{(p_0)} \le \frac{4}{3}\varepsilon_{p_0} \le \varepsilon/3,$$

$$|N_\Lambda^{(p_0)}(\lambda) - N^{(p_0)}(\lambda)| \le \varepsilon/3.$$

Из последних неравенств получим при $\Lambda \supset \Lambda_0$:

$$|N_\Lambda(\lambda) - N(\lambda)| \le |N_\Lambda(\lambda) - N_\Lambda^{(p_0)}(\lambda)| +$$

$$+ |N_\Lambda^{(p_0)}(\lambda) - N^{(p_0)}(\lambda)| + |N^{(p_0)}(\lambda) - N(\lambda)| \le 3\cdot\varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Таким образом, для $\omega \in \Omega_1$ в точках непрерывности функций $N(\lambda)$ и $N^{(p)}(\lambda)$, $p \in \mathbb{Z}_+$: $N_\Lambda(\lambda) \to N(\lambda)$ при $V \to \infty$. Следовательно, равенство (11) справедливо с вероятностью 1. Так как предельная мера $N(d\lambda)$ существует, то ее неотрицательность и неравенство $N(\mathbb{R}) \le 1$, очевидно, вытекают из аналогичных свойств допредельных мер $N_\Lambda(d\lambda)$

Перейдем к доказательству соотношения (12) в предположении самосопряженности оператора A. Покажем, что существует множество $\Omega_2 \subset \Omega$ полной меры $P(\Omega_2) = 1$ такое, что $\forall \omega \in \Omega_2$:

$$s\text{-}\lim_{p\to\infty} A^{(p)}(\omega)\varphi = A(\omega)\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{20}$$

где $A^{(p)}$ – построенная ранее последовательность аппроксимирующих операторов; $\mathcal{D}$ – множество финитных последовательностей в $l_2(\mathbb{Z}^d)$. Рассмотрим ряды $\sum_y |a(x,y)|^2$, $x \in \mathbb{Z}^d$ и покажем, что все они сходятся с вероятностью 1. В силу метрической транзитивности оператора A достаточно рассмотреть случай $x = 0$, но тогда в силу условий 2) и 3) теоремы с вероятностью 1 при всех достаточно больших значениях r $|a(r,0)| \le c(r)$ и поэтому $\sum_r |a(r,0)|^2 < \infty$.

Рассмотрим теперь

$$\|(A - A^{(p)})l_x\|^2 = \sum_y |a(y,x)|^2 \left[1 - \varkappa^-_{c_p(x-y)}(|a(y,x)|)\right]^2.$$

Вспоминая определения функции $\varkappa^-_\delta(t)$ и последовательностей $c_p(r)$, убеждаемся, что правая часть написанного равенства стремится к нулю при $p \to \infty$, откуда и следует справедливость равенства (20), поскольку его достаточно проверить на базисных векторах. Из выражения (20), в свою очередь, вытекает сходимость разложений единицы [4] во всех точках непрерывности $E_A(\lambda)$ с вероятностью 1. Поэтому

$$\lim_{p\to\infty} M\{(l_0, E_A^{(p)}(d\lambda)l_0)\} = M\{(l_0, E_A(d\lambda)l_0)\}.$$

Отсюда и из соотношений (15) и (19) вытекает справедливость равенства (12).

В известном смысле обобщением теоремы 4 являются теоремы, рассмотренные ниже.

8. Теорема. Пусть случайная МТР эрмитова матрица A принадлежит $\mathcal{L}_{1,1}$, т.е.

$$\sum_x M\{|a(x,0)|\} < \infty. \tag{21}$$

Тогда матрица A с вероятностью 1 задает симметрический оператор на множестве $\mathcal{D}$ финитных последовательностей из $l_2(\mathbb{Z}^d)$ и существует неслучайная положительная мера $N(A, d\lambda)$ такая, что $N(A,\mathbb{R}) = 1$ и с вероятностью 1

$$\lim_{V\to\infty} N_\Lambda(d\lambda) = N(A, d\lambda). \tag{22}$$

Если, кроме того, оператор A существенно самосопряжен с вероятностью 1, а $E_A(d\lambda)$ – его разложение единицы, то

$$N(A, d\lambda) = M\{(l_0, E_A(d\lambda) l_0)\}. \tag{23}$$

В частности, для симметрического оператора $A \in \mathcal{L}_{2,1}$ имеют место оба соотношения (22), (23).

Прежде всего отметим, что из условия (21) вытекает, что с вероятностью 1 $\forall x \in \mathbb{Z}^d$: $\sum_y |a(y,x)| < \infty$ и, тем более,

$$\|Al_x\|^2 = \sum_y |a(y,x)|^2 < \infty. \tag{24}$$

Последнее означает, что с вероятностью 1 матрица A задает оператор на $\mathcal{D}$, который в силу эрмитовости матрицы A является симметрическим.

Доказательство равенств (22), (23) будет получено путем исследования резольвент последовательности аппроксимирующих A ограниченных и самосопряженных операторов $A^{(p)}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, заданных равенствами (5). Будем обозначать через $R_z(A)$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ резольвенту оператора A, т.е. $R_z(A) = (A - zI)^{-1}$. Кроме того, введем обозначения

$$r_z(A_\Lambda) = \int (\lambda - z)^{-1} N_\Lambda(d\lambda), \qquad r_z(A^{(p)}) = \int (\lambda - z)^{-1} N^{(p)}(d\lambda),$$

где $N^{(p)}(d\lambda)$ – НФР оператора $A^{(p)}$. При этом справедливы равенства

$$r_z(A_\Lambda) = V^{-1} \operatorname{Sp} R_z(A_\Lambda), \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{25}$$

Для операторов $A^{(p)}$ в силу леммы 5 имеем

$$r_z(A^{(p)}) = M\{(l_0, R_z(A^{(p)}) l_0)\}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{26}$$

При аппроксимации оператора A операторами $A^{(\rho)}$ будем пользоваться тождеством для резольвент операторов A и B:

$$R_z(A)-R_z(B)=-R_z(A)(A-B)R_z(B) \tag{27}$$

и следующим предложением, доказательство которого стандартно.

9. Предложение. Пусть $\mathcal{M}$ – множество таких неотрицательных мер $m(d\lambda)$ на оси, что $m(R)\leq 1$. Тогда:

а) если тождественно по z при $Im\, z\neq 0$:

$$\int(\lambda-z)^{-1}m_1(d\lambda)=\int(\lambda-z)^{-1}m_2(d\lambda)$$

для m_1, $m_2\in\mathcal{M}$, то $m_1(d\lambda)=m_2(d\lambda)$;

б) если при всех z, $Im\, z\neq 0$, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int(\lambda-z)^{-1}m_n(d\lambda)=r_z, \tag{28}$$

где $m_n\in\mathcal{M}$, то существует положительная мера $m(d\lambda)\in\mathcal{M}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} m_n(d\lambda)=m(d\lambda) \tag{29}$$

и

$$r_z=\int(\lambda-z)^{-1}m(d\lambda); \tag{30}$$

в) если имеет место равенство (29), то справедливы также равенства (28), (30).

10. Лемма. Для операторов $A^{(\rho)}$ и матриц A_Λ и $A_\Lambda^{(\rho)}$ справедливы следующие оценки:

а) $|r_z(A_\Lambda^{(\rho)})-r_z(A_\Lambda)|\leq V^{-1}|Im\, z|^{-2}\sum_{x\in\Lambda}\sum_{r}|(a-a^{(\rho)})(r,x)|$;

б) $|r_z(A^{(\rho_1)})-r_z(A^{(\rho_2)})|\leq|Im\, z|^{-2}\|A^{(\rho_1)}-A^{(\rho_2)}\|_{1,1}$;

в) если $\eta>0$, то $\eta|r_{i\eta}(A^{(\rho)})|\geq 1-\eta^{-1}\|A\|_{1,1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (25), (27) и неравенства $\|R_z(A^{(\rho)})\|\leq|Im\, z|^{-1}$ имеем

$$|r_z(A_\Lambda^{(\rho)})-r_z(A_\Lambda)|=V^{-1}|Sp\, R_z(A_\Lambda)R_z(A_\Lambda^{(\rho)})(A_\Lambda-A_\Lambda^{(\rho)})|\leq$$
$$\leq V^{-1}|Im\, z|^{-2}\sum_{x,y\in\Lambda}|(a-a^{(\rho)})(x,y)|.$$

Отсюда вытекает справедливость условия а) и обоснованного аналогично этому, б) для доказательства в) воспользуемся следующим очевидным равенством:

$$(l_0, (A^{(p)}-i\eta I)\, R_{i\eta}(A^{(p)}) l_0) = 1.$$

Отсюда и из (26), учитывая метрическую транзитивность $A^{(p)}$ имеем

$$\eta\, |r_{i\eta}(A^{(p)})| = |M\{(l_0, R_{i\eta}(A^{(p)}) l_0)\}| \geq$$

$$\geq 1 - M\{\sum_r |a^{(p)}(0,r)|\, |R_{i\eta}(A^{(p)})(r,0)|\} \geq$$

$$\geq 1 - \eta^{-1} \| A^{(p)} \|_{1,1} \geq 1 - \eta^{-1} \| A \|_{1,1},$$

что завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы 8. Заметим, что ввиду сходимости операторов $A^{(p)}$ к A по норме $\|\cdot\|_{1,1}$, из предложения 9 и леммы 10 следует существование такой положительной меры $N(d\lambda)$, что $N(\mathbb{R}) \leq 1$ и

$$\lim_{p\to\infty} \int (\lambda - z)^{-1} N^{(p)}(d\lambda) = \int (\lambda - z)^{-1} N(d\lambda), \tag{31}$$

$$\lim_{p\to\infty} N^{(p)}(d\lambda) = N(d\lambda), \tag{32}$$

причем так как меры $N^{(p)}(d\lambda)$ неслучайны, то и мера $N(d\lambda)$ – неслучайна. Кроме того, из (31) и условия в) леммы 10 имеем

$$1 \geq N(\mathbb{R}) = \lim_{\eta\to\infty} \left| \int \eta (\lambda - i\eta)^{-1} N(d\lambda) \right| \geq 1,$$

так что $N(\mathbb{R}) = 1$. Из леммы 10, а), 5 и эргодической теоремы [1], получим с вероятностью 1 $\forall p \in \mathbb{Z}_+$:

$$\lim_{V\to\infty} | r_z(A_\Lambda^{(p)}) - r_z(A_\Lambda) | \leq |Im\, z|^{-2} \| A - A^{(p)} \|_{1,1}.$$

Отсюда для любого z, $Im\, z \neq 0$, ввиду равенства (31) и того, что $\| A - A^{(p)} \|_{1,1} \to 0$ при $p \to \infty$, имеем

$$\lim_{V\to\infty} r_z(A_\Lambda) = \int (\lambda - z)^{-1} N(d\lambda). \tag{33}$$

Так как семейство функций

$$\int (\lambda - z)^{-1} m(d\lambda), \quad m \in \mathcal{M},$$

очевидно, равностепенно непрерывно по z на любом подмножестве $\mathbb{C}$ вида $|Im\, z| \geq \eta > 0$, то из справедливости соотношения (33) для любого z, $Im\, z \neq 0$, с вероятностью 1 следует справедливость (33) для всех

z с $Im\, z \neq 0$. Последнее утверждение, ввиду предложения 9 влечет справедливость равенства (22), причем, как показано выше, $N(R)=1$ и, кроме того, имеет место равенство (32).

Относительно равенства (23) в случае, когда с вероятностью 1 A – существенно самосопряженный оператор, заметим следующее. Ввиду неравенств (24) аргументы, использованные при обосновании равенства (12), сохраняют свою силу. И наконец, справедливость соотношений (22), (23) для оператора $A \in \mathcal{L}_{2,1}$ является непосредственным следствием предложения 1, а) и теоремы 2. Последнее замечание завершает доказательство теоремы 8.

11. Теорема. Пусть случайная МТР эрмитова матрица A принадлежит $\mathcal{L}_{2,2}$, т.е.

$$\sum_x M\{|a(x,0)|^2\} < \infty, \tag{34}$$

тогда матрица A с вероятностью 1 задает симметрический оператор на множестве $\mathcal{D}$ финитных последовательностей в $l_2(Z^d)$ и у этого симметрического МТР оператора A существует самосопряженное расширение $\tilde{A}$. При этом неслучайная положительная мера $N(A, d\lambda)$ такая, что с вероятностью 1

$$\lim_{V\to\infty} N_\Lambda(d\lambda) = N(A, d\lambda), \tag{35}$$

$$N(A, d\lambda) = M\{(l_0, E_{\tilde{A}}(d\lambda) l_0)\}. \tag{36}$$

Доказательство настоящей теоремы проводится по той же схеме, что и предыдущей, а именно, с вероятностью 1 справедливы неравенства (24), откуда следует, что матрица A задает симметрический оператор на $\mathcal{D}$.

Аналогом леммы 10 здесь будет следующее утверждение.

12. Лемма. Для операторов $A^{(\rho)}$ и матриц A_Λ и $A_\Lambda^{(\rho)}$ справедливы следующие утверждения:

а) $|r_z(A_\Lambda^{(\rho)}) - r_z(A_\Lambda)| \leq$

$$\leq |Im\, z|^{-2} [V^{-1} \sum_{x\in\Lambda} \sum_r |(a - a^{(\rho)})(r,x)|^2]^{1/2},$$

б) $|r_z(A^{(\rho_1)}) - r_z(A^{(\rho_2)})| \leq |Im\, z|^{-2} \| A^{(\rho_1)} - A^{(\rho_2)} \|_{2,2}$.

Доказательство. Из (25), (27) и неравенства $\|R_z(A_\Lambda)\| \leq \| Im\, z|^{-1}$ имеем

$$|r_z(A_\Lambda^{(\rho)}) - r_z(A_\Lambda)| \leq$$

$$\leq V^{-1} |Sp\, R_z(A_\Lambda) R_z(A_\Lambda^{(\rho)}) (A_\Lambda - A_\Lambda^{(\rho)})| \leq$$

$$\leq V^{-1}[V|Im\,z|^{-4}\sum_{x,y\in\Lambda}|(a-a^{(p)})(x,y)|^2]^{1/2}.$$

Из полученной оценки вытекает справедливость условия а) леммы 12, условие б) обосновывается аналогично. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 8, в результате чего получим справедливость равенства (35) с вероятностью 1, причем для меры $N(A,\,d\lambda)$ справедливо равенство (32).

Осталось доказать существование МТР, самосопряженного расширения $\tilde{A}$ симметрического оператора A и формулу (36). Для этого покажем, что существует слабый граф-предел [4] некоторой подпоследовательности последовательности операторов $A^{(p)}$ при $p\to\infty$, который и является искомым расширением $\tilde{A}$. Для обоснования последнего утверждения достаточно установить, что слабый граф-предел плотно определен и для выбранной подпоследовательности при $p\to\infty$ $R_z(A^{(p)})$, $Im\,z\neq 0$ сильно сходятся [4]. Плотная определенность слабого граф-предела операторов $A^{(p)}$ при $p\to\infty$ непосредственно следует из равенства $\lim_{p\to\infty} A^{(p)}l_x = Al_x$ справедливого с вероятностью 1 при каждом $x\in\mathbb{Z}^d$ ввиду неравенства (24). Что же касается существования сильного предела некоторой подпоследовательности резольвент $R_z(A^{(p)})$ при $p\to\infty$, то его достаточно установить на базисных векторах l_x, поскольку $\|R_z(A^{(p)})\|\leq|Im\,z|^{-1}$. Однако с учетом (27) имеем

$$M\{\|[R_z(A^{(p_1)})-R_z(A^{(p_2)})]l_x\|\}\leq$$
$$\leq|Im\,z|^{-1}M^{1/2}\{\|(A^{(p_1)}-A^{(p_2)})R_z(A^{(p_1)})l_x\|^2\}. \qquad (37)$$

Кроме того, если МТР оператор B принадлежит $\mathcal{L}_{2,2}$, то, очевидно,

$$M\{\|Bl_x\|^2\}=M\{\|B^*l_x\|^2\}=\|B\|^2_{2,2}. \qquad (38)$$

Из (37) и (38) имеем

$$M\{\|[R_z(A^{(p_1)})-R_z(A^{(p_2)})]l_x\|\}\leq$$

$$\leq|Im\,z|^{-2}\|A^{(p_1)}-A^{(p_2)}\|_{2,2}. \qquad (39)$$

Выберем последовательность натуральных чисел $\{p_n\}$ так, чтобы

$$\sum_{n\geq 1}\|A^{(p_{n+1})}-A^{(p_n)}\|_{2,2}<\infty. \qquad (40)$$

Такой выбор всегда возможен, так как $\lim_{p\to\infty} \| A^{(p)} - A \|_{2,2} = 0$.
Из (39), (40) получим

$$M\{ \sum_{n\geq 1} \| [R_z(A^{(p_{n+1})}) - R_z(A^{(p_n)})] l_x \| \} < \infty.$$

Значит, выражение под знаком $M\{\cdot\}$ в этом неравенстве с вероятностью 1 конечно, следовательно, и векторы $R_z(A^{(p_n)}) l_x$ сходятся. Таким образом, оператор $\tilde{A}$ как слабый граф-предел $A^{(p_n)}$ при $n\to\infty$ с вероятностью 1 самосопряжен, причем $A^{(p_n)}$ сходится к $\tilde{A}$ в сильном резольвентном смысле. Метрическая транзитивность оператора $\tilde{A}$, очевидно, вытекает из метрической транзитивности операторов $A^{(p)}$.

Отметим, что справедливость формулы (36) следует из ее справедливости в силу леммы 5, для операторов $A^{(p)}$, равенства (32) и соотношения $E_{A^{(p_n)}}(d\lambda) \to E_{\tilde{A}}(d\lambda)$ при $n\to\infty$, следующем из сильной резольвентной сходимости $A^{(p_n)}$ к $\tilde{A}$. Теорема 11 доказана.

Непосредственным следствием теоремы 4 является следующая.

13. Теорема. Пусть A – случайная МТР матрица Якоби и $P\{a(1,0) = 0\} = 0$. Тогда существует неслучайная мера $N(A, d\lambda)$ такая, что с вероятностью 1

$$\lim_{V\to\infty} N_\Lambda(d\lambda) = N(A, d\lambda),$$

$$N(A, d\lambda) = M\{l_0, E_A(d\lambda) l_0\}.$$

1. Данфорд Н., Шварц Р. Линейные операторы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1. – 895 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 634 с.
3. Пастур Л.А., Фиготин А.Л. Эргодические свойства распределения собственных значений некоторых классов случайных самосопряженных операторов // Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. – Киев : Наук. думка, 1978. – С. 117–133.
4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – Т. 1. – 360 с.

УДК 517.98

М.В.Новицкий

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ТОРЕ С КОНСТАНТОЙ СВЯЗИ ПРИ ПОТЕНЦИАЛЕ

В настоящей работе рассматривается оператор Шредингера $H(\beta) = -\Delta + \beta V(x_1, x_2)$, где $V(x_1, x_2) \in C^\infty(R^2)$ в пространстве $L^2([-a_1, a_1] \times [-a_2, a_2])$. Предполагается, что $V(x_1, x_2)$ периодична по переменной x_1 с периодом $2a_1$, по переменной x_2 с периодом $2a_2$ и известны собственные значения $\lambda_n(\beta)$ оператора $H(\beta)$ с периодическими граничными условиями для всех $\beta>0$. Требуется выяснить, насколько однозначно можно восстановить функцию $V(x_1, x_2)$ по набору $\lambda_n(\beta)$, $\beta>0$. Задача решается в предположении, что потенциалы ищутся в классе функций, четных по каждой из переменных x_1 и x_2, и при этом известны первые три коэффициента в разложении

$$sp[R_z(\beta)-R_z(0)]=\beta I_1(z)+\beta^2 I_2(z)+\beta^3 I_3(z)+\ldots,\ \beta\downarrow 0, \qquad (1)$$

где $\{I_k(z)\}$, $k=1,2,\ldots$ – спектральные инварианты оператора $H(\beta)$, $\beta>0$. Дадим точную формулировку доказанного в работе утверждения.

Теорема. Пусть $V(x_1, x_2)\in C^\infty(R^2)$ принадлежит пространству H^0 интегрируемых с квадратом функций на прямоугольнике $[-a_1, a_1]\times$ $\times[-a_2, a_2]$, четных по обеим переменным, причем стороны прямоугольника – несоизмеримы. Рассмотрим в этом пространстве оператор $H(\beta)=-\Delta+\beta V$. Тогда по трем коэффициентам $I_1(z)$, $I_2(z)$, $I_3(z)$ разложения (1) потенциал V восстанавливается с точностью до отражений:

1) $x\to x,\ y\to y;$

2) $x\to x,\ y\to a_2-y;$

3) $x\to a_1-x,\ y\to y;$

4) $x\to a_1-x,\ y\to a_2-y.$

Поскольку по набору $\{\lambda_n(\beta),\ n=1,2,\ldots,\ \beta>0\}$ можно восстановить $sp[R_z(\beta)-R_z(0)]$, и наоборот, то в качестве прямого следствия этой теоремы получаем следующее утверждение: если $V(x_1, x_2)$ – четная по каждой из переменных x_1 и x_2 на $[0,a_1]\times[0,a_2]$, то $V(x_1, x_2)$ восстанавливается по набору $\{\lambda_n(\beta),\ n=1,2,\ldots,\beta>0\}$ однозначно.

При доказательстве теоремы оказалось удобно рассмотреть более общую схему: дан оператор $H(\beta)=A+\beta B$, где A – известный самосопряженный оператор с конечнократным дискретным спектром; B – неизвестный ограниченный самосопряженный оператор; β – параметр, обычно называемый константой связи. Пусть $H(\beta)$ такой оператор, что его спектр $\sigma(H(\beta))$ также является дискретным и конечной кратности. Требуется выяснить, насколько однозначно оператор B восстанавливается по $\sigma(H(\beta))$, $\beta>0$. Этот вопрос решаем в предположении, что операторы A и B рассматриваются в вещественном гильбертовом пространстве и все собственные значения оператора A имеют кратность 1. Кроме того, предполагается, что имеет смысл функция $sp[R_z(\beta)-R_z(0)]$ и известны первые три коэффициента $\{I_k(z)\}$,

$k = 1, 2, 3$ разложения (1). В лемме об унитарной эквивалентности дано описание операторов B, имеющих одинаковые коэффициенты $I_1(z)$, $I_2(z)$, $I_3(z)$. При доказательстве теоремы используем эту лемму, а также явный вид оператора B, который в этом случае реализован как оператор умножения на функцию $\beta V(x_1, x_2)$ в пространстве H^0.

Отметим, что 2) и 3) носят вспомогательный характер, а доказательство теоремы содержится в п. 4.

2. Формула разложения $sp[R_z(\beta) - R_z(0)]$ по степеням константы связи $\beta > 0$ применима для оператора $H(\beta) = A + \beta B$. Пусть P_i – проекторы на собственные пространства H_i оператора A, $\mathcal{N}_n$ – семейство, состоящее из наборов n натуральных чисел, образующих эквивалентные классы $\varkappa(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ элементов, получающихся друг из друга перестановками. Тогда имеет место разложение

$$sp[R_z(\beta) - R_z(0)] = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \beta^n \sum_{\mathcal{N}_{n+1}} \frac{I(\varkappa(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}))}{(\lambda_{\gamma_1} - z) \cdots (\lambda_{\gamma_{n+1}} - z)}, \qquad (2)$$

где

$$I(\varkappa(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})) = \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1} \in \varkappa(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})} sp(P_{\gamma_1} B P_{\gamma_2}, \ldots, B P_{\gamma_{n+1}}). \qquad (3)$$

При доказательстве формулы (2) используется равенство

$$R_z(\beta) = R_z(0) - R_z(0) \beta R_z(\beta),$$

а затем применяется, как и при доказательстве (3), метод математической индукции.

Пусть $\{\varphi_k\}$ – ортонормированная система собственных векторов оператора A, отвечающих подпространству H_k. Тогда для коэффициентов $I(\varkappa(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}))$ имеет место следующая вычислительная формула:

$$I(\varkappa(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})) = \qquad (4)$$

$$= \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1} \in \varkappa(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})} \sum_{\varphi_{\gamma_k} \in H_k} (B\varphi_{\gamma_2}, \varphi_{\gamma_1}) \ldots (B\varphi_{\gamma_{n+1}}, \varphi_{\gamma_n}) (\varphi_{\gamma_{n+1}}, \varphi_{\gamma_1}).$$

3. Лемма об унитарной эквивалентности. Предположим, что все собственные значения оператора A являются простыми, тогда по первым трем коэффициентам разложения $sp[R_z(\beta) - R_z(0)]$ единственным образом определяются следующие величины, связанные с оператором B:

$i)$ $(B\varphi_i, \varphi_i) = b_{ii}$ – диагональные элементы матрицы

$$\{(B\varphi_k, \varphi_i)\}_{i,k=1}^{\infty} = \{b_{ik}\}_{i,k=1}^{\infty};$$

ii) модули $|b_{ik}|$ всех матричных коэффициентов оператора B;

iii) величины $b_{ik} \cdot b_{kj} b_{ji}$.

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из формул (2) и (4).

Лемма. Рассмотрим в вещественном гильбертовом пространстве семейство самосопряженных операторов B, удовлетворяющих условиям $i) - iii)$. Пусть B_0 – некоторый фиксированный элемент этого семейства. Тогда любой другой удовлетворяющий условиям $i)$-$iii)$ имеет вид

$$B = U^* B_0 U,$$

где $U = diag\,\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность, состоящая из ± 1.

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицу

$$a_{ik} = \frac{b_{ik}}{b_{ik}^0}.$$

Если $b_{ik} = b_{ik}^0 = 0$, то полагаем $a_{ik} = 1$. Эта матрица удовлетворяет условиям:

а) $|a_{ik}| = 1, \quad a_{ik} \in R;$

б) $a_{ik} = a_{ki};$

в $a_{ik}\, a_{kl}\, a_{li} = 1.$

Полагаем $a_{k1} = e^{i\alpha_k}$, где α_k равно 0 или π в зависимости от того, равен элемент a_{k1} единице или минус единице. Условие в) можно переписать в виде

$$a_{ik}\, a_{kl} = \frac{1}{a_{li}} = a_{li} = a_{il}.$$

Полагая в этом равенстве $k = 1$, получаем

$$a_{il} = a_{i1}\, a_{1l} = a_{i1}\, a_{l1} = e^{i(\alpha_i - \alpha_l)}.$$

Следовательно, $b_{ij} = b_{ij}^0 \sigma_i \sigma_j$, где $\sigma_k = e^{i\alpha k}$ и значит $B = U^* B_0 U$, где $U = diag\,(\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty})$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы. Собственные функции оператора $A = -\Delta$ в пространстве $\overset{\circ}{H}$ имеют вид

$$\varphi_{n,m}(x_1, x_2) = a_1 a_2 \cos\frac{\pi n x_1}{a_1} \cos\frac{\pi m x_2}{a_2}.$$

Поскольку числа a_1 и a_2 несоизмеримы, то спектр оператора A однократен. Пусть имеется два потенциала $V_1(x)$ и $V_0(x)$ с одинаковыми коэффициентами I_1, I_2 и I_3. Установим связь между ними. Обозначим через B_1 оператор умножения на V_1, через B_0 – оператор умножения на V_0. Согласно леммы об унитарной эквивалентности, имеем

$$B_1 = U^* B_0 U,$$

где $U = diag(\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty})$, $\sigma_k = \pm 1$. Обозначив через b'_{nm} матричные коэффициенты оператора B_1, через b_{nm} – матричные коэффициенты оператора B_0, имеем

$$b'_{nm} = b_{nm}\sigma_n\sigma_m, \qquad n, m = 1, 2, \dots . \tag{5}$$

Дальнейшие рассуждения проведем, рассмотрев вместо прямоугольника $[-a_1, a_1]\times[-a_2, a_2]$ отрезок $[-1, 1]$ и вместо оператора $H(\beta) = -\Delta + \beta V(x_1, x_2)$ оператор $H(\beta) = -\frac{d^2}{dx^2} + \beta V(x)$. Это позволит избежать ненужных громоздких обозначений, хотя схема рассуждений точно такая же. Пусть c_n – коэффициенты Фурье функции V_0; c'_n – коэффициенты Фурье функции $V_1(x)$, тогда

$$b_{mn} = \int_{-1}^{1} V(x)\cos\pi nx \cos\pi mx\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(c_{n+m} + c_{|n-m|}\right).$$

Поэтому (5) можно переписать в виде

$$[c_{n+m} + c_{|n-m|}]\sigma_m\sigma_n = c'_{n+m} + c'_{|n-m|}. \tag{6}$$

Полагая в (6) $m = 0$, получаем

$$c'_n = c_n\sigma_0\sigma_n. \tag{7}$$

При $n = m$ имеем

$$c_{2n} + c_0 = c'_{2n} + c'_0. \tag{8}$$

Следовательно, $c_{2n} = c'_{2n}$. Без ограничения общности будем считать $\sigma_0 = 1$. Тогда из (7) и (8) получаем $\sigma_{2n} = 1$. Полагая в (6) $m = n+2$, имеем

$$[c_{2n+2} + c_2]\sigma_{n+2}\sigma_n = c_{2n+2} + c_2,$$

откуда получаем $\sigma_{n+2}\sigma_n = 1$. Следовательно, либо $\sigma_{2n+1} = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, либо $\sigma_{2n+1} = -1$. Это влечет соотношения $c'_n = c_n$ или

$c_n' = (-1)^n c_n$. Для двухмерного случая получаются следующие соотношения:

1) $c'_{n,m} = c_{n,m}$;

2) $c'_{n,m} = (-1)^n c_{n,m}$;

3) $c'_{n,m} = (-1)^m c_{n,m}$;

4) $c'_{n,m} = (-1)^{n+m} c_{n,m}$.

Поэтому функция $V_1(x_1, x_2)$ может выражаться через функцию $V_0(x_1, x_2)$ с помощью четырех соотношений:

$$V_1(x_1, x_2) = V_0(x_1, x_2), \qquad V_1(x_1, x_2) = V_0(a_1 - x_1, x_2),$$

$$V_1(x_1, x_2) = V_0(x_1, a_2 - x_2), \qquad V_1(x_1, x_2) = V_0(a_1 - x_1, a_2 - x_2),$$

что и доказывает теорему.

УДК 517.9+519.219

И.Д.Чуешов

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КАРМАНА

1. Рассмотрим систему уравнений

$$L_t u + \Delta^2 u - [u+f, v+\theta] = \rho(x,t)\dot{w}(x,t), \tag{1а}$$

$$\Delta^2 v + [u+2f, u] = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \tag{1б}$$

$$u\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \qquad v\Big|_\Gamma = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0, \tag{1в}$$

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x), \qquad \dot{u}\Big|_{t=0} = u_1(x). \tag{1г}$$

Здесь Ω – гладкая ограниченная область в R^2, $\Gamma = \partial\Omega$,

$$L_t u = (1 - \gamma\Delta)\ddot{u} + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2\Delta)\dot{u}, \quad \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \gamma > 0, \ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0,$$

Δ – оператор Лапласа, $\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta$,

$$[u,v] = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{2}$$

Предполагается, что u_0, $f \in H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $\theta(x) \in H^4(\Omega)$, $\rho(x,t) \in L^\infty(0, \infty; \ L^2(\Omega))$, где $H^l(\Omega)$ – соболевское пространство порядка l. Система (1) описывает нелинейные стохастические колебания пологой оболочки, защемленной по контуру с учетом инерции вращения элементов [1] под действием случайной нагрузки вида $p+\dot{w}$, где $\dot{w}$ – "белый шум", т.е. обобщенная производная по t винеровского процесса в $L^2(\Omega)$. Введение "белого шума" необходимо в связи с задачей определения наиболее реальной формы равновесия [2]. При условиях $\gamma=0$, $\varepsilon_2=0$ вопрос о построении и свойствах решений стохастической системы (1) обсуждался в [3,4]. В рассматриваемой ситуации, в отличие от [3,4], как и в детерминистском случае [1,5], удается доказать теорему единственности.

2. Пусть

$$\mathcal{X}_T^p=\{u(t)\in L^p(0,T;H_0^2(\Omega))\,|\,\dot{u}(t)\in L^p(0,T;H_0^1(\Omega))\}$$

с нормой

$$|u|_{\mathcal{X}_T^p}=\left(|u|_2^p+|u|_1^p\right)^{1/p},\quad p\geq 2,$$

где $|u|_l^p=\int_0^T\|u(t)\|_l^p\,dt$, $\|\cdot\|_l$ – норма в пространстве $H_0^l(\Omega)$, $\|\cdot\|$ – норма в $L^2(\Omega)$, $\|f\|_1^2=\|f\|^2+\gamma\|\nabla f\|^2$, $\|f\|_2=\|\Delta f\|$. Обозначим через H_- пополнение пространства $H_0^1(\Omega)$ по норме

$$\|f\|_-=\sup\left\{\frac{(f,u)_1}{\|u\|_2}:u\in H_0^2(\Omega)\right\}.$$

Ясно, что $H_0^2(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)\subset H_-$ является оснащением. Положим также

$$U_{T,p}^{\varkappa}=\{u(t)\in\mathcal{X}_T^p\,\big|\,|\dot{u}|_{G,\varkappa,H_-}<\infty\},$$

где $0<\varkappa<1$,

$$|v|_{G,\varkappa,H}=\sup_{t_1,t_2\in[0,T]}|t_1-t_2|^{-\varkappa}\|v(t_1)-v(t_2)\|_H.$$

Норму в $U_{T,p}^{\varkappa}$ определим формулой

$$|u|_{U_{T,p}^{\varkappa}}=|u|_{\mathcal{X}_T^p}+|\dot{u}|_{G,\varkappa,H_-}.$$

В качестве пространства $\mathcal{L}^\alpha(V)$, $\alpha>1$ начальных распределений рассмотрим множество вероятностных мер на σ-алгебре $\mathcal{L}(V)$ борелевских множеств пространства $V=H_0^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, обладающих свойством

$$\int_V\left[\|w_0\|_2^{4\alpha}+(E(w_0,w_1))^\alpha\right]\mu(dw_0,dw_1)<\infty,$$

где

$$E(u_0, u_1)=\frac{1}{2}\left(\|u_1\|^2+\gamma\|\nabla u_1\|^2+\|\Delta u_0\|^2+\frac{1}{2}\|\Delta v_0\|^2\right),$$

причем $v_0=-G([u_0+2f, u_0])$; G – оператор Грина задачи Дирихле для бигармонического оператора в области Ω.

Пусть $\Lambda(dw)$ – борелевская вероятностная мера на $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, являющаяся распределением винеровского процесса $w(x,t)$ в $L^2(\Omega)$ с корреляционным оператором $Q(Q\geqslant 0, tr\, Q<\infty)$. Ее характеристический функционал имеет вид

$$\hat{\Lambda}(v)=exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T min\,(t,s)\,(Qv(t), v(s))\,dt\,ds\right\},$$

где $v(t)\in L^2(0,T; L^2(\Omega))$. Винеровский процесс $w(t)$ при этом может быть реализован как непрерывная функция из $C(0,T; L^2(\Omega))$, обращающаяся в нуль при $t=0$ [6]. На пространстве $U_{T,\rho}^{\varkappa}$ определим плотно заданное линейное отображение $\gamma_t: U_{T,\rho}^{\varkappa}\to V$ по формуле $\gamma_t u = \{\dot u(t), \dot u(t)\}$. Можно показать, что это отображение измеримо относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}(U_{T,\rho}^{\varkappa})$. Определим также на $U_{T,\rho}^{\varkappa}$ величину

$$A_0[u]=-b\,(u(0), \dot u(0))+B[u],$$

где

$$b(u_0, u_1)=(1-\gamma\Delta)\,u_1+(\varepsilon_1-\varepsilon_2\Delta)\,u_0,$$

$$B[u]=b(u(t),\dot u(t))+\int\limits_0^t(\Delta^2 u-[u+f,\ v+\theta]-p)\,d\tau,$$

а v определяется по u согласно (1,б). Непрерывность вложения $\mathcal{L}_T^{\rho}$ в $C(0,T; H^{3/2}(\Omega))$ и оценка $\|[u,v]\|_2\leq C\|u\|_{3/2}\|v\|_2$ [5] позволяют доказать непрерывность отображения $u\to B(u)$ из $\mathcal{L}_T^{\rho}$ в $L^2(0,T; H^{-2}(\Omega))$. Отсюда легко извлечь измеримость отображения A_0 из $U_{T,\rho}^{\varkappa}$ в $L^2(0, T; H^{-2}(\Omega))$, а значит и в $L^2(0,T; L^2(\Omega))$. Задача (1) при этом может быть записана в виде

$$A_0[u]=w(t),\qquad \gamma_0 u=\{u_0, u_1\}. \tag{3}$$

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. Пусть $\mu\in\mathfrak{B}^{\alpha}(V)$, $\alpha>1$, $\gamma>0$, ε_1, $\varepsilon_2\geqslant 0$. Тогда при каждом $T>0$ для почти всех $\{u_0, u_1, w(t)\}\in V\times L^2(0,T; L^2(\Omega))$ по мере $\mu\times\Lambda$ задача (3) имеет решение $u(t,x)$, лежащее в $U_{T,2\alpha}^{\varkappa(\alpha)}$, где $\varkappa(\alpha)=(\alpha-1)/\alpha$, если $1<\alpha<2$; $\varkappa(\alpha)$ – любое число из интервала $(0, 1/2)$ при $\alpha\geqslant 2$. В случае $\alpha\geqslant 3/2$ это решение единственно и отображение $\{u_0, u_1, w(t)\} \to u(t,x)$ измеримо по Борелю как отображение из $V\times L^2(0,T; L^2(\Omega))$ в $U_{T,2\alpha}^{\varkappa(\alpha)}$.

При доказательстве этого утверждения используются идеи и методы статистической гидромеханики [7,8] и техника, развитая в [4].

3. Построим приближенные статистические решения. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис пространства $H_0^2(\Omega)$, ортонормированный в $H_0^1(\Omega)$ и такой, что $(e_k, e_j)_2 = \lambda_k \delta_{kj}$. При этом $\lambda_k \sim k$ при $k \to \infty$. Для того чтобы построить этот базис нужно решить спектральную задачу: найти пару (u, λ) из $H_0^2(\Omega)\times R$ такую, что $(u,v)_2 = \lambda (u,v)_1$ для всех $v \in H_0^2(\Omega)$. Аппроксимацией по Галеркину, отвечающей базису $\{e_k\}$ стохастической системы (1), называется следующая задача.

Найти случайный процесс $\{u_m(t), \tilde{u}_m(t)\}$, прогрессивно измеримый относительно $(w(t), e_i)$, $i=1,\dots,m$, где

$$u_m = \sum_{k=1}^{m} q_k^m(t)\, e_k, \qquad \tilde{u}_m = \sum_{k=1}^{m} p_k^m(t)\, e_k, \tag{4}$$

удовлетворяющий системе соотношений

$$\begin{gathered} d(\tilde{u}_m - \gamma\Delta\tilde{u}_m, e_i) = -\{((\varepsilon_1 - \varepsilon_2\Delta)\,\tilde{u}_m, e_i) + (\Delta u_m, \Delta e_i) + \\ + ([u_m + f, G([u_m + 2f, u_m]) - \theta], e_i) - (\rho, e_i)\}dt + d(w(t), e_i), \\ d(u_m, e_i) = (\tilde{u}_m, e_i)\, dt, \quad i = 1,2,\dots,m, \\ u_m\big|_{t=0} = u_{0m}, \qquad \tilde{u}_m\big|_{t=0} = u_{1m}, \end{gathered} \tag{5}$$

где $\{u_{0m}, u_{1m}\} = \pi_m\{u_0, u_1\}$, $\pi_m = P_m^2 \times P_m^1$, P_m^k – ортопроектор на л.о. $\{e_1,\dots,e_m\}$ в $H_0^k(\Omega)$, $k=1,2$.

Как и в [4], эта система может быть записана в виде некоторой системы Ито. Ее инфинитезимальный оператор имеет вид

$$L_m = \sum_{j=1}^{m}\left(-\sum_{i=1}^{m}(b_m)_{ji}\, p_i - \frac{\partial \Phi_m}{\partial q_j} + f_j\right)\frac{\partial}{\partial p_j} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} p_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(Q_m)_{ij}\frac{\partial^2}{\partial p_i\, \partial p_j},$$

где b_m, Q_m – матрицы размера $m\times m$ с матричными элементами

$b_{ik} = \varepsilon_1(e_i, e_k) + \varepsilon_2(\nabla e_i, \nabla e_k)$, $q_{ik} = (Q e_i, e_k)$, $i,k = 1,\dots,m$,

$f_i = (\rho(t), e_i)$; $\Phi_m(q^m) = \Phi(u_m)$, $\Phi(u) = \frac{1}{2}\|\Delta u\|^2 + \frac{1}{4}\|\Delta v\|^2 - \frac{1}{2}(\theta, [u+2f, u])$,

причем v определяется по u согласно (1б).

Введем на пространстве V функции

$$F(w_0, w_1)=\frac{1}{2}((1-\gamma\Delta)w_1, w_1)+\Phi(w_0),$$

$$V(w_0, w_1)=F(w_0, w_1)+a\left\{\frac{1}{2}((\varepsilon_1-\varepsilon_2\Delta)w_0, w_0)+((1-\gamma\Delta)w_0, w_1)\right\},$$

где a – положительная константа. Можно проверить, что для достаточно малых $a>0$ найдутся числа R, $C>0$ такие, что

$$C^{-1}E(w_0,w_1)\leq F(w_0, w_1)+R\leq C(E(w_0, w_1)+R), \tag{6}$$

$$C^{-1}E(w_0,w_1)\leq V(w_0, w_1)+R\leq C(E(w_0, w_1)+R). \tag{7}$$

В случае $f=0$, $\theta=0$ можно считать, что $R=0$.

В дальнейшем для любого функционала $\Psi(w_0, w_1)$ на V будем полагать

$$\Psi_R(w_0, w_1)=\Psi(w_0, w_1)+R, \qquad \Psi^m(p,q)=\Psi(u_m, \tilde{u}_m),$$

где u_m, $\tilde{u}_m$ имеют вид (4).

<u>Лемма 1.</u> Пусть ε_1, $\varepsilon_2\geqslant 0$, тогда существует $C_\alpha>0$ такое, что

$$L_m(F^m_{R+1})^\alpha\leq C_\alpha(F^m_{R+1})^\alpha, \quad \alpha\geqslant 1. \tag{8}$$

Если же $\varepsilon_2>0$, то для достаточно малых $a>0$ найдутся числа b_0, b_1, $b_2>0$ такие, что

$$\begin{gathered} L_m V^m_R\leq -b_0 V^m_R+b_1, \\ L_m(V^m_R)^\alpha\leq\alpha(V^m_R)^{\alpha-1}(L_m V^m+\alpha b_2). \end{gathered} \tag{9}$$

Доказательство. Как и в [4], достаточно установить справедливость леммы при $\alpha=1$. Простым вычислением получаем, что

$$L_m F^m=-((\varepsilon_1-\varepsilon_2\Delta)\tilde{u}_m, \tilde{u}_m)+(p,\tilde{u}_m)+\frac{1}{2}tr(Q_m).$$

Отсюда при $\alpha=1$ вытекает (8). Аналогично

$$L_m V^m_R=L_m F^m+a\{-\|\Delta u_m\|^2+(v_m+\theta, [u_m+f, u_m])+$$
$$+(p, u_m)+((1-\gamma\Delta)\tilde{u}_m, \tilde{u}_m)\},$$

где v_m определяется по u_m согласно (1б). Используя уравнение (1б), свойства скобки (2) [5] и оценки вида

$$|(f,[u,v])| \le C \|f\|_2 \|v\|_2 \|u\|_{3/2} \tag{10}$$

можно показать, что при $a>0$ найдутся числа $k_i>0$, $i=0,1,2,3,\ldots$, такие, что

$$L_m V_R^m \le -k_0 E^m - k_1 D(u_m) + k_2,$$

где

$$D(u) = \|u\|_2^2 + \|\Delta G([u,u])\|^2 - k_3 \|u\|_{3/2}^2.$$

Для того чтобы отсюда получить (9), достаточно проверить, что функционал $D(u)$ ограничен снизу на $H_0^2(\Omega)$. Сделаем это. Пусть $u \in H_0^2(\Omega)$, $\|u\|_2 = 1$. Рассмотрим функцию $d(\lambda) = D(\lambda u)$. Это четный полином четвертой степени, $d(\lambda) \to +\infty$, $\lambda \to \infty$. Пусть $\lambda(u)$ – точка абсолютного минимума функции $d(\lambda)$. Очевидно, что

$$|\lambda(u)|^2 \le C[\|\Delta G([u,u])\|^2]^{-1}, \tag{11}$$

$$\lambda^2(u)(1-k_3\|u\|_{3/2}^2) \le d(\lambda(u)) \le d(0) = 0. \tag{12}$$

Покажем, что существует λ_0 такое, что $|\lambda(u)| < \lambda_0$. Пусть это не так. Тогда найдется последовательность $\{u_n\}$ в $H_0^2(\Omega)$ такая, что $\|u_n\|_2 = 1$ и $\lambda_n = \lambda(u_n) \to +\infty$ при $n \to \infty$. Можно считать, что u_n слабо сходится к некоторому элементу $u_0 \in H_0^2(\Omega)$. Из (10) и компактности вложения $H_0^2(\Omega)$ в $H_0^{3/2}(\Omega)$ вытекает, что функция $D_1(u) = \|\Delta G([u,u])\|^2$ слабо непрерывна на $H_0^2(\Omega)$.

В силу (11) $\lim_{n\to\infty} D_1(u_n) = 0$, поэтому $D_1(u_0) = 0$. Отсюда получаем, что $[u_0,u_0] = 0$. Так как $([u_0,u_0],\varphi) = (u_0,[u_0,\varphi])$ для $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, $\varphi \in H^2(\Omega)$, то, полагая $\varphi = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$, имеем, что $(u_0, \Delta u_0) = 0$. Следовательно, $u_0 = 0$, значит $\|u_n\|_{3/2} \to 0$, это противоречит неравенству (12). Таким образом, $|\lambda(u)| \le \lambda_0$ при $\|u\|_2 = 1$. Отсюда и из слабой полунепрерывности $D(u)$ снизу вытекает, что точка минимума функционала $D(u)$ лежит в шаре $\|u\|_2 \le \lambda_0$ и, следовательно, функционал $D(u)$ полуограничен. Тем самым лемма доказана.

Теорема Р.З.Хасьминского [9, с. 113] и лемма 1 позволяют доказать однозначную разрешимость системы (5) для любых случайных векторов $\{u_{0m}, u_{1m}\} \in \mathcal{X}_m V$, не зависимых от винеровского процесса $(w(t), e_i)$, $i=1,\ldots,m$. Процесс $\{u_m(t), \tilde{u}_m(t)\}$ является непрерывным с вероятностью 1, причем $\tilde{u}_m(t) = \dot{u}_m(t)$ и почти наверное $u_m(t) \in Z_T = C(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; H_-)$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть P_m – распределение случайной величины $u_m(t)$ в Z_T, $\mu \in \mathcal{L}^\alpha(V)$, $\alpha > 1$; μ не зависит от винеровского процесса $w(t)$. Тогда каждое из распределений P_m является вероят-

ностной мерой на Z_T, сосредоточено на $U^{\varkappa(\alpha)}_{T,2\alpha}$ и обладает такими свойствами.

1. Имеют место оценки

$$\int_{Z_T} (E(u(t),\dot u(t)))^{\alpha} P_m(du) \le c_1 E^{\alpha}(\mu_m)+c_2 \quad t\in T; \tag{13}$$

$$\int_{Z_T} |u|^{2\alpha}_{\mathcal{L}^{2\alpha}_T} P_m(du) < c_3, \tag{14}$$

$$\int_{Z_T} |\dot u|_{G,\varkappa(\alpha),H^-} P_m(du) < c_4, \tag{15}$$

где $\varkappa(\alpha)$ определено в теореме 1.

2. Для любых $v^0 \in V' = H_- \times H^1_0(\Omega)$, $v \in L^2(0,T; H^2_0(\Omega))$, $m \geq k$ справедливы соотношения

$$\int_{Z_T} (|(\gamma_0 u, v^0)| + |\langle A_0[u], \rho_k^2 v\rangle|) P_m(du) < c_5, \tag{16}$$

$$\int_{Z_T} \exp\{i(\gamma_0 u, \pi'_k v^0) + i\langle A_0[u], \rho_k^2 v\rangle\} P_m(du) = \tilde\mu(\pi'_k v^0)\tilde\Lambda(\rho_k^2 v), \tag{17}$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – двойственность, порождаемая скалярным произведением в $L^2(0,T; L^2(\Omega))$; π'_k – сопряженный проектор, действующий в V' ; $\tilde\mu$, $\tilde\Lambda$ – характеристические функционалы мер μ и Λ.

3. Если $\varepsilon_2 > 0$, то имеет место неравенство

$$V_R^{\alpha}(t,P_m) + \alpha c_6 \int_0^t V_R^{\alpha}(\tau,P_m)\,d\tau \le V_R^{\alpha}(\mu_m) + \alpha^2 c_7 \int_0^t V_R^{\alpha-1}(\tau,P_m)\,d\tau, \tag{18}$$

где

$$V_R^{\alpha}(t,P) = \int_{Z_T} [V_R(u(t),\dot u(t))]^{\alpha} P(du), \quad V_R^{\alpha}(\mu_m) = \int_V [V_R(w_0,w_1)]^{\alpha} d\mu;$$

R – константа, фигурирующая в неравенствах (6) и (7).

В приведенных выше оценках все константы положительны и не зависят от m, c_6, c_7, не зависят от T.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве теоремы 2.1 из работы [4], с помощью леммы 1 и неравенства (6) получаем оценки (13), (14), (16). Докажем (15). Определим процесс $z_m = \dot u_m - \rho_m^1 (1-\gamma\Delta_D)^{-1} w$, где Δ_D – оператор Лапласа с условием Дирихле на Γ. Благодаря выбору базиса $\{e_k\}$ имеем равенство $(\dot z_m, v)_1 = (\dot z_m, \rho_m^2 v)_1$. Поэтому аналогично лемме 2.2 из работы [4] получаем, что

$$M_m \|\dot z_m\|^{\alpha}_- < C_T,$$

где M_m – математическое ожидание, отвечающее начальному распределению $\pi_m^* \mu$ и винеровскому процессу $(w(t), e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Далее из леммы 2.3 [4] и теоремы Леви имеем, что

$$M |w|_{G, x, H^{-2}(\Omega)} < \infty, \qquad 0 < x < 1/2.$$

Отсюда и из того, что $\| P_m^1 (1-\gamma A_D)^{-1} v \|_- \leq \|v\|_{-2}$ вытекает (15). Для того чтобы установить неравенство (18), следует воспользоваться леммой 1 и соображениями, приведенными в замечании 2.1 в работе [4]. Тождество (17) вытекает из соотношений (5).

4. В силу теоремы Дубинского [8] пространство $U_{T, 2\alpha}^{x(\alpha)}$ компактно вложено в Z_T. Поэтому из (14), (15) и теоремы Прохорова вытекает слабая компактность семейства мер $\{P_m\}$ на Z_T. Пусть P – предельная точка этого семейства. Ясно что P – вероятностная мера на Z_T. Аппроксимируя норму $|u|_{\mathcal{L}_T^P}$ последовательностью непрерывных ограниченных функций на Z_T, как и в [8], можно показать, что

$$\int_{Z_T} |u|_{\mathcal{L}_T^{2\alpha}}^{2\alpha} P(du) < \infty. \tag{19}$$

Аналогично из (15) можно получить

$$\int_{Z_T} |\dot{u}|_{G, x(\alpha), H_-} P(du) < \infty. \tag{20}$$

Из (19), (20) вытекает, что предельная мера сосредоточена на пространстве $U_{T, 2\alpha}^{x(\alpha)}$. Для того чтобы осуществить предельный переход в (13), (16) – (18), необходимо использовать регуляризации, описанные в [4, §3], полагая в (3.5) из [4]

$$P^\varepsilon v = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\varepsilon\sqrt{\lambda_k}} (v, e_k)_1 \, e_k.$$

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

<u>Теорема 3.</u> На пространстве Z_T существует вероятностная борелевская мера P, сосредоточенная на $U_{T, 2\alpha}^{x(\alpha)}$ и такая, что:

а) имеет место (19), (20);

б) справедливо энергетическое неравенство, т.е.

$$\int_{Z_T} (E(u(t), \dot{u}(t)))^\alpha P(du) < c_1 E^\alpha(\mu) + c_2, \quad t \in [0, T]; \tag{21}$$

в) для любых $v^0 \in V'$ $\quad v \in L^2(0, T; H_0^2(\Omega))$

$$\int_{Z_T} exp\{i(\gamma_0 u, v^0) + i \langle A_0[u], v \rangle\} P(du) = \tilde{\mu}(v^0) \tilde{\Lambda}(v); \tag{22}$$

г) если $\varepsilon_2 > 0$, то

$$\int_0^t V_R^{\alpha}(\tau,\rho)\,d\tau \le c_3^{\alpha}[\alpha]!\,\left(V_R^{\alpha}(\mu)+c_4 t\right), \tag{23}$$

где c_3, c_4 не зависят от T.

Определим отображение A из $U_{T,2\alpha}^{\varkappa(\alpha)}$ в $W\times L^2(0,T;\,H^{-2}(\Omega))$, где $W=H_0^1(\Omega)\times H_-$, формулой $A[u]=\{\gamma_0 u,\ A_0[u]\}$. Легко проверить, что оно непрерывно. Если теперь меру ρ сузить на $U_{T,2\alpha}^{\varkappa(\alpha)}$, а меры μ и Λ продолжить соответственно на W и $L^2(0,T;\,H^{-2}(\Omega))$, то равенство (22) может быть записано в виде $A^*\rho=\mu\times\Lambda$.

Лемма 2. При всех $\alpha>1$ отображение A является непрерывным. Существует борелевское множество $\mathcal{F}$ в $V\times C(0,T;\,L^2(\Omega))$ такое, что $(\mu\times\Lambda)(\mathcal{F})=1$ и $\mathcal{F}\subset AU_{T,2\alpha}^{\varkappa(\alpha)}$. Если $\alpha\geqslant 3/2$, то A является инъективным отображением.

Доказательство. Первая часть леммы устанавливается так же, как соответствующее утверждение в случае системы Навье – Стокса [7,8,10]. Докажем инъективность A при $\alpha\geqslant 3/2$. Пусть $u_1,u_2\in U_{T,2\alpha}^{\varkappa(\alpha)}$ и $A[u_1]=A[u_2]$. Для $u=u_1-u_2$ получаем, что $\gamma_0 u=0$ и $(1-\gamma\Delta)\dot u+(\varepsilon_1-\varepsilon_2\Delta)u+\int_0^t(\Delta^2 u-\mathcal{F}(\tau))\,d\tau=0$, где $\mathcal{F}=[u_1+f,\ v_1+\theta]-[u_2+f,\ v_2+\theta]$. Поэтому в оснащении $H_0^2\subset H_0^1\subset H_-$ имеет место равенство $\ddot u+K_1\dot u+K_2 u=\tilde{\mathcal{F}}(t)$, где K_1 и K_2 задаются формами $(K_1 u,v)_1=((\varepsilon_1-\varepsilon_2\Delta)u,v)$, $(K_2 u,v)_1=(\Delta u,\Delta v)$, а $\tilde{\mathcal{F}}(t)$ определяется равенством $(\tilde{\mathcal{F}}(t),v)_1=(\mathcal{F}(t),v)$ почти всюду. Можно показать, что

$$\|\tilde{\mathcal{F}}(t)\|_- \le C\left(1+\|u_1(t)\|_2+\|u_2(t)\|_2\right),$$

$$\|\tilde{\mathcal{F}}(t)\|_1 \le C\left(1+\|u_1(t)\|_2+\|u_2(t)\|_2\right)\|u(t)\|_2,$$

где C зависит от $|u_i|_{\mathcal{X}_T^2}$. Поэтому энергетические оценки для линейных уравнений позволяют при $\alpha\geqslant 3/2$ установить неравенство

$$\|\dot u(t)\|_1^2+\|u(t)\|_2^2\le C\int_0^t\left(1+\|u_1(\tau)\|_2+\|u_2(\tau)\|_2\right)\|u(\tau)\|_2\,\|\dot u(\tau)\|_1\,d\tau.$$

Отсюда легко извлечь, что $u\equiv 0$.

Из этой леммы в случае $1<\alpha<3/2$, как и в [7,8], извлекаем существование индивидуальных решений уравнения (3) для почти всех $\{u_0\,u_1,\ w(t)\}$. Если же $\alpha\geqslant 3/2$, то следует положить

$$u(t)=\begin{cases} A^{-1}\{u_0,u_1,w(t)\}, & \text{если } \{u_0,u_1,w(t)\}\in\mathcal{F},\\ 0, & \text{если } \{u_0,u_1,w(t)\}\notin\mathcal{F}.\end{cases}$$

Как и в [10], можно проверить, что этот процесс удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Мера ρ при этом является распределением случайного процесса $u(t)$.

Отметим также, что как и в [4] можно показать, что распределение $\gamma_t^* \rho$ при каждом $t \in [0,T]$ является вероятностной мерой, сосредоточенной на $H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. При этом семейство $\{\gamma_t^* \rho\}$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова.

5. Оценка (23) позволяет установить существование стационарных решений системы (1) в случае, когда $\rho(x,t) = \rho(x) \in L^2(\Omega)$ и $\varepsilon_2 > 0$.

Пусть $U^\alpha = \lim\limits_{T \to \infty} proj\, U_{T,2\alpha}^{x(\alpha)}$, т.е. U^α – множество вектор-функций на $[0,\infty]$ таких, что сужение каждой из них на $[0,T]$ лежит в $U_{T,2\alpha}^{x(\alpha)}$ для всех $T > 0$. Топология в U^α задается системой норм $\{|\cdot|_{U_{T,2\alpha}^{x(\alpha)}}, T > 0\}$. Вероятностную меру ρ на U^α будем называть стационарной, если $L_t^* \rho = \rho$, $t > 0$, где L_τ оператор сдвига влево.

Теорема 4. Пусть $\varepsilon_2 > 0$, $\rho(x,t) = \rho(x) \in L^2(\Omega)$. Тогда на пространстве $Z = \lim\limits_{T \to \infty} proj\, Z_T$, где

$$Z_T = C(0,T;\ H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T;\ H_-),$$

существует стационарная вероятностная мера ρ, сосредоточенная на U^α для любого $\alpha > 1$ и обладающая свойствами:

а) $$\int\limits_Z |u|_{U_{T,2\alpha}^{x(\alpha)}} \rho(du) < C_T; \tag{24}$$

б) $$\int\limits_Z [V_R(u(t), \dot u(t))]^n \rho(du) \le C^n n!,\quad t > 0; \tag{25}$$

в) $$\int\limits_Z exp\{i \langle A_0[u], v\rangle_T\} \rho(du) = \tilde\Lambda(v) \tag{26}$$

для любого $v \in L^2(0,T;\ H_0^2(\Omega))$, где $\langle u, v\rangle_T = \int\limits_0^T (u(t), v(t))\,dt$.

Кроме того, мера $\mu = \gamma_t^* \rho$ не зависит от t, сосредоточена на V, такова, что

$$\int\limits_V [V_R(u_0, u_1)]^n \mu(du_0, du_1) \le C^n n! \tag{27}$$

и удовлетворяет стационарному прямому уравнению Колмогорова.

Доказательство. Как и в [4,7,8], воспользуемся методом усреднения Боголюбова. Меры ρ, построенные в теореме 3, можно считать заданными на $U^\alpha \subset Z$. Пусть μ_0 – начальное распределение, сосредоточенное на нулевом элементе пространства V, $u(t)$ – случайный процесс, построенный в теореме 1 по начальному распределению μ_0. На вероятностном пространстве

$$(Z \times [0,s],\ \mathfrak{B}(Z \times [0,s]),\ \rho \times \frac{d\tau}{s})$$

определим случайный процесс

$$u_s(t) = L_\tau u(t) = u(t+\tau), \qquad (u,\tau) \in Z \times [0,s].$$

Функция распределения ρ_s процесса u_s является борелевской мерой на Z и

$$\int_Z f(u)\rho_s(du) = \frac{1}{s}\int_Z \int_0^s f(L_\tau u)\rho(du)d\tau.$$

Используя (22), легко проверить, что $w_s(t) = A_0[u_s(t)]$ является винеровским процессом с корреляционным оператором Q. Так как $V_R^n(\mu_0) = R^n$, то из (23) легко получить оценку

$$\int_0^t V_R^n(\tau, \rho)d\tau \le a_n + b_n t,$$

где $b_n = (C)^n n!$ Отсюда для величины

$$V_R^n(t, \rho_s) = \frac{1}{s}\int_t^{t+s} V_R^n(\tau, \rho)d\tau$$

получаем неравенство

$$V_R^n(t, \rho_s) \le \frac{a_n + b_n(t+s)}{s}.$$

Рассматривая процес $\xi = \dot{u}_s - (1-\gamma\Delta)^{-1} w_s$ и поступая так же, как при доказательстве (15), можно обнаружить, что

$$\int |u|_{U_{T,2\alpha}^{\varkappa(\alpha)}} \rho_s(du) < C_T.$$

Используя компактность вложения $U_{T,2\alpha}^{\varkappa(\alpha)}$ в Z_T и стандартные рассуждения, опирающиеся на теорему Прохорова [4,7,8], можно установить слабую компактность в Z семейства $\{\rho_s\}$ при $s \to \infty$. Использование регуляризаций, описанных в [4], дает возможность установить (24) – (26) для предельных точек ρ этого семейства. Стационарность ρ проверяется непосредственно. Оценка (27) вытекает из (25) и позволяет, в свою очередь, методом, изложенным в [4, §4], доказать, что семейство вероятностных мер $\{\gamma_t^* \rho\}$ удовлетворяет стационарному прямому уравнению Колмогорова.

Сделаем следующее замечание. Если в (1а) положить $\gamma = 0$, $\varepsilon_2 = 0$, т.е. пренебречь инерцией вращения элементов оболочки, то для функции

$$W(u_0, u_1) = \frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \Phi(u_0) + \alpha\left\{\frac{\varepsilon_1}{2}\|u_0\|^2 + (u_0, u_1)\right\}$$

можно получить оценки, аналогичные (7), (9). Поэтому, как и в теореме 2, можно установить неравенство вида (18) в данном случае (вместо V следует взять W). Это позволяет уточнить теорему 5.1 из [4] и доказать существование стационарных решений P, сосредоточенных на $H = \lim_{T\to\infty} proj\, H_T$, где

$$H_T = \{u(t) \in L^2(0,T; H_0^2(\Omega)) \mid \dot u \in L^2(0,T; L^2(\Omega)), \ |\dot u|_{G,\varkappa,H^{-2}} < \infty, \ 0 < \varkappa < \frac{1}{2}\},$$

и таких, что

$$\int [W_R(u(t), \dot u(t))]^n P(du) \le C^n n!, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда вытекает, что мера $\mu = \gamma_t^* P$ сосредоточена на пространстве $H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, не зависит от t и удовлетворяет неравенству (27), если вместо $V_R(u, \dot u)$ подставить $W_R(u, \dot u)$. Это дает возможность доказать, что $\mu = \gamma_t^* P$ удовлетворяет стационарному прямому уравнению Колмогорова.

1. Морозов Н.Ф. Избранные двухмерные задачи теории упругости. - Л. : Изд-во ЛГУ, 1978. - 182 с.
2. Ворович И.И. Статистический метод в теории устойчивости оболочек // Прикл. математика и механика. - 1959. - 23. - С. 885-891.
3. Чуешов И.Д. О статистических решениях стохастической системы уравнений Кармана // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1982. - № 9. - С. 26-29.
4. Чуешов И.Д. Существование статистических решений стохастической системы уравнений Кармана в ограниченной области // Мат. сб. - 1983. - 122, № 3. - С. 291-312.
5. Лионс М.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. - М. : Мир, 1972. - 587 с.
6. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. - М. : Мир, 1979. - 176 с.
7. Вишик М.И., Комеч А.И., Фурсиков А.В. Некоторые математические задачи статистической гидромеханики. // Усп. мат. наук. - 1979. - 34, вып. 5. - С. 135-210.
8. Вишик М.И., Фурсиков А.В. Математические задачи статистической гидромеханики. - М. : Наука, 1980. - 440 с.
9. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М. : Наука, 1969. - 350 с.
10. Вишик М.И., Комеч А.И. Сильные решения двумерной стохастической системы Навье - Стокса и соответствующие уравнения Колмогорова // Z. Anal. und Anwend. - 1982. - № 1. - С. 23-52.

УДК 517.946

И.Ю.Чудинович

ОСРЕДНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК, ОСЛАБЛЕННЫХ БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ОТВЕРСТИЙ

При расчете напряжений, возникающих в густоперфорированных оболочках, единственно возможным представляется использование метода осреднения – замены реальной оболочки некоторым сплошным упругим телом со специально подобранными параметрами. В настоящей работе эта схема рассматривается для случая круговой цилиндрической оболочки, ослабленной большим числом мелких отверстий. Методика решения задачи осреднения, основанная на результатах, полученных В.А.Марченко и Е.Я.Хрусловым [1,2], позволила провести осреднение уравнений теории упругости и плоских пластин [3,4], уравнений высших порядков [5] и, наконец, эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами [6,7]. Специфика системы уравнений теории тонких оболочек приводит к необходимости ее специального рассмотрения. При этом получены представляющие самостоятельный интерес неравенства типа неравенства Корна в теории упругости для перфорированных оболочек. Объем настоящей работы не позволил включить в нее важнейший частный случай периодического распределения отверстий. Подробное его изучение составит содержание следующей статьи.

1. Постановка задачи. Рассмотрим круговую цилиндрическую оболочку длины a и радиуса R. Параметризуем точки ее срединной поверхности с помощью $x=(x_1, x_2)$, где x_1 – длина дуги меридиана; $x_2=R\varphi$ – параллели. Малую толщину оболочки обозначим через 2σ. Пусть $U(x)=(u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), u^{3}(x))$ – вектор смещения точек срединной поверхности, причем $u^{(i)}(x)$ $(i=1,2)$ – тангенциальные, $u^{3}(x)$ – нормальное смещения. Связь между деформациями оболочки и смещениями задается формулами:

$$\varepsilon_1(U)=\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2(U)=\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2}-\frac{1}{R}u^{(3)},$$

$$\omega(U)=\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x_2}+\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1}, \qquad \varkappa_1(U)=\frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_1^2}, \tag{1}$$

$$\varkappa_2(U)=\frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_2^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_2}, \quad \tau(U)=\frac{\partial^2 u^{(3)}}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x_1}.$$

Введем область изменения параметров $\Omega=\{(x_1, x_2): 0<x_1<a,\ 0<x_2<b\}$ и в ней билинейную форму

$$L_\Omega(U,V)=\int_\Omega W(U,V)\,dx_1dx_2, \tag{2}$$

$$W(U,V)=\frac{2E\sigma}{1-\nu^2}\Big\{\varepsilon_1(U)\varepsilon_1(V)+\varepsilon_2(U)\varepsilon_2(V)+$$

$$+\nu(\varepsilon_1(U)\varepsilon_2(V)+\varepsilon_2(U)\varepsilon_1(V))+\frac{1-\nu}{2}\omega(U)\omega(V)+$$

$$+\frac{\sigma^2}{3}\left[\varkappa_1(U)\varkappa_1(V)+\varkappa_2(U)\varkappa_2(V)+\nu(\varkappa_1(U)\varkappa_2(V)+\right.$$
$$\left.+\varkappa_2(U)\varkappa_1(V))+2(1-\nu)\tau(U)\tau(V)\right]\}, \tag{3}$$

где E и ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала, из которого изготовлена оболочка. Нетрудно видеть, что $L_\Omega(U,U)$ представляет удвоенную потенциальную энергию деформации оболочки на смещении $U(x)$. В дальнейшем $\forall G\subset\Omega$ через $L_G(U,V)$ обозначается правая часть (2) при $\Omega=G$.

Подставляя в (3) компоненты деформации (1), получаем

$$W(UV)=\frac{2E\sigma}{1-\nu^2}\sum_{p,q=1}^{3}\sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p\\ |\beta_q|\le n_q}} a_{\alpha_p\beta_q}\,(D^{\alpha_p}u^{(p)})(x)\,(D^{\beta_q}v^{(q)})(x)=$$

$$=\frac{2E\sigma}{1-\nu^2}\Big\{u^{(1)}_{x_1}v^{(1)}_{x_1}+(u^{(2)}_{x_2}-\frac{1}{R}u^{(3)})(v^{(2)}_{x_2}-\frac{1}{R}v^{(3)})+$$

$$+\nu\left(u^{(1)}_{x_1}\left[v^{(2)}_{x_2}-\frac{1}{R}v^{(3)}\right]+\left[u^{(2)}_{x_2}-\frac{1}{R}u^{(3)}\right]v^{(1)}_{x_1}\right)+$$

$$+\frac{1-\nu}{2}(u^{(1)}_{x_2}+u^{(2)}_{x_1})(v^{(1)}_{x_2}+v^{(2)}_{x_1})+\frac{\sigma^2}{3}\Big[u^{(3)}_{x_1x_1}v^{(3)}_{x_1x_1}+$$

$$+(u^{(3)}_{x_2x_2})+\frac{1}{R}u^{(2)}_{x_2}\ (v^{(3)}_{xx}+\frac{1}{R}v^{(2)}_{x})+\nu\Big(u^{(3)}_{x_1x_1}\left[v^{(3)}_{x_2x_2}+\frac{1}{R}v^{(2)}_{x}\right]+$$

$$+\left[u^{(3)}_{x_2x_2}+\frac{1}{R}u^{(2)}_{x_2}\right]v^{(3)}_{x_1x_1}\Big)+2(1-\nu)\Big(u^{(3)}_{x_1x_2}+\frac{1}{R}u^{(2)}_{x_1}\Big)\Big(v^{(3)}_{x_1x_2}+\frac{1}{R}v^{(2)}_{x_1}\Big)\Big]\Big\}, \tag{4}$$

где $n=(n_1,n_2,n_3)=(1,1,2)$ – фиксированный мультииндекс; α_p, β_q – двухкомпонентные мультииндексы.

Положим при $\forall G\subset\mathbb{R}^2\ H^n(G)=H^{n_1}(G)\times H^{n_2}(G)\times H^{n_3}(G)$, $\overset{\circ}{H}{}^n(G)=$ $=\overset{\circ}{H}{}^{n_1}(G)\times\overset{\circ}{H}{}^{n_2}(G)\times\overset{\circ}{H}{}^{n_3}(G)$. Элементами пространств $H^n(G)$ и $\overset{\circ}{H}{}^n(G)$ являются вектор-функции $U(x)=(u^{(1)}(x),\ u^{(2)}(x),\ u^{(3)}(x))$, скалярное произведение векторов U, V определяется формулами

$$(U,V)_{H^n(G)}=\sum_{k=1}^{3}(u^{(k)},v^{(k)})_{H^{n_k}(G)},$$

$$(u^{(k)},\ v^{(k)})_{H^{n_k}(G)} = \sum_{l=0}^{n_k} (u^{(k)},\ v^{(k)})_{l,G},$$

$$(u^{(k)},\ v^{(k)})_{l,G} = \sum_{|\gamma|=l} \int_G D^\gamma u^{(k)} D^\gamma v^{(k)}\, dx,$$

где γ – двухкомпонентный мультииндекс; $dx = dx_1 dx_2$. В дальнейшем будут также использоваться обозначения

$$\|U\|^2_{l,G} = \sum_{k=1}^{3} \|u^{(k)}\|^2_{l_k,G},$$

$$(U,V)_{l,G} = \sum_{k=1}^{3} (u^{(k)}, v^{(k)})_{l_k,G}, \qquad \forall l = (l_1, l_2\ l_3).$$

Известно [8], что при $\forall U(x) \in H^n(G)$ справедливо неравенство $\|U\|^2_{n,G} \leq \delta_G \{ L_G(U,U) + \|U\|^2_{0,G} \}$, где 0 – нулевой мультииндекс; $\delta_G > 0$. Это неравенство влечет дискретность частот свободных колебаний оболочки. Более того, на векторах $U(x) \in \mathring{H}^n(G)$

$$\|U\|^2_{0,G} \leq \mu_G L_G(U,U) \tag{5}$$

с положительной константой μ_G.

Пусть $F(x) = (f^{(1)}(x),\ f^{(2)}(x),\ f^{(3)}(x))$ – фиксированная вектор-функция с компонентами $f^{(k)}(x) \in C(\bar{\Omega})$ $(k=1,2,3)$. Назовем задачей равновесия для оболочки, защемленной по краю, под действием заданной нагрузки $F(x)$ задачу об отыскании решения $U \in \mathring{H}^n(\Omega)$ вариационного уравнения

$$L_\Omega(U,V) = (F,V)_{0,\Omega}, \qquad \forall V \in \mathring{H}^n(\Omega). \tag{6}$$

Разрешимость (6) следует из (5) и теоремы Рисса; заметим, что задача (6) эквивалентна проблеме минимизации энергетического функционала

$$J_\Omega(U) = L_\Omega(U,U) - 2(F,U)_{0,\Omega} \tag{7}$$

в пространстве $\mathring{H}^n(\Omega)$. Положим $J_G(U)$, $\forall G \subset \Omega$ равным правой части (7) при $\Omega = G$.

Рассмотрим теперь области Ω_s, полученные из Ω удалением большого числа s непересекающихся замкнутых множеств F_{is} $(i=1,\dots,s)$.

Итак, $\Omega_s = \Omega / F_s$, $F_s = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_{is}$. Считаем все F_{is} $(i=1,\dots,s)$ полученными гомотетическим сжатием в $s^{\frac{1}{2}}$ раз фиксированного множества F, так что их диаметры $d_s \to 0$ при $s \to \infty$. Для определенности положим F единичным кругом. Как видно из дальнейшего, это предположение не является существенным ограничением общности. Итак, радиусы кругов F_{is} $r_s = s^{-\frac{1}{2}}$. В результате проведенной процедуры получаем перфорированную оболочку с s отверстиями.

Станем теперь решать задачу равновесия для перфорированной оболочки при неизменной нагрузке $F(x)$. В обозначениях $L_{\Omega_s}(U, V) = L_s(U, V)$, $(F, U)_{0,\Omega_s} = (F, U)_{0,s}$ имеем

$$L_s(U_s, V_s) = (F, V_s)_{0,s}. \tag{8}$$

Решение U_s уравнения (8) ищется в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{H}{}^n_s$ вектор-функций $U(x) \in H^n(\Omega_s)$ таких, что

$$D^{\gamma_k} u^{(k)}(x)\Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3; \quad |\gamma_k| \leq n_k + 1),$$

V_s – произвольный элемент $\overset{\circ}{H}{}^n_s$. Задача (8) эквивалентна проблеме минимизации функционала $J_{\Omega_s}(V_s) = J_s(V_s)$ в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^n_s$.

Сделаем важное предположение о характере распределения отверстий в оболочке. Обозначим через r_{is} расстояние от F_{is} до остальных F_{js} и границы $\partial\Omega$. Считаем, что существует константа c_0, не зависящая от s и такая, что

$$r_{is} > c_0 d_s \qquad (i = 1, \dots, s). \tag{9}$$

Оболочки, удовлетворяющие (9), назовем регулярно перфорированными. Аналогичное условие в случае уравнений теории упругости было введено в [3]. Нашей задачей является отыскание асимптотики решений $U_s(x)$ уравнений (8) при $s \to \infty$. Как будет показано, при некоторых сформулированных ниже предположениях $U_s(x)$ в определенном смысле стремятся с ростом s к решению некоторой эллиптической краевой задачи во всей области Ω.

Заметим, что $U_s(x)$ удовлетворяют условиям защемления на $\partial\Omega$ и условиям равенства нулю напряжений на ∂F_s (аналогу условия Неймана для оператора Лапласа).

<u>2. Компактность решений уравнений равновесия для густоперфорированных оболочек.</u> При разных значениях s решения $U_s(x)$ уравнений (8) определены в разных областях Ω_s. Поэтому соображения компактности не могут быть непосредственно применены к семейству $\{U_s\}$ $(s = 1, 2, \dots)$. Построим продолжения $U_s(x) \in \overset{\circ}{H}{}^n_s$ до вектор-функций $\tilde{U}_s(x) \in \overset{\circ}{H}{}^n(\Omega)$. Условимся все не зависящие от s константы обозначать через c. Пусть x_{is} – центр круга F_{is} $(i = 1, \dots, s)$. Рассмотрим круг Π_{is} радиуса $(1 + c_0) r_s$ с центром в x_{is}, где c_0

определяется из (9). Очевидно, при $i \neq j$ круги $П_{is}$ и $П_{js}$ не пересекаются. Обозначим через P_{is} кольцо $П_{is} / F_{is}$. С помощью замены $\xi = (x - x_{is}) r_s^{-1}$ преобразуем F_{is} в стандартный круг F единичного радиуса с центром в начале координат, при этом $П_{is}$ перейдет в круг $П$ радиуса $1 + c_0$, P_{is} – в кольцо $P = П/F$.

Рассмотрим произвольную вектор-функцию $U(x) \in H^n(P_{is})$ и положим $V_s(\xi) = (v_s^{(1)}(\xi), \ v_s^{(2)}(\xi), \ v_s^{(3)}(\xi))$, где

$$v_s^{(1)}(\xi) = u^{(1)}(x_{is} + r_s \xi); \quad v_s^{(2)}(\xi) = u^{(2)}(x_{is} + r_s \xi);$$
$$v_s^{(3)}(\xi) = r_s^{-1} u^{(3)}(x_{is} + r_s \xi). \tag{10}$$

Энергия деформации $L_{P_{is}}(U, U)$ после соответствующей замены перейдет в

$$L_P(V_s, V_s; s) = \frac{2E\sigma}{1-\nu^2} \int_P \Big\{ (v^{(1)}_{s,\xi_1})^2 + (v^{(2)}_{s,\xi_2} - \frac{r_s^2}{R} v_s^{(3)})^2 +$$

$$+ 2\nu v^{(1)}_{s,\xi_1} (v^{(2)}_{s,\xi_2} - \frac{r_s^2}{R} v_s^{(3)}) + \frac{1-\nu}{2} (v^{(1)}_{s,\xi_2} + v^{(2)}_{s,\xi_1})^2 +$$

$$+ \frac{\sigma^2}{s} \Big[(v^{(3)}_{s,\xi_1\xi_1})^2 + (v^{(3)}_{s,\xi_2\xi_2} + \frac{1}{R} v^{(2)}_{s,\xi_2})^2 + 2\nu v^{(3)}_{s,\xi_1\xi_1} \times$$

$$\times (v^{(3)}_{s,\xi_2\xi_2} + \frac{1}{R} v^{(2)}_{s,\xi_2}) + 2(1-\nu)(v^{(3)}_{s,\xi_1\xi_2} + \frac{1}{R} v^{(2)}_{s,\xi_1})^2 \Big] \Big\} d\xi.$$

Положим $L_P(V, V; \infty)$ равным $L_P(V, V, s)$ при $r_s = 0$. В силу общих теорем функционального анализа [9] собственные значения оператора, порожденного $L_P(V, V; s)$, стремятся (с учетом кратности) при $s \to \infty$ к собственным значениям оператора, порожденного $L_P(V, V; \infty)$. Так как при всех s оба эти оператора обладают шестикратным нулевым собственным значением, то минимальное ненулевое собственное значение λ_s оператора, порожденного $L_P(V, V; s)$ при достаточно больших s, ограничено снизу числом $\lambda_0 > 0$. Пусть $M_{0,s}(P)$ – совокупность векторов $V \in H^n(P)$, на которых обращается в нуль $L_P(V, V; s)$, $N_s(P)$ – множество элементов $Y \in H^n(P)$ таких, что $(Y, V)_{0,P} = 0 \ \forall V \in M_{0,s}(P)$. Заметим, что на $N_s(P)$ $L_P(Y, Y; s) \geq \lambda_0 \|Y\|^2_{0,P}$. Представим теперь $V_s(\xi)$

в виде $V_s(\xi)=M_s(\xi)+N_s(\xi)$, где $M_s(\xi)\in M_{0,s}(P)$, $N_s(\xi)\in N_s(P)$. Заметим, что вектор-функция $M_s(\xi)$ может быть продолжена до $\tilde{M}_s(\xi)$, определенной во всем круге Π, так что

$$L_\Pi(\tilde{M}_s, \tilde{M}_s; s)=0,$$

поскольку она получена описанным выше преобразованием из вектора абсолютно жесткого смещения участка P_{is} оболочки.

Относительно $N_s(\xi)$ хорошо известно, что ее можно продолжить на F [3] так, что продолженная вектор-функция $\tilde{N}_s(\xi)\in H^n(\Pi)$ и

$$\|\tilde{N}_s(\xi)\|_{H^n(\Pi)}\le c\,\|N_s(\xi)\|_{H^n(P)}.$$

Итак, $\tilde{V}_s(\xi)=\tilde{M}_s(\xi)+\tilde{N}_s(\xi)$. Отсюда

$$L_\Pi(\tilde{V}_s, \tilde{V}_s; s)=L_\Pi(\tilde{N}_s,\tilde{N}_s; s)\le c\,\|\tilde{N}_s\|^2_{H^n(\Pi)}\le$$

$$\le c\,\|N_s\|^2_{H^n(P)}\le c\left\{\|N_s\|^2_{n,P}+\|N_s\|^2_{0,P}\right\}\le$$

$$\le c\left\{L_P(N_s, N_s; s)+\|N_s\|^2_{0,P}\right\}\le cL_P(N_s, N_s; s)=cL_P(V_s, V_s; s).$$

Вернувшись к исходным переменным, получим

$$L_{\Pi_{is}}(\tilde{U},\tilde{U})\le cL_{P_{is}}(U,U).$$

Пусть теперь $U(x)$ – произвольная вектор-функция из $\mathring{H}^n_s$. Продолжим ее описанным выше способом на все F_{is} $(i=1,\dots,s)$. В результате получим $\tilde{U}(x)\in\mathring{H}^n(\Omega)$, причем

$$L_\Omega(\tilde{U},\tilde{U})=L_{\Omega\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{s}\Pi_{is}}(\tilde{U},\tilde{U})+\sum_{i=1}^{s}L_{\Pi_{is}}(\tilde{U},\tilde{U})\le$$

$$\le L_{\Omega\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{s}\Pi_{is}}(U,U)+c\sum_{i=1}^{s}L_{P_{is}}(U,U)\le cL_s(U,U).$$

Итак, нами доказана

Теорема 1. Существуют операторы продолжения $Q_s:\mathring{H}^n_s\to\mathring{H}^n(\Omega)$ такие, что при $\forall U(x)\in\mathring{H}^n_s$ продолженная вектор-функция $\tilde{U}(x)=(Q_sU)(x)$ удовлетворяет неравенству $L_\Omega(\tilde{U},\tilde{U})\le cL_s(U,U)$ с не зависящей от s и U константой c.

Из доказанной теоремы вытекает ряд важных следствий.

Следствие 1. Задачи (8) разрешимы в пространствах $\mathring{H}^n_s$ при любом s.

Доказательство немедленно следует из неравенств

$$|(F,U)_{0,s}|^2\le\|F\|^2_{0,s}\,\|U\|^2_{0,s}\le c\,\|\tilde{U}\|^2_{0,\Omega}\le$$

$$\leq cL_{\Omega}(\tilde{U}, \tilde{U}) \leq cL_s(U, U),$$

справедливых при $\forall U(x) \in \overset{\circ}{H}{}^n_s$.

Следствие 2. Пусть U_s – решения задач (8) при $s = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{\tilde{U}_s = Q_s U_s\}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ слабо компактна в $\overset{\circ}{H}{}^n(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим цепочку неравенств

$$\|\tilde{U}_s\|^2_{H^n(\Omega)} \leq c[L_{\Omega}(\tilde{U}_s, \tilde{U}_s) + \|\tilde{U}_s\|^2_{0,\Omega}] \leq cL_{\Omega}(\tilde{U}_s, \tilde{U}_s) \leq$$

$$\leq cL_s(U_s, U_s) = c(F, U_s)_{0,s} \leq c\|U_s\|_{0,s} \leq c\|\tilde{U}_s\|_{H^n(\Omega)}.$$

Полученная оценка доказывает утверждение следствия.

Выделим из $\{\tilde{U}_s\}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ слабо сходящуюся в $\overset{\circ}{H}{}^n(\Omega)$ подпоследовательность, сохранив для нее прежнее обозначение $\{\tilde{U}_s\}$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Итак,

$$\tilde{U}_s(x) \xrightarrow{\overset{\circ}{H}{}^n(\Omega)} U(x) \in \overset{\circ}{H}{}^n(\Omega)$$

при $s \to \infty$. Из теоремы Реллиха следует, что последовательность $\{\tilde{U}_s\}$ можно считать сильно сходящейся в $\overset{\circ}{H}{}^{n-1}(\Omega)$, где $n-1 = (0, 0, 1)$. Нашей основной задачей является разыскание осредненного уравнения в Ω, решением которого является предельная вектор-функция $U(x)$.

Нами получен ряд важных оценок, используемых далее. Пусть $x_0 \in \Omega$ и K_{0h} – квадрат со сторонами длины h, ориентированными вдоль координатных осей с центром в x_0, $K_{sh0} = K_{0h} \cap \Omega_s$. Возьмем произвольную вектор-функцию $U(x) \in H^n(K_{sh0})$ и продолжим ее до $\tilde{U}(x) \in H^n(K_{0h})$ описанным выше способом. Заменой переменных $y = h^{-1}(x - x_0)$ переведем K_{0h} в квадрат K с единичной стороной и центром в начале координат. Введем вектор-функцию $V_h(y)$ с компонентами $(u^{(1)}(x_0 + hy), \tilde{u}^{(2)}(x_0 + hy), h^{-1}\tilde{u}^{(3)}(x_0 + hy))$. Через $L_K(V_h, V_h; h)$ обозначим $L_{K_{0h}}(\tilde{U}, \tilde{U}_2)$ в новых переменных. Очевидно,

$$\|\tilde{U}\|^2_{n,K_{0h}} = \|V_h\|^2_{n,K} \leq c[L_K(V_h, V_h; h) + \|V_h\|^2_{0,K}] =$$

$$= c[L_{K_{0h}}(\tilde{U}, \tilde{U}) + h^{-2}\sum_{j=1}^{2}\|\tilde{u}^{(j)}\|^2_{0,K_{0h}} + h^{-4}\|\tilde{u}^{(3)}\|^2_{0,K_{0h}}] \leq$$

$$\leq c[L_{K_{sh0}}(U, U) + h^{-2}\sum_{j=1}^{2}\|u^{(j)}\|^2_{0,K_{0h}\setminus \bigcup_{(i)} \Pi_{is}} + h^{-4} \times$$

$$\times \|u^{(3)}\|^2_{0,K_{0h}\setminus\bigcup_{(i)}\Pi_{is}} \Big] + c\sum_{\Pi_{is}\subset K_{0h}} \Big(h^{-2}\sum_{j=1}^{2}\|\tilde u^{(j)}\|^2_{0,\Pi_{is}} + h^{-4}\|\tilde u^{(3)}\|^2_{0,\Pi_{is}}\Big). \quad (11)$$

Заметим, что

$$\|\tilde u^{(j)}\|^2_{0,\Pi_{is}} \le c r_s^2 \left(\|\tilde M_s^{(j)}\|^2_{0,\Pi} + \|\tilde N_s^{(j)}\|^2_{0,\Pi}\right). \qquad (j=1,2),$$

$$\|\tilde u^{(3)}\|^2_{0,\Pi_{is}} \le c r_s^4 \left(\|\hat M_s^{(3)}\|^2_{0,\Pi} + \|\hat N_s^{(3)}\|^2_{0,\Pi}\right).$$

Нетрудно видеть, что $\|\tilde M_s^{(j)}\|^2_{0,\Pi} \le c\,\|M_s^{(j)}\|^2_{0,P}$ $(j=1,2,3)$, поэтому

$$\|\tilde u^{(j)}\|^2_{0,\Pi_{is}} \le c r_s^2 \left(\|M_s^{(j)}\|^2_{0,P} + L_P(V_s, V_s; s)\right) \le$$

$$\le c r_s^2 \left(\|V_s^{(j)}\|^2_{0,P} + L_P(V_s, V_s; s)\right) \le$$

$$\le c\left(\|u^{(j)}\|^2_{0,P_{is}} + r_s^2 L_{P_{is}}(U,U)\right) \qquad (j=1,2),$$

$$\|\tilde u^{(3)}\|^2_{0,\Pi_{is}} \le c\left(\|u^{(3)}\|^2_{0,P_{is}} + r_s^4 L_{P_{is}}(U,U)\right).$$

Окончательно получим

$$\|\hat U\|^2_{n,K_{0h}} \le c\Big\{\Big(1+\frac{r_s^2}{h^2}+\frac{r_s^4}{h^4}\Big)L_{K_{sh0}}(U,U) +$$

$$+ h^{-2}\sum_{j=1}^{2}\|u^{(j)}\|^2_{0,K_{sh0}} + h^{-4}\|u^{(3)}\|^2_{0,K_{sh0}}\Big\}. \quad (12)$$

3. Характеристический функционал и основная теорема об осреднении. Введем основные величины, характеризующие распределение отверстий в оболочке. Для этого возьмем произвольную точку $x_0 \in \Omega$ и квадрат K_{0h} (см. 2). Определим при каждых $p = 1,2,3$; $|\gamma_p| \le n_p$ трехкомпонентные векторы $P_{0p\gamma_p}(x)$ с единственной отличной от нуля p-й компонентой, равной $(\gamma_p!)^{-1}(x-x_0)^{\gamma_p}$. Затем составим их линейную комбинацию

$$(R, P_0(x)) = \sum_{p=1}^{3}\sum_{|\gamma_p|\le n_p} R_{p\gamma_p} P_{0p\gamma_p}(x)$$

с произвольными вещественными коэффициентами $R_{p\gamma_p}$ $(p=1,2,3;$ $|\gamma_p|\le n_p)$. Компоненты вектора $(R, P_0(x))$ обозначим через $(R, P_0^{(t)}(x))$ $(t=1,2,3)$.

Введем характеристический функционал

$$T_{R,sh0}(U_s) = L_{K_{sh0}}(U_s, U_s) +$$

$$+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\|u_s^{(t)} - (R, P_0^{(t)}(x))\|^2_{k,K_{sh0}},$$

определенный на вектор-функциях $U_s \in H^n(K_{sh0})$, $K_{sh0} = K_{0h}\cap\Omega_s$, $\theta>0$. Обозначим через $T_{\alpha_q,sh0}(U_s)$ характеристический функционал, отвечающий набору $R_{p\gamma_p} = \delta_{pq}\delta_{\gamma_p\alpha_q}$ $(p,q=1,2,3;|\gamma_p|\le n_p, |\alpha_q|\le n_q)$, где δ – символ Кронеккера. Пусть $G_{sh0\alpha_q}(x)$ – вектор-функция класса $H^n(K_{sh0})$, минимизирующая $T_{\alpha_q,sh0}(U_s)$. Положим $T_{\alpha_q,sh0}(G_{sh0\alpha_q}) = T^*_{\alpha_q,sh0}$. Далее положим при $p,q=1,2,3;|\alpha_p|\le n_p$, $|\beta_q|\le n_q$

$$a_{\alpha_p\beta_q}(s,h;x_0) = L_{K_{sh0}}(G_{sh0\alpha_p}, G_{sh0\beta_q}) +$$

$$+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}(g^{(t)}_{sh0\alpha_p} - P^{(t)}_{0p\alpha_p}, g^{(t)}_{sh0\beta_q} - P^{(t)}_{0q\beta_q})_{k,K_{sh0}}.$$

Отметим, что минимум $T_{R,sh0}(U_s)$ в классе $H^{(n)}(K_{sh0})$:

$$T^*_{R,sh0} = \sum_{p,q=1}^{3}\sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p\\ |\beta_q|\le n_q}} a_{\alpha_p\beta_q}(s,h;x_0) R_{p\alpha_p} R_{q\beta_q}.$$

Предположим существование равномерных по x пределов

$$\lim_{h\to 0}\lim_{s\to\infty} h^{-2}\,\mathrm{mes}\,K_{sh0} = b(x)\in C(\bar\Omega), \tag{13}$$

$$\lim_{h\to 0}\overline{\lim_{s\to 0}} h^{-2} a_{\alpha_p\beta_q}(s,h;x) = \lim_{h\to 0}\underline{\lim_{s\to\infty}} h^{-2} a_{\alpha_p\beta_q}(s,h;x) = \tilde a_{\alpha_p\beta_q}(x)\in C(\bar\Omega). \tag{14}$$

Основной результат, сформулированный в конце работы, состоит в том, что предельная вектор-функция $U(x)$ является решением задачи равновесия

$$\tilde L_\Omega(U,V) = \sum_{k=1}^{3}(f^{(k)}, v^{(k)})_{L^2_b(\Omega)}, \quad \forall V\in \mathring{H}^n(\Omega)$$

где $\tilde{L}_{\Omega}$ – осредненная форма

$$\tilde{L}_{\Omega}(U,V)=\int_{\Omega}\tilde{W}(U,V)\,dx=$$

$$=\int_{\Omega}\sum_{p,q=1}^{3}\sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p\\|\beta_q|\le n_q}}\tilde{a}_{\alpha_p\beta_q}D^{\alpha_p}u^{(p)}D^{\beta_q}v^{(q)}\,dx. \tag{15}$$

Теорема 2. При сделанных предположениях (9), (13), (14) справедливы такие утверждения:

1) $\delta(x)>0,\quad x\in\bar{\Omega};$

2) существует константа $\omega>0$ такая, что $\forall G\subset\Omega$ и для любой $U(x)\in C^{n}(\Omega)$ $\quad \tilde{L}_{G}(U,U)\geqslant\omega L_{G}(U,U).$

Доказательство. Нетривиальным является лишь второе утверждение. Для его доказательства снова возьмем $x_0\in\Omega$ и квадрат K_{0h}. Пусть $U(x)$ – произвольная вектор-функция из $H^{n}(K_{sh_0})$. Проделаем замену переменных и вектора U по формуле (10). Положим, кроме того, $Q_{0p\gamma_p s}(\xi)$ вектором с компонентами $q^{(j)}_{0p\gamma_p s}(\xi)=p^{(j)}_{0p\gamma_p}(x_{is}+r_s\xi)\quad(j=1,2),\quad q^{(3)}_{0p\gamma_p s}(\xi)=r_s^{-1}p^{(3)}_{0p\gamma_p}(x_{is}+r_s\xi)$ и $(R,P_0^{(t)}(x))=(R,Q_{0s}^{(t)}(\xi))\,r_s^{\delta_{t3}}$. При такой замене

$$L_{\Pi_{is}}(\tilde{U},\tilde{U})+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1}h^{2(k-n_t)-\theta}\|\tilde{u}^{(t)}-(R,P_0^{(t)}(x))\|^2_{k,\Pi_{is}}=$$

$$=L_{\Pi}(\tilde{V}_s,\tilde{V}_s;s)+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1}h^{2(k-n_t)-\theta}r_s^{2(1+\delta_{t3}-k)}\|\tilde{V}_s^{(t)}-(R,Q_{0s}^{(t)}(\xi))\|^2_{k,\Pi}$$

Представив $(R,Q_{0s}(\xi))$ в виде $M_{Q,s}(\xi)+N_{Q,s}(\xi)$, где $M_{Q,s}(\xi)\in$ $\in M_{0,s}(P),\ N_{Q,s}(\xi)\in N_s(P)$, получим

$$\|\tilde{V}_s^{(t)}-(R,Q_{0s}^{(t)}(\xi))\|^2_{k,\Pi}\le c\{\|\tilde{N}_s^{(t)}(\xi)-N_{Qs}^{(t)}(\xi)\|^2_{k,\Pi}+\|\tilde{M}_s^{(t)}(\xi)-\tilde{M}_{Q,s}^{(t)}\|^2_{k,\Pi}\}\le$$

$$\le c\{L_P(V_s-(R,Q_{0s}(\xi)),-V_s-(R,Q_{0s}(\xi));s)+\|M_s^{(t)}(\xi)-M_{Qs}^{(t)}(\xi)\|^2_{k,P}\}\le$$

$$\le c\{L_P(V_s-(R,Q_{0s}(\xi)),V_s-(R,Q_{0s}(\xi));s)+\|r_s^{(t)}(\xi)-(R,Q_{0s}^{(t)}(\xi))\|^2_{k,P}\}.$$

Вернемся к исходным переменным

$$L_{\Pi_{is}}(\hat{U},\tilde{U})+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\|\tilde{u}^{(t)}-(R,P_0^{(t)}(x))\|^2_{k,\Pi_{is}}\le$$

$$\le c\{L_{P_{is}}(U,U)+r_s^2 h^{-4-\theta}L_{P_{is}}(U-(R,P_0(x)),U-(R,P_0(x)))+$$

$$+c\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\|u^{(t)}-(R,P_0^{(t)}(x))\|^2_{k,P_{is}}$$

Возьмем в качестве U вектор-функцию, минимизирующую $T_{R,sho}(U_s)$, тогда

$$L_{K_{oh}}(\tilde{U}_s\tilde{U}_s)+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\|u_s^{(t)}-(R,P_0^{(t)}(x))\|^2_{k,K_{oh}}\le$$

$$\le c\{T^{*}_{R,sho}+r_s^2 h^{-4-\theta}L_{K_{sho}}(U_s-(R,P_0(x)),U_s-(R,P_0(x))).$$

Отсюда

$$\lim_{h\to 0} h^{-2}\inf_{U\in H^n(K_{oh})}\Big\{L_{K_{oh}}(U,U)+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\times$$

$$\times\|u^{(t)}-(R,P_0^{(t)}(x))\|^2_{k,K_{oh}}\Big\}\le c\sum_{p,q=1}^{3}\sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p\\|\beta_q|\le n_q}}\tilde{a}_{\alpha_p\beta_q}(x_0)R_{p\alpha_p}R_{q\beta_q}. \tag{16}$$

Переходим к оценке левой части (16). Введем функционал

$$T_{R,ho}(U)=L_{K_{oh}}(U,U)+\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta}\|u^{(t)}-(R,P_0^{(t)}(x))\|^2_{k,K_{oh}}.$$

Ищем вектор-функцию $U_h(x)$, минимизирующую $T_{R,ho}(U)$ в классе $H^n(K_{oh})$ в виде $Z(x)+V_h(x)$, где $Z(x)=(R,P_0(x))$. Тогда

$$T_{R,ho}(U_h)=T_{0,ho}(V_h)+2L_{K_{oh}}(Z,V_h)+L_{K_{oh}}(Z,Z),$$

где $\ell_{0,h0}$ — функционал $\ell_{K,h0}$ при всех $R_{p\gamma_p}=0$.
Следовательно, $V_h(x)$ минимизирует функционал $\Phi_{h0}(U)=2L_{K_{0h}}(Z,U)+T_{0,h0}(U)$, поэтому

$$(T_{0,h0}(V_h))^2 \le c\,|L_{K_{0h}}(Z,V_h)|^2 = c\,\Big|\sum_{t=1}^{3}\sum_{|\gamma_t|\le n_t} R_{t\gamma_t} L_{K_{0h}}(P_{0t\gamma_t},V_h)\Big|^2 \le$$

$$\le c\Big\{\Big|\sum_{p,q=1}^{3}\sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p\\|\beta_q|\le n_q}} R_{p\alpha_p}\int_{K_{0h}} a_{\alpha_p\beta_q} D^{\beta_q} v_h^{(q)}\,dx\Big|^2 +$$

$$+\Big|\sum_{p,q=1}^{3}\sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p\\|\beta_q|\le n_q}}\sum_{\gamma_p>\alpha_p} R_{p\gamma_p}\int_{K_{0h}}(x-x_0)^{\gamma_p-\alpha_p} D^{\beta_q} v_h^{(q)}\,dx\Big|^2\Big\} \le$$

$$\le c\Big\{h^2\|V_h\|^2_{0,K_{0h}} + \sum_{q=1}^{3}\sum_{0<|\beta_q|\le n_q} h\,\|v_h^{(q)}\|^2_{|\beta_q|-1,\partial K_{0h}} + h^4\|V_h\|^2_{H^n(K_{0h})}\Big\}.$$

Воспользовавшись неравенством

$$\|v^{(q)}\|^2_{0,\partial K_{0h}} \le c\Big\{\varepsilon\|v^{(q)}\|^2_{1,K_{0h}} + \Big(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{h}\Big)\|v^{(q)}\|^2_{0,K_{0h}}\Big\},$$

справедливым для любых $\varepsilon>0$ и $V\in H^n(K_{0h})$, продолжим оценку

$$(T_{0,h0}(V_h))^2 \le c\Big\{h^4\|V_h\|^2_{n,K_{0h}} + h^2\|V_h\|^2_{0,K_{0h}} +$$

$$+h\sum_{q=1}^{3}\sum_{0<|\beta_q|\le n_q}\Big[\varepsilon\|v_h^{(q)}\|^2_{|\beta_q|,K_{0h}} + \Big(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{h}\Big)\|v_h^{(q)}\|^2_{|\beta_q|-1,K_{0h}}\Big]\Big\} =$$

$$= c\Big\{h^4\|V_h\|^2_{n,K_{0h}} + h^2\|V_h\|^2_{0,K_{0h}} + h\sum_{t=1}^{3}\sum_{k=0}^{n_t-1}\Big[\varepsilon\|v_h^{(t)}\|^2_{k+1,K_{0h}} +$$

$$+\Big(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{h}\Big)\|v_h^{(t)}\|^2_{k,K_{0h}}\Big]\Big\}.$$

Положив $\varepsilon = h^{1+\frac{\theta}{2}}$, имеем

$$\left(T_{0,h0}(V_h)\right)^2 \le c\Big\{ h^4 \|V_h\|^2_{n,K_{0h}} + h^2 \|V_h\|^2_{0,K_{0h}} + h^{2+\frac{\theta}{2}}\Big[\|V_h\|^2_{n,K_{0h}} + \|V_h^{(3)}\|^2_{1,K_{0h}} + h^{-2-\theta}\|V_h\|^2_{0,K_{0h}} + h^{-2-\theta}\|V_h^{(3)}\|^2_{1,K_{0h}}\Big]\Big\}.$$

В силу (12)

$$\left(T_{0,h0}(V_h)\right)^2 \le c h^{2+\frac{\theta}{2}} \Big\{ L_{K_{0h}}(V_h, V_h) + \sum_{t=1}^{3} \sum_{k=0}^{n_t-1} h^{2(k-n_t)-\theta} \|V_h^{(t)}\|^2_{k,K_{0h}} \Big\} = c h^{2+\frac{\theta}{2}} T_{0,h0}(V_h).$$

Отсюда $T_{0,h0}(V_h) \le c h^{2+\frac{\theta}{2}}$ и $\lim\limits_{h\to 0} h^{-2} \Phi_{h0}(V_h) = 0$. Вычислим теперь $\lim\limits_{h\to 0} h^{-2} L_{K_{0h}}(Z,Z)$:

$$L_{K_{0h}}(Z,Z) = \sum_{t_1,t_2=1}^{3} \sum_{\substack{|\gamma_{t_1}|\le n_{t_1} \\ |\gamma_{t_2}|\le n_{t_2}}} \sum_{p,q=1}^{6} \sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p \\ |\beta_q|\le n_q}} a_{\alpha_p\beta_q} \int_{K_{0h}} R_{t_1\gamma_{t_1}} R_{t_2\gamma_{t_2}} \times$$

$$\times D^{\alpha_p} P^{(p)}_{0 t_1 \gamma_{t_1}} D^{\beta_q} P^{(q)}_{0,t_2\gamma_{t_2}} \, dx = h^2 \sum_{p,q=1}^{3} \sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p \\ |\beta_q|\le n_q}} a_{\alpha_p\beta_q} R_{p\alpha_p} R_{q\beta_q} + O(h^3).$$

Итак,

$$\lim_{h\to 0} h^{-2} L_{K_{0h}}(Z,Z) = \sum_{p,q=1}^{3} \sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p \\ |\beta_q|\le n_q}} a_{\alpha_p\beta_q} R_{p\alpha_p} R_{q\beta_q}.$$

С учетом (16) имеем

$$\sum_{p,q=1}^{3} \sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p \\ |\beta_q|\le n_q}} a_{\alpha_p\beta_q} R_{p\alpha_p} R_{q\beta_q} \le C \sum_{p,q=1}^{3} \sum_{\substack{|\alpha_p|\le n_p \\ |\beta_q|\le n_q}} \tilde{a}_{\alpha_p\beta_q}(\lambda) R_{p\alpha_p} R_{q\beta_q} \qquad (17)$$

при $\forall x \in \Omega$. Полагая $R_{p\alpha_p} = (D^{\alpha_p} u^{(p)})(x)$ $(p=1,2,3;\ |\alpha_p| \le n_p)$ и интегрируя (17) по $G \subset \Omega$, получаем утверждение теоремы.

Выше доказано существование предела $U(x)$ последовательности решений $\{U_s(x)\}$ $(s=1,2,\ldots)$ уравнений равновесия (8). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. При сделанных выше предположениях (9), (13), (14) решения уравнений равновесия (8) $U_s(x)$ сходятся при $s \to \infty$ к решению осредненного уравнения

$$\tilde{L}_{\Omega}(U,V) = \sum_{k=1}^{3} (f^{(k)}, v^{(k)})_{L^2_b(\Omega)} \quad \forall V \in \overset{\circ}{H}{}^n(\Omega),$$

где $\tilde{L}_{\Omega}$ дается формулой (15), в следующем смысле:

$$\lim_{s\to\infty} \| U_s - U \|_{\overset{\circ}{H}_{s}(0,0,1)} = 0.$$

Весьма громоздкое доказательство этой теоремы с учетом оценок (11), (12) повторяет доказательство аналогичных утверждений в [3-7] и здесь не приводится.

Следует отметить, что в случае периодического распределения отверстий нахождение коэффициентов осредненной формы (15) сводится к решению нестандартного набора ячеечных задач, что и будет показано в следующей работе.

1. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. - Киев : Наук. думка, 1974. - 285 с.
2. Хруслов Е.Я. Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении области // Мат. сб. - 1978. - 106, № 4, С. 604-621.
3. Берлянд Л.В. О колебаниях упругого тела с большим числом мелких пустот // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1983. - № 2. - С. 3-5.
4. Берлянд Л.В. Асимптотическое описание тонкой пластины с большим числом мелких отверстий // Докл. АН УССР. Сер. А. - 1983. - № 10. - С. 5-8.
5. Берлянд Л.В., Чудинович И.Ю. Осреднение краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков в областях с пустотами // Докл. АН СССР. - 1983. - 272. № 4. - С. 777-780.
6. Чудинович И.Ю. Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами. 1. Общая теорема об осреднении // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. - 1984. - Вып. 42. - С. 21-26.
7. Чудинович И.Ю. Осреднение эллиптических систем дифференциальных уравнений в областях с пустотами. 2. Случай периодического распределения пустот // Там же. - 1985. - Вып. 44. - С. 133-136.
8. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. - М. : Наука, 1979. - 383 с.
9. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. - М. : Мир, 1979. - 587 с.

УДК 512.554.32+517.957

В.Н.Робук

О КЛАССИФИКАЦИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящее время интенсивное развитие получили методы точного интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, связанные с наличием у исследуемого уравнения представления в виде $\hat{F}-\hat{G}$ пары, а именно, пары функций $\hat{F}$ и $\hat{G}$ со значениями в алгебре Ли, зависящих от динамических переменных исследуемого уравнения таким образом, чтобы уравнение Захарова - Шабата

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{G}}{\partial x} + [\hat{G}, \hat{F}] = 0 \qquad (1)$$

выполнялось на всех решениях и только на решениях исследуемого уравнения. Здесь скобки $[\ ,\ ]$ обозначают обычный коммутатор, а под частными производными по x и t подразумевается дифференцирование только динамических переменных исследуемого уравнения. Для большинства хорошо известных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и систем уравнений такая $\hat{F}-\hat{G}$ пара, за редкими исключениями (см., например [1]), была угадана в той или иной форме. Однако запас уравнений, для которых можно угадать $\hat{F}-\hat{G}$ пару, используя элементарные соображения, по всей видимости, иссякает.

Уолквист и Эстабрук в работе [2] предложили процедуру (процедура $W.-E.$), с помощью которой удается значительно упростить задачу о построении $\hat{F}-\hat{G}$ пары для многих конкретных уравнений. Но процедура $W.-E.$ не представляет собой регулярного метода построения $\hat{F}-\hat{G}$ пары, а только сводит эту задачу к вполне определенной, весьма сложной алгебраической задаче, а именно, к задаче построения фактор-алгебры Ли, свободной алгебры Ли по идеалу, порожденному образующими и набором коммутационных соотношений. Однако для решения этой задачи в общей постановке отсутствует какой-либо алгоритм. В то же время для многих новых интересных с физической точки зрения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и систем таких уравнений в результате применения процедуры $W.-E.$ приходим к такому громоздкому набору коммутационных соотношений, что угадать какое-либо частное решение со значениями в алгебре Ли не представляется возможным. Тем более что угадывание вслепую - занятие рискованное. Проверка каждого нового предположения отнимает массу времени и сил, а единственное решение коммутационных соотношений со значениями в алгебрах Ли может оказаться тривиальным, т.е. таким, что в операторах $\hat{F}$ и $\hat{G}$ пропадет всякая связь с исходным уравнением. Есть также определенная уверенность, что коммутационные соотношения, возникающие в результате применения процедуры $W.-E.$, обладают некой общей спецификой. В случае обнаружения такой специфики мы смогли бы конкретизировать задачу о факторизации и, по крайней мере, выработать ряд приемов для ее решения. В более общей постановке вопроса – возникает соблазн разобраться на основе этой специфики с тем, каким именно образом можно максимально эффективно использовать $\hat{F}-\hat{G}$ пару в плане получения информации об исходном уравнении. Такие специфические черты можно увидеть на достаточно большом количестве примеров. Именно с целью накопления таких примеров и будет проводиться классификация эволюционных уравнений по признаку наличия универсальной $\hat{F}-\hat{G}$ пары нулевого порядка. Прежде чем перейти к изложению предварительных результатов классификации эволюционных уравнений второго порядка, определим общую постановку задачи.

1. Постановка задачи

Определение 1. Эволюционным уравнением n-го порядка будем называть дифференциальное уравнение для скалярной функции φ от x и t вида

$$\varphi_t = \mathcal{F}(\varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}), \tag{2}$$

где $\quad \varphi_t \equiv \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}; \qquad \varphi^{(p)} \equiv \varphi_{xx\dots x} \equiv \dfrac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}.$

Определение 2. Лиевской $\hat{F}-\hat{G}$ парой k-го порядка $(F,G\,Lie)$ для эволюционного уравнения будем называть тройку $(\hat{F}, \hat{G}, L)$, где L – алгебра Ли над полем комплексных чисел; $\hat{F}(x, t, \varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k)})$ и $\hat{G}(x, t, \varphi, \varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(k+n-1)})$ такие функции со значениями в L, что условие

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{G}}{\partial x} + [\hat{G}, \hat{F}] = 0 \tag{3}$$

выполняется на решениях и только на решениях исходного эволюционного уравнения. Здесь скобки $[\ ,\ ]$ обозначают обычный коммутатор; $\dfrac{\partial}{\partial x} \equiv \sum\limits_{q=0}^{k+n+1} \varphi^{(q+1)} \dfrac{\partial}{\partial \varphi^{(q)}}$ и $\dfrac{\partial}{\partial t}$ определяется аналогично с учетом исходного эволюционного уравнения. Определения $\dfrac{\partial}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial}{\partial t}$ отражают тот факт, что явное дифференцирование по x и t содержится в коммутаторе.

Определение 3. Универсальной лиевской $\hat{F}-\hat{G}$ парой k-го порядка $(UFG\,Lie)$ для эволюционного уравнения будем называть такую

$FGLie(\hat{F}, \hat{G}, L)$ k-го порядка, что для любой $FGLie$ $(\hat{\tilde{F}},\hat{\tilde{G}},\tilde{L})$ k-го порядка данного уравнения найдется единственный гомоморфизм f из L в $\tilde{L}$ такой что $\hat{F} \xrightarrow{f} \hat{\tilde{F}}$ и $\hat{G} \xrightarrow{f} \hat{\tilde{G}}$.

Строгая математическая формулировка определения $UFGLie$ предложена В.Г.Дринфельдом. Следует отметить, что на первом этапе классификации алгебра Ли в $UFGLie$ будет задана только образующими и набором коммутационных соотношений. Более конкретное задание абстрактной алгебры Ли в терминах базисных элементов и структурных констант окажется возможным только после решения задачи о факторизации свободной алгебры Ли по идеалу, порожденному образующими и коммутационными соотношениями. Формулировка классификационной задачи теперь будет выглядеть следующим образом: построить одновременно явный вид всех эволюционных уравнений определенного порядка с точностью до преобразования $\varphi=\varphi(\tilde{\varphi})$, обладающих $UFGLie$ нулевого порядка, и соответствующие $UFGLie$ нулевого порядка. Поскольку нас прежде всего будут интересовать $UFGLie$, то преобразование $\varphi=\varphi(\tilde{\varphi})$ всегда будем выбирать таким образом, чтобы добиться максимально простого вида операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$. В дальнейшем под $UFGLie$, если нет специальной оговорки, будем понимать $UFGLie$ нулевого порядка.

Сама классификационная процедура основана на процедуре $W.$-$E.$ в упрощенной форме, предложенной Коронесом [3]. Такая классификация в значительной степени осуществлена автором настоящей работы для эволюционных уравнений второго и третьего порядка. Для эволюционных уравнений второго порядка во всех случаях, когда удалось добраться до $UFGLie$, решена задача факторизации. В настоящее время А.В.Шабатом, Н.Х.Ибрагимовым и др. осуществляется обширная и разносторонняя классификационная программа в области нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и систем таких уравнений. Наиболее обстоятельное изложение классификационных результатов в области эволюционных уравнений второго порядка можно найти в [45]. В связи с этим автор настоящей работы хочет особенно подчеркнуть, что он не претендует ни на какие приоритеты в плане получения "максимально полных" списков уравнений, обладающих теми или иными полезными свойствами. Классификация в данном случае не цель, а, скорее, средство в изучении $UFGLie$. Эволюционные уравнения выбраны только по той причине, что они являются наиболее простыми объектами для подобного рода исследований.

2. Эволюционные уравнения второго порядка

Вкратце опишем классификационную процедуру на примере эволюционных уравнений второго порядка. Пусть имеется эволюционное уравнение второго порядка общего вида

$$\varphi_t = \mathcal{F}(\varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}). \tag{4}$$

В этом случае уравнение (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \varphi}\varphi_t - \frac{\partial \hat{G}}{\partial \varphi}\varphi_x - \frac{\partial \hat{G}}{\partial \varphi_x}\varphi_{xx} + [\hat{G}, \hat{F}] = 0. \tag{5}$$

Подставим вместо φ_t в (5) правую часть уравнения (4), т.е. выполним требование о том, чтобы уравнение (5) удовлетворялось только на решениях уравнения (4)

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \varphi}\mathcal{F}(\varphi, \varphi_x, \varphi_{xx}) - \frac{\partial \hat{G}}{\partial \varphi}\varphi_x - \frac{\partial \hat{G}}{\partial \varphi_x}\varphi_{xx} + [\hat{G}, \hat{F}] = 0. \tag{6}$$

Из требования о том, чтобы условие совместности (3) выполнялось на всех решениях уравнения (4), следует $\mathcal{F} = f_1(\varphi, \varphi_x)\varphi_{xx} + f_2(\varphi, \varphi_x)$ и

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \varphi} f_1[\varphi, \varphi_x] - \frac{\partial \hat{G}}{\partial \varphi_x} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \varphi} f_2(\varphi, \varphi_x) - \frac{\partial \hat{G}}{\partial \varphi}\varphi_x + [\hat{G}, \hat{F}] = 0. \tag{8}$$

После этого классификацию, из соображений удобства, необходимо разбить на два варианта $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_x} = 0$ и $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_x} \neq 0$. В первом, используя преобразование $\varphi = \varphi(\tilde{\varphi})$; получаем из уравнений (7) и (8) следующие выражения для правой части (4), операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$ и основное классификационное уравнение:

$$\varphi_t = \frac{\partial}{\partial x}(f_1(\varphi)\varphi_x) + f_2(\varphi)\varphi_x + f_3(\varphi), \tag{9}$$

$$\hat{F} = \hat{X}_1 + \hat{X}_2\varphi,$$

$$\hat{G} = \hat{X}_2\left\{f_1(\varphi)\varphi_x + \int f_2(\varphi)d\varphi\right\} + [\hat{X}_2, \hat{X}_1]\int f_1(\varphi)d\varphi + \hat{X}_3, \tag{10}$$

$$\hat{X}_2 f_3(\varphi) + [\hat{X}_2, \hat{X}_1]\int f_2(\varphi)d\varphi + [[\hat{X}_2, \hat{X}_1]\hat{X}_1]\int f_1(\varphi)d\varphi +$$

$$+ [[\hat{X}_2, \hat{X}_1]\hat{X}_2]\varphi\int f_1(\varphi)d\varphi + [\hat{X}_3, \hat{X}_2]\varphi + [\hat{X}_3, \hat{X}_1] = 0. \tag{11}$$

Рассмотрев все возможные варианты линейной зависимости лиевских одночленов в уравнении (11), сможем найти явный вид функций f_1, f_2, f_3 и получить соответствующие наборы коммутационных соотношений на операторы $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$, $\hat{X}_3$. Ниже показаны результаты этих исследований, а также указано, при каких ограничениях на константы, содержащиеся в исходных уравнениях, имеются нетривиальные *UFGLie*. Приведен явный вид соответствующих абстрактных алгебр Ли

$$\varphi_t = \frac{\partial}{\partial x}(f_1 \varphi_x) + f_2 \varphi_x + a_0 \int f_2 d\varphi - a_0^2 \int f_1 d\varphi + a_1 \varphi + a_2, \qquad (12)$$

$$\hat{F} = \hat{X}_1 + \hat{X}_2 \varphi,$$

$$\hat{G} = \hat{X}_2 \left\{ f_1 \varphi_x + \int f_2 d\varphi - a_0 \int f_1 d\varphi \right\} + \hat{X}_3,$$

коммутационные соотношения

$$[\hat{X}_2, \hat{X}_1] = -a_0 \hat{X}_2, \qquad [\hat{X}_3, \hat{X}_1] = -a_2 \hat{X}_2, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_2] = -a_1 \hat{X}_2,$$

где a_0, a_1, a_2 – произвольные константы; f_1 ; f_2 – произвольные функции от φ. Алгебра Ли совпадает с коммутационными соотношениями

$$\varphi_t = \frac{\partial}{\partial x}(f_1 \varphi_x) + \left\{ (b_1 + b_2 \varphi) f_1 + b_2 \int f_1 d\varphi + b_3 \right\} \varphi_x +$$

$$+ (b_5 + b_6 \varphi) \int f_1 d\varphi + b_7 \varphi + b_8, \qquad (13)$$

$$\hat{F} = \hat{X}_1 + \hat{X}_2 \varphi,$$

$$\hat{G} = \hat{X}_2 \left\{ f_1 \varphi_x + (b_1 + b_2 \varphi) \int f_1 d\varphi + b_3 \varphi + b_4 \right\} + [\hat{X}_2, \hat{X}_1] \int f_1 d\varphi + \hat{X}_3,$$

коммутационные соотношения

$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1] X_1] + b_1 [\hat{X}_2, \hat{X}_1] + b_5 \hat{X}_2 = 0,$$

$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1] \hat{X}_2] + b_2 [[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + b_6 \hat{X}_2 = 0,$$

$$[\hat{X}_3, \hat{X}_2] + b_3 [\hat{X}_2, \hat{X}_1] + b_7 \hat{X}_2 = 0,$$

$$[\hat{X}_3, \hat{X}_1] + b_4 [\hat{X}_2, \hat{X}_1] + b_8 \hat{X}_2 = 0.$$

При $b_2 = b_6 = 0$ (остальные b_i – произвольные константы) алгебра Ли – четырехмерная:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_4, \qquad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = b_7 \hat{X}_2 - b_3 \hat{X}_4$$

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_3] = b_8 \hat{X}_2 - b_4 \hat{X}_4, \qquad [\hat{X}_2, \hat{X}_4] = 0,$$

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_4] = -b_5 \hat{X}_2 + b_1 \hat{X}_4, \quad [\hat{X}_3, \hat{X}_4] = -b_3 b_5 \hat{X}_2 + (b_3 b_1 - b_7) \hat{X}_4. \qquad (13a)$$

При $b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 0$ (остальные b_i – произвольные константы) алгебра Ли – четырехмерная:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_4, \qquad [\hat{X}_2, \hat{X}_3] = -b_3 \hat{X}_4,$$
$$[\hat{X}_1, \hat{X}_3] = -b_4 \hat{X}_4, \qquad [\hat{X}_2, \hat{X}_4] = b_2 \hat{X}_4,$$
$$[\hat{X}_1, \hat{X}_4] = b_1 X_4, \qquad [\hat{X}_3, \hat{X}_4] = (b_3 b_1 - b_2 b_4)\hat{X}_4. \tag{13б}$$

При остальных значениях b_i, $UFGLie$ оказываются либо тривиальными, либо частным случаем (12)

$$\varphi_t = \varphi_{xx} + (c_1 + c_2\varphi)\varphi_x + c_3 + c_4\varphi + c_5\varphi^2, \tag{14}$$
$$\hat{F} = \hat{X}_1 + \hat{X}_2\varphi,$$
$$\hat{G} = \hat{X}_2\{\varphi_x + c_1\varphi + \tfrac{1}{2}c_2\varphi^2\} + [\hat{X}_2, \hat{X}_1]\varphi + \hat{X}_3.$$

Коммутационные соотношения

$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1]\hat{X}_2] + \tfrac{1}{2}c_2[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + c_5\hat{X}_2 = 0,$$
$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1]\hat{X}_1] + c_1[\hat{X}_2, \hat{X}_1] + [\hat{X}_3, \hat{X}_2] + c_4\hat{X}_2 = 0,$$
$$[\hat{X}_3, \hat{X}_1] + c_3\hat{X}_2 = 0.$$

При $c_2 = c_5 = 0$ (остальные c_i – произвольные константы) базис алгебры Ли: $\hat{X}_1$, $\hat{X}_3$, $\hat{Y}_k \equiv ad^k\hat{X}_1(\hat{X}_2)$, $\{k\}_0^\infty$; алгебра Ли бесконечномерная:

$$[\hat{X}_1, \hat{Y}_k] = \hat{Y}_{k+1}, \quad [\hat{X}_3, \hat{Y}_k] = -\hat{Y}_{k+2} + c_1\hat{Y}_{k+1} - c_4\hat{Y}_k,$$
$$[\hat{X}_1, \hat{X}_3] = c_3\hat{Y}_0, \qquad [\hat{Y}_k, \hat{Y}_n] = 0, \qquad \{n\}_0^\infty. \tag{14a}$$

При $c_4 = c_5 = 0$ (остальные c_i – произвольные константы) базис алгебры Ли: $\hat{X}_1$, $\hat{X}_3$, $\hat{Y}_k \equiv ad^k\hat{X}_1(\hat{X}_2)$, $\{k\}_0^\infty$; алгебра Ли бесконечномерная:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_3] = c_3\hat{Y}_0, \quad [\hat{X}_1, \hat{Y}_k] = \hat{Y}_{k+1}, \quad [\hat{Y}_0, \hat{X}_3] = \hat{Y}_2 - c_1\hat{Y}_1, \quad [\hat{Y}_0, \hat{Y}_k] = \tfrac{1}{2}c_2\hat{Y}_k,$$
$$[\hat{Y}_m, \hat{Y}_l] = 0, \ [\hat{Y}_l, \hat{X}_3] = \hat{Y}_{l+3} - c_1\hat{Y}_{l+1} + \tfrac{1}{2}(l-1)c_2c_3\hat{Y}_{l-1}, \ \{m\}_1^\infty, \{l\}_1^\infty. \tag{14б}$$

При остальных значениях c_i, $UFGLie$ оказываются либо тривиальными, либо частным случаем (12):

$$\varphi_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varphi^2}\varphi_x\right) + \left(p_1\frac{1}{\varphi^2} + p_2\right)\varphi_x + p_3\frac{1}{\varphi} + p_4 + p_5\varphi, \tag{15}$$
$$\hat{F} = \hat{X}_1 + \hat{X}_2\varphi,$$
$$\hat{G} = \hat{X}_2\left\{\frac{1}{\varphi^2}\varphi_x - p_1\frac{1}{\varphi} + p_2\varphi\right\} - [\hat{X}_2, \hat{X}_1]\frac{1}{\varphi} + \hat{X}_3.$$

Коммутационные соотношения

$$[[\hat{X}_2, \hat{X}_1]\hat{X}_1] + p_1[\hat{X}_2, \hat{X}_1] - p_3\hat{X}_2 = 0,$$

$$[[\hat X_2,\hat X_1]\hat X_2]+[\hat X_1,\hat X_3]+p_4\hat X_2=0,$$

$$p_2[\hat X_2,\hat X_1]+[\hat X_3,\hat X_2]+p_5\hat X_2=0. \tag{15а}$$

При $p_4=0$ (остальные p_i произвольные константы) алгебра Ли пятимерная:

$$[\hat X_2,\hat X_1]=\hat X_4,\quad [\hat X_2,\hat X_3]=p_2\hat X_4+p_5\hat X_2,\quad [\hat X_2,\hat X_4]=\hat X_5,\quad [\hat X_2,\hat X_5]=0,$$

$$[\hat X_1,\hat X_3]=\hat X_5,\quad [\hat X_1,\hat X_4]=p_1\hat X_4-p_3\hat X_2,\quad [\hat X_1,\hat X_5]=p_1\hat X_5,\quad [\hat X_4,\hat X_5]=0,$$

$$[\hat X_3,\hat X_4]=(p_1p_2-p_5)\hat X_4-p_2p_3\hat X_2,\quad [\hat X_3,\hat X_5]=(p_1p_2-2p_5)\hat X_5. \tag{15б}$$

При $p_3=p_4=0$ (остальные p_i – произвольные константы) базис в алгебре Ли: $\hat X_2$, $\hat X_3$, $\hat Y_k=ad^k\hat X_2(\hat X_1)$, $\{k\}_0^\infty$; алгебра Ли бесконечномерная:

$$[\hat X_2,\hat X_3]=p_2\hat Y_1+p_5\hat X_2,\quad [\hat X_2,\hat Y_k]=\hat Y_{k+1},\quad [\hat Y_0,\hat Y_l]=p_1\hat Y_l,$$

$$[\hat Y_k,\hat X_3]=\hat Y_{k+2}+(kp_5-p_1p_2)\hat Y_k,\quad [\hat Y_l,\hat Y_n]=0,\ \{l\}_1^\infty,\ \{n\}_1^\infty. \tag{15в}$$

При $p_1=p_3=p_5=0$ (остальные p_i – произвольные константы) базис в алгебре Ли: $\hat X_2$, $\hat X_3$, $\hat Y_k\equiv ad^k\hat X_2(\hat X_1)$, $\{k\}_0^\infty$; алгебра Ли бесконечномерная:

$$[\hat X_2,\hat Y_k]=\hat Y_{k+1},\quad [\hat X_2,\hat X_3]=p_2\hat Y_1,\quad [\hat Y_0,\hat X_3]=\hat Y_2+p_4\hat X_2,$$

$$[\hat Y_1,\hat X_3]=\hat Y_3,\quad [\hat Y_l,\hat X_3]=\hat Y_{l+2}+\frac{1}{2}(l-2)p_2p_4\hat Y_{l-1},$$

$$[\hat Y_1,\hat Y_0]=0,\quad [\hat Y_l,\hat Y_0]=\frac{1}{2}(l-2)p_4\hat Y_{l-1},$$

$$[\hat Y_1,\hat Y_l]=\frac{1}{2}p_4\hat Y_l,\quad [\hat Y_l,\hat Y_n]=0,\quad \{l\}_2^\infty,\quad \{n\}_2^\infty.$$

При остальных значениях p_i, $UFGLie$ оказываются либо тривиальными, либо частными случаями (12) и (13).

Во втором варианте при $\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_x}\neq 0$ получаем два типа уравнений:

$$\varphi_t=f_1(\varphi,\varphi_x)\varphi_{xx}+\varphi_x\int\frac{\partial f_1}{\partial\varphi}d\varphi_x+q_0\int f_1\,d\varphi_x+$$
$$+f_2(\varphi)\varphi_x+q_0\int f_2\,d\varphi+q_1+q_2\varphi,$$

$$\hat F=\hat X_1+\hat X_2\varphi;\qquad \hat G=\hat X_2\left\{\int f_1\,d\varphi_x+\int f_2\,d\varphi\right\}+\hat X_3. \tag{16}$$

Коммутационные соотношения:

$$[\hat X_2,\hat X_1]=-q_0\hat X_2,\quad [\hat X_3,\hat X_1]=-q_1\hat X_2,\quad [\hat X_3,\hat X_2]=-q_2\hat X_2.$$

Здесь алгебра Ли совпадает с коммутационными соотношениями

$$\varphi_t = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_3(\varphi)}{\varphi_x+f_2(\varphi)}\right) - f_1(\varphi)\frac{f_3(\varphi)}{\varphi_x+f_2(\varphi)} + f_4(\varphi)\varphi_x + \frac{\partial f_3(\varphi)}{\partial\varphi} + f_5(\varphi), \tag{17}$$

$$\hat{F}(\varphi) = ? \quad \hat{G} = -\frac{\partial\hat{F}}{\partial\varphi}\frac{f_3}{\varphi_x+f_3} + \hat{g}(\varphi),$$

определяющие уравнения

$$[\hat{F}, \frac{\partial\hat{F}}{\partial\varphi}] = f_1\frac{\partial\hat{F}}{\partial\varphi} + f_2\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial\varphi^2}; \qquad \frac{\partial\hat{g}}{\partial\varphi} = f_4\frac{\partial\hat{F}}{\partial\varphi};$$

$$[\hat{F}, \hat{g}] = \left(\frac{\partial f_3}{\partial\varphi} + f_5\right)\frac{\partial\hat{F}}{\partial\varphi} + f_3\frac{\partial^2\hat{F}}{\partial\varphi^2}. \tag{18}$$

Для некоторых частных случаев (17) удалось построить $UFG\,Lie$, однако полная классификация этого уравнения требует значительно больших усилий, чем классификация всех нелинейных уравнений диффузии типа (9). Трудности связаны с тем, что в определяющих уравнениях (18) коммутационные соотношения возникают раньше, чем мы успеваем вычислить зависимость операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$ от φ. Этот вопрос требует рассмотрения в отдельной работе.

Поскольку все уравнения (12) – (15) являются нелинейными уравнениями диффузии и, безусловно, представляют интерес с точки зрения приложений, подробному анализу результатов, полученных для этих уравнений, имеет смысл посвятить отдельную работу. Пока ограничимся очевидными замечаниями.

Замечание 1. В связи с тем что при вычислении абстрактных алгебр Ли мы использовали только аксиомы алгебр Ли, то можно говорить, что перечислены все $FG\,Lie$, т.е. осуществлен переход от угадывания отдельных лиевских $\hat{F}-\hat{G}$ пар к описанию всех нетривиальных лиевских $\hat{F}-\hat{G}$ пар. Таким образом, в процедуре $W.-E.$ создана качественно новая ситуация и можно поставить вопрос о получении максимума информации, которую несут в себе $UFG\,Lie$. Наиболее наглядным, но,может быть, не самым изящным путем в этом направлении является построение точного представления соответствующих абстрактных алгебр Ли в терминах алгебр Ли векторных полей.

Замечание 2. Чем больший произвол содержится в исходном уравнении, тем "беднее" оказывается связанная с ним алгебра Ли, тем, соответственно, меньше информации можно извлечь из $UFG\,Lie$. Среди всех уравнений диффузии, кроме линейного уравнения (14а) и уравнения Бюргерса (14б), имеется еще только два уравнения (15б) и (15в), для которых значения $UFGLie$ лежат в бесконечномерных алгебрах Ли. Это позволяет надеяться, что и уравнения (15б) и (15в) удастся полностью проинтегрировать, например, с помощью некоей лианеризующей подстановки.

Замечание 3. Характерной чертой всех без исключения $UFGLie$ для уравнений диффузии является разрешимость соответствующих алгебр Ли. В этом заключается существенное отличие от всех тех случаев, когда значения лиевской $\hat{F}-\hat{G}$ пары лежат в полупростых алгебрах Ли и оказывается возможным применение метода обратной задачи рассеяния.

Несмотря на то что для всех полученных в этой работе $UFGLie$ удалось решить задачу о построении фактор-алгебры Ли, свободной алгебры Ли по идеалу, порожденному образующими и набором коммутационных соотношений, фактический материал оказался слишком беден для обобщающих заключений в плане возможных методов решения этой задачи. Поэтому чисто классификационный результат во всей этой деятельности является в настоящее время основным достижением: перечислены все уравнения диффузии, обладающие хотя бы одной нетривиальной лиевской $\hat{F}-\hat{G}$ парой и одновременно перечислены все лиевские $\hat{F}-\hat{G}$ пары для каждого такого уравнения.

1. Боровик А.Е., Робук В.Н. Линейные псевдопотенциалы и законы сохранения для уравнения Ландау - Лифшица // Теорет. и мат. физика. - 1981. - 46, № 3. - С. 371-381.
2. Walhquist H.D., Estabrook F.B. Prolongation structures of nonlinear evolution equations // J. Math. Phus. - 1975. - 16, N1.- P.1-7.
3. Corones J. Solitons and simple pseudopotentials // Ibid. - 1976. - 17, N5. - P.756-759.
4. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. - М. : Наука, 1983. - 280 с.
5. Свинолупов С.И. Эволюционные уравнения второго порядка, обладающие симметриями // Усп. мат. наук. - 1985. - 40, вып. 5. - С. 263-264.

УДК 517 + 519.46

С.И.Безуглый

ВНЕШНЯЯ СОПРЯЖЕННОСТЬ АВТОМОРФИЗМОВ ИЗ НОРМАЛИЗАТОРА ПОТОКА

В настоящей статье изучаются автоморфизмы из нормализатора эргодического потока. Поток автоморфизмов естественно взять специальным, т.е. построенным по базисному эргодическому автоморфизму Q и потолочной функции φ. Построен гомоморфизм, отображающий нормализатор $N[Q]$ базисного автоморфизма Q в нормализатор специального потока $N\{W_{Q,\varphi}(\cdot)\}$. При этом гомоморфизме классы внешне сопряженных автоморфизмов из $N[Q]$ переводятся в классы внешне сопряженных автоморфизмов из $N[W_{Q,\varphi(\cdot)}]$. В работе [1] доказано, что всякий автоморфизм из нормализатора потока порождает автоморфизм, лежащий в $N[Q]$, и обратно. Тем самым нахождение необходимых и достаточных условий внешнего сопряжения автоморфизмов из нормализатора потока сводится к нахождению полной системы инвариантов внешнего сопряжения элементов из нормализатора базисного автоморфизма потока. Последняя задача решена в работах [2,3], где рассматривались различные типы базисного автоморфизма. Поскольку любой аппроксимируемый измеримый группоид изоморфен группоиду, построенному по действию группы $\mathbb{R}$, т.е. по потоку автоморфизмов [4], то приведенные выше результаты допускают естественное обобщение. Вместо элементов из нормализатора потока следует рассматривать автоморфизмы аппроксимируемых измеримых группоидов. Более того, в [5-7] найдена полная система инвариантов внешнего сопряжения для действий не только группы $\mathbb{Z}$, а и любой счетной аменабельной группы, лежащих в $N[Q]$. Эти обстоятельства позволяют найти критерии внешнего сопряжения для действий счетных аменабельных групп на любом аппроксимируемом измеримом группоиде. Соответствующие результаты приведены в заключительной части настоящей работы.

<u>1. Специальный поток автоморфизмов.</u> Пусть (X,μ) – пространство Лебега; T – эргодический автоморфизм (X,μ), оставляющий меру μ квазиинвариантной. Группа автоморфизмов $[T]=\{R\in Aut(X,\mu):$ $:Rx\in\{T^n x: n\in\mathbb{Z}\}$ для п.в. $x\in X\}$ называется полной группой, построенной по T. Нормализатором $N[T]$ полной группы $[T]$ называется множество таких автоморфизмов $\beta\in Aut(X,\mu)$, что $\beta[T]\beta^{-1}=[T]$.

Автоморфизмы β_1 и β_2 из $N[T]$ называются внешне сопряженными, если существуют автоморфизмы $\gamma\in N[T]$ и $g\in[T]$ такие, что $\beta_2=$ $=\gamma^{-1}\beta_1 g\gamma$. Если H – группа автоморфизмов (X,μ), то коциклом динамической системы (X,μ,H) со значениями в группе G называется измеримое отображение $\sigma: X\times H\to G$ такое, что $\sigma(x,h_1h_2)=\sigma(h_2x,h_1)\times$ $\times\sigma(x,h_2)$ для п.в. $x\in X$ и $h_1,h_2\in H$.

Пусть Q – эргодический автоморфизм пространства (X,μ), $\varphi(x)$ – строго положительная измеримая вещественнозначная функция на X. Положим

$$Z(i,\varphi,x)=\begin{cases}\varphi(x)+\ldots+\varphi(Q^{i-1}x), & i>0\\ 0, & i=0\\ -\varphi(Q^{-1}x)-\ldots-\varphi(Q^{i}x), & i<0.\end{cases}$$

Из эргодичности Q и выбора φ следует, что $\lim\limits_{i\to\infty} Z(i,\varphi,x) = -\lim\limits_{i\to\infty} Z(-i,\varphi,x) = \infty$ для п.в. $x \in X$. Поэтому можно определить измеримое отображение $L: X\times R \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$L(x,u) = i, \text{ если } Z(i,\varphi,x) \le u < Z(i+1,\varphi,x).$$

На множестве $X(\varphi) = \{(x,u) \in X\times R\ ;\ 0 \le u < \varphi(x),\ x\in X\}$ с мерой $(\mu\times\lambda)\big|_{X(\varphi)}$, где λ – мера Лебега на R, зададим действие группы R:

$$W_{Q,\varphi}(t)(x,u) = \left(Q^{L(x,u+t)}x,\ u+t-Z(L(x,u+t),\varphi,x)\right),\ t\in R. \qquad (1)$$

Формула (1) определяет поток автоморфизмов $\{W_{Q,\varphi}(\cdot)\}$, который называется специальным и построен по базисному автоморфизму Q и потолочной функции φ. Известно, что любой эргодический поток автоморфизмов изоморфен некоторому специальному потоку [8].

Последний может быть получен также и другим способом. Рассмотрим этот способ на примере потока $\{W_{Q,1}(t)\}_{t\in R}$ с потолочной функцией тождественно равной 1. В пространстве $(X\times R,\ \mu\times\lambda)$ определим автоморфизм

$$Q_1(x,u) = (Q^{-1}x,\quad u+1),$$

и поток

$$T_s(x,u) = (x,\ u+s). \qquad (2)$$

Тогда $X(1) = X\times[0,1)$ – фундаментальное множество для автоморфизма Q_1, т.е. $X\times R = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} Q_1^n X(1)$. Пусть $[u]$ обозначает целую часть числа $u\in R$. Учитывая (1), имеем для п.в. $(x,u)\in X(1)$, $s\in R$:

$$Q_1^{-[u+s]}T_s(x,u) = \left(Q^{[u+s]}x,\quad u+s-[u+s]\right) =$$

$$= W_{Q,1}(s)(x,u). \qquad (3)$$

Нормализатором $N\{S(\cdot)\}$ потока автоморфизмов $\{S(t)\}_{t\in R}$ называется группа тех автоморфизмов R, для которых $R\{S(t)x\} = \{S(t)Rx\}$, где $\{S(t)x\}$ – траектория потока, проходящая через точку x.

Если $R\in N\{S(\cdot)\}$, то справедливо равенство

$$RS(t)x, = S(\tau(t,x))Rx,$$

где функция $\tau(x,t)$ является коциклом, построенным по потоку $\{S(t)\}$, и называется заменой времени в потоке.

Если $\{W_{Q,\varphi}(\cdot)\}$ и $\{W_{Q,1}(\cdot)\}$ – два специальных потока с одним и тем же базисным автоморфизмом Q, то отображение $\Psi(x,u) = (x,\ u + \varphi(x) - 1)$ обладает свойством

$$\psi\{W_{Q,1}(t)(x,u)\} = \{W_{Q,\varphi}(t)\psi(x,u)\}, \quad (x,u)\in X(1),$$

т.е. потоки $\{W_{Q,1}(\cdot)\}$ и $\{W_{Q,\varphi}(\cdot)\}$ слабо эквивалентны. Тогда нормализаторы $N\{W_{Q,1}(\cdot)\}$ и $N\{W_{Q,\varphi}(\cdot)\}$ изоморфны. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением потока $\{W_{Q,1}(\cdot)\}$.

2. Построение гомоморфизма из $N[Q]$ в $N\{W_{Q,1}(\cdot)\}$. Пусть автоморфизм $\delta\in N[Q]$. Тогда для п.в. $x\in X$:

$$\delta Q^{p}x = Q^{n(x,p)}\delta x \tag{4}$$

и функция $n(x,p)$ удовлетворяет тождеству для коциклов

$$n(x, p_1+p_2) = n(Q^{p_1}x, p_2) + n(x, p_1) \tag{5}$$

Лемма 1. Пусть β - автоморфизм пространства Лебега $(X\times R, \mu\times\lambda)$, и $\{T_s\}$ - поток, определенный формулой (2). Для того чтобы автоморфизм β принадлежал к $N\{T_s\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\beta(x,u) = (\delta x, \ v(x,u)), \tag{6}$$

где δ - автоморфизм (X,μ): $v(x,u)$ - измеримая функция, которая при каждом фиксированном $x\in X$ определяет взаимно однозначное отображение R на себя.

Доказательство опустим ввиду его простоты.

Если автоморфизм β имеет вид (6) и

$$\beta T_{s(x,u)} = T_{\tau(x,u;s)}\beta(x,u),$$

то

$$\tau(x,u;s) = v(x,u+s) - v(x,u). \tag{7}$$

Лемма 2. Пусть автоморфизм $\delta\in N[Q]$ и коцикл $n(x,p)$ определен из (4). Тогда автоморфизм

$$\beta(x,u) = (\delta x, \ \{u\} + n(x,[u])), \tag{8}$$

где $\{u\}$ - дробная часть числа $u\in R$, лежит в $N\{T_s\}\cap N[Q_1]$.

Доказательство. Положим

$$v(x,u) = \{u\} + n(x[u]). \tag{9}$$

Для того чтобы доказать, что $\beta\in N\{T_s\}$, согласно лемме 1, достаточно проверить, что функция $v(x,u)$, определенная в (9), при каждом фиксированном $x\in X$ задает взаимно однозначное отображение R на себя. Действительно, если предположить, что $v(x,u_1) = v(x,u_2)$, то тогда из равенства

$$\{u_1\} + n(x,[u_1]) = \{u_2\} + n(x,[u_2])$$

будет следовать, что $\{u_1\}=\{u_2\}$ и

$$n(x,[u_1])=n(x,[u_2]).$$

Отсюда вытекает, что $u_1=u_2$.

Проверим теперь, что $\beta\in N[Q_1]$. Воспользовавшись (5), получим

$$\beta Q_1^{\rho}(x,u)=\beta(Q^{-\rho}x,\ u+\rho)=$$

$$=(\delta Q^{-\rho}x,\ \{u+\rho\}+n(Q^{-\rho}x,\ [u+\rho])=$$

$$=(Q^{n(x,-\rho)}\delta x,\ \{u\}+n(x,[u])+n(Q^{-\rho}x,\rho))=$$

$$=Q_1^{-n(x,-\rho)}\beta(x,u)\ \square. \tag{10}$$

<u>Лемма 3.</u> Всякий автоморфизм

$$\beta(x,u)=(\delta x,\ v(x,u))$$

из $N[Q_1]\cap N[T_5]$ определяет автоморфизм $\tilde\beta$ пространства $(X(1),(\mu\times\lambda)|_{X(1)})$ такой, что $\tilde\beta\in N\{W_{Q,1}(\cdot)\}$.

Доказательство. Положим для $(x,u)\in X(1)$:

$$\tilde\beta(x,u)=Q_1^{-[v(x,u)]}\beta(x,u)=$$

$$=(Q^{[v(x,u)]}\delta x,\ v(x,u)-[v(x,u)]). \tag{11}$$

Проверим, что $\tilde\beta\in N\{W_{Q,1}(\cdot)\}$. Из равенства (10) следует, что функция $v(x,u)$ удовлетворяет соотношению

$$v(Q^{-\rho}x,\ u+\rho)=v(x,u)-n(x,-\rho). \tag{12}$$

Пусть $t\in R$ и обозначим $W_{Q,1}(t)(x,u)=(x_1,u_1)$, тогда из (11), (12) следует, что

$$\tilde\beta W_{Q,1}(t)(x,u)=\tilde\beta(Q^{[u+t]}x,\{u+t\})=$$

$$=Q_1^{-[v(x_1,u_1)]}\beta(x_1,u_1)=$$

$$=Q_1^{-[v(x_1,u_1)]}(\delta Q^{[u+t]}x,\ v(Q^{[u+t]}x,\{u+t\}))=$$

$$=Q_1^{-[v(x_1,u_1)]}(Q^{n(x,[u+t])}\delta x,\ v(x,u+t)-n(x,[u+t]))=$$

$$=Q_1^{-[v(x_1,u_1)]-n(x,[u+t])}(\delta x,\ v(x,u+t)).$$

Применим (7), тогда

$$\tilde\beta W_{Q,1}(t)(x,u)=$$

$$= Q_1^{-[v(x_1,u_1)]-n(x,[u+t])} T_{\tau(x,u;t)}\beta(x,u) =$$

$$= T_{\tau(x,u;t)} Q_1^{-[v(x_1,u_1)]-n(x,[u+t])} Q_1^{[v(x,u)]} Q_1^{-[v(x,u)]} \beta(x,u) =$$

$$= T_{\tau(x,u;t)} Q_1^{-[v(x_1,u_1)]-n(x,[u+t])+[v(x,u)]} \tilde{\beta}(x,u). \tag{13}$$

Справедливо равенство

$$-[v(x_1,u_1)] = -[v(Q^{[u+t]}x, \{u+t\}] =$$

$$= -[v(x,u+t)] + n(x,[u+t]).$$

Поэтому (13) преобразуется к виду

$$\tilde{\beta} W_{Q,1}(t)(x,u) = T_{\tau(x,u;t)} Q_1^{-[v(x,u+t)]+[v(x,u)]} \tilde{\beta}(x,u). \tag{14}$$

Временно обозначим $\tilde{\beta}(x,u) = (y,q)$, $q = \{v(x,u)\}$. Тогда

$$[v(x,u+t)] - [v(x,u)] = [v(x,u) - [v(x,u)] +$$

$$+ v(x,u+t) - v(x,u)] = [q + \tau(x,u;t)]. \tag{15}$$

Из (3), (14) и (15) вытекает, что

$$\tilde{\beta} W_{Q,1}(t)(x,u) = Q_1^{-[q+\tau(x,u;t)]} T_{\tau(x,u;t)}(y,q) =$$

$$= W_{Q,1}(\tau(x,u;t))\tilde{\beta}(x,u). \quad \square$$

Автоморфизм $\tilde{\beta}$, определенный согласно (11), будем называть автоморфизмом индуцированным β на $X(1)$. Автоморфизму $\delta \in N[Q]$ по формуле (8) был поставлен в соответствие автоморфизм $\beta \in N[Q_1] \cap \cap N\{T_\delta\}$, а по β построен индуцированный автоморфизм $\tilde{\beta} \in N\{W_{Q,1}(\cdot)\}$. Обозначим через Φ отображение $\delta \to \beta \to \tilde{\beta}$.

$$N[Q] \to N\{W_{Q,1}(\cdot)\},$$

задаваемое формулами (8) и (11).

<u>Лемма 4.</u> Пусть автоморфизмы

$$\beta_i(x,u) = (\delta x, v_i(x,u)), \quad i = 1,2$$

из $N[Q_1] \cap N\{T_S\}$ таковы, что индуцированные ими автоморфизмы $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$ совпадают на $X(1)$. Тогда $v_1(x,u) - v_2(x,u) = const.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы следует, что

$$v_i(Q^{-p}x,\ u+p) = v_i(x,u) - n(x,-p),\quad i=1,2,$$

$$\tau_1(x,u;t) = \tau_2(x,u;t), \tag{16}$$

где $\tau_i(x,u;t) = v_i(x,u+t) - v_i(x,u)$. Поэтому из (16) $v_1(x,\ u+t) - v_2(x,\ u+t) = v_1(x,u) - v_2(x,u)$, следовательно, разность $v_1(x,u) - v_2(x,u)$ зависит только от x и обозначим ее через $f(x)$. Тогда $f(Qx) = v_1(Q_1^{-1}(x,u)) - v_2(Q_1^{-1}(x,u)) = f(x)$. Из эргодичности автоморфизма Q следует, что $f(x) = const$. $\square$

Теорема 1. Отображение $\Phi:\ b\to\beta\to\tilde\beta$ из $N[Q]$ в $N\{W_{Q,1}(\cdot)\}$ является инъективным гомоморфизмом.

Доказательство следует непосредственно из лемм 2, 3.

Следствие. Пусть автоморфизмы b_1 и b_2 из $N[Q]$ внешне сопряжены, тогда соответствующие им автоморфизмы $\tilde\beta_1 = \Phi(b_1)$ и $\tilde\beta_2 = \Phi(b_2)$ также внешне сопряжены относительно потока $\{W_{Q,1}(\cdot)\}$.

Задача о нахождении полной системы инвариантов внешнего сопряжения для автоморфизмов, лежащих в $N[Q]$, полностью решена в работах [2,3].

3. Автоморфизмы аппроксимируемых группоидов. Пусть $(\mathcal{G},[\nu])$ – главный измеримый аппроксимируемый группоид (используемые понятия определены в [4,9]). Через $Aut(\mathcal{G},[\nu])$ будем обозначать группу его автоморфизмов, через $Int(\mathcal{G},[\nu])$ – группу внутренних автоморфизмов, а через $\mathcal{G}/E$ – редукцию группоида $\mathcal{G}$ на множество $E\subset\mathcal{G}^{(0)}$, где $\mathcal{G}^{(0)}$ – множество единиц. В [10] доказано, что для всякого измеримого группоида $\mathcal{G}$ существует редукция $\mathcal{G}/E$ на полное множество E, которая имеет дискретные орбиты. При этом группоид $\mathcal{G}$, изоморфен группоиду $\mathcal{G}/E\times J$, где $J=\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ – транзитивный группоид ($\mathbb{T}$ – окружность). Если $\mathcal{G}$ – аппроксимируемый группоид, то можно считать, что орбиты группоида $\mathcal{G}/E$ порождены действием группы $\mathbb{Z}$, т.е. $\mathcal{G}$ изоморфен группоиду $(\mathbb{Z}\times\mathbb{T})\times(E\times\mathbb{T})$, построенному по действию группы $\mathbb{Z}\times\mathbb{T}$.

Теорема 2 [1]. Пусть $\alpha\in Aut(\mathbb{Z}\times\mathbb{T},X\times\mathbb{T})$. Тогда существуют автоморфизм α_0 группоида $\mathbb{Z}\times X$ и внутренний автоморфизм a группоида $(\mathbb{Z}\times\mathbb{T}\times X\times\mathbb{T})$ такие, что $a\circ\alpha = \alpha_0\times id$.

Если $\rho(G)$ – действие счетной группы G на группоиде $\mathcal{G}$, то на группоиде $\mathcal{G}/E$, согласно теореме 2, определены автоморфизмы $\rho(g)_0$, $g\in G$. Автоморфизмы $\rho(g)_0$, $g\in G$ образуют группу с точностью до умножения на внутренние автоморфизмы группоида $\mathcal{G}/E$.

Теорема 3. Пусть G – счетная аменабельная группа, $(\mathcal{G},[\nu])$ – аппроксимируемый главный измеримый группоид, $\rho_i: G\to Aut(\mathcal{G},[\nu])$, $i=1,2$, – действия группы G на группоиде $(\mathcal{G},[\nu])$, $\mathcal{G}/E$ – дискретная редукция $\mathcal{G}$. Действия $\rho_1(G)$ и $\rho_2(G)$ внешне сопряжены на группоиде $\mathcal{G}$, т.е. связаны соотношением

$$\rho_2(g) = \gamma^{-1} \rho_1(g) t_\gamma, \quad g \in G,$$

где $\gamma \in Aut(\mathcal{G}, [\nu])$, $t = t(g) \in Int(\mathcal{G}, [\nu])$ тогда и только тогда, когда $\rho_1(G)_0$ и $\rho_2(G)_0$ внешне сопряжены относительно дискретной редукции $\mathcal{G}/E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия теоремы 3 непосредственно следует из теоремы 2. Для того чтобы доказать достаточность, заметим, что группоид $\mathcal{G}$ изоморфен группоиду, построенному по действию потока $\{W_{Q,t}(\cdot)\}$, а $\mathcal{G}/E$ - группоиду, порожденному действием Q. Поэтому доказательство теоремы следует из теоремы 1 и следствия. $\square$

Необходимые и достаточные условия внешней сопряженности действий счетных аменабельных групп, лежащих в нормализаторе полной группы, порожденной одним автоморфизмом, определены в работах [5-7].

1. Голодец В.Я., Синельщиков С.Д. Внешняя сопряженность действий непрерывных аменабельных групп. - Харьков, 1985. - 26 с. - (Препринт / ФТИНТ АН УССР, № 21 - 85).
2. Connes A., Krieger W. Measure space automorphisms, the normalizers of their full groups, and the approximate finiteness // J. Funct. Anal. - 1977.-24, N5 - P.336-352.
3. Besuglyi S.I., Golodets V.Ya. Groups of measure space transformations and invariants of outer conjugation for automorhisms from normalizers of type III full groups// -Ibid. - 1985.-60, N3.- P. 341-369.
4. Feldman J., Hahn P., Moore C. Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups // Adv. in Math. - 1978. - 28, N9- P. 186-230.
5. Безуглый С.И., Голодец В.Я. Внешняя сопряженность действий счетных аменабельных групп на пространстве с мерой. - Харьков, 1984. - 38 с. - (Препринт / ФТИНТ АН УССР, № 2 - 84).
6. Безуглый С.И. Внешняя сопряженность действий счетных аменабельных групп // Математическая физика и функциональный анализ. - Киев : Наук. думка, 1986. - 206 с.
7. Безуглый С.И., Голодец В.Я. Преобразования пространств с мерой типа III и внешняя сопряженность счетных аменабельных групп автоморфизмов. - Харьков, 1985. - 38 с. - (Препринт / ФТИНТ АН УССР, № 28 - 85).
8. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. - М. : Наука, 1980. - 384 с.
9. Ramsay A. Virtual groups and group actions // Adv. in Math.- 1971.-6, N7 - P.253-322.
10. Ramsay A.Topologies on measured groupoids // J. Funct. Anal.- 1982.-47, N 3.- P. 314-343.

УДК 517.986

Г.Н.Жолткевич

МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО ДЛЯ СОСТОЯНИЙ НА АЛГЕБРАХ КВАЗИЛОКАЛЬНЫХ НАБЛЮДАЕМЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Настоящая работа посвящена изучению аналогов марковского свойства для состояний на алгебрах квазилокальных наблюдаемых квантовых решетчатых систем. Интерес к данной тематике объясняется тем, что марковскими состояниями исчерпываются предельные распределения Гиббса для классических решетчатых систем с потенциалом конечного радиуса взаимодействия [1,2]. Для квантового случая известно несколько распределений марковского свойства [3,4]. Поскольку равновесные состояния в квантовом случае описываются состояниями Кубо - Мартина - Швингера (КМШ-состояниями) [5], особый интерес представляет марковость в этом случае. Марковские по Аккарди [3] КМШ-состояния подробно изучены в [6,7], в частности, доказана их диагонализуемость. Ниже дано определение марковости, совпадающее в коммутативном случае с классическим, доказан ряд свойств марковских в этом смысле состояний. Показано, что введенное определение *a priori* более общее, чем определения Аккарди [3] и де Пиллиса [4]. Установлено, что локально точные состояния марковские по де Пиллису являются цепями Маркова.

1. Пусть UHF-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет обычную структуру алгебры квазилокальных наблюдаемых для ν-мерной квантовой решетки:

$$\mathfrak{A} = \bigotimes_{x \in \mathbb{Z}^\nu} \mathfrak{A}(x), \quad \mathfrak{A}(x) = B(\mathbb{C}^q), \quad \mathfrak{A}_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} \mathfrak{A}(x).$$

Для состояния φ на $\mathfrak{A}$ обозначим:

$H(\varphi)$ - пространство представления, построенного по φ;

$\rho_\Lambda(\varphi)$ - матрица плотности состояния $\varphi/\mathfrak{A}_\Lambda$ относительно единственного следа τ на $\mathfrak{A}$ (Λ - конечное подмножество $\mathbb{Z}^\nu$);

π_φ - представление, построенное по φ;

$H_\Lambda(\varphi) = \pi_\varphi(\mathfrak{A}_\Lambda)\xi_\varphi$, где ξ_φ - вектор, соответствующий 1 в $H(\varphi)$;

$P_\Lambda(\varphi)$ - ортопроектор на $H_\Lambda(\varphi)$.

Определение 1. Состояние φ назовем марковским, если для всякого конечного Λ найдется конечное $\Lambda' \supset \Lambda$ такое, что

$$P_{\Lambda'}(\varphi) / H_{\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda'}(\varphi) = P_{\Lambda'/\Lambda} / H_{\mathbb{Z}^\nu \setminus \Lambda'}(\varphi).$$

Предложение 1. Если φ - локально точно, что $\rho_\Lambda(\varphi)$ поднимается до непрерывного отображения $E_\Lambda : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_\Lambda$.

Доказательство непосредственно следует из теоремы Банаха о замкнутом операторе.

Теорема 1. Если φ - марковское локально точное состояние, то

φ – КМШ-состояние, кроме того, если $H_{loc}=\cup H_\Lambda$ (Λ – конечно), Δ – модулярный оператор для φ, то $\Delta H_{loc}\subset H_{loc}$.

Доказательство. Инволюция $Sa\xi=a^*\xi$ (для простоты обозначений π_φ и индекс φ опускаются) корректно определена на H_{loc}. Если $a\in H_\Lambda$, $b\in H_{\Lambda_1}$, то

$$(Sa\xi\,/\,b\xi)=\varphi(b^*a^*)=\overline{\varphi(ab)}=\overline{\varphi(aE_\Lambda(b))}=$$

$$=\varphi(E_\Lambda(b)^*a^*)=\varphi(a^*\rho_\Lambda E_\Lambda(b)^*\rho_\Lambda^{-1})=$$

$$=(\rho_\Lambda E_\Lambda(b)^*\rho_\Lambda^{-1}\xi\,/\,a\xi).$$

Пусть $\Lambda_1\subset\Lambda$, тогда

$$(Sa\xi\,/\,b\xi)=(\rho_\Lambda b^*\rho_\Lambda^{-1}\xi\,/\,a\xi).$$

Для Λ_1 по определению марковости подберем $\Lambda_1'\supset\Lambda_1$; Λ выберем так, чтобы $\Lambda\supset\Lambda_1$. Для $c_\Lambda=c_{\Lambda_1'}c_{\Lambda\setminus\Lambda_1'}$ ($c_{\Lambda_1'}\in\mathfrak{A}_{\Lambda_1'}$, $c_{\Lambda\setminus\Lambda_1'}\in\mathfrak{A}_{\Lambda\setminus\Lambda_1'}$), $b\in\mathfrak{A}_{\Lambda_1}$ имеем

$$(\Delta_\Lambda b\xi/c_\Lambda\xi)=\varphi(bc^*_{\Lambda\setminus\Lambda_1'}c^*_{\Lambda_1'})=\overline{\varphi(c_{\Lambda\setminus\Lambda_1'}c_{\Lambda_1'}b^*)}=$$

$$=\overline{\varphi(c_{\Lambda_1'}b^*c_{\Delta\setminus\Lambda_1'})}=\overline{\varphi(c_{\Lambda_1'}b^*E_{\Lambda_1'}(c_{\Delta\setminus\Lambda_1'}'))}=$$

$$=\overline{\varphi(c_{\Lambda_1'}b^*E_{\Lambda_1'\setminus\Lambda_1}(c_{\Lambda\setminus\Lambda_1'}))}=\varphi(E_{\Lambda_1'\setminus\Lambda_1}(c_{\Lambda\setminus\Lambda_1'})^*bc^*_{\Lambda_1'})=$$

$$=\varphi(bE_{\Lambda_1'\setminus\Lambda_1}(c_{\Lambda\setminus\Lambda_1'})^*c^*_{\Lambda_1'})=\varphi(E_{\Lambda_1'\setminus\Lambda_1}(c_{\Lambda\setminus\Lambda_1})^*c^*_{\Lambda_1'}\rho_{\Lambda_1'}b\rho^{-1}_{\Lambda_1'})=$$

$$=\overline{\varphi(\rho^{-1}_{\Lambda_1'}b^*\rho_{\Lambda_1'}c_{\Lambda_1'}E_{\Lambda_1'\setminus\Lambda_1}(c_{\Lambda\setminus\Lambda_1'}))}=\overline{\varphi(\rho^{-1}_{\Lambda_1'}b^*\rho_{\Lambda_1'}c_{\Lambda_1'}c_{\Lambda\setminus\Lambda_1'})}=$$

$$=\varphi(c^*_{\Lambda\setminus\Lambda_1'}c^*_{\Lambda_1'}\rho_{\Lambda_1'}b\rho^{-1}_{\Lambda_1'})=\varphi(c^*_\Lambda\rho_{\Lambda_1'}b\rho^{-1}_{\Lambda_1'})=$$

$$=(\rho_{\Lambda_1'}b\rho^{-1}_{\Lambda_1'}\xi\,/\,c_\Lambda\xi).$$

Поскольку $c_\Lambda\xi$ порождают H_Λ, то $\Delta_\Lambda b\xi=\rho_{\Lambda_1'}b\rho^{-1}_{\Lambda_1'}\xi$, где $b\in\mathfrak{A}_{\Lambda_1}$. Отсюда следует, что

$$(Sa\xi\,/\,b\xi)=(\rho_{\Lambda_1'}b^*\rho^{-1}_{\Lambda_1'}\xi\,/\,a\xi),\quad \mathcal{D}(S^*)\supset H_{loc}.$$

Таким образом: 1) S – замыкаем; 2) $\Delta=S^*S^{**}$ определен, самосопряжен и положителен. Более того, из предыдущих вычислений следует, что 1) $H_{loc}\subset\mathcal{D}(\Delta)$; 2) если $a\in\mathfrak{A}_\Lambda$ и $\Lambda'\supset\Lambda$ найдено из условия марковости, то

$$\Delta a\xi = \rho_{\Lambda'}\, a\, \rho_{\Lambda'}^{-1}\, \xi.$$

Для завершения доказательства осталось показать, что ξ – отделяющий вектор для слабого замыкания представления. Действительно, оператор $R(a)=\bar{S}a\bar{S}$, где $a\in \mathfrak{A}_{loc}=\bigcup_{\Lambda} \mathfrak{A}_{\Lambda}$, замкнут, и при $b\in\mathfrak{A}_{loc}$ $R(a)b\xi=\bar{S}a\bar{S}b\xi=\bar{S}ab^*\xi=ba^*\xi$, т.е. $R(a)b\xi^{\Delta}=ba^*\xi$. Итак, $R(a)$ замкнут и присоединен к $\pi_\varphi(\mathfrak{A})'$. Заметим, что $\{R(a)\xi : a\in\mathfrak{A}_{loc}\}=H_{loc}$, следовательно, ξ – отделяющий вектор, тем самым доказательство завершено. Справедливо и обратное.

Теорема 2. Если φ – КМШ-состояние; Δ – модулярный оператор и выполнены условия: 1) $\mathcal{D}(\Delta)\supset H_{loc}$; 2) $\Delta H_{loc}\subset H_{loc}$, тогда φ – марковское.

Доказательство. В силу условия 2) для всякого Λ найдется $\Lambda'\supset\Lambda$ такое, что $\Delta H_{\Lambda}\subset H_{\Lambda'}$. Покажем, что $E_{\Lambda'}/\mathfrak{A}_{\mathbb{Z}^\nu\setminus\Lambda'}$ = $= E_{\Lambda'\setminus\Lambda}/\mathfrak{A}_{\mathbb{Z}^\nu\setminus\Lambda''}$ т.е. для $a\in\mathfrak{A}_{\Lambda''\setminus\Lambda}$, где $\Lambda''\supset\Lambda'$, выполняется

$$E_{\Lambda'}(a)\in \mathfrak{A}_{\Lambda}^{c}.$$

Пусть $b\in\mathfrak{A}_{\Lambda}$, $c\in\mathfrak{A}_{\Lambda'}$:

$$(E_{\Lambda'}(a)b\xi\,/\,c\xi)=\varphi(c_{\Lambda}^{*}E_{\Lambda'}(a)b)=$$

$$=\varphi(E_{\Lambda'}(c_{\Lambda}^{*}a)\,b)=\varphi(\rho_{\Lambda'}^{-1}b\rho_{\Lambda'}E_{\Lambda'}(c_{\Lambda}^{*}a))=$$

$$=\varphi(\rho_{\Lambda'}^{-1}b\rho_{\Lambda'}c^*a)=(c^*a\xi\,/\,\rho_{\Lambda'}b^*\rho_{\Lambda'}^{-1}\xi)=$$

$$=(c^*a\xi\,/\,\Delta b^*\xi)=\varphi(c^*ab)=\varphi(c^*ba)=$$

$$=\varphi(c^*bE_{\Lambda'}(a))=(bE_{\Lambda'}(a)\xi)/c\xi),$$

откуда и следует требуемое.

Следствие 1. КМШ-состояние φ марковское по Аккарди является марковским в смысле определения 1.

Доказательство. Как показано в работах [6,7], марковость по Аккарди эквивалентна для КМШ-состояний условию $\Delta^{it}H_{loc}\subset H_{loc}$, а значит, $\Delta H_{loc}\subset H_{loc}$ и подавно.

2. Рассмотрим теперь отображения

$$Q_X(\cdot/\Lambda):\mathfrak{A}_X\to\mathfrak{A}_\Lambda,\qquad \text{где } \Lambda\cap X=\emptyset,\quad Q_X(\cdot\,|\,\Lambda)=E_\Lambda/X.$$

Обозначим через $T_\Lambda:\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}_\Lambda$ условное ожидание, построенное по τ.

Предложение 2. $Q_X(a/\Lambda)=T_\Lambda(w(X/\Lambda)a)=T_\Lambda(aw(X/\Lambda))$, $w(X/\Lambda)=\rho_{X\cup\Lambda}\,\rho_{\Lambda}^{-1}$.

Доказательство. Для $b\in\mathfrak{A}_\Lambda$ имеем

$$\tau(Q_X(a/\Lambda)b)=\varphi(\rho_\Lambda^{-1}b\,Q_X(a/\Lambda))=\varphi(\rho_\Lambda^{-1}bE_\Lambda(a))=\varphi(E_\Lambda(\rho_\Lambda^{-1}ba))=$$

$$=\varphi(\rho_\Lambda^{-1}ba)=\tau(\rho_{\Lambda\cup X}\rho_\Lambda^{-1}ab)=\tau(T_\Lambda(w(X/\Lambda)a)b),$$

т.е. $Q_X(\cdot/\Lambda)=T_\Lambda(w(X/\Lambda)\cdot)$, кроме того,

$$\tau(Q_X(a/\Lambda)b)=\varphi(\rho_\Lambda^{-1}bQ_X(a/\Lambda))=$$

$$=\varphi(E_\Lambda(\rho_\Lambda^{-1}ba))=\tau(\rho_{\Lambda\cup X}\rho_\Lambda^{-1}ba)=\tau(ba\,w(X/\Lambda))=$$

$$=\tau(T_\Lambda(aw(X/\Lambda))b)\quad,\qquad \text{т.е. } Q_X(\cdot/\Lambda)=T_\Lambda(\cdot w(X/\Lambda)).$$

Следствие 2. Если $Q_X(\cdot/\Lambda)$ - * - отображения, то соответствующее состояние диагонально.

Доказательство. Для любой пары $X,\Lambda: X\cap\Lambda=\emptyset$ и любого $a\in\mathfrak{A}_X$ имеем $Q_X(a^*/\Lambda)^*=Q_X(a/\Lambda)$, т.е. $T_\Lambda(a^*w(X/\Lambda))^*=$ $=T_\Lambda(w(X/\Lambda)a)$ или $T_\Lambda([w(X/\Lambda)^*-w(X/\Lambda)]a)=0$. Последнее означает, что $w(X/\Lambda)^*=w(X/\Lambda)$. Таким образом, $\rho_\Lambda^{-1}\rho_{X\cup\Lambda}=$ $=\rho_{X\cup\Lambda}\rho_\Lambda^{-1}$, т.е. $[\rho_{X\cup\Lambda},\rho_\Lambda]=0$. Построение диагонали, на которой сосредоточено состояние, теперь очевидно.

Следствие 3. Локально точное состояние марковское по де Пиллису диагонально.

1. Добрушин Р.Л. Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности // Теория вероятн. и ее применение. - 1968. - 13, № 2. - С. 201-229.
2. Аверинцев М.Б. Об одном способе описания случайных полей с дискретным аргументом // Проблемы передачи информации. - 1970. - № 2. - С. 100-108.
3. Аккарди Л. О некоммутативном марковском свойстве // Функциональный анализ и его приложения. - 1975. - № 1. - С. 1-8.
4. Pillis J. de Noncommutative Markov processes// Trans. Amer. Math. Soc. - 1966.- N11. - P. 264-279.
5. Рюэль Д. Статистическая механика: Строгие результаты. - М. : Мир, 1971. - 360 с.
6. Голодец В.Я., Жолткевич Г.Н. Марковские состояния Кубо - Мартина - Швингера // Теорет. и мат. физика // - 1983. - 56, № 1. - С. 80-86.
7. Жолткевич Г.Н. Представления аппроксимативно-конечномерных C^*-алгебр и марковские состояния на них : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Харьков, 1983. - 115 с.

УДК 519.4

С.Л.Гефтер

О КОГОМОЛОГИЯХ ЭРГОДИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ Γ-ГРУППЫ НА ОДНОРОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ ЛИ

В работах [1-2] изучены эргодические действия со свойством Γ и, в частности, установлено, что такие действия имеют дискретную, не более чем счетную одномерную группу когомологий с коэффициентами в группе $\mathbb{T}$. В [4] К.Муром построены динамические системы с конечной (и даже тривиальной) группой когомологий с коэффициентами в $\mathbb{T}$.

Настоящая статья посвящена изучению коциклов эргодических динамических систем, порожденных плотным вложением счетной группы со свойством T в компактную группу Ли [6-7]. Вычислена одномерная группа когомологий для действия T-группы на однородном пространстве односвязной компактной полупростой группы Ли (см. ниже теорему). Показано, что свободное действие со свойством T может иметь бесконечную группу когомологий (пример 3). Приведены также примеры эргодических действий с непрерывными локально компактными группами когомологий.

1. Пусть (X, μ) – пространство Лебега с вероятностной мерой, α – эргодическое, сохраняющее меру, действие счетной группы Γ на алгебре $A = L^{\infty}(X, \mu)$. Обозначим через $U(X, \mathbb{T})$ группу измеримых функций из X в $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ (функции рассматриваются с точностью до изменения на множестве меры нуль). Очевидно, что $U(X, \mathbb{T})$ совпадает с унитарной группой $U(A)$ алгебры A. Коциклом действия α со значениями в группе $\mathbb{T}$ называется функция $c : \Gamma \to U(X, \mathbb{T})$ такая, что

$$c_e = 1, \quad c_{gh} = c_g \alpha_g (c_h), \qquad g, h \in \Gamma.$$

Множество коциклов с поточечным умножением образует группу $Z^1(\Gamma, U(X, T))$, в которой выделяется подгруппа кограниц $B^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T}))$, образованная коциклами вида $b_g = u\alpha_g(u^*)$, $u \in U(A)$, $g \in \Gamma$. Факторгруппа $H^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T})) = Z^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T}))/B^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T}))$ называется одномерной группой когомологий действия Γ на пространстве (X, μ) с коэффициентами в $\mathbb{T}$. На группе $Z^1(\Gamma, U(X, T))$ введем топологию поточечной сходимости по мере. С этой топологией $Z^1(\Gamma, U(X, T))$ является польской группой, т.е. топологической группой, гомеоморфной полному сепарабельному метрическому пространству. Если действие Γ на (X, μ) сильно эргодично, то $B^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T}))$ – замкнутая подгруппа $Z^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T}))$ и, следовательно, группа когомологий $H^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T}))$, снабженная фактортопологией, также является польской [3, теорема 2.4].

Предположим теперь, что группа Γ обладает свойством T, т.е. существуют $\varepsilon > 0$ и конечное подмножество $F \subset \Gamma$ такие, что для любого унитарного представления π группы Γ из существования ненулевого вектора $\xi \in \mathcal{H}_\pi$, для которого $\|\pi(g)\xi - \xi\| < \varepsilon$, $g \in F$, следует существование нетривиального неподвижного вектора $\eta \in \mathcal{H}_\pi : \pi(g)\eta = \eta$, $g \in \Gamma$ [8-9]. В этом случае, как было показано Р.Зиммером [1, теорема 2.11] и К.Шмидтом [2, теорема 3:4], группа $H^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T}))$ дискретна. Приведем примеры действий с непрерывными локально компактными группами когомологий (см. также [1, теорема 2.6]).

Пусть G – счетная группа, лежащая в централизаторе действия Γ, причем $G \cap [\Gamma] = \{id\}$, где $[\Gamma]$ – полная группа, порожденная Γ.

Обозначим через θ действие G на алгебре $A=L^{\infty}(X,\mu)$ и рассмотрим действие β группы $\Gamma\times G$:

$$\beta_{(\gamma,g)}=\alpha_\gamma\theta_g, \qquad \gamma\in\Gamma, \qquad g\in G.$$

Нетрудно проверить, что β – свободное действие.

Предложение 1. Группа $H^1(\Gamma\times G,U(X,\mathbb{T}))$ локально компактна и содержит открытую компактную подгруппу, топологически изоморфную $Hom(G,\mathbb{T})$.

Доказательство. Для каждого $c\in Z^1(\Gamma\times G,U(X,\mathbb{T}))$ зададим представление π_c группы Γ в пространстве $\mathcal{H}=L^2(X,\mu)$: : $\pi_c(\gamma)\xi=c_\gamma\alpha_\gamma(\xi)$, где $\xi\in\mathcal{H}$, $\alpha_\gamma(\xi)(x)=\xi(\gamma^{-1}x)$, $\gamma\in\Gamma$, $x\in X$. Пусть $\varepsilon>0$ и конечное множество $F\subset\Gamma$ определяются T-свойством Γ [9]. Рассмотрим окрестность единицы $\mathcal{U}$ в группе $Z^1(\Gamma\times G,U(X,\mathbb{T}))$:

$$\mathcal{U}=\{c:(\int|c_{(\gamma,e)}(x)-1|^2\,d\mu(x))^{1/2}<\varepsilon,\ \gamma\in F\}. \tag{1}$$

Если $c\in\mathcal{U}$, $\xi_0(x)=1$, $x\in X$, то из (1) получаем $\|\pi_c(\gamma)\xi_0-\xi_0\|<\varepsilon$, $\gamma\in F$, и в силу T-свойства группы Γ найдется ненулевой $\eta\in\mathcal{H}$ такой, что $\pi_c(\gamma)\eta=\eta$, или $c_{(\gamma,e)}\alpha_\gamma(\eta)=\eta$, $\gamma\in\Gamma$. Отсюда, $\alpha_\gamma(|\eta|)=|\eta|$, $\gamma\in\Gamma$, т.е. $|\eta(x)|=|\eta(x_0)|$, $x\in X$. Таким образом, $u=|\eta(x_0)|^{-1}\eta\in U(X,\mathbb{T})$ и

$$c_{(\gamma,e)}=u\,\alpha_\gamma(u^*), \qquad \gamma\in\Gamma. \tag{2}$$

Положим $\psi(g)=c_{(e,g)}u^*\theta_g(u)$, $g\in G$. Используя равенство (2) и тождество коцикла, получаем

$$\alpha_\gamma(\psi(g))=\psi(g), \quad \gamma\in\Gamma, \quad g\in G.$$

Поскольку действие α эргодично то $\psi(g)\in\mathbb{T}$, $g\in G$.

Тогда легко проверить, что $\psi(gh)=\psi(g)\psi(h)$, g, $h\in G$, т.е. $\psi\in Hom(G,\mathbb{T})$. Таким образом, $c_{(e,g)}=\psi(g)u\theta_g(u^*)$, $g\in G$ и в силу (2) имеем $c_{(\gamma,g)}=c_{(\gamma,e)(e,g)}=c_{(\gamma,e)}\alpha_\gamma(c_{(e,g)})=\psi(g)u\alpha_\gamma(\theta_g(u^*))=$ $=\psi(g)u\beta_{(\gamma,g)}(u^*)$, $(\gamma,g)\in\Gamma\times G$. Мы приходим к заключению, что подгруппа, алгебраически порожденная $Hom(G,\mathbb{T})$ и $B^1(\Gamma\times G,U(X,\mathbb{T}))$, является открытой подгруппой $Z^1(\Gamma\times G,U(X,\mathbb{T}))$. Легко видеть, что нетривиальный характер G порождает нетривиальный коцикл, т.е. $Hom(G,\mathbb{T})\cap B^1(\Gamma\times G,U(X,\mathbb{T}))=\{1\}$ и следовательно, $Hom(G,\mathbb{T})$ – открытая подгруппа

$$H^1(\Gamma\times G,\ U(X,\mathbb{T})).$$

Аналогично доказывается и более общее утверждение.

Предложение 2. Пусть Γ – счетная T-группа, $[\Gamma]$ – полная группа порожденная Γ, $N[\Gamma]$ – ее нормализатор в $Aut(X,\mu)$,

G – счетная группа внешних автоморфизмов $[\Gamma]$, т.е. $G\subset N[\Gamma]$ и $G\cap[\Gamma]=\{id\}$. Обозначим через $G\circledS R_\Gamma$ отношение эквивалентности, определяемое группой $G\circledS[\Gamma]$ и пусть $H^1(G\circledS R_\Gamma,\mathbb{T})$ – его одномерная группа когомологий [4, § 3.2]. Тогда $H^1(G\circledS R_\Gamma,\mathbb{T})$ – локально компактная группа, содержащая открытую компактную подгруппу, топологически изоморфную $Hom(G,\mathbb{T})$.

Пример 1. Пусть K – коммутативная компактная сепарабельная группа, $G=\hat{K}$ – группа характеров K. Рассмотрим действие G на пространстве Лебега (S,ν), оставляющее меру ν инвариантной. Далее, для Γ-группы Γ положим $(X,\mu)=\prod_{\gamma\in\Gamma}(S,\nu)$. На пространстве (X,μ) возникает действие группы $\Gamma\times G$, задаваемое правыми сдвигами группы Γ и диагональным действием G. В силу предложения 1 группа когомологий содержит $K=Hom(G,\mathbb{T})$ в качестве открытой подгруппы.

Пример 2. Пусть G – счетная группа без Γ-свойства и такая, что $Hom(G,\mathbb{T})=\{1\}$. Рассмотрим действие α группы $\Gamma\times G$, построенное в предыдущем примере. Поскольку $\Gamma\times G$ не обладает свойством Γ и ее действие слабо перемешивающее, то ввиду теоремы 2.4 из работы [1], действие α не имеет Γ-свойства. Однако, согласно предложению 1 группа $H^1(\Gamma\times G, U(X,\mathbb{T}))$ дискретна.

2. Пусть K – компактная группа, H – ее замкнутая подгруппа, Γ – счетная плотная подгруппа K. На однородном пространстве $X=H/K$ с мерой μ, построенной по мере Хаара на K, рассмотрим естественное действие r группы Γ:

$$r_g(Hk)=Hkg^{-1},\quad g\in\Gamma,\quad k\in K.$$

Через r_g будем обозначать и автоморфизмы алгебры $L^\infty(X,\mu)$: $r_g(a)(Hk)=a(Hkg)$, $a\in L^\infty(X,\mu)$, $g\in\Gamma$, $k\in K$. Понятно, что действие r сохраняет меру и эргодично.

Пусть $\pi:K\to X$ – каноническая проекция на X, $s:X\to K$ – борелевское сечение по подгруппе H. Зададим борелевское отображение $f:K\to H$ следующим соотношением: $f(k)=ks(k)^{-1}$, $k\in K$. Легко видеть, что

$$f(hk)=hf(k),\quad h\in H,\quad k\in K. \tag{3}$$

Для $\chi\in Hom(\Gamma,\mathbb{T})$ и $\varphi\in Hom(H,\mathbb{T})$ положим

$$c_g(\pi(k))=\chi(g)\varphi(f(k)f(kg)^{-1}),\quad g\in\Gamma,\quad k\in K. \tag{4}$$

Лемма 1. Равенство (4) определяет коцикл действия Γ на X, когомологический класс которого не зависит от выбора сечения s.

Доказательство легко следует из (3).

Лемма 2. Предположим, что $Hom(K, \mathbb{T}) = \{1\}$. Тогда равенство (4) задает вложение группы $Hom(\Gamma \times H, \mathbb{T})$ в $H^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T}))$.

Доказательство. Пусть коцикл c является кограницей, т.е.

$$\chi(g)\varphi(f(k)f(kg)^{-1}) = w(\pi(k))\overline{w(\pi(k)g)}. \qquad (5)$$

Положим $v(k) = \varphi(f(k))\overline{w(\pi(k))}$. Тогда из (5) получаем $r_g(v) = \chi(g)v$, $g \in \Gamma$. Далее обозначим через l_k оператор левого сдвига: $l_k(a)(t) = a(k^{-1}t)$, t, $k \in K$, $a \in U(K, \mathbb{T})$, и пусть $\psi(k) = v^* l_k(v)$. Имеем $r_g(\psi(k)) = \psi(k)$, $g \in \Gamma$, т.е. $\psi(k) \in \mathbb{T}$. Легко проверить, что $\psi(kt) = \psi(k)\psi(t)$, k, $t \in K$. Следовательно, $\psi(k) = 1$, $k \in K$. Итак, $l_k(v) = v$, $k \in K$, а значит, $\chi(g) = 1$, $g \in \Gamma$. Соотношение (5) теперь переписываем в виде $\varphi(f(k))\overline{w(\pi(k))} = \varphi(f(kg))\overline{w(\pi(kg))}$, $k \in K$, $g \in \Gamma$. Ввиду эргодичности можно считать, что $\varphi(f(k)) = w(\pi(k))$ для п.в. $k \in K$. Отсюда $\varphi(h) = 1$, $h \in H$. Таким образом, нетривиальные характеры порождают нетривиальные коциклы.

Пример 3. Пусть $K = SO(n, \mathbb{R})$, H – максимальный тор в K, $\Gamma = SO(n, \mathbb{Z}(1/5))$, $n \geqslant 5$. Можно показать, что Γ действует свободно на $X = H \backslash K$. Кроме того, $H \approx \mathbb{T}^m$, $m = [n/2]$. В силу предложения 5 из работы [6], группа Γ обладает свойством T, а согласно лемме 2 группа когомологий $H^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T}))$ содержит $Hom(H, \mathbb{T}) \approx \mathbb{Z}^m$.

Теорема. Пусть K – связная односвязная компактная полупростая группа Ли, а Γ обладает свойством T. Тогда вложение, построенное в лемме 2, является изоморфизмом, т.е. $H^1(\Gamma, U(X, \mathbb{T})) \approx Hom(\Gamma \times H, \mathbb{T})$. В частности, $H^1(\Gamma, U(K, \mathbb{T})) \approx Hom(\Gamma, \mathbb{T})$.

Доказательство. Предположим сначала, что $H = \{e\}$, т.е. $X = K$. Рассмотрим действие K на группе коциклов

$$l_k(c_g)(t) = c_g(k^{-1}t), \quad k, t \in K, \quad g \in \Gamma.$$

Очевидно, подгруппа кограниц инвариантна относительно левых сдвигов. Следовательно, возникает действие K на группе когомологий: $\tilde{l}_k([c]) = [l_k(c)]$, где $[c]$ – когомологический класс коцикла c, $k \in K$. Учитывая связность K и дискретность $H^1(\Gamma, U(K, \mathbb{T}))$, получаем $[l_k(c)] = [c]$ или

$$l_k(c)c^* \in B^1(\Gamma, U(K, \mathbb{T})), \quad k \in K. \qquad (6)$$

Далее рассмотрим кограничный оператор $d: U(K, \mathbb{T}) \to B^1(\Gamma, U(K, \mathbb{T}))$, $(du)_g = u^* r_g(u)$ и пусть $\sigma: B^1(\Gamma, U(K, \mathbb{T})) \to U(K, \mathbb{T})$ – борелевское сечение, т.е. $d \circ \sigma = Id$. Положим $u_k = \sigma(l_k(c)c^*)$, $k \in K$. Тогда u – борелевское отображение из K в $U(K, \mathbb{T})$, причем согласно (6)

$$l_k(c_g)c_g^* = u_k^* r_g(u_k), \quad k \in K, \quad g \in \Gamma. \qquad (7)$$

Можно показать, используя эргодичность, что $u_{kt}=\lambda(k,t)\,u_k\,l_k\,(u_t)$, где $\lambda(k,t)\in\mathbb{T}$, k, $t\in K$. Кроме того, $\lambda\in Z^2(K,\mathbb{T})$. Поскольку K – односвязная полупростая группа Ли, то $H^2(K,\mathbb{T})=\{1\}$ [5]. Следовательно, $\lambda(k,t)=\psi(k)\psi(t)\overline{\psi(kt)}$ для некоторой борелевской функции $\psi: K\to\mathbb{T}$. Пусть $v_k=\psi(k)\,u_k$. Тогда $v_{kt}=v_k\,l_k\,(v_t)$, и поскольку $Hom(K,\mathbb{T})=\{1\}$, то в силу (7) $v_{k^{-1}}=l_{k^{-1}}(v_k^*)$. Таким образом, v – коцикл свободного транзитивного действия компактной группы. Поэтому существует $w\in U(K,\mathbb{T})$ такой, что $v_k=w^*\,l_k\,(w)$. Используя равенство (7), получаем следующее соотношение:

$$l_k\,(c_g\,w\,r_g\,(w^*))=c_g\,w\,r_g\,(w^*),\quad k\in K,\quad g\in\Gamma.$$

Отсюда $c_g\,w\,r_g\,(w^*)=\varkappa(g)\in\mathbb{T}$, $g\in\Gamma$. Приходим к заключению, что $\varkappa\in Hom(\Gamma,\mathbb{T})$, а $c_g=\varkappa(g)\,w^*\,r_g(w)$, $g\in\Gamma$.

Пусть теперь H – произвольная замкнутая подгруппа K и $c\in Z^1(\Gamma\,U(X,\mathbb{T}))$. Положим $c_g'=c_g\circ\pi$, $g\in\Gamma$. Тогда $c'\in Z^1(\Gamma,U(K,\mathbb{T}))$. Следовательно, по доказанному выше, $c_g'=\varkappa(g)\,u\,r_g\,(u^*)$, $g\in\Gamma$, $\varkappa\in Hom(\Gamma,\mathbb{T})$, $u\in U(K,\mathbb{T})$. Далее, поскольку $c_g'(hk)=c_g'(k)$, $h\in H$, $k\in K$, то $u(k)\,u(hk)^{-1}=u(kg)\,u(hkg)^{-1}$, $g\in\Gamma$, и в силу эргодичности $u(k)\,\overline{u(hk)=\varphi(h)}$, $k\in K$, $h\in H$. При этом $\varphi\in Hom(H,\mathbb{T})$. Для функции $v(k)=\overline{\varphi(f(k))}\,u(k)$ будем иметь $v(hk)=v(k)$, $k\in K$, $h\in H$. Кроме того, $c_g'(k)=\varkappa(g)\,\varphi(f(k)f(kg)^{-1})\,v(k)\,\overline{v(kg)}$. Отсюда $c_g(\pi(k))=\varkappa(g)\,\varphi(f(k)f(kg)^{-1})\,w(\pi(k))\,\overline{w(\pi(k)g)}$, где $w(\pi(k))=v(k)$, $k\in K$. Таким образом, коцикл c когомологичен коциклу, порожденному характерами $\varkappa\in Hom(\Gamma,\mathbb{T})$ и $\varphi\in Hom(H,\mathbb{T})$. Теорема полностью доказана.

Следствие 1. Пусть K – связная компактная полупростая группа Ли, Γ – счетная плотная подгруппа K со свойством T. Тогда группа $H^1(\Gamma,U(K,\mathbb{T}))$ конечна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через K односвязную накрывающую группы K, и пусть $\pi:\tilde K\to K$ – накрытие, $\tilde\Gamma=\pi^{-1}(\Gamma)$. Тогда $K=Z\backslash\tilde K$, где $Z=ker\,\pi$ – фундаментальная группа многообразия $\tilde K$. Согласно теореме Г.Вейля, группа Z конечна, а $\tilde K$ – полупростая компактная группа Ли. Кроме того, нетрудно показать, что $\tilde\Gamma$ – плотная подгруппа $\tilde K$ со свойством T. Рассматривая теперь действие $\tilde\Gamma$ на $K=Z\backslash\tilde K$ и применяя приведенную выше теорему, получаем, что каждый коцикл из $Z^1(\Gamma,U(K,\mathbb{T}))$ задается некоторым характером группы $\tilde\Gamma\times Z$, и, таким образом, $H^1(\Gamma,U(K,\mathbb{T}))$ – конечная группа.

Следствие 2. Пусть K – связная односвязная полупростая компактная группа Ли, G – счетная подгруппа K, Γ – счетная плотная подгруппа K со свойством T и $Z(\Gamma)$ – ее центр. Предположим, что $G\cap Z(K)=\{e\}$ и рассмотрим действие группы $\Gamma\times G$ на $\tilde K$:

$$\alpha_{(\gamma,g)}(k)=gk\gamma^{-1},\quad \gamma\in\Gamma,\quad g\in G,$$

тогда $H^1(\Gamma\times G,\ U(K,\mathbb{T}))=Hom(\Gamma\times G,\mathbb{T})$.

Доказательство. Нетрудно показать, что $G\cap[\Gamma]=\{id\}$, т.е. что α – свободное действие группы $\Gamma\times G$. Наше утверждение вытекает из приведенной выше теоремы и рассуждений, приведенных при доказательстве предложения 1.

Пример 2. Пусть $K=spin(n,\mathbb{R})$, $\tilde{K}=SO(n,\mathbb{R})$, $\tilde{\Gamma}=SO(n, \mathbb{Z}(1/5))$, $n\geq 5$ [6]. Как известно, существует двулистное накрытие $\pi: K\to\tilde{K}$. Положим $\Gamma=\pi^{-1}(\tilde{\Gamma})$. В силу теоремы

$$H^1(\Gamma, U(K,\mathbb{T}))\approx Hom(\Gamma,\mathbb{T}).$$

1. Zimmer R. On the cohomology of ergodic actions of semisimple Lie groups and discrete subgroups // Amer.J.Math. - 1981.- 103, 5. - P. 937-951.
2. Schmidt K. Amenability, Kazhdans property T, strong ergodicity and invariant means for ergodic group-actions // Ergod. Th. and Dinam.Syst. - 1981. - 1, N 2. - P. 223-236.
3. Schmidt K. Asymptoticaly invariant sequences and actions of SL(2,Z) on the 2-sphere // Isr. J. Math. - 1980. - 37, N 3. - P. 193-208.
4. Moore C.C. Ergodic theory and von Neumann algebras // Proc. of Symposia in Pure Math. Amer. Math. Soc. - 1982. - 38, N 2. - P. 179-226.
5. Moore C.C. Extension and low dimensional cohomology theory of locally compact groups I // Trans. Amer. Math. Soc. - 1964. - 113, N 4. - P. 40-63.
6. Margulis G.A. Some remarks of invariant means // Monatsh. Math. - 1980. - 80. - P. 233-235.
7. Sullivan D. For n > 3 there is only one finitely additive rotationally invariant measure on the n-sphere defined on all Lebesgue measurable subsets // Bull. Amer. Math. Soc. - 1981. - 4. - P. 121-123.
8. Каждан Д.А. О связи дуального пространства группы со строением ее замкнутых подгрупп // Функц. анализ и его приложение. - 1967. - 1, № 1. - С. 71-74.
9. Delaroche C., Kirillov A.A. Sur les relations entre lespace dual dun groupe et la structure de ses sous-groupes fermés // Séminaire Bourbaki. - 1968. - N 343. - P. 1-22.

УДК 517.5

В.Э.Кацнельсон, А.Я.Хейфец, П.М.Юдицкий

АБСТРАКТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА И ТЕОРИЯ РАСШИРЕНИЙ ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

1. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ – гильбертовы пространства. Через $B(\mathfrak{A},\mathfrak{A}')$ будем обозначать класс определенных и голоморфных в единичном круге $(|\zeta|<1)$ комплексной плоскости оператор-функций, значениями которых являются сжимающие линейные отображения из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}'$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – линейное пространство*, D – неотрицательная полуторалинейная форма на $\mathfrak{X}$, T – линейный оператор в $\mathfrak{X}$ (определенный

* Топологическая структура в $\mathfrak{X}$ не предполагается.

на всем пространстве), E и M – линейные отображения $\mathfrak{X}$ в пространства $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$ – соответственно.

Предположим, что введенные объекты связаны основным тождеством (ОТ):

$$D(x,y)-D(Tx,Ty)=\langle Ex,Ey\rangle_{\mathfrak{L}}-\langle Mx,My\rangle_{\mathfrak{L}'},$$

которое выполняется при любых значениях $x,y\in\mathfrak{X}$. Рассматриваемые объекты были выделены при изучении ряда известных интерполяционных задач. Приведем несколько примеров [1,2].

Пример 1. Задача Неванлинны – Пика. Интерполяционные данные задачи: набор чисел $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(|\zeta_k|<1)$ и сжимающих операторов из $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}'$ $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$. Требуется построить аналитическую, сжимающую в круге оператор-функцию $S(\zeta)\in B(\mathfrak{L},\mathfrak{L}')$, удовлетворяющую условиям $S(\zeta_k)=S_k$. Описать полное множество решений.

В данном случае в качестве пространства $\mathfrak{X}$ можно взять пространство бесконечных финитных последовательностей векторов из $\mathfrak{L}$:

$$x=\{l_1,\ l_2,\dots,l_n,\ 0,\dots,0\dots\},$$

на котором операторы T, E, M и квадратичная форма D задаются формулами

$$Tx=\{\zeta_1 l_1,\ \zeta_2 l_2,\dots,\zeta_n l_n,\ 0,\dots,0,\dots\},$$

$$Ex=\sum_{k=1}^{n} l_k,\qquad Mx=\sum_{k=1}^{n} S_k l_k,$$

$$D(x,x)=\sum_{k,j=1}^{n}\left\langle \frac{I-S_j^*S_k}{1-\bar\zeta_j\zeta_k}l_k,l_j\right\rangle.$$

Основное тождество проверяется непосредственно, условие $D(x,x)\geqslant 0$, $\forall x\in\mathfrak{X}$ является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи.

Пример 2. Задача Сарасона. Пусть θ – внутренняя функция, $K_\theta=H^2\ominus\theta H^2$ и P_θ – ортопроектор из H^2 на K_θ. Интерполяционными данными задачи служат операторы: $T=P_\theta t/K_\theta$ – усечение на K_θ оператора умножения на независимую переменную в H^2, W – сжимающий оператор в K_θ, коммутирующий с T. Требуется отыскать аналитическую в круге сжимающую функцию $w(\zeta)$, для которой $W=P_\theta w|K_\theta|$ - усечение на K_θ оператора умножения на функцию w в H^2. Описать полное множество решений.

Здесь в качестве пространства $\mathfrak{X}$ можно взять само пространство K_θ и в качестве T описанный в условии задачи оператор. При этом $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}'=\mathbb{C}$:

$$Ex = \langle x, e_* \rangle, \ Mx = \langle Wx, e_* \rangle, \ D(x, x) = \langle (I - W^* W)x, x \rangle,$$

где $\langle , \rangle$ – скалярное произведение в K_θ, вектор $e_* \in K_\theta$ определяется формулой $e_* = [\theta(t) - \theta(0)]/t$.

Основное тождество является следствием соотношения

$$I - T^* T = e_* \langle , e_* \rangle.$$

2. Основным матричным неравенством (ОМН) В.П.Потапова на функцию $S \in \mathcal{B}(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ называем следующее неравенство:

$$\begin{bmatrix} D((I - T\bar\zeta)x, (I - T\bar\zeta)x) & * \\ \langle (E - S^*(\zeta)M)x, l \rangle & \left\langle \dfrac{I_{\mathcal{L}} - S^*(\zeta)S(\zeta)}{1 - \bar\zeta\zeta} l, l \right\rangle \end{bmatrix} \geqslant 0$$

при любых $x \in \mathfrak{X}$, $l \in \mathcal{L}$; $|\zeta| < 1$.

Это неравенство может быть переписано в другой (эквивалентной) форме (ОМН$'$)

$$\begin{bmatrix} D((\zeta - T)x, (\zeta - T)x) & * \\ \langle (S(\zeta)E - M)x, l' \rangle & \left\langle \dfrac{I_{\mathcal{L}'} - S(\zeta)S^*(\zeta)}{1 - \zeta\bar\zeta} l', l' \right\rangle \end{bmatrix} \geqslant 0$$

при любых $x \in \mathfrak{X}$, $l' \in \mathcal{L}'$; $|\zeta| < 1$.

Как будет показано, эквивалентность ОМН и ОМН$'$ является следствием (ОТ). Функция $S(\zeta)$, удовлетворяющая ОМН, называется его решением.

В работе будем пользоваться хорошо известным утверждением, которое приведем сейчас без доказательства.

Утверждение 1. (лемма о блок-матрице).

Пусть H – гильбертово пространство, A – самосопряженный неотрицательный оператор в нем. Пусть $h_0 \in H$ и существует константа C такая, что

$$|\langle h_0, h \rangle|^2 \leqslant C \langle Ah, h \rangle \qquad (\forall h \in D_{\sqrt{A}}).$$

Тогда $\exists! g_0 \in (\operatorname{Ker} A)^\perp \cap D_{\sqrt{A}} : \sqrt{A}\, g_0 = h_0$, при этом $\|g_0\|^2 \leqslant C$.

Кратко запишем это следующим образом: $g_0 = A^{[-1/2]} h_0$, а в скалярном произведении $\langle g_0, g_0 \rangle = \langle A^{[-1]} h_0, h_0 \rangle$.

Замечание. Обратное утверждение очевидно: если $A \geqslant 0$, $g_0 \in D_{\sqrt{A}}$, $\|g_0\|^2 \leqslant C$, то $|\langle \sqrt{A}\, g_0, h \rangle|^2 \leqslant C \langle Ah, h \rangle$, для любого $h \in D_{\sqrt{A}}$.

Следующие утверждения также хорошо известны.

Утверждение 2. Пусть S – сжимающий линейный оператор из $\mathcal{L}$ в $\mathcal{L}'$, тогда

$$S(I_{\mathcal{L}} - S^* S)^{[-1/2]} = (I_{\mathcal{L}'} - SS^*)^{[-1/2]} S,$$

$$(I_{\mathfrak{L}}-S^*S)^{[-1/2]}S^* = S^*(I_{\mathfrak{L}'}-SS^*)^{[-1/2]}.$$

Утверждение 2, в частности, содержит в себе утверждение о том, что области определения левой и правой частей равенства совпадают.

Утверждение 3. Пусть S – сжимающий оператор из $\mathfrak{L}$ в $\mathfrak{L}'$, тогда

$$\left\{ l'\oplus l \in \text{ области определения } \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} & S \\ S^* & I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix}^{[-1/2]} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ (l-S^*l') \in \text{ области определения } (I_{\mathfrak{L}}-S^*S)^{[-1/2]} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ (l'-Sl) \in \text{ области определения } (I_{\mathfrak{L}'}-SS^*)^{[-1/2]} \right\}$$

и

$$\left\langle \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} & S \\ S^* & I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix}^{[-1]} l'\oplus l,\ l'\oplus l \right\rangle_{\mathfrak{L}'\oplus\mathfrak{L}} =$$

$$= \langle l', l'\rangle_{\mathfrak{L}'} + \langle (I_{\mathfrak{L}}-S^*S)^{[-1]}(l-S^*l'),\ (l-S^*l')\rangle_{\mathfrak{L}} =$$

$$= \langle l, l\rangle_{\mathfrak{L}} + \langle (I_{\mathfrak{L}'}-SS^*)^{[-1]}(l'-Sl),\ (l'-Sl)\rangle_{\mathfrak{L}'}.$$

Следствие.

$$\left\langle \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} & S \\ S^* & I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix}^{[-1]} l'\oplus l,\quad l'\oplus l \right\rangle \geqslant \langle l, l\rangle,$$

$$\left\langle \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} & S \\ S^* & I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix}^{[-1]} l'\oplus l,\ l'\oplus l \right\rangle \geqslant \langle l', l'\rangle.$$

Докажем теперь равносильность ОМН и ОМН$'$.

Утверждение 4. ОМН $\Leftrightarrow$ ОМН$'$

Доказательство. В силу леммы о блок-матрице (утверждение 1) ОМН равносильно следующему неравенству:

$$D((I-T\bar{\zeta})x,\ (I-T\bar{\zeta})x) - \left\langle \left[\frac{I_L - S^*(\zeta)S(\zeta)}{1-\bar{\zeta}\zeta}\right]^{[-1]} (E-S^*(\zeta)M)x,\ (E-S^*(\zeta)M)x \right\rangle \geqslant 0.$$

Воспользовавшись утверждением 3, получим

$$D((I-T\bar{\zeta})x,\ (I-T\bar{\zeta})x) + (1-\zeta\bar{\zeta})\{\langle Mx, Mx\rangle - \langle Ex, Ex\rangle\} -$$

$$-\left\langle \left[\frac{I_{\mathfrak{L}'}-S(\zeta)S^*(\zeta)}{1-\zeta\bar\zeta}\right]^{[-1]}(S(\zeta)E-M)x,\ (S(\zeta)E-M)x\right\rangle \geqslant 0.$$

В силу ОТ

$$\langle Mx,\ Mx\rangle-\langle Ex,\ Ex\rangle=D(Tx,\ Tx)-D(x,\ x).$$

Приводя подобные члены в полуторалинейной форме D, получаем

$$D((\zeta-T)x,(\zeta-T)x)-\left\langle\left[\frac{I_{\mathfrak{L}'}-S(\zeta)S^*(\zeta)}{1-\zeta\bar\zeta}\right]^{[-1]}(S(\zeta)E-M)x,\ (S(\zeta)E-M)x\right\rangle\geqslant 0,$$

что равносильно ОМН$'$.

Теперь нашей целью является извлечение из ОМН интерполяционной информации. Будем придерживаться метода, применявшегося одним из авторов в работе [3].

Приведем наглядный пример. Пусть ζ_0 – собственное число оператора T, а x_0 – соответствующий собственный вектор. Полагая в ОМН $\zeta=\zeta_0$, $x=x_0$, получаем $D((\zeta_0-T)x_0(\zeta_0-T)x_0)=0$ и, следовательно, $(S(\zeta_0)E-M)x_0=0$, т.е. $S(\zeta_0)Ex_0=Mx_0$. Таким образом, значение оператора $S(\zeta_0)$ на векторе Ex_0 одно и то же для любого решения ОМН $S(\zeta)$.

Для формулировки теоремы нам понадобится пространство функциональной модели Надя – Фояша [4,5]. Если $S\in B(\mathfrak{L},\mathfrak{L}')$, то под пространством K_S понимаем множество вектор-функций $f=f_+\oplus f_-$:

1) $f_+(\zeta)\in H^2(\mathfrak{L}')$, $\quad f_-(\zeta)\in H^2_-(\mathfrak{L})\quad(|\zeta|<1)$,

2) $\int_{\mathbb{T}}\left\langle\begin{bmatrix}I_{\mathfrak{L}'} & S\\ S^* & I_{\mathfrak{L}}\end{bmatrix}^{[-1]}f,f\right\rangle dm<\infty$, где $\mathbb{T}$ – единичная окружность;

dm – нормированная мера Лебега на $\mathbb{T}$.

Этот интеграл задает скалярное произведение в K_S, причем иногда удобно пользоваться эквивалентным определением K_S:

1$'$) $f_+(\zeta)$ – голоморфна при $|\zeta|<1$;
$f_-(\zeta)$ – антиголоморфна при $|\zeta|<1$, $f_-(0)=0$;

2$'$) $\sup\limits_{0<r<1}\int_{\mathbb{T}_r}\left\langle\begin{bmatrix}I_{\mathfrak{L}'} & S\\ S^* & I_{\mathfrak{L}}\end{bmatrix}^{[-1]}f,\ f\right\rangle dm<\infty.$

Отметим, что вектор-функции пространства K_S обладают следующими свойствами:

$$\left\langle\begin{bmatrix}I_{\mathfrak{L}'} & S\\ S^* & I_{\mathfrak{L}}\end{bmatrix}^{[-1]}f,\ f\right\rangle(rt)\xrightarrow[r\uparrow 1]{n.в}\left\langle\begin{bmatrix}I_{\mathfrak{L}'} & S\\ S^* & I_{\mathfrak{L}}\end{bmatrix}^{[-1]}f,\ f\right\rangle(t)\quad(|t|=1)$$

и

$$\int_{\mathbb{T}_r} < \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} & S \\ S^* & I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix}^{[-1]} f, f > dm \xrightarrow[r\uparrow 1]{} \int_{\mathbb{T}} < \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} & S \\ S^* & I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix} f, f > dm.$$

Интерполяционное содержание ОМН раскрывает следующая

Теорема 1. Пусть пересечение спектра оператора T с множеством $|\zeta| \neq 1$ состоит из изолированных точек; вектор-функции $E(\zeta - T)^{-1}x$ и $M(\zeta - T)^{-1}x$ – голоморфны при $|\zeta| \neq 1$ (вне спектра T); функция $D\left(x, \frac{I + T\bar{\zeta}}{I - T\bar{\zeta}} x\right)$ – голоморфна при $|\zeta| < 1$ (там где определена). Тогда любая голоморфная оператор-функция $S(\zeta)$, являющаяся решением (ОМН), обладает следующими свойствами:

i) $$F_S x = (F_S x)_+ \oplus (F_S x)_- \in K_S,$$

где

$$(F_S x)_+ (\zeta) = (S(\zeta) E - M)(\zeta - T)^{-1} x, \quad (|\zeta| < 1)$$

$$(F_S x)_- (\zeta) = \bar{\zeta} (E - S^*(\zeta) M)(I - T\bar{\zeta})^{-1} x,$$

ii) $$< F_S x, F_S x >_{K_S} \leqslant D(x, x).$$

Доказательство. Ввиду произвольности $x \in \mathfrak{X}$ и $l \in \mathfrak{L}$, ОМН эквивалентно следующему неравенству:

$$D((I - T\bar{\zeta})x, (I - T\bar{\zeta})x) + 2Re < (E - S^*(\zeta) M) x, l > +$$

$$+ < \frac{I_{\mathfrak{L}} - S^*(\zeta) S(\zeta)}{1 - \bar{\zeta}\zeta} l, l > \geqslant 0,$$

или, после умножения на $1 - \zeta\bar{\zeta}$, неравенству

$$(1 - \zeta\bar{\zeta}) D((I - T\bar{\zeta})x, (I - T\bar{\zeta})x) + (1 - \zeta\bar{\zeta}) 2Re < (E - S^*(\zeta) M) x, l > +$$

$$+ < (I_{\mathfrak{L}} - S^*(\zeta) S(\zeta)) l, l > \geqslant 0. \tag{1}$$

Заменим в (1) вектор l на вектор $(l - E(I - T\bar{\zeta}) x)$ и сгруппируем отдельно члены квадратичные по x, линейные (антилинейные) по x и не содержащие x.

Квадратичная часть будет иметь вид

$$C_1 = (1 - \zeta\bar{\zeta}) \Gamma((I - T\bar{\zeta})x, (I - T\bar{\zeta})x) - (1 - \zeta\bar{\zeta}) < E(I - T\bar{\zeta})x, (E - S^*(\zeta) M) x > -$$

$$- (1 - \zeta\bar{\zeta}) < (E - S^*(\zeta) M) x, E(I - T\bar{\zeta}) x > + < (I_{\mathfrak{L}} - S^*(\zeta) S(\zeta)) E(I - T\bar{\zeta}) x, E(I - T\bar{\zeta}) x >;$$

линейная часть

$$C_2 = (1 - \zeta\bar{\zeta}) < (E - S^*(\zeta) M) x, l > - < (I - S^*(\zeta) S(\zeta)) E(I - T\bar{\zeta}) x, l >;$$

свободный член

$$C_3 = \langle (I_\ell - S^*(\zeta)S(\zeta))l, l \rangle.$$

При этом неравенство (1) примет вид

$$C_1 + 2\operatorname{Re} C_2 + C_3 \geq 0. \qquad (2)$$

Снова пользуясь произвольностью x и l, перепишем (2) в виде

$$\begin{bmatrix} C_1 & \bar{C}_2 \\ C_2 & C_3 \end{bmatrix} \geq 0. \qquad (3)$$

Ввиду очевидного соотношения

$$1-\zeta\bar{\zeta} = (I-T\bar{\zeta}) - \bar{\zeta}(\zeta-T) \qquad (4)$$

имеем

$$(1-\zeta\bar{\zeta})(E-S^*(\zeta)M)x = (E-S^*(\zeta)M)(I-T\bar{\zeta})x -$$
$$-\bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T). \qquad (5)$$

Из (5), в свою очередь, следует

$$(1-\zeta\bar{\zeta})(E-S^*(\zeta)M)x - (I_\ell - S^*(\zeta)S(\zeta))E(I-T\bar{\zeta})x =$$
$$= S^*(\zeta)(S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x - \bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x, \qquad (6)$$

т.е.

$$C_2 = \langle S^*(\zeta)(S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x - \bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x, l \rangle. \qquad (7)$$

Преобразуя C_1 – второе слагаемое согласно (5) и сумму третьего и четвертого согласно (6), получаем

$$C_1 = (1-\zeta\bar{\zeta})D((I-T\bar{\zeta})x, (I-T\bar{\zeta})x) -$$
$$-\langle E(I-T\bar{\zeta})x, (E-S^*(\zeta)M)(I-T\bar{\zeta})x - \bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x \rangle -$$
$$-\langle S^*(\zeta)(S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x - \bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x, E(I-T\bar{\zeta})x \rangle =$$
$$= (1-\zeta\bar{\zeta})D((I-T\bar{\zeta})x, (I-T\bar{\zeta})x) + 2\operatorname{Re}\langle E(I-T\bar{\zeta})x, \bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x \rangle -$$
$$-\langle E(I-T\bar{\zeta})x, (E-S^*(\zeta)M)(I-T\bar{\zeta})x \rangle -$$
$$-\langle S^*(\zeta)(S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x, E(I-T\bar{\zeta})x \rangle. \qquad (8)$$

Поскольку

$$\langle S^*(\zeta)(S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x, E(I-T\bar{\zeta})x =$$
$$= \langle (S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x, S(\zeta)E(I-T\bar{\zeta})x \rangle;$$

а

$$\langle E(I-T\bar{\zeta})x, (E-S^*(\zeta)M)(I-T\bar{\zeta})x \rangle =$$

$$=\langle E(I-T\zeta)x,\ E(I-T\bar\zeta)x\rangle-\langle E(I-T\bar\zeta)x,\ S^*(\zeta)M(I-T\bar\zeta)x\rangle=$$

$$=\langle E(I-T\bar\zeta)x,\ E(I-T\bar\zeta)x\rangle-\langle S(\zeta)E(I-T\bar\zeta)x,\ \ M(I-T\bar\zeta)x\rangle=$$

$$=\langle E(I-T\bar\zeta)x,\ E(I-T\bar\zeta)x\rangle-\langle M(I-T\bar\zeta)x,\ \ M(I-T\bar\zeta)x\rangle=$$

$$=\langle (S(\zeta)E-M)\ (I-T\bar\zeta)x,\ \ M(I-T\bar\zeta)x\rangle,$$

то выражение (8) для C_1 принимает вид

$$C_1=(1-\zeta\bar\zeta)D((I-T\bar\zeta)x,\ (I-T\bar\zeta)x)+$$
$$+2\,\mathrm{Re}\langle E(I-T\bar\zeta)x,\ \bar\zeta(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x\rangle-$$
$$-\langle E(I-T\bar\zeta)x,\ E(I-T\bar\zeta)x\rangle+\langle M(I-T\bar\zeta)x,\ M(I-T\bar\zeta)x\rangle-$$

$$-\langle (S(\zeta)E-M)(I-T\bar\zeta)x,\ \ (S(\zeta)E-M)(I-T\bar\zeta)x\rangle. \tag{9}$$

Пользуясь ОТ и приводя подобные члены в форме D, получаем из (9)

$$C_1=\mathrm{Re}\,D((T+\zeta)(I-T\bar\zeta)x,\ \ (T-\zeta)(I-T\bar\zeta)x)+$$
$$+2\,\mathrm{Re}\langle E(I-T\bar\zeta)x,\ \bar\zeta(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x\rangle-$$
$$-\langle (S(\zeta)E-M)(I-T\bar\zeta)x,\ (S(\zeta)E-M)(I-T\bar\zeta)x\rangle. \tag{10}$$

Неравенство (3) с учетом выражения (7) для C_2 по лемме о блок-матрице равносильно неравенству

$$C_1-\langle (I_\ell-S^*(\zeta)S(\zeta))^{[-1]}[S^*(\zeta)\,(S(\zeta)E-M)(I-T\bar\zeta)x-$$
$$-\bar\zeta\,(E-S^*(\zeta)M)\,(\zeta-T)x],\ S^*(\zeta)\,(S(\zeta)E-M)(I-T\bar\zeta)x-$$
$$-\bar\zeta(E-S^*(\zeta)M)\,(\zeta-T)x\rangle\ \geqslant 0. \tag{11}$$

Подставляя в (11) выражение (10) для C_1 и пользуясь утверждением 3, получаем

$$\mathrm{Re}\,D(T+\zeta)(I-T\bar\zeta)x,\ \ \ (T-\zeta)(I-T\bar\zeta)x)+$$
$$+2\,\mathrm{Re}\langle E(I-T\bar\zeta)x,\ \ \ \bar\zeta(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x)-$$
$$-\left\langle\begin{bmatrix} I_{\ell'} & S(\zeta)\\ S^*(\zeta) & I_\ell\end{bmatrix}^{[-1]}\begin{bmatrix}(S(\zeta)E-M)(I-T\bar\zeta)x\\ \bar\zeta(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x\end{bmatrix},\begin{bmatrix}(S(\zeta)E-M)(I-T\bar\zeta)x\\ \bar\zeta(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x\end{bmatrix}\right\rangle\geqslant 0. \tag{12}$$

Неравенство (12) можно считать окончательной формой преобразованного ОМН. Отметим, что все преобразования были тождественными и не использовали спектральные свойства оператора T.

Левая часть неравенства (12) допускает двойственное представление, оно получается из выражения (12) перегруппировкой в первых двух членах с использованием ОТ, а именно: из ОТ вытекает непосредственно проверяемое равенство

$$\frac{1}{2}D((T+\zeta)y_1,\ (I-T\bar{\zeta})y_2-\zeta<Ey_1,\ (E-S^*(\zeta)M)y_2>=$$

$$=\frac{1}{2}D((T-\zeta)y_1,\ (I+T\bar{\zeta})y_2+\zeta<(S(\zeta)E-M)y_1,\ My_2>, \tag{13}$$

при любых $y_1,\ y_2\in \mathbf{X}$. Полагая в (13) $y_1=(I-T\bar{\zeta})x$, $y_2=(T-\zeta)y$, получаем

$$\frac{1}{2}D((T+\zeta)(I-T\bar{\zeta})x,\ (T-\zeta)(I-T\bar{\zeta})y)+\zeta<E(I-T\bar{\zeta})x,\ (E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)y>=$$

$$=\frac{1}{2}D((I-T\bar{\zeta})(\zeta-T)x,\ (I+T\bar{\zeta})(\zeta-T)y)\ \zeta<(S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x,\ M(\zeta-T)y> \tag{14}$$

при любых $x,\ y\in \mathbf{X}$.

Подставляя (14) в (12), получаем

$$Re\, D((I-T\bar{\zeta})(\zeta-T)x,\ (I+T\bar{\zeta})(\zeta-T)x)-$$

$$-2Re\,\zeta<(S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x,\ M(\zeta-T)x>-$$

$$-<\begin{bmatrix} I_{\ell'} & S(\zeta)\\ S^*(\zeta) & I_{\ell}\end{bmatrix}^{[-1]}\begin{bmatrix}(S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x\\ \bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}(S(\zeta)E-M)(I-T\bar{\zeta})x\\ \bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(\zeta-T)x\end{bmatrix}>\geq 0. \tag{12'}$$

Теперь, наконец, воспользуемся спектральными свойствами оператора T. Подставляя в (12) вместо вектора x вектор $(I-T\bar{\zeta})^{-1}(\zeta-T)^{-1}x$, получаем

$$Re\, D\left(x,\ \frac{I+T\bar{\zeta}}{I-T\bar{\zeta}}x\right)-2Re\,\zeta<(S(\zeta)E-M)(\zeta-T)^{-1}x,\ M(I-T\bar{\zeta})^{-1}x>-$$

$$-<\begin{bmatrix} I_{\ell'} & S(\zeta)\\ S^*(\zeta) & I_{\ell}\end{bmatrix}^{[-1]}\begin{bmatrix}(S(\zeta)E-M(\zeta-T)^{-1}x\\ \bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(I-T\bar{\zeta})^{-1}x\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}(S(\zeta)E-M)(\zeta-T)^{-1}x\\ \bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(I-T\bar{\zeta})^{-1}x\end{bmatrix}>\geq 0. \tag{15}$$

Введем следующие обозначения:

$$(F_S x)_+(\zeta)\overset{def}{=}(S(\zeta)E-M)(\zeta-T)^{-1}x,$$

$$(F_S x)_-(\zeta)\overset{def}{=}\bar{\zeta}(E-S^*(\zeta)M)(I-T\bar{\zeta})^{-1}x,$$

$$F_S x\overset{def}{=}(F_S x)_+\oplus(F_S x)_-, \tag{16}$$

$$\rho_\zeta(x,y)\overset{def}{=}\frac{1}{2}D\left(x,\frac{I+T\bar{\zeta}}{I-T\bar{\zeta}}y\right)-\zeta<(F_S x)_+(\zeta),\ M(I-T\bar{\zeta})^{-1}y>.$$

В силу (14)

$$\rho_\zeta(x,y)=\frac{1}{2}D\left(\frac{T+\zeta}{T-\zeta}x,y\right)+\langle E(\zeta-T)^{-1}x,\ (F_S y)_-(\zeta)\rangle. \tag{16}$$

В этих обозначениях (15) выглядит следующим образом:

$$\rho_\zeta(x,x)+\overline{\rho_\zeta(x,x)}-\left\langle\begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}'} & S(\zeta)\\ S^*(\zeta) & I_{\mathcal{L}}\end{bmatrix}^{[-1]}(F_S x)(\zeta),\ (F_S x)(\zeta)\right\rangle\geq 0. \tag{17}$$

По условию теоремы $\rho_\zeta(x,x)$ – голоморфна при $|\zeta|<1$, за исключением, быть может, множества изолированных точек. Из (16) следует, что вещественная часть $\rho_\zeta(x,x)$ неотрицательна. Следовательно, все ее особенности устранимы. Далее, так как $(F_S x)_\pm(\zeta)$ – голоморфна (антиголоморфна) при $|\zeta|<1$, за исключением, быть может, множества изолированных точек, то из (17) (ввиду следствия утверждения 3) вытекает, что все они устранимы. Кроме того, из определения видно, что $(F_S x)_-(0)=0$.

Из формулы (16), в силу регулярности $(F_S(x)(\zeta)$ при $|\zeta|<1$ следует, что

$$\rho_0(x,y)=\frac{1}{2}D(x,y).$$

Интегрируя теперь (17) по окружности радиуса $r<1$ с нормированной мерой Лебега, получаем

$$\int_{T_r}\left\langle\begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}'} & S\\ S^* & I_{\mathcal{L}}\end{bmatrix}^{[-1]}F_S x,\ F_S x\right\rangle dm\leq\int_{T_r}[\rho(x,x)+\overline{\rho(x,x)}]\,dm=$$

$$=\rho_0(x,x)+\overline{\rho_0(x,x)}=D(x,x).$$

Таким образом, $F_S x\in K_S$ и $\langle F_S x,F_S x\rangle_{K_S}\leq D(x,x)$, что и требовалось доказать.

Следующее утверждение показывает, как преобразуется действие оператора T при преобразовании F_S пространства X в K_S, введенного в теореме 1.

Утверждение 5.

$$(F_S Tx)(t)\overset{\text{п.в.}}{=}t(F_S x)(t)-\begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}'} & S(t)\\ S^*(t) & I_{\mathcal{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-Mx\\ Ex\end{bmatrix}\quad(|t|=1) \tag{18}$$

проверяется непосредственно по определению F_S.

Замечание. При выполнении спектрального условия на T, как в теореме 1, преобразование F_S пространства X в K_S однозначно определяется соотношением (18).

Следующее утверждение обращает теорему 1 в утверждение.

Утверждение 6. Пусть $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{X}$, T, D, E, M – те же, что и введенные в п. 1[*], $S \in B(\mathfrak{L}, \mathfrak{L}')$, F_S – преобразование пространства $\mathfrak{X}$ со следующими свойствами:

$$i) \qquad F_S x \in K_S \qquad \forall x \in \mathfrak{X},$$

$$(F_S T x)(t) \overset{n.в}{=} t(F_S x)(t) - \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} & S(t) \\ S^*(t) & I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Mx \\ Ex \end{bmatrix}, \qquad (|t|=1),$$

$$ii) \qquad \langle F_S x, \ F_S x \rangle_{K_S} \le D(x,x) \qquad \forall x \in \mathfrak{X},$$

тогда $S(\zeta)$ – решение ОМН.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим пару векторов из K_S: $(F_S x)(t)$ и $\begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} & S(t) \\ S^*(t) & I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} \\ -S^*(\zeta) \end{bmatrix} l' \dfrac{1}{1-t\bar\zeta}$. Вычисляя их попарные скалярные произведения в K_S и записывая условие неотрицательности матрицы Грама, получаем

$$\begin{bmatrix} \langle F_S x, \ F_S x \rangle_{K_S} & * \\ \langle (F_S x)_+(\zeta), l' \rangle & \left\langle \dfrac{I_{\mathfrak{L}'} - S(\zeta)S^*(\zeta)}{1-\zeta\bar\zeta} l', l' \right\rangle \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{19}$$

Заменяя в (19) вектор x на вектор $(\zeta - T)x$, в силу свойства $i)$ имеем

$$(F_S(\zeta - T)x)_+(\zeta) = (S(\zeta)E - M)x, \tag{20}$$

а в силу $ii)$

$$\langle F_S(\zeta-T)x, F_S(\zeta-T)x \rangle_{K_S} \le D((\zeta-T)x, (\zeta-T)x). \tag{21}$$

Подставляя (20) и (21) в (19), получаем ОМН$'$.

Аналогично выводится ОМН, для чего необходимо рассмотреть матрицу Грама пары векторов в $(F_S x)(t)$ и $\begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}'} & S(t) \\ S^*(t) & I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -S(\zeta) \\ I_{\mathfrak{L}} \end{bmatrix} l \dfrac{\zeta}{t-\zeta}$.

3. Таким образом, приходим к постановке абстрактной интерполяционной задачи.

Пусть $\mathfrak{X}$ – линейное пространство, T – линейный оператор в нем, D – неотрицательная квадратичная форма на $\mathfrak{X}$, E и M – линейные отображения $\mathfrak{X}$ в гильбертовы пространства $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$ соответственно, причем

---

[*] Здесь на T не накладываются никакие дополнительные спектральные ограничения.

$$(D(x,x)-D(Tx,Tx)=\langle Ex,\ Ex\rangle_{\mathcal{L}}-\langle Mx,\ Mx\rangle_{\mathcal{L}'}\ .$$

Требуется описать все голоморфные при $|\zeta|<1$ оператор-функции $S(\zeta)\in\mathcal{B}(\mathcal{L},\mathcal{L}')$, для которых существует линейное отображение F_S пространства $\mathbb{X}$ в пространство K_S со следующими свойствами:

$$i)\quad (F_S Tx)(t)\overset{\text{пв}}{=} t(F_S x)(t)-\begin{bmatrix} I_{\mathcal{L}'} & S(t)\\ S^*(t) & I_{\mathcal{L}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-Mx\\ Ex\end{bmatrix}\quad \forall x\in\mathbb{X},$$

$$ii)\quad \langle F_S x,\ F_S x\rangle_{K_S}\le D(x,\ x).$$

Дальнейшее изложение базируется на работе [6]. Для исследования поставленной задачи нам понадобятся некоторые объекты, связанные с данными пространствами и операторами. Будем обозначать через Dx антилинейный функционал на $\mathbb{X}$, задаваемый формулой

$$Dx(y)\overset{def}{=}D(x,y).$$

На линейном множестве $\{Dx\}_{x\in\mathbb{X}}$ естественно задается скалярное произведение

$$\langle Dx_1,\ Dx_2\rangle\overset{def}{=}D(x_1,\ x_2).$$

Корректность этого определения очевидна. Через $\mathbb{K}$ будем обозначать пополнение множества $\{Dx\}_{x\in\mathbb{X}}$ относительно введенного скалярного произведения. Таким образом, $\mathbb{K}$ – гильбертово пространство. Основное тождество позволяет определить изометрический оператор из пространства $\mathbb{K}\oplus\mathcal{L}'$ в пространство $\mathbb{K}\oplus\mathcal{L}$, а именно, зададим оператор V по формуле:

$$V(Dx\oplus Mx)\overset{def}{=}DTx\oplus Ex. \tag{22}$$

Областью определения $(\mathcal{D}_V)$ оператора V является замыкание в $\mathbb{K}\oplus\mathcal{L}'$ векторов вида $Dx\oplus Mx$, а областью значений (Δ_V) – замыкание в $\mathbb{K}\oplus\mathcal{L}$ векторов вида $DTx\oplus Ex$.

Пусть H – некоторое гильбертово пространство, U – унитарный оператор из $H\oplus\mathcal{L}'$ в $H\oplus\mathcal{L}$. Следуя работе [6], будем называть функцией рассеяния оператора U^* с масштабными пространствами $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ оператор-функцию $S(\zeta)$:

$$S(\zeta)=P_{\mathcal{L}'}U^*(I_{H\oplus\mathcal{L}}-\zeta P_H U^*)^{-1}/\mathcal{L}.$$

Рассмотрим еще функциональное преобразование векторов пространства H, задаваемое формулой

$$Gh=(Gh)_+\oplus(Gh)_-\ ,$$

где

$$(Gh)_+(\zeta) = P_{L'} U^* (I_{H\oplus L} - \zeta P_H U^*)^{-1} h,$$

$$(|\zeta|<1).$$

$$(Gh)_-(\zeta) = \bar{\zeta} P_L U (I_{H\oplus L'} - \bar{\zeta} P_H U)^{-1} h,$$

Утверждение 7. G есть отображение H в K_S, причем

$$\| Gh \|_{K_S} \leq \| h \|_H .$$

Следующее утверждение устанавливает связь между решениями абстрактной интерполяционной задачи и функциями рассеяния унитарных расширений изометрии V^*, задаваемой формулой (22) (с масштабными пространствами L и L').

Утверждение 8. Пусть $H \supset K$, U – унитарный оператор из $H\oplus L'$ в $H\oplus L$, являющийся расширением V, S –функция рассеяния U^* с масштабными пространствами L и L', тогда

$$F_S x \overset{def}{=\!=} GDx \qquad (x \in X)$$

обладает свойством (18), т.е.

$$F_S Tx = tF_S x - \begin{bmatrix} I_{L'} & S \\ S^* & I_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -Mx \\ Ex \end{bmatrix}.$$

Следствие. Из утверждений 7 и 8 следует, что функция рассеяния унитарного расширения изометрии V^* является решением абстрактной интерполяционной задачи.

Утверждение 9. Пусть $S \in B(L, L')$ и F_S – отображение из X в K_S, удовлетворяющее условиям i), ii) абстрактной интерполяционной задачи, тогда $S(\zeta)$ является матрицей рассеяния некоторого унитарного расширения изометрии V^* с масштабными подпространствами L и L'.

Следствие. Решения абстрактной интерполяционной задачи допускают следующее описание:

$$S(\zeta) = s_{12}(\zeta) + s_{11}(\zeta)\varepsilon(\zeta)[I - s_{21}(\zeta)\varepsilon(\zeta)]^{-1} s_{22}(\zeta), \qquad |\zeta|<1,$$

где матрица

$$\begin{bmatrix} s_{11}(\zeta) & s_{12}(\zeta) \\ s_{21}(\zeta) & s_{22}(\zeta) \end{bmatrix}$$

есть матрица рассеяния изометрии V^* [6]; $\varepsilon(\zeta)$ – произвольная голоморфная, сжимающая оператор-функция из $M_V = (K\oplus L)\ominus \Delta_V$ в $N_V = (K\oplus L')\ominus D_V$.

1. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны – Пика // Докл. АН Арм.ССР. – 1974. – 59, № 1. – С. 17–22.
2. Хейфец А.Я., Юдицкий П.М. Интерполяция оператора, коммутирующего с оператором сдвига, функциями класса И.Шура // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1983. – Вып. 40. – С. 129–136.
3. Кацнельсон В.Э. Основное матричное неравенство задачи о разложении положительно определенного ядра на элементарные ядра. – Харьков, 1984. – 46 с. – Рукопись. Деп. в УкрНИИНТИ 10.7.1984, № 1189 Ук–84 Деп.
4. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М. : Мир, 1970. – 432 с.
5. Павлов Б.С. Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям // Мат. сб., 1977. – 102, № 4, – С. 511–536.
6. Аров Д.З., Гроссман Л.З. Матрицы рассеяния в теории расширений изометрических операторов // Докл. АН СССР. – 1983. – 270, № 1. – С. 17–20.

УДК 517.982

М.И.Островский, А.Н.Пличко

СВОЙСТВА БАНАХА – САКСА И ЗАДАЧА ТРЕХ ПРОСТРАНСТВ

В первой части настоящей работы дополнены исследования работ [1–3] о "задаче трех пространств" для свойств Банаха – Сакса, во второй – доказано, что пространство без какого-либо свойства Банаха – Сакса имеет подпространство с базисом без того же свойства. Завершается работа доказательством того, что пространства без свойств Банаха – Сакса могут быть насыщены l_p.

1. Напомним, что "задачей трех пространств" для некоторого свойства A банахова пространства является задача о том, влечет ли наличие свойства A у двух из трех пространств X, Y, X/Y (Y – замкнутое подпространство в X, X/Y – соответствующее фактор-пространство) наличие его у третьего.

Введем необходимые определения [4,5].

1. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством Банаха – Сакса (записывается: $X \in BS$), если из любой ограниченной последовательности $(x_n) \subset X$ можно выделить подпоследовательность (e_n) , средние Чезаро $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_k$ которой сходятся в сильной топологии.

2. Говорят, что банахово пространство X обладает знакопеременным свойством Банаха – Сакса (записывается: $X \in ABS$), если из любой ограниченной последовательности $(x_n) \subset X$ можно выделить подпоследовательность (e_n), знакопеременные средние Чезаро $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (-1)^k e_k$ которой сходятся в сильной топологии.

3. Говорят, что банахово пространство X обладает слабым свойством Банаха – Сакса (записывается: $X \in WBS$), если из любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(x_n) \subset X$ можно выделить подпоследовательность (e_n), средние Чезаро которой сходятся в сильной топологии.

4. Говорят, что банахово пространство X обладает слабым свойством Банаха – Сакса порядка p; $1 < p \leq \infty$ (записывается: $X \in WBS(p)$), если из любой слабо сходящейся к нулю последовательности $(x_n) \subset X$ можно выделить подпоследовательность (e_n), удовлетворяющую условию

$$\sup_n \left(\| \sum_{k=1}^{n} e_k \| / n^{1/p} \right) < \infty,$$

в случае $p = \infty$ это условие имеет вид $\sup\limits_n \| \sum\limits_{k=1}^{n} e_k \| < \infty$.

5. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством Шура (записывается: $X \in SCH$), если в нем слабо сходящиеся последовательности сходятся сильно.

Введенные понятия связаны следующими соотношениями:

$$(X \in BS) \Rightarrow (X \in ABS) \Rightarrow (X \in WBS);$$

$$(q > p) \wedge (X \in WBS(q)) \Rightarrow (X \in WBS(p));$$

$$(X \in SCH) \Rightarrow (X \in WBS(\infty)),$$

$$(\exists p > 1; \quad X \in WBS(p)) \Rightarrow (X \in WBS).$$

Из выписанных нетривиальна только импликация $(X \in ABS) \Rightarrow (X \in WBS)$ – ее доказательство см. в [4, с. 50].

Будем интересоваться лишь вопросом: следует ли из наличия у Y и X/Y какого-либо свойства Банаха – Сакса его наличие у X? По поводу остальных вопросов отметим следующее.

1. Из наличия какого-либо свойства Банаха – Сакса у X следует его наличие у любого подпространства $Y \subset X$, что очевидно.

2. Сохранение свойств Банаха – Сакса при переходе к фактор-пространству обсуждается в [1,2].

Указанный вопрос решен положительно для свойств BS и ABS (в [1,2] соответственно), для WBS он решается отрицательно [3]. Однако, если на одно из пространств Y или X/Y накладывать ограничение более сильное, чем его принадлежность WBS, то можно утверждать, что $X \in WBS$, а именно, справедлива следующая теорема.

<u>Теорема 1.</u> Пусть Y – подпространство банахова пространства X, тогда

а) $(X/Y \in WBS,\ \ Y \in ABS) \Rightarrow (X \in WBS)$;

б) $(X/Y \in SCH,\ \ Y \in WBS) \Rightarrow (X \in WBS)$;

в) $(X/Y \in WBS,\ \ Y \in SCH) \Rightarrow (X \in WBS)$.

Для доказательства нам понадобятся некоторые вспомогательные сведения.

Предложение А (см. [4, с. 5]). Пусть (x_n) – ограниченная последовательность в банаховом пространстве Z, не имеющая подпоследовательностей Коши. Существуют подпоследовательность $(e_n) \subset \in (x_n)$ и норма L, определенная на множестве S всех финитных числовых последовательностей, такие, что для любого $a=(a_i) \in S$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\nu=\nu(a,\varepsilon) \in N$, для которого

$$\left| \| \sum_i a_i e_{n_i} \|_Z - L(a) \right| < \varepsilon$$

при любых $\nu \le n_1 < n_2 < \ldots$. Пополнение S по норме L называется [4] растягивающей моделью (РМ) пространства Z, построенной на последовательности x_n, последовательность e_n называется фундаментальной последовательностью (ФП) этой модели.

С помощью РМ Б.Бозами дал такую характеризацию ABS и WBS.

Теорема Б [4, с. 50]. Следующие три условия эквивалентны:

1) $Z \notin ABS$ $(Z \notin WBS)$;

2) при любом $\varepsilon > 0$ у Z найдется РМ (ФП которой слабо сходится к нулю), для которой

$$(1-\varepsilon) \sum |a_i| < L(a) < \sum |a_i|;$$

3) существуют такие c и C, $0<c<C<\infty$, что у Z имеется РМ (ФП которой слабо сходится к нулю), для которой

$$c \sum |a_i| < L(a) < C \sum |a_i|. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Обозначим через Q каноническое фактор-отображение X на X/Y.

а) Предположим, что $X \notin WBS$. Пусть $(e_n) \subset X$ – слабо сходящаяся к нулю последовательность, являющаяся ФП РМ пространства X, для которой

$$(3/4) \sum |a_i| < L(a) < \sum |a_i|. \tag{2}$$

Такая последовательность существует согласно теореме Б. Ясно, что последовательность (Qe_n) слабо сходится к нулю. Покажем, что из нее можно выделить подпоследовательность $(Qe_{m(i)})_{i=1}^{\infty}$, для которой найдется вектор $b=(b_1,\ldots,b_k,0,\ldots) \in S$ с $\sum |b_i| = 1$ такой, что для некоторого $\nu \in N$ и любых $n_k > \ldots > n_1 \ge \nu$, $n_j \in (m(i))_{i=1}^{\infty}$ имеет место

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} b_i Q e_{n_i} \right\| < 1/4. \tag{3}$$

Возможны два случая: либо у последовательности (Qe_n) есть подпоследовательность, сильно сходящаяся к нулю, либо она не имеет подпоследовательностей Коши. В первом случае существование подпоследовательности $(Qe_{m(i)})_{i=1}^{\infty}$ и вектора b очевидно. Во втором случае в качестве $(Qe_{m(i)})$ возьмем ФП РМ X/Y, построенной на $(Qe_n)_{n=1}^{\infty}$. Искомый вектор b существует, так как в противном случае эта РМ удовлетворяла бы условию 3 теоремы Б, что привело бы к противоречию с $X/Y \in WBS$.

Пусть $m(p)$ – наименьшее число в последовательности $(m(i))_{i=1}^{\infty}$, превосходящее ν. Рассмотрим векторы

$$y_1 = \sum_{i=1}^{k} b_i Q e_{m(p+i)}, \ldots, y_q = \sum_{i=1}^{k} b_i Q e_{m(p+(q-1)k+i)}, \ldots .$$

Имеем $\|y_q\| < 1/4$. Поэтому найдутся векторы $x_q \in X$ такие, что $Qx_q = y_q$ и $\|x_q\| < 1/4$. Рассмотрим векторы $h_q = \sum_{i=1}^{k} b_i e_{m(p+(q-1)k+i)} - x_q$. Очевидно, что $h_q \in Y$. Кроме того, используя (2) и то, что $\|x_q\| < 1/4$, имеем

$$\liminf \left\| \sum_{j=1}^{l} c_j h_{s_j} \right\| \geq \liminf \left\| \sum_{j=1}^{l} c_j \sum_{i=1}^{k} b_i e_{m(p+(s_j-1)k+i)} \right\| -$$
$$-\left(\sum_{j=1}^{l} |c_j|\right)/4 > 1/2 \sum_{j=1}^{l} |c_j|$$

(пределы берутся при $t \to \infty$ и $t \leq s_1 < \ldots < s_l$). Поэтому на (h_q) можно построить РМ пространства Y; причем для произвольного вектора $c = (c_1, \ldots, c_l, 0, \ldots) \in S$ будем иметь $L(c) > \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} |c_j|$. В силу теоремы Б $Y \notin ABS$. Приходим к противоречию.

б) Пусть последовательность $(x_i) \subset X$ слабо сходится к нулю. Тогда (Qx_i) сходится к нулю слабо, а так как $X/Y \in SCH$, то она сходится к нулю сильно. Рассмотрим $h_i \in X$ такие, что $Qh_i = Qx_i$ и $\|h_i\| < 2\|Qx_i\|$. Тогда $(x_i - h_i)$ – слабо сходящаяся к нулю последовательность в Y. Так как $Y \in WBS$, то средние Чезаро некоторой ее подпоследовательности $(x_{n_i} - h_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ сходятся к нулю сильно. Поскольку $\|h_i\| \to 0$, то сильно сходятся к нулю и средние Чезаро (x_{n_i}), так что $X \in WBS$.

в) Предположим, что $X \notin WBS$. Согласно теореме Б существует слабо сходящаяся к нулю последовательность $(e_i) \subset X$, являющаяся ФП РМ X, для которой найдутся c, C, $0 < c < C < \infty$ такие, что выполняется (I). Рассмотрим (Qe_i). Согласно результатам [6] из нее можно выделить подпоследовательность (Qe_{i_n}), средние Чезаро всех подпоследовательностей которой равномерно сходятся к нулю сильно, т.е. $\exists \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > \ldots \to 0$ такие, что

$$\frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^{n} Qe_{i_{p(k)}}\right\| < \varepsilon_n \qquad \text{для любых } p(1) < \ldots < p(n).$$

Выберем $q(1,1) = i_1$, а $q(2,1)$ – таким, чтобы $i)$ оно принадлежало последовательности $(i_n)_{n=1}^{\infty}$; $ii)$ было больше $q(1,1)$; $iii)$ при любом $s_1 > q(2,1)$ выполнялось $c < \|\frac{1}{2}(e_{q(2,1)} + e_{s_1})\| < C$. Возьмем $q(2,2)$ следующим за $q(2,1)$ натуральным числом в последовательности $(i_n)_{n=1}^{\infty}$.

Выберем $q(3,1)$ так, чтобы $i)$ оно принадлежало последовательности $(i_n)_{n=1}^{\infty}$; $ii)$ было больше $q(2,2)$; $iii)$ при любых $s_2 > s_1 > q(3,1)$ имело место $c < \|\frac{1}{3}(e_{q(3,1)} + e_{s_1} + e_{s_2})\| < C$. Возьмем $q(3,2)$ и $q(3,3)$ следующими за $q(3,1)$ натуральными числами из последовательности $(i_n)_{n=1}^{\infty}$ и т.д.

Рассмотрим векторы

$$h_1 = Qe_{q(1,1)},$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\left(Qe_{q(2,1)} + Qe_{q(2,2)}\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_n = \frac{1}{n}\left(Qe_{q(n,1)} + \ldots + Qe_{q(n,n)}\right).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ясно, что $\|h_n\| < \varepsilon_n$. Пусть $g_n \in X$ таковы, что $Qg_n = h_n$ и $\|g_n\| < \varepsilon_n$. Положим $x_n = \frac{1}{n}(e_{q(n,1)} + \ldots + e_{q(n,n)}) - g_n$. Очевидно, (x_n) слабо сходится к нулю и $(x_n) \subset Y$. Так как $Y \in SCH$, то (x_n) сходится к нулю сильно, поэтому выполнение неравенств $\frac{1}{n}\|e_{q(n,1)} + \ldots + e_{q(n,n)}\| > c$ для всех натуральных n невозможно. Тем самым утверждение в) доказано.

В [1] для рефлексивных X доказано

$$(Y \in WBS(p),\ X/Y \in WBS(p)) \Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0;\ X \in WBS(p-\varepsilon))$$

и поставлен вопрос: можно ли в этом утверждении избавиться от ε ? (То, что в нем нельзя избавиться от требования рефлексивности, доказано в [3]).

Поскольку, как легко видеть, $l_2 \in WBS(2)$, то отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. Существует тройка X, Y, X/Y такая, что Y и X/Y изометричны l_2, но $X \notin WBS(2)$.

Доказательство. В качестве X возьмем банахово пространство Z_2, построенное в работе [7, с. 23]. Нам понадобятся следующие из доказанных в [7] свойств Z_2 :

1) Z_2 имеет подпространство Y, изометричное l_2 ;

2) фактор-пространство Z_2 по этому подпространству изометрично l_2 ;

3) в Z_2 есть подпространство, изоморфное пространству Орлича l_M с $M(t)$ эквивалентной в нуле $(t \log t)^2$ (т.е. такой, что для достаточно малых значений t имеет место $0 < c < M(t)/(t \log t)^2 < C < \infty$).

Напомним [8, с. 136], что для выпуклой неубывающей непрерывной функции M на $[0, \infty)$ такой, что $M(0) = 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} M(t) = \infty$, пространство l_M - это множество последовательностей $x = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M(|a_n|/\rho) < \infty$ для некоторого $\rho > 0$. Оно является банаховым пространством с нормой

$$\|x\| = \inf\{\rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} M(|a_n|/\rho) \le 1\}.$$

Для доказательства теоремы 2 достаточно установить, что если M эквивалентна в нуле $(t \log t)^2$, то $l_M \notin WBS(2)$.

Пусть $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ - последовательность ортов пространства l_M, т.е. $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, где 1 стоит на i-м месте. Из свойств пространства l_M [8] следует, что последовательность $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ слабо сходится к нулю. Для любой ее последовательности $(e_{n_i})_{i=1}^{\infty}$ имеем

$$\|e_{n_1} + \dots + e_{n_k}\| / \sqrt{k} = \inf\{\rho > 0 : kM(1/\rho) \le 1\}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших значениях k из выполнения неравенства $M(1/\rho) \le 1/k$ следует, что $1/\rho \le \varepsilon$, и можно считать, что $M(1/\rho) \ge c \log^2(1/\rho)\,(1/\rho)^2$. Для таких k имеем $\|e_{n_1} + \dots + e_{n_k}\|/\sqrt{k} = \inf\{\rho > 0 : ck(\log^2\rho)(1/\rho)^2 \le 1\}/\sqrt{k} = \inf\{\rho > 0 : \rho \ge \sqrt{ck} \log \rho\}/\sqrt{k} \ge -\sqrt{ck} \log\varepsilon/\sqrt{k} = -\sqrt{c}\log\varepsilon$, поэтому $l_M \notin WBS(2)$. Теорема доказана.

II. В работе [9] показано, что любое нерефлексивное банахово пространство имеет нерефлексивное подпространство с базисом. Для свойств Банаха – Сакса имеет место аналогичный результат.

Теорема 3. Если банахово пространство не обладает одним из свойств Банаха – Сакса, то в нем найдется подпространство с базисом без того же свойства.

Нам понадобится

Предложение В [4, с. 50]:

1) $(X \in BS) \leftrightarrow (X \in ABS) \wedge ($ X рефлексивно$)$;

2) $(X \in ABS) \leftrightarrow (X \in WBS) \wedge ($ X не содержит подпространств, изоморфных l_1 $)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $X \notin WBS$, т.е. в X найдется слабо сходящаяся к нулю последовательность, средние Чезаро любой подпоследовательности которой не сходятся сильно. Выделим из нее базисную подпоследовательность [8, с. 5]. Натянутое на нее подпространство и будет искомым. Аналогичное рассуждение проводится и для $WBS(p)$.

Пусть $X \notin ABS$. Согласно предложению В это эквивалентно $(X \in$ $\in WBS) \vee ($ X содержит подпространство, изоморфное l_1 $)$. Первая возможность уже рассмотрена. В случае реализации второй – изоморфная копия l_1 и будет искомым подпространством.

Пусть $X \notin BS$. Согласно предложению В это эквивалентно тому, что $(X \notin ABS) \vee ($ X нерефлексивно$)$. Первая возможность рассмотрена выше. В случае реализации второй применяем упомянутый результат Пелчинского [9].

III. Последующие рассмотрения посвящены изучению пространств B_p $(1<p<\infty)$ вещественных числовых последовательностей $x=(x_j)$, для которых

$$\|x\|_p = \sup\left\{ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j\in \gamma_k} |x_j| \right)^p \right)^{1/p} : (\gamma_k) \in A \right\} < \infty .$$

Здесь A – множество всех последовательностей (γ_k) конечных подмножеств в N таких, что $card\, \gamma_k \le \min \gamma_k$ и $\max \gamma_k < \min \gamma_{k+1}$ (такие последовательности будем называть допустимыми). Пространства B_p являются обобщениями пространства, построенного в работе Бернштейна [10]; последнее получается если взять $p=2$. Пространства B_p так же, как и исходное пространство Бернштейна, являются рефлексивными, имеют безусловный базис, но не обладают свойством Банаха – Сакса.

Напомним, что высказывание: пространство X насыщено пространством Y означает, что любое бесконечномерное подпространство в X содержит изоморфную копию пространства Y.

Теорема 4. Пространство $\mathcal{L}_p$ насыщено l_p.

Носителем вектора $a \in \mathcal{B}_p$ будем называть множество $supp\ a = \{i \in N$: i-я координата вектора a отлична от нуля$\}$. Последовательность векторов $(a_n) \subset \mathcal{B}_p$, имеющих конечные носители, называется последовательностью дизъюнктных блоков, если при любом $i \in N$ имеем $\max supp\ a_i < \min supp\ a_{i+1}$. Пусть $(a_n) \subset \mathcal{B}_p$ - дизъюнктная последовательность нормированных блоков. Покажем, что найдется последовательность натуральных чисел (m_n) такая, что последовательность векторов $b_n = \left(\sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i\right) / \left\| \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i \right\|$ эквивалентна каноническому базису l_p . Для доказательства теоремы этого достаточно [8, с. 6]. Ясно, что для произвольной последовательности (m_n), полученная последовательность b_n удовлетворяет условию $\left\| \sum \alpha_n(b_n) \right\| \geqslant \left(\sum \alpha_n^p\right)^{1/p}$. Положим $m_0 = 0$, $m_1 = 1$. Максимальный номер элемента из носителя b_1 обозначим K_1 . Теперь возьмем m_2 таким, чтобы $\left\| \sum_{i=m_1+1}^{m_2} a_i \right\| > 2K_1$. Через K_2 обозначим максимальный номер элемента из носителя b_2. Возьмем m_3 таким, чтобы $\left\| \sum_{i=m_2+1}^{m_3} a_i \right\| > 2^2 K_2$, и т.д. Отметим, что для получаемых по такой последовательности чисел m_n векторов b_n верно то, что максимальная координата b_n не превосходит $1/(2^{n-1} K_{n-1})$. Множество $\{K_{i-1}+1, K_{i-1}+2, \ldots, K_i\}$ обозначим τ_i.

Оценим сверху $\left\| \sum \alpha_n b_n \right\|$. Пусть $\Gamma = (\gamma_i)_{i=1}^{\infty}$ - произвольная допустимая последовательность множеств. Разобьем Γ на "куски" Γ_j (Γ_j - множество тех γ_i , которые начинаются в τ_j). Имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j \in \gamma_i} \left| \left(\sum \alpha_n b_n\right)_j \right|\right)^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\gamma_i \in \Gamma_k} \left(\sum_{j \in \gamma_i} \left| \left(\sum \alpha_n b_n\right)_j \right|\right)^p\right)^{1/p} .$$

Используя определение допустимой последовательности и сделанное выше замечание о величине координат b_n , а также нормированность векторов b_n , можем записать

$$\sum_{\gamma_i \in \Gamma_k} \left(\sum_{j \in \gamma_i} \left| \left(\sum \alpha_n b_n\right)_j \right|\right)^p \leqslant$$

$$\leq (\alpha_k + 2^{-k} \max (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots))^p.$$

Воспользовавшись неравенством

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + 2^{-k} \max (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots))^p \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^p \right)^{1/p},$$

получим искомую оценку. Теорема доказана.

Теорема 5. Для любого $1 \leq p < \infty$ существует насыщенное l_p пространство, не имеющее свойства WBS (такой же результат имеет место и для c_0).

Доказательство. Рассмотрим $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ – последовательность вещественных чисел, для которой $p_i > 1$ и $p_i \to 1$. Пусть $G = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus B_{p_i} \right)_p$. Обозначим через $(e_k^i)_{k=1}^{\infty}$ последовательность ортов в пространстве B_{p_i}. В G рассмотрим последовательность векторов $f_k = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} e_k^i$. Легко видеть, что последовательность (f_k) слабо сходится к нулю, но средние Чезаро любой ее подпоследовательности не сходятся сильно к нулю. Пусть X – замкнутое подпространство в G, натянутое на f_k. Ввиду сделанного замечания $X \notin WBS$, но рассуждения, аналогичные проведенным в [1, с. 176], показывают, что X насыщено l_p. Теорема доказана.

Замечание. Так как для рефлексивных пространств свойства BS и WBS эквивалентны, то при $1 < p < \infty$ в силу теоремы 4 в качестве искомого пространства можно взять B_p.

1. Годун Б.В., Раков С.А. Свойство Банаха – Сакса и задача трех пространств // Мат. заметки. – 1982. – 31, № 1. – С. 61–74.
2. Островский М.И. Свойства Банаха – Сакса, инъективность и растворы подпространств банахова пространства // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1985. – Вып. 44. – С. 69–78.
3. Островский М.И. Задача трех пространств для слабого свойства Банаха – Сакса // Мат. заметки. – 1985. – 38, № 5. – С. 721–725.
4. Beauzamy B., Lapreste J.T. Modeles étalés des espaces de Banach. – Paris : Hermann, 1983. – 211 p.
5. Johnson W.B. On quotients of Lp which are quotiens of l_p // Compositio Math. – 1977. – 34, N 1. – P. 69–89.
6. Раков С.А. О свойстве Банаха – Сакса банахова пространства // Мат. заметки. – 1979. – 26, № 6. – С. 823–834.
7. Kalton N.J., Peck N.T. Twisted sums of sequence spaces and the three space problem // Trans. Amer. Math. Soc. – 1979.- 255, P. 1–30.
8. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Berlin :Springer, 1977. – 188 p.

9. Pelczynski A. A note to the paper of I.Singer "Basic sequences and reflexivity of Banach spaces" // Studia Math. - 1962. - 21. - P. 371-374.
10. Baernstein A. On reflexivity and summability // Ibid. - 1972. - 42. - P. 91-94.
11. Bourgain J. Remarks on the double dual of a Banach space // Bull. Soc. math Belg. - 1980. - B32. - P. 171-178.

УДК 512.86

Ю.И.Любич

О ПОКРЫТИЯХ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА НЕТРИВИАЛЬНЫМИ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ

Рассмотрим линейное пространство E над произвольным полем K. Положим $\dim E = \nu > 1$ (по определению размерности $\dim E$ – мощность любого базиса Гамеля) и пусть $\operatorname{card} K = q$. Пространство E, очевидно, можно покрыть подпространствами, отличными от 0, E (в этом смысле нетривиальными), например одномерными. Обозначим через $c(E, K)$ наименьшую мощность семейства нетривиальных подпространств, покрывающего E. Этот минимум всегда достигается на покрытиях гиперплоскостями (т.е. подпространствами коразмерности 1), так как каждое нетривиальное подпространство содержится в некоторой гиперплоскости. В настоящей статье мощностная характеристика $c(E, K)$ вычисляется при всех E, K. Она оказывается зависящей только от кардинальных чисел ν, q (зависимость только от ν при фиксированном K очевидна, так как пространства, имеющие одинаковые размерности, изоморфны).

Описанная постановка задачи навеяна известным и широко используемым утверждением о том, что линейное пространство над бесконечным полем не может быть объединением конечного множества нетривиальных подпространств*. Иными словами, $c(E, K)$ бесконечно, если поле K бесконечно. Это утверждение непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. Для любого поля K и любого натурального числа $m \leq q$ имеет место неравенство

$$c(E, K) \geq m+1. \tag{1}$$

Доказательство. Индукцией по m установим, что если $L_1, \dots, L_m$ – нетривиальные подпространства, то

$$\bigcup_{i=1}^{m} L_i \neq E. \tag{2}$$

*Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. – М. : Наука, 1969. – 475 с.

При $m=1$ утверждение очевидно. Переходя от $m-1$ к m, имеем

$$\bigcup_{i=2}^{m} L_i \neq E.$$

Пусть

$$\bigcup_{i=1}^{m} L_i = E. \tag{3}$$

Возьмем какие-нибудь векторы

$$x \bar{\in} L_1, \qquad y \bar{\in} \bigcup_{i=2}^{m} L_i \tag{4}$$

и любые попарно различные скаляры $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Рассмотрим m линейных комбинаций $x_1 = x+\lambda_1 y, \dots, x_m = x+\lambda_m y$. Так как $x \bar{\in} L_1$, а $y \in L_1$ в силу (3) и (4), то все векторы x_i не принадлежат L_1. В силу (3) все они принадлежат объединению $L_2 \cup, \dots, \cup L_m$. По принципу Дирихле найдутся такие j, i, k $(i \neq k, j \geq 2)$, что $x+\lambda_i y \in L_j$, $x+\lambda_k y \in L_j$. Однако тогда и $y \in L_j$ ибо $\lambda_i \neq \lambda_k$. Это противоречит выбору y.

Если поле K конечно, то и $c(E, K)$ конечно. Это вытекает из следующей леммы.

<u>Лемма 2.</u> Для любого поля K имеет место неравенство

$$c(E, K) \leq q+1. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем любые два линейно независимых вектора e_0, e_1 и как угодно дополним эту систему до базиса Гамеля во всем E. Обозначим через ξ_0, ξ_1 координатные функционалы относительно этого базиса, отвечающие векторам e_0, e_1. Обозначим далее через H_∞ гиперплоскость $\xi_0 = 0$. Вне H_∞ определена однородная координата $\eta = \xi_1 : \xi_0$. Отображение $\eta : E \setminus H_\infty \to K$, очевидно, сюръективно. Для каждого $\lambda \in K$ полный прообраз $\eta^{-1}(\lambda)$ получается из гиперплоскости H_λ с уравнением $\lambda\xi_0 - \xi_1 = 0$ путем выбрасывания пересечения $H_\lambda \cap H_\infty$. Следовательно,

$$E = H_\infty \cup \Big(\bigcup_{\lambda \in K} H_\lambda\Big),$$

откуда и вытекает требуемое неравенство.

Оценки (1) и (5) смыкаются для конечного поля и приводят к следующему утверждению.

<u>Теорема 1.</u> Если поле K конечно, то

$$c(E, K) = \mathrm{card}\, K + 1. \tag{6}$$

В случае бесконечного поля надлежит различать подслучаи конечно- и бесконечномерного E.

<u>Теорема 2.</u> Если поле K бесконечно, а пространство E конечномерно, то

$$c(E, K) = \mathrm{card}\, K. \tag{7}$$

Так как q бесконечно, то по лемме 2 $c(E,K) \le q$. Будем доказывать равенство индукцией по ν.

Пусть $\nu=2$; e_0, e_1 - базис в E; ξ_0, ξ_1 - координатные функционалы. В обозначениях, принятых в доказательстве леммы 2, $e_0+\lambda e_1 \in H_\lambda$ $(\lambda \in K)$ и H_λ - единственная гиперплоскость, содержащая этот вектор, так как $\dim H_\lambda = 1$ в данном случае. Поэтому семейство $\{H_\lambda\}$ является единственным покрытием (без повторений) пространства E нетривиальными подпространствами. Следовательно, $c(E,K) \geq q$ и в конечном счете $c(E,K)=q$.

Для перехода от $\nu-1$ к ν допустим, что существует покрытие

$$E=\bigcup_i G_i$$

некоторым семейством гиперплоскостей $\{G_i\}_{i\in I}$, $\operatorname{card} I<q$. Возьмем любую гиперплоскость $H\subset E$. Тогда

$$H=\bigcup_i (G_i \cap H).$$

По предположению индукции существует $i\in I$ такое, что $G_i \cap H = H$, т.е. $H\subset G_i$. Но тогда $H=G_i$, т.е. семейство $\{G_i\}$ содержит все гиперплоскости пространства E, в частности все H_λ, откуда $\operatorname{card} I \geq q$, что противоречит исходному допущению.

Теорема 3. Если поле K бесконечно и пространство E бесконечномерно, то мощность $c(E,K)$ счетна.

Для доказательства этого несколько неожиданного утверждения заметим, что в данном случае базис Гамеля содержит бесконечную последовательность $e_0, e_1, \ldots, e_n \ldots$. Обозначим ее линейную оболочку через S. Возьмем какое-нибудь прямое дополнение S' подпространства S и положим

$$L_n = S' + \operatorname{Lin}(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}) \qquad (n=1,2,3,\ldots).$$

Очевидно, $L_n \neq E$ (ибо $e_n \bar{\in} L_n$), $L_n \neq 0$ (ибо $e_0 \in L_n$) и $\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n = E$. Мы построили для E счетное покрытие нетривиальными подпространствами, а конечного покрытия в данном случае не существует, так как поле K бесконечно.

Задачу, аналогичную рассмотренной, можно ставить и для других алгебраических структур (групп, колец и т.д.), но при этом вряд ли можно ожидать столь же простых ответов, как в случае линейных пространств. В алгебро-топологической ситуации естественно рассматривать замкнутые подпространства подгруппы, подкольца и др. Это, конечно, влияет на ответ.

Пусть B - вещественное или комплексное банахово пространство. По теореме Бэра оно не может быть счетным объединением нетривиальных замкнутых подпространств. Обозначим через $\bar{c}(B)$ наименьшую мощность покрытий пространства $B (\dim B > 1)$ нетривиальными замкнутыми подпространствами. Очевидно, $\bar{c}(B) \leq \operatorname{card} B$ (можно покрывать B одномерными подпространствами). Пусть B сепарабельно, тогда $\operatorname{card} B$ – мощность континуума. Принимая гипотезу континуума, получаем, что для сепарабельного B мощность $\bar{c}(B)$ совпадает с мощностью континуума.

УДК 519.2

Г.П.Чистяков

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРЕМЕ Н.А.САПОГОВА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Напомним результат Н.А.Сапогова [1, стр. 341] о количественной устойчивости разложений нормальной функции распределения (ф.р.) на компоненты. Пусть $F(x)$, $G(x)$ – ф.р., под $\rho(F, G)$ будем понимать расстояние между $F(x)$ и $G(x)$ в равномерной метрике. Через $\Phi(x)$ обозначим стандартную нормальную ф.р.

<u>Теорема</u> (Н.А.Сапогов). Пусть $F_j(x)$, $j=1,2$ – ф.р., причем $F_1(x)$ имеет нулевую медиану и пусть выполняется неравенство

$$\rho(F_1 * F_2, \Phi) \leq \varepsilon, \qquad 0<\varepsilon<1.$$

Тогда $\exists\, c>0$ – абсолютная постоянная, для которой справедливы неравенства

$$\rho(F_j, \Phi_j) \leq c s_j^{-3} \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad j=1,2,$$

где $\Phi_j(x) = \Phi\left(\frac{x-a_j}{s_j}\right)$, а параметры a_j, s_j определяются формулами

$$a_j = \int_{-M}^{M} x\, dF_j(x), \qquad s_j^2 = \int_{-M}^{M} x^2\, dF_j(x) - a_j^2, \quad j=1,2,$$

$$M = 1+\sqrt{-2\ln\varepsilon}.$$

Неулучшаемость этого результата доказана С.Г.Малошевским. [1, стр. 348]. В дальнейшем под c будем понимать положительные абсолютные постоянные, не всегда одни и те же.

Если в теореме Н.А.Сапогова взять $F_1(x) = F(x)$, $F_2(x) = \bar{F}(x) = 1-F(-x+0)$, то из результата Н.А.Сапогова легко следует неравенство

$$\rho(F_j, \Phi_j) \leq c \left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad j=1,2, \tag{1}$$

с некоторой постоянной c. Следует отметить, что в связи со специальным выбором компонент $f_j(x)$ эта оценка может быть далека от точной. Будет показано, что это не так, т.е. оценка (1) является точной. Это следует из приведенной ниже теоремы.

Теорема. Для каждого $T > e^8$ найдется такая ф.р. $F_T(x)$, что

$$\varepsilon_T = \rho(F_T * \bar{F}_T,\ \Phi) \to 0, \qquad T \to \infty,$$

и в то же время справедливы оценки

$$\inf_{G \in K_\Phi} \rho(F_T, G) > c\left(\ln \frac{1}{\varepsilon_T}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная; K_Φ – класс компонент ф.р. $\Phi(x)$.

Замечание. Из приводимой ниже конструкции ф.р. $F_T(x)$ видно, что для ф.р. $F_T(x)$ утверждение теоремы сохраняется при замене метрики ρ на метрику Леви $\mathcal{L}$.

Отметим также, что конструкция ф.р. $F_T(x)$ в нашем случае существенно отличается от конструкции ф.р. в примере С.Г.Малошевского, из которого не следует утверждение нашей теоремы.

Доказательство. Для построения нужной ф.р. $F_T(x)$ изучим поведение функций $f_T(t)$ вида

$$f_T(t) = \exp\left\{-\frac{t^2}{4}\,(1+\psi_T(t))\right\}, \tag{2}$$

где $\psi_T(t)$ – аналитическая в полосе $|\mathrm{Im}\, t| \le 4T$ функция, нечетная мнимая на вещественной оси, для которой выполняется неравенство

$$|\psi_T(t)| \le \frac{1}{8}, \qquad |\mathrm{Im}\, t| \le 4T, \tag{3}$$

и для некоторой c соотношение $|\psi_T^{(1)}(0)| \ge \frac{c}{T}$. Примером такой функции может служить функция

$$\psi_T(t) = \frac{1}{4}\,\frac{iTt}{t^2 + 25T^2}.$$

Легко видеть, что функция $f_T(t)$ допускает представление

$$f_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\, v_T(x)\,dx, \quad t \in R^1,$$

где $v_T(x)$ – непрерывная функция, принадлежащая $\mathcal{L}^1(-\infty, \infty)$, $\|v_T\| \le c$, и

$$v_T(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_T(t)\,dt.$$

Нам понадобится информация о поведении функции $v_T(x)$, которую сформулируем в виде двух лемм.

Лемма 1. Для $x\in R^1$, $|x|\geq\frac{1}{4}T$, справедливо неравенство

$$|v_T(x)|\leq c\exp\left(-\frac{7}{32}T|x|\right).$$

Лемма 2. Для $x\in R^1$, $|x|\leq\frac{1}{4}T$, $v_T(x)>0$.

Доказательство этих лемм проведем ниже, а сейчас с их помощью построим ф.р. $F_T(x)$. Положим

$$F_T(x)=\frac{1}{1-\Delta_T}\int_{-\infty}^{x}\tilde{v}_T(s)\,ds,$$

где

$$\Delta_T=\int_{|s|\geq\frac{1}{4}T}v_T(s)\,ds,\quad \tilde{v}_T(s)=\begin{cases}v_T(s), & |s|\leq\frac{1}{4}T,\\ 0, & |s|>\frac{1}{4}T.\end{cases}$$

Так как $\tilde{v}_T(s)$ в силу леммы 2 неотрицательна, то $F_T(s)$ – неубывающая функция. Очевидно $F_T(-\infty)=0$, и так как $f_T(0)=1$, $F_T(+\infty)=1$. Таким образом, $F_T(x)$ – ф.р. Из леммы 1 следует оценка

$$|\Delta_T|\leq\int_{|x|\geq\frac{1}{4}T}|v_T(x)|\,dx\leq c\int_{|x|\geq\frac{1}{4}T}e^{-\frac{7}{32}T|x|}dx\leq ce^{-\frac{1}{19}T^2}. \qquad (4)$$

Рассмотрим характеристическую функцию (х.ф.) $\varphi(t;F_T)$ ф.р. $F_T(x)$. Обозначим через $g_T(t)$ функцию

$$g_T(t)=\int_{|x|\geq\frac{1}{4}T}e^{itx}v_T(x)\,dx.$$

Для х.ф. $\varphi(t;F_T)$ выполняется соотношение

$$(1-\Delta_T)^2\varphi(t;F_T)\varphi(-t;F_T)=(f_T(t)-g_T(t))\,(f_T(-t)-$$
$$-g_T(-t))=e^{-\frac{1}{2}t^2}-f_T(t)g_T(-t)-f_T(-t)g_T(t)+|g_T(t)|^2$$

Отсюда с учетом оценки (4) получаем неравенство

$$\rho(F_T * \tilde{F}_T,\ \Phi) \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |v_T(x)|\,dx \int_{|x| \geq \frac{1}{4}T} |v_T(x)|\,dx +$$

$$+2\Big(\int_{|x| \geq \frac{1}{4}T} |v_T(x)|\,dx\Big)^2 \leq ce^{-\frac{1}{19}T^2}. \tag{5}$$

Покажем, что для любой компоненты $G(x)$ ф.р. $\Phi(x)$ выполняется неравенство

$$\rho(F_T,\ G) \geq \frac{|\varphi_T^{(1)}(0)|}{8\sqrt{\pi}}. \tag{6}$$

Так как

$$\varphi(t;\ F_T) = \frac{1}{1-\Delta_T}\ (f_T(t) - g_T(t)),$$

то по формуле обращения имеем при $x_1 < x_2$:

$$F_T(x_2) - F_T(x_1) = \frac{1}{1-\Delta_T} \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} K(t,\ x_1,\ x_2)\,(f_T(t) -$$

$$-g_T(t))\,dt = \frac{1}{1-\Delta_T} \int_{-\infty}^{\infty} K(t,\ x_1,\ x_2)\,f_T(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{1-\Delta_T}\,(V_T(x_2) - V_T(x_1)), \tag{7}$$

где $K(t,\ x_1,\ x_2)$ – ядро вида

$$K(t,\ x_1,\ x_2) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{-itx_1} - e^{-itx_2}}{it},$$

а $V_T(x)$ – функция ограниченной вариации (ф.о.в.), определяемая формулой

$$V_T(x) = \int_{-\infty}^{x} (v_T(s) - \tilde{v}_T(s))\,ds.$$

Из оценки (4) следует, что

$$|V_T(x)| \leq c e^{-\frac{1}{19}T^2}. \tag{8}$$

Учитывая представление (2) для функции $f_T(t)$, запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t, x_1, x_2) f_T(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, x_1, x_2)\, e^{-\frac{t^2}{4}} \Big(1 -$$

$$- \frac{t^3 \varphi_T^{(1)}(0)}{4}\Big) dt + \int_{-\ln T}^{\ln T} K(t, x_1, x_2)\, e^{-\frac{t^2}{4}} \Big\{ e^{-\frac{t^2}{4}\varphi_T(t)} -$$

$$-1 + \frac{t^3 \varphi_T^{(1)}(0)}{4} \Big\} dt + \int_{|t| > \ln T} K(t, x_1, x_2) \Big\{ f_T(t) -$$

$$- e^{-\frac{t^2}{4}} \Big(1 - \frac{t^3 \varphi_T^{(1)}(0)}{4}\Big)\Big\} dt = I_1 + I_2 + I_3 .$$

Оценим интеграл I_2 из этой формулы. Так как функция $\varphi_T(t)$ аналитична в круге $|t| \leq 4T$ и в этом круге $|\varphi_T(t)| \leq \frac{1}{8}$, то в круге $|t| < 4T$ она допускает представление

$$\varphi_T(t) = -i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{T^{2k+1}}\, t^{2k+1},$$

$$a_{2k+1} \in R^1, \quad |a_{2k+1}| \leq \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^{2k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{9}$$

Из этого представления следует, что для $t \in C^1$, $|t| \leq 2T$,

$$|Im\, \varphi_T(t)| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{|Re\, t|}{2T}\right), \quad |Re\, \varphi_T'(t)| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{|t|}{4T}\right),$$

$$|\varphi_T'(t) - \varphi_T^{(1)}(0)\, t| \leq \frac{1}{6}\left(\frac{|t|}{4T}\right)^3 . \tag{10}$$

Эти оценки позволяют получить неравенство для t, $t\in[-\ln T, \ln T]$,

$$\left|e^{-\frac{t^2}{4}}\psi_T(t)-1+\frac{t^3\psi_T^{(3)}(0)}{4}\right|\le c\,|t|^5\,(1+|t|)\,T^{-2}.$$

С его помощью имеем оценку

$$|I_2|\le c\int\limits_{-\ln T}^{\ln T}|K(t,x_1,x_2)|\frac{|t|^5(1+|t|)}{T^2}e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt\le$$

$$\le\frac{c}{T^2}\int\limits_{-\ln T}^{\ln T}t^4(1+|t|)e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt\le\frac{c}{T^2}. \tag{11}$$

Для оценки интеграла I_3 заметим, что при $t\in R^1$:

$$|f_T(t)|\le e^{-\frac{1}{8}t^2},$$

поэтому

$$|I_3|\le c\int\limits_{|t|>\ln T}|K(t,x_1,x_2)|\,e^{-\frac{t^2}{8}}(1+|t|^3)\,dt\le$$

$$\le c\int\limits_{|t|>\ln T}(1+t^2)\,e^{-\frac{t^2}{8}}\,dt\le c\,e^{-\frac{1}{16}(\ln T)^2}. \tag{12}$$

Неравенства (11), (12) показывают, что (7) можно переписать в виде

$$(1-\Delta_T)(F_T(x_2)-F_T(x_1))=\Phi(\sqrt{2}\,x_2)-\Phi(\sqrt{2}\,x_1)+$$

$$+\frac{a_1}{\sqrt{2}\,T}\left(\Phi^{(3)}(\sqrt{2}\,x_2)-\Phi^{(3)}(\sqrt{2}\,x_1)\right)+q_T(x_1,x_2),$$

где $q_T(x_1,x_2)$ – величина, для которой справедливо следующее: $|q_T(x_1,x_2)|\le cT^{-2}$. В этой формуле устремим $x_1\to-\infty$, тогда с учетом неравенства (4) для Δ_T приходим к такому представлению для $F_T(x)$:

$$F_T(x)=\Phi(\sqrt{2}\,x)+\frac{a_1}{\sqrt{2}\,T}\Phi^{(3)}(\sqrt{2}\,x)+q(x)=$$

$$= V_\Phi(x) + q(x),$$

где для $q(x)$ выполняется оценка: $|q(x)| \le cT^{-2}$.
Перепишем ф.о.в. $V_\Phi(x)$ в виде

$$V_\Phi(x) = \Phi(\sqrt{2}x) + \frac{a_1}{2\sqrt{\pi}T}(2x^2-1)e^{-x^2}$$

и докажем, что для $G \in K_\Phi$ справедливо неравенство

$$\rho(V_\Phi, G) \geqslant \frac{|a_1|}{8\sqrt{\pi}T}. \tag{13}$$

Его достаточно доказать для невырожденных компонент ф.р. $\Phi(x)$. В силу теоремы Крамера они имеют вид: $G(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$, $a \in R^1$, $0 < \sigma \le 1$. Пусть для определенности $a_1 < 0$. Тогда для $a \geqslant 0$ и $\forall \sigma > 0$ $|V_\Phi(x) - G(x)| \geqslant |a_1|(8\sqrt{\pi}T)^{-1}$ при $x = 0$. Если $a < 0$, то при $\sigma \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ такое неравенство выполняется в точке $x = \sqrt{2}$, а при $\sigma > \frac{1}{\sqrt{2}}$ – в точке $x = -\sqrt{2}$. Аналогичное рассуждение возможно и в случае $a_1 > 0$. Таким образом (13) доказано, из него с очевидностью следует неравенство (6). Объединяя оценки (5) и (6), приходим к утверждению теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 1. Введем для $t \in R^1$, $y \in [-T, T]$ функцию

$$R(t,y) = f_T(t+iy)/f_T(iy),$$

для которой справедливо соотношение

$$\ln|R(t,y)| = -\frac{t^2}{4}(1 + Re\,\psi_T(t+iy)) +$$

$$+ \frac{ty}{2} Im\,\psi_T(t+iy) + \frac{y^2}{4}(Re\,\psi_T(t+iy) - \psi_T(iy)). \tag{14}$$

Из вида функции $\psi_T(t)$, $|t| \le 4T$ и (9) легко усматриваем оценку

$$|Re\,\psi_T(t+iy) - \psi_T(iy)| \le \frac{1}{8}\cdot\frac{t^2}{T^2}, \qquad t, y \in [-T, T]. \tag{15}$$

Применим ее и первую из оценок (10) к соотношению (14). Получаем для $t, y \in [-T, T]$:

$$-\frac{t^2}{2} \le \ln|R(t,y)| \le -\frac{t^2}{16}. \tag{16}$$

Для $t\in R^1$, $|t|\geqslant T$, $y\in[-T,T]$ правая часть неравенства (16) сохраняется в силу применения оценки (3) к соотношению (14). Из правой части неравенства (16) и теоремы Коши следует, что контур интегрирования в формуле для $v_T(x)$ можно переносить на любую горизонтальную прямую $t+iy$, $t\in R^1$, $y\in[-T,T]$. Поэтому имеем соотношение

$$v_T(x)=e^{-yx}f_T(-iy)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}R(t,-y)\,dt,\quad \forall y\in[-T,T]. \tag{17}$$

Пусть $x\in R^1$, $|x|\geqslant\frac{1}{4}T$, и для определенности $x>0$. Тогда в формуле (17) положим $y=\frac{7}{16}T$ и применим к функции $R(t,-y)$ правую часть неравенства (16). Приходим с учетом (3) к оценке

$$|v_T(x)|\leqslant e^{-\frac{7}{16}Tx}f_T\left(-i\frac{7}{16}T\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{16}}dt\leqslant$$

$$\leqslant c\exp\left\{\frac{2}{7}\left(\frac{7}{16}\right)^2T^2-\frac{7}{16}Tx\right\}\leqslant c\exp\left(-\frac{7}{32}Tx\right),$$

что и требовалось доказать. Аналогично доказываем нужное неравенство для $x<0$.

Доказательство леммы 2. Зададимся $x\in R^1$, $|x|\leqslant\frac{1}{4}T$ и рассмотрим формулу (17), в которой y выберем из условия

$$\frac{d}{dy}\ln f_T(-iy)=x. \tag{18}$$

Уравнение (18) перепишем в виде

$$\frac{y}{2}\left\{1+\varphi_T(-iy)-\frac{iy}{2}\varphi_T^{(1)}(-iy)\right\}=x. \tag{19}$$

Поскольку для y, $y\in[-T,T]$, из (3) и неравенства Коши для $\varphi_T^{(1)}(-iy)$ имеем

$$|\varphi_T(-iy)|+\frac{1}{2}|y\varphi_T^{(1)}(-iy)|\leqslant\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{|y|}{T}\leqslant\frac{1}{4},$$

то, как видно из (19), для x, $0<x\leqslant\frac{1}{4}T$ уравнение (18) всегда имеет положительное решение $y=y(x)$, причем $y(x)\leqslant T$. На отрезке $[-T^{\frac{1}{3}}, T^{\frac{1}{3}}]$ рассмотрим $Im\ln R(t,-y)$. В силу выбора $y=y(x)$ из (19) имеет место формула

$$Im\ ln\ R(t,-y)-tx=\frac{ty}{2}\left(Re\,\psi_T(t-iy)-\psi_T(-iy)\right)+$$

$$+\frac{y^2}{4}\left(Im\,\psi_T(t-iy)+it\,\psi_T^{(1)}(-iy)\right)-\frac{t^2}{4}\,Im\,\psi_T(t-iy). \qquad (20)$$

Из вида (9) функции $\psi_T(t)$ легко получаем неравенство

$$\left|Im\,\psi_T(t-iy)+it\,\psi_T^{(1)}(-iy)\right|\le$$

$$\le\frac{1}{48}\,\frac{|t|^3}{T^3}, \qquad t,\ y\in[-T,T].$$

Применим его, а также первое из неравенств (10) и (15) к формуле (20). Приходим к оценке

$$\left|Im\ ln\ R(t,-y)-tx\right|\le\frac{1}{8}\,\frac{|t|^3}{T}\le\frac{1}{8}, \quad t\in[-T^{1/3},\ T^{1/3}]. \qquad (21)$$

Оценки (16), (21) позволяют записать неравенство для $0<x\le\frac{1}{4}T$:

$$2\pi e^{yx}\left(f_T(-iy)\right)^{-1}v_T(x)\ge\int_{-T^{1/3}}^{T^{1/3}}|R(t,-y)|\cos\left(Im\ ln\ R(t,-y)-tx\right)dt-$$

$$-\int_{|t|>T^{1/3}}|R(t,-y)|dt\ge\frac{1}{2}\int_{-T^{1/3}}^{T^{1/3}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt-\int_{|t|>T^{1/3}}e^{-\frac{t^2}{16}}dt>\frac{1}{4}, \qquad (22)$$

из которого вытекает утверждение леммы 2 для $0<x\le\frac{1}{4}T$. Неравенство (22) для $-\frac{1}{4}T\le x<0$ доказывается аналогичным образом.

1. Линник Ю.В., Островский И.В. Разложения случайных величин и векторов. – М. : Наука, 1972. – 480 с.

УДК 517.5

Ю.И.Любарский

ПОЛНОТА И МИНИМАЛЬНОСТЬ СИСТЕМЫ РЭЛЕЯ

1. В настоящей работе рассматриваются вопросы полноты и минимальности в пространстве $L^2(0,\pi)$ системы функций $\mathcal{R}(\varphi,\psi;\omega)=\{h_k(t)\}_1^\infty=$ $=\left\{e^{\varphi(t)\sqrt{k^2-\omega^2}}\sin k\psi(t)\right\}_1^\infty$, где $\omega>0$; φ, $\psi\in C^1(0,\pi)$ вещественнозначные функции, а значения корня определены условиями $\sqrt{k^2-\omega^2}>$ >0, $k>\omega$; $-i\sqrt{k^2-\omega^2}>0$, $k<\omega$. Такие системы при $\omega=0$ изучались

в [1] (см. также [2], где изложена история вопроса), они являются модельными в ряде задач о полноте и минимальности корневых систем дифференциальных операторных пучков. Система $\mathcal{R}(\varphi, \mathbb{1}; \omega)$ (здесь и далее символами $\mathbb{0}$ и $\mathbb{1}$ обозначены функции, тождественно равные нулю и единице соответственно на своей области определения) возникает также в классической задаче Рэлея о рассеянии плоской монохроматической волны на периодической поверхности с периодом π, уравнение которой на участке $[0, \pi]$ имеет вид $y = \varphi(x)$. В [6] аннонсирована полнота и минимальность системы $\mathcal{R}(\varphi, \mathbb{1}; \omega)$ в пространстве $L^2(0, \pi)$. В случае, когда периодическая поверхность имеет складки и ее уравнение задается в параметрической форме $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$, возникает система $\mathcal{R}(\varphi, \psi, \omega)$.

2. <u>Теорема 1.</u> Пусть задано число $\omega > 0$ и вещественнозначеные функции $\varphi, \psi \in C^1(0, \pi)$ такие, что i) $\psi(0) = 0$, $\psi(\pi) = \pi$, $\varphi(0) = \varphi(\pi)$; ii) $|\varphi'(t)| + |\psi'(t)| > 0$ для любого $t \in [0, \pi]$, причем $\varphi'(0) \cdot \varphi'(\pi) \neq 0$; iii) $\gamma = \{ z = z(t) \ , \ z(t) = \psi(t) + i\varphi(t) \ , \ t \in [0, \pi] \}$ есть простая кривая целиком, за исключением концов $z(0)$ и $z(\pi)$, лежащая в полосе $\{ z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi \}$. Тогда замыкание линейной оболочки системы $\mathcal{R}(\varphi, \psi; \omega)$ имеет конечную коразмерность в пространстве $L^2(0, \pi)$.

Доказательство. Будет построен нетеров оператор N, действующий из пространства $L^2(0, \pi)$ в специальное весовое пространство функций такой, что каждая функция $f \in L^2(0, \pi)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\int_0^{\pi} f(t) e^{\varphi(t)\sqrt{k^2 - \omega^2}} \sin k\psi(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

принадлежит ядру оператора N. Отсюда следует утверждение теоремы.

Для простоты будем предполагать, что $\omega \in (0, 1)$.

Пусть для $f \in L^2(0, \pi)$ выполнено (1). Положим $\mathbb{C}_\Pi := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0 \}$, $\mathbb{C}_{\Pi, \omega} := \mathbb{C}_\Pi / [0, \omega]$ и пусть $H^2(\mathbb{C}_\Pi)$ – пространство Харди в $\mathbb{C}_\Pi$. Выделим в $\mathbb{C}_{\Pi, \omega}$ ветвь функции $\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ соотношением $-i\sqrt{(t + i0)^2 - \omega^2} > 0$ при $t \in (0, \omega)$ и рассмотрим голоморфные в $\mathbb{C}_{\Pi, \omega}$ функции

$$F(\lambda) = \int_0^{\pi} f(t) e^{\varphi(t)\sqrt{\lambda^2 - \omega^2}} \sin \lambda\psi(t)\, dt; \quad v(\lambda) = \frac{F(\lambda)}{\sin \pi\lambda}. \tag{2}$$

Отображение $w = \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}$ конформно переводит $\mathbb{C}_{\Pi, \omega}$ на $\mathbb{C}_\Pi$. Простые оценки показывают, что функция $\theta(w) = v(\sqrt{w^2 + \omega^2})$ принадлежит пространству $e^{aw} H^2(\mathbb{C}_\Pi)$, где $a := \max\{\varphi(t) ; \ t \in [0, \pi]\}$. Пользуясь теоремой Винера – Пэли и, возвращаясь к переменной λ, получаем

$$u(\lambda)=\int_{-\infty}^{a} e^{\eta\sqrt{\lambda^2-\omega^2}}\, x(\eta)\,d\eta, \quad \lambda\in C_{n,\omega}, \quad x\in L^2(-\infty,a). \tag{3}$$

Введем преобразование Лапласа на луче (ω,∞):

$$\mathcal{L}: f\mapsto(\mathcal{L}f)(z)=\int_{\omega}^{\infty} f(\lambda)e^{-\lambda z}\,d\lambda \tag{4}$$

и рассмотрим функции $l(z):=(\mathcal{L}u)(z)$; $L(z):=(\mathcal{L}_F)(z)$. Из (3) следует

$$l(z)=\int_{-\infty}^{a} x(\eta)\,\mathcal{G}(z-\eta,\eta)\,d\eta, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{G}(w,\eta)=\int_{\omega}^{\infty} e^{-\lambda w+\eta\left(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}-\lambda\right)}\,d\lambda,\quad Re\, w>0,\ \eta\in C \tag{6}$$

и

$$L(z)=\mathcal{L}(u(\lambda)\sin\pi\lambda)(z)=\frac{1}{2i}\left[l(z-i\pi)-l(z+i\pi)\right]. \tag{7}$$

Обозначив $\zeta_{\pm}(t)=\varphi(t)\pm\psi(t)$, $t\in[0,\pi]$, имеем из (2)

$$L(z)=\frac{1}{2i}\int_{\omega}^{\infty} e^{-\lambda z}\int_{0}^{\pi} f(t)e^{\varphi(t)\sqrt{\lambda^2-\omega^2}}\left[e^{i\lambda\psi(t)}-e^{-i\lambda\psi(t)}\right]dt\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{0}^{\pi} f(t)\,\mathcal{G}(z-\zeta_{+}(t),\varphi(t))\,dt-\frac{1}{2i}\int_{0}^{\pi} f(t)\,\mathcal{G}(z-\zeta_{-}(t),\varphi(t))\,dt, \tag{8}$$

$$Re\, z>a.$$

<u>Лемма 1</u>. Функция $\mathcal{G}(w,\eta)$ представима в виде

$$\mathcal{G}(w,\eta)=\frac{1}{w}A(\eta)+\frac{1}{2i\pi}B(w,\eta)\log w+C(w,\eta), \tag{9}$$

где

$$A(\eta)=e^{-\eta\omega}+(1-e^{-\eta\omega})(\eta\eta)^{-1};\quad B(w,\eta)=2i\int_{-\omega}^{\omega} e^{-\lambda(w+\eta)}\sin\eta\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\,d\lambda, \tag{10}$$

а $C(w,\eta)$ – целая функция по w,η.

Доказательство. Зафиксируем $\eta\in C$. При $Re\, w>0$, $Im\, w>0$, меняя путь интегрирования в (6), получаем представление

$$\mathcal{G}(w,\eta)=\int_{[\omega,0]\cup[0,-i\infty]} e^{-\lambda w+\eta\left(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}-\lambda\right)}\,d\lambda, \tag{11}$$

дающее продолжение функции $\mathcal{G}(w,\eta)$ в $\{w: Im\, w>0\}$. При $Re\, w<0$

$Im\, w < 0$ в (11) можно изменить путь интегрирования, получая представление

$$\mathcal{O}(w,\eta) = \int_{(-\infty,-i0,\,\omega-i0)} e^{-\lambda w + \eta(\sqrt{\lambda^2-\omega^2}-\lambda)}\,d\lambda, \tag{12}$$

определяющее $\mathcal{O}(w,\eta)$ в полуплоскости $Re\, w < 0$. Повторяя этот процесс, продолжим функцию $\mathcal{O}(w,\eta)$ вдоль любого пути в $C/\{0\}$. Ее приращение при обходе нуля в положительном направлении легко вычисляется и равно $B(w,\eta)$. Поэтому функция $\mathcal{O}(w,\eta) - \frac{1}{2i\pi}B(w,\eta)\log w$ однозначна в $C/\{0\}$. Прямая проверка дает $w\,\mathcal{O}(w,\eta) \to A(\eta)$ при $w \to 0$, откуда и следует (9).

Замечание. Легко видеть, что $A(\eta) \neq 0,\ \eta \in R$.

Обозначим $\Gamma_\pm = \{\zeta = \zeta_\pm(t),\ t \in [0,\pi]\}$, $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$, $\gamma'_\pm = (-\infty, a] \pm i\pi$, $\gamma' = \gamma'_+ \cup \gamma'_-$. Кривая $\Gamma \cup \gamma'$ разбивает C на две области $\mathcal{D}^+$, $\mathcal{D}^-$. Пусть $\mathcal{D}^+$ – та из них, которая содержит бесконечную часть луча $[0, +\infty)$. Из (6) – (8) следует, что соотношения

$$L_1(z) = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{a} x(\eta)\left[\mathcal{O}(z-i\pi-\eta,\eta) - \mathcal{O}(z+i\pi-\eta,\eta)\right]d\eta \tag{13}$$

$$L_2(z) = \frac{1}{2i}\int_{0}^{\pi} f(t)\left[\mathcal{O}(z-\zeta_+(t),\varphi(t)) - \mathcal{O}(z-\zeta_-(t),\varphi(t))\right]dt \tag{14}$$

определяют в области $\mathcal{D}^+$ одну и ту же функцию $L_1(z) = L_2(z) = L(z)$. С помощью (13) она продолжается до функции $L_{(1)}(z)$, голоморфной в C/γ'. Пусть $L_2(z)$ голоморфная в $C/[\Gamma \cup (-\infty, \varphi(0)]]$ функция, получающаяся продолжением функции $L(z)$ с помощью (14).

Лемма 2. При всех $\eta < a$ справедливы соотношения

$$L_{(1)}(\eta+i\pi+i0) - L_{(1)}(\eta+i\pi-i0) = L_{(1)}(\eta-i\pi-i0) - L_{(1)}(\eta-i\pi+i0) =$$

$$= -\pi A(\eta)\,x(\eta) + \frac{1}{2i}\int_{\eta}^{a} x(\xi)\,B(\eta-\xi,\xi)\,d\xi. \tag{15}$$

Доказательство леммы следует из (7) и соотношения

$$l(\eta+i0) - l(\eta-i0) = -2i\pi\, x(\eta)\,A(\eta) + \int_{\eta}^{a} x(\xi)\,B(\eta-\xi,\xi)\,d\xi. \tag{16}$$

Для доказательства (16) зафиксируем $\eta_1 < \eta$ и запишем (5) в виде

$$l(z) = \int_{\eta_1}^{a} \frac{x(\xi)A(\xi)}{z-\xi}\,d\xi + \frac{1}{2i\pi}\int_{\eta_1}^{a} x(\xi)\,B(z-\xi,\xi)\log(z-\xi)\,d\xi +$$

$$+\Big[\int_{\eta_1}^{a} C(x-\xi,\xi)x(\xi)\,d\xi+\int_{-\infty}^{\eta_1}\mathcal{G}(x-\xi,\xi)x(\xi)\,d\xi\Big]=s_1(x)+s_2(x)+s_3(x).$$

Слагаемое $s_3(x)$ однозначно вне $(-\infty,\eta_1]$. Очевидно, $s_1(\eta+i0)-s_1(\eta-i0)=-2i\pi x(\eta)A(\eta)$. При каждом фиксированном ξ подынтегральное выражение в $s_2(x)$ голоморфно по x при $x\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,\xi]$. В точке $\xi>\eta$ скачок подынтегрального выражения есть $x(\xi)B(\eta-\xi,\xi)$. Поэтому $s_2(\eta+i0)-s_2(\eta-i0)=\int_{\eta}^{a}x(\xi)B(\eta-\xi,\xi)\,d\xi$. Откуда и следует (16).

Следствие. $x(\eta)\equiv 0$ при $\eta\in(a_0,a)$, где $a_0=\varphi(0)$.

Доказательство. При $\eta\in(a_0,a)$ к точке $\eta+i\pi$ можно приблизиться из области $\mathcal{D}^+$ с обеих сторон разреза Γ'_+. Так как в $D^+L_{(1)}=L_{(2)}$, то

$$L_{(1)}(\eta+i\pi+i0)-L_{(1)}(\eta+i\pi-i0)=L_{(2)}(\eta+i\pi+i0)-L_{(2)}(\eta+i\pi-i0)=0.$$

Последнее равенство следует из голоморфности $L_{(2)}$ в $\mathbb{C}\setminus(\Gamma\cup(-\infty,a_0])$. Отсюда с помощью (15) получаем $[(-\pi A+V)x](\xi)=0$, $\xi\in(a_0,a)$, где операторы A и V определены в $L^2(a_0,a)$ соотношениями

$$(Ax)(\xi):=A(\xi)x(\xi);\qquad Vx(\xi):=\frac{1}{2i}\int_{\xi}^{a}x(\xi')B(\xi-\xi',\xi')\,d\xi'.$$

Оператор $-\pi A+V$ обратим в $L^2(a_0,a)$, поэтому $x\big|_{(a_0,a)}=0$.

Лемма 3. Ориентируем Γ в направлении от $\zeta_-(\pi)$ к точке $\zeta_+(\pi)$. Справедливы соотношения

$$L_{(2),\Lambda}(\zeta_\pm(t))-L_{(2),\Pi}(\zeta_\pm(t))=-\pi f(t)A(\varphi(t))\frac{dt}{d\zeta_\pm}\pm$$

$$\pm\frac{1}{2i}\int_{t}^{\pi}f(\tau)B(\zeta_\pm(t)-\zeta_\pm(\tau),\varphi(\tau))\,d\tau,\quad \tau\in[0,\pi],\qquad(17)$$

$$L_{(2)}(\eta+i0)-L_{(2)}(\eta-i0)=2\int_0^{\pi}f(t)\int_{-\omega}^{\omega}e^{-\lambda\eta}\sin[\lambda\psi(t)]\sin\big[\varphi(t)\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\big]\,d\lambda\,dt,$$

$$\eta<a_0,$$

где $L_{(2),\Lambda}$, $L_{(2),\Pi}$ – левое и правое предельные значения $L_{(2)}$ на Γ.

Доказательство леммы 3 опускается.

Множество $G:=\mathcal{D}^-/(-\infty,a_0]$ является объединением областей $G_\pm$, лежащих соответственно выше и ниже вещественной оси. Рассмотрим голоморфную в G функцию $\Phi(x)=L_{(1)}(x)-L_{(2)}(x)$. Для ее граничных значений верно

$$\Phi(\eta\pm i\pi)=\pi A(\eta)x(\eta)-\frac{1}{2i}\int_{\eta}^{a_0}x(\xi)B(\eta-\xi,\xi)\,d\xi,\quad \eta<a_0;\qquad(18)$$

$$\Phi(\zeta_{\pm}(t)) = \pi f(t) A(\varphi(t)) \frac{dt}{d\zeta_{\pm}} \mp \frac{1}{2i} \int\limits_{t}^{\pi} f(\tau) B(\zeta_{\pm}(t) - \zeta_{\pm}(\tau), \varphi(\tau)) d\tau,$$

$$t \in [0, \pi]; \tag{19}$$

$$\Phi(\eta + i0) - \Phi(\eta - i0) = 2 \int\limits_{0}^{\pi} f(t) \int\limits_{-\omega}^{\omega} e^{-\lambda\eta} \sin[\lambda\psi(t)] \sin[\varphi(t)\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}] \times$$

$$\times d\lambda\, dt, \qquad \eta < a_0. \tag{20}$$

Напомним [5], что пространством Смирнова $E^2(G_+)$ (соответственно $E^2(G_-)$) называется замыкание по норме $\|\ \|_{E^2(G_+)} = \|\ \|_{L^2(\partial G_+)}$ множества рациональных функций, голоморфных в G_+ и исчезающих на бесконечности.

<u>Лемма 4.</u> $e^{\omega z} \Phi(z) \big|_{G_\pm} \in E^2(G_\pm)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно установить соотношения

$$e^{\omega z} L_{(1)}(z) \in E^2(G_\pm); \quad e^{\omega z} L_{(2)}(z) \in E^2(G_\pm). \tag{21}$$

Для доказательства первого из них представим при $Re z > 0$, $Im z > 0$ функцию $l(z)$ в виде

$$l(z) = \int\limits_{\omega}^{\infty} e^{-\lambda z} u(\lambda) d\lambda = \int\limits_{0}^{\omega} e^{-\lambda z} u(\lambda - i0) d\lambda - \int\limits_{-i\infty}^{0} e^{-\lambda z} u(\lambda) d\lambda = i_1(\lambda) + i_2(\lambda),$$

определяющем ее продолжение в $\{z : Im z > 0\}$. По теореме Винера – Пэли $i_2(z) \in H^2(Im z > 0)$, а целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) $i_1(z)$ суммируема с квадратом на мнимой оси. Отсюда сразу следует $e^{\omega z} l(z + i\pi) \in E^2(G_\pm)$. Аналогично $e^{\omega z} l(z - i\pi) \in$ $\in E^2(G_\pm)$.

Второе из соотношений (21) следует из представления (9) ядра $\mathcal{J}$, известных свойств интеграла типа Коши, а также представления для $L_{(2)}$ в левой полуплоскости:

$$L_{(2)}(z) = \int\limits_{(-\infty - i0, \omega - i0)} e^{-\lambda z} \frac{1}{2i} \int\limits_{0}^{\pi} f(t) e^{\varphi(t)(\sqrt{\lambda^2 - \omega^2} - \lambda)} [e^{\lambda \zeta_+(t)} - e^{\lambda \zeta_-(t)}] dt\, d\lambda. \tag{22}$$

Таким образом, неполнота системы $\mathcal{R}(\varphi, \psi, \omega)$ в $L^2(0, \pi)$ влечет существование функции $\Phi \in E^2(G_\pm)$, удовлетворяющей условиям (18) – (20). Верно и обратное: если для некоторых функций $f \in L^2(0, \pi)$, $\varkappa \in L^2(-\infty, a_0)$ краевая задача (18) – (20) разрешима в классе $E^2(G_\pm)$, то функция f порождает функционал в $L^2(0, \pi)$, ортогональный системе $\mathcal{R}(\varphi, \psi, \omega)$.

Зафиксируем конформное отображение $w = W(z)$ области $\mathcal{D}^-$ на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ такое, что: $i)$ $W(\bar z) = \overline{W(z)}$; $ii)$ кривые $\Gamma_\pm$ переходят в $[0,1]$; $iii)$ лучи $(-\infty, q_0]\pm i\pi$ переходят в $(-\infty, 0]$; $iv)$ луч $(-\infty, 0]$ переходит в $[1, \infty)$.

Производная $W'(z)$ непрерывна вплоть до $\partial\mathcal{D}^-$, за исключением точек $a=\varphi(0)-i\pi$; $b=\varphi(0)$; $c=\varphi(0)-i\pi$ и ∞. Обозначим соответственно через $\pi\theta_a$, $2\pi\theta_b$ и $\pi\theta_c(=\pi\theta_a)$ внутренние углы области $\mathcal{D}^-$ в этих точках. Поведение отображения W в этих точках и в бесконечности описывается такими соотношениями:*

$$W(z)-1 \asymp (z-b)^{1/\theta_b}; \quad W'(z) \asymp (z-b)^{\frac{1}{\theta_b}-1}, \quad z\to b, \quad z\in\mathcal{D}^-; \tag{23}$$

$$W(z) \asymp (z-a)^{1/\theta_a}; \quad W'(z) \asymp (z-a)^{\frac{1}{\theta_a}-1}, \quad z\to a, \quad z\in\mathcal{D}^-; \tag{24}$$

$$W(z)-1 \asymp (z-c)^{1/\theta_c}; \quad W'(z) \asymp (z-c)^{\frac{1}{\theta_c}-1}, \quad z\to c, \quad z\in\mathcal{D}^-; \tag{25}$$

$$W(z) \asymp W'(z) \asymp e^{-z}, \quad z\to\infty, \quad z\in\mathcal{D}^-. \tag{26}$$

Положим $\Psi(w):=\Phi(W_-(w))$. Из (18) – (20) следует, что

$$\Psi(v+i0)-\Psi(v-i0)=\pi A(\eta)x(\eta)-\frac{1}{2i}\int_\eta^{a_0} x(\xi)B(\eta-\xi,\xi)\,d\xi, \tag{27}$$

$$v=W(\eta\pm i\pi)\in(-\infty, 0], \ \eta<a_0;$$

$$\Psi(u\pm i0)=\pi f(t)A(\varphi(t))\frac{dt}{d\zeta_\mp}\mp\int_t^\pi f(\tau)B(\zeta_\mp(t)-\zeta_\mp(t),\varphi(\tau))\,d\tau, \tag{28}$$

$$u=W(\zeta_+(t))\in[0,1], \quad t\in[0,\pi],$$

$$\Psi(v+i0)-\Psi(v-i0)=-2\int_0^\pi f(\tau)\int_{-\omega}^{\omega} e^{-\lambda\eta}\sin[\lambda\varphi(\tau)]\sin[\varphi(\tau)\sqrt{\omega^2-\lambda^2}]\,d\lambda\,d\tau,$$
$$v=W(\eta\pm i\pi)\in[1,\infty), \ \eta<\varphi(0). \tag{29}$$

Из (27) следует, что $\Psi(w)$ продолжается до голоморфной в $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ функции. Из леммы 4 следует

$$\sup_{0\le\varphi\le 2\pi}\left\{\int_0^\infty |\Psi(\rho e^{i\varphi})|^2 p(\rho e^{i\varphi})\,d\rho\right\}<\infty, \tag{30}$$

где вес $p(w)$ таков, что

$$p(w)\asymp |w|^{-(1-1/\theta_a)}, \ w\to 0; \quad p(w)\asymp |1-w|^{-(1-1/\theta_b)}, \ w\to 1;$$

---

* Знак $\asymp$ обозначает, что отношение модулей левой и правой части заключено между двумя положительными константами.

$$\rho(w)\asymp|w|^{-1-2\omega},\ w\to\infty;\quad \forall\varepsilon>0,\ \rho(w)\asymp 1,\ |w|\in(\varepsilon,\varepsilon^{-1}),\ |w-1|>\varepsilon. \tag{31}$$

Решение задачи (28) – (30) будем строить в виде $\Psi=\Psi_0+\Phi$, где Ψ_0 – голоморфна в $\mathbb{C}\setminus[0,1]$, Φ – голоморфна в $\mathbb{C}\setminus[1,\infty)$, выполнено условие (30) с заменой Ψ на Ψ_0 и Φ соответственно и при $v=W(\eta)\in(1,\infty)$:

$$\Omega(v):=\Phi(v+i0)-\Phi(v-i0)=$$
$$=-2\int_0^\pi f(\tau)\int_{-\omega}^{\omega}e^{-\lambda\eta}\sin[\lambda\varphi(\tau)]\sin[\varphi(\pi)\sqrt{\omega^2-\lambda^2}]\,d\lambda\,d\tau, \tag{32}$$

а при $u=u(t)=W(\zeta_+(t))\in[0,1]$ соответственно

$$\Psi_0(u\pm i0)+\Phi(u)=\pi f(t)A(\varphi(t))\frac{dt}{d\zeta_\pm}+$$
$$\pm\frac{1}{2i}\int_t^\pi f(\tau)B(\zeta_\mp(t)-\zeta_\mp(\tau),\varphi(\tau))\,d\tau. \tag{33}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая

<u>Теорема А</u> ([3], теорема 4.1 гл. 1). Пусть заданы число $q\in(1,\infty)$, кусочно гладкая кривая l, уходящая на бесконечность, точки t_1, $t_2,\dots,t_n\in l$ и числа $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n,\beta_\infty$ такие, что $t_i\neq t_k$, $i\neq k$ и $\beta_j\in(-1,q-1)$, $j=1,\dots,n,\infty$. Оператор сингулярного интегрирования $S: F\mapsto SF(t)=\frac{1}{\pi}\int_l F(\tau)(t-\tau)^{-1}d\tau$ ограничен в пространстве $L^q(l,\rho)$, где $\rho(t)=|t|^{\beta_\infty-\beta_1-\dots-\beta_n}\prod_1^n|t-t_j|^{\beta_j}$.

Из (30) с заменой Ψ на Φ и (31) следует

$$\int_1|\varphi(w)|^2|w-1|^{-1+1/\theta_\delta}|dw|<\infty;\quad \int^\infty|\varphi(w)|^2|w|^{-2w-1}dw<\infty. \tag{34}$$

Выберем $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ так, чтобы соблюдалось $-1+\theta_\delta^{-1}\in(-1+2n,1+2n)$[*]. Тогда $\Phi(w)$ определяется из соотношения

$$\Phi(w)=\frac{w}{(w-1)^n}\left[\frac{1}{2i\pi}\int_1^\infty\frac{\Omega(v)(v-1)^n}{v}\cdot\frac{dv}{v-w}+P(w)\right]+c_0, \tag{35}$$

где $P(w)$ – полином, $\deg P\le n-1$, $c_0\in C$. Пусть для определенности $n=0$ (случай $n>0$ аналогичен). Имеем

---

[*] В случае, когда величина $-1+\theta_\delta^{-1}$ попадает на конец одного из этих интервалов, приходится провести более громоздкую конструкцию и исследовать функции $f\in L^p(0,\pi)$, удовлетворяющие соотношению (1) при $p<2$. Близкое рассуждение проведено в [4] при доказательстве теоремы 2.3 § 3.

$$\Phi(w)=\frac{w}{2i\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\Omega(v)}{v}\frac{dv}{v-w}+c_0. \qquad (36)$$

Функция φ_0 восстанавливается по скачку на отрезке $[0,1]$, вычисляемому из (33). Считая для определенности что $-1+\theta_a^{-1}\in(-1,1)$ и определив для каждого $u\in[0,1]$ число $t_u\in[0,\pi]$ из равенства $u = W(\zeta_+(t_u))$, имеем

$$\varphi_0(w)=\frac{1}{2i}\int\limits_0^1 f(t_u)A(\varphi(t_u))\left(\frac{dt}{d\zeta_-}-\frac{dt}{d\zeta_+}\right)\Bigg|_{t=t_u}\frac{du}{u-w}+c_1-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{t_u}^\pi f(\tau)\left[B(\zeta_-(t_u)-\zeta_-(\tau),\ \varphi(\tau))+B(\zeta_+(t_u)-\zeta_+(\tau),\varphi(\tau))\right]d\tau\frac{du}{u-w},$$

где c_1 – произвольная константа. Отсюда определяются значения $\varphi_0(v+i0)$. Подставляя их в (33), получаем уравнение относительно f:

$$\left[-\frac{\pi}{2}f(t_u)A(\varphi(t_u))\left(\frac{dt}{d\zeta_-}+\frac{dt}{d\zeta_+}\right)\Bigg|_{t=t_u}+\frac{1}{2i}\int\limits_0^1 f(t_s)A(\varphi(t_s))\left(\frac{dt}{d\zeta_-}-\frac{dt}{d\zeta_+}\right)\Bigg|_{t=t_s}\frac{ds}{s-u}\right]-$$

$$-\left\{\frac{1}{4i}\int\limits_{t_u}^\pi f(\tau)\left[B(\zeta_-(t_u)-\zeta_-(\tau),\ \varphi(\tau))-B(\zeta_+(t_u)-\zeta_+(\tau),\ \varphi(\tau))\right]d\tau-\right.$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{t_s}^\pi f(\tau)\left[B(\zeta_-(t_s)-\zeta_-(\tau),\varphi(\tau))-B(\zeta_+(t_s)-\zeta_+(\tau),\ \varphi(\tau))\right]d\tau\frac{ds}{s-u}+$$

$$\left.+\frac{u}{2\pi}\int\limits_1^\infty\frac{\Omega(v)}{v}\frac{dv}{v-u}\right\}=\left[T_1f+T_2f\right]+\left\{K_1f+K_2f+K_3f\right\}=0. \qquad (37)$$

Здесь Ω определена равенством (32), а T_1, T_2, K_1, K_2, K_3 – операторы из $L^2(0,\pi)$ в $L^2((0,1)\ ,\ \rho_1)$, где $\rho_1(u)=u^{-1+\theta_a^{-1}}(1-u)^{-1+\theta_b^{-1}}$. Таким образом, каждая функция $f\in L^2(0,\pi)$, удовлетворяющая условиям (I), принадлежит ядру оператора

$$N=T+K: L^2(0,\pi)\to L^2((0,1),\rho_1),\ T=T_1+T_2,\quad K=K_1+K_2+K_3. \qquad (38)$$

Покажем, что оператор Γ обратим, а K – компактен, откуда и следует нетеровость оператора N, а из нее и утверждение теоремы. Компактность K_1 и K_2 очевидна. Оператор K_3 является суперпозицией операторов

$$K_{3,1}: f \mapsto f_1(\lambda) = \int_0^\pi f(\tau) \sin[\psi(\tau)\lambda] \sin[\varphi(\tau)\sqrt{\omega^2-\lambda^2}]\,d\tau,\ \lambda \in (-\omega, \omega);$$

$$K_{3,2}: f_1 \mapsto f_2(\eta) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{-\lambda\eta} f_1(\lambda)\,d\lambda, \qquad \eta \in (-\infty, \varphi(0)];$$

$$K_{3,3}: f_2 \mapsto \mathcal{R}(v), \quad v \in (1, \infty), \quad v = W(\eta);$$

$$K_{3,4}: \mathcal{R} \mapsto \varphi(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_1^\infty \mathcal{R}(v)\left[\frac{1}{v-u} - \frac{1}{v}\right]dv, \quad u \in [0,1].$$

Следующие утверждения тривиальны или доказываются с помощью стандартных рассуждений: $i)$ оператор $K_{3,1}$ компактен из $L^2(0,\pi)$ в $L^2(-\omega,\omega)$; $ii)$ оператор $K_{3,2}$ ограничен из $L^2((-\omega,\omega)$ в $L^2((-\infty, a_0),$ $e^{2\omega x})$; $iii)$ оператор $K_{3,3}$ ограничен из $L^2((-\infty, a_0),\ e^{2\omega x})$ в $L^2((1,\infty),\rho)$, где вес ρ описывается (31); $iv)$ оператор $K_{3,4}$ ограничен из $L^2((1,\infty),\rho)$ в $L^2((0,1),\rho_1)$, поэтому K компактен и для окончания доказательства достаточно установить обратимость оператора Γ или, что эквивалентно (см. замечание к лемме 1), обратимость оператора $\hat{\Gamma}: L^2(0,\pi) \to L^2((0,1),\rho_1)$, определенного соотношением

$$\hat{\Gamma}: g \mapsto -\frac{1}{2} g(t_u)\left(\frac{dt}{d\zeta_-} + \frac{dt}{d\zeta_+}\right)\Big|_{t=t_u} + \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 g(t_s)\left(\frac{dt}{d\zeta_-} - \frac{dt}{d\zeta_+}\right)\Big|_{t=t_s}\frac{ds}{s-u}.$$

Этот оператор обратим, он возникает при исследовании полноты и минимальности системы $\mathcal{K}(\varphi,\psi;0)$ в $L^2(0,\pi)$ по схеме, изложенной в [4], причем обратимость $\hat{\Gamma}$ эквивалентна полноте и минимальности $\mathcal{K}(\varphi,\psi;0)$, которые, в частности, следуют из результатов [1,4] (см. также теорему 2.1 в [4]). Теорема 1 доказана.

3. Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 система $\mathcal{K}(\varphi,\psi;\omega)$ минимальна в $L^2(0,\pi)$ после, быть может, изъятия конечной подсистемы.

Доказательство проводится методами, близкими к предложенным для доказательства теоремы 1. Задача о минимальности системы $\mathcal{K}(\varphi,\psi;\omega)$ по схеме [4, § 2] сводится к неоднородным краевым задачам, приводящим к уравнениям вида $Nf = g$, где N определен соотношением (38). Из нетеровости N следует разрешимость этих уравнений для всех функций g, принадлежащих пространству конечной коразмерности, откуда и следует утверждение теоремы 2.

1. Шкаликов А.А. Об одной системе функций // Мат. заметки. – 1975. – 18, № 6. – С. 855–860.
2. Любарский Ю.И., Ткаченко В.А. О системе $\{e^{anx}\sin nx\}_1^\infty$ // Функциональный анализ и его приложения. – 1984. – 18, № 2. – С. 69–70.
3. Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных операторов. – Кишинев : Штиинца, 1973. – 426 с.
4. Любарский Ю.И., Ткаченко В.А. Полнота и минимальность специальных систем функций на множествах в комплексной плоскости I, II. – Харьков, 1985. – 35 с.; 46 с. – (Препринт / АН УССР. ФТИНТ; № 33, 34).
5. Привалов И.И. Граничные свойства аналитических функций. – М. : ГИТТЛ, 1950. – 336 с.
6. Костюченко А.Г., Шкаликов А.А. К спектральной теории квадратичных пучков операторов // Усп. мат. наук. – 1984. – 39, вып. 5. – С. 106–107.

УДК 512.66

К.И.Бейдар, А.А.Столин

О ГРУППЕ ПИКАРА ПРОЕКТИВНОГО ПРЕДЕЛА КОЛЕЦ

Пусть $A = \varprojlim (A_i, \psi_i)$ – проективный предел, где A_i – коммутативное кольцо с 1, а $\psi_i : A_i \to A_{i-1}$ – сюръективный гомоморфизм колец, $i = 1, 2, \ldots$ Пусть $\pi_i : A \to A_i$ – канонический сюръективный гомоморфизм и Pic – функтор Пикара, отображающий категорию коммутативных колец с единицей в категорию абелевых групп. Из коммутативности диаграмм

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\pi_{i-1}"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ A_{i-1} & & A_i \arrow[ll, "\psi_i"'] \end{tikzcd}$$

вытекает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & Pic(A) \arrow[dl, "Pic(\pi_{i-1})"'] \arrow[dr, "Pic(\pi_i)"] & \\ Pic(A_{i-1}) & & Pic(A_i) \arrow[ll, "Pic(\psi_i)"'] \end{tikzcd}$$

Поэтому существует гомоморфизм абелевых групп $Pic\,A \to \varprojlim (Pic\,A_i), Pic\,\psi_i)$. Обозначим через $\dim A$ – размерность Крулля кольца A

(см. [1], гл. III, § 3). Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $A = \lim (A_i, \psi_i)$ – проективный предел семейства коммутативных колец с единицей и сюръективных гомоморфизмов. Предположим, что размерность Крулля колец A_i ограничена в совокупности числом d, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда гомоморфизм $\varphi : Pic\, A \to \lim (Pic\, A_i, Pic\, \psi_i)$ является эпиморфизмом абелевых групп.

Теорема 2. Пусть $A = \lim (A_i, \psi_i)$ – это проективный предел семейства коммутативных колец с единицей и сюръективных гомоморфизмов. Пусть $U(A_i)$ – группа обратимых элементов колец A_i. Предположим, что $\psi_i : U(A_i) \to U(A_{i-1})$ – сюръективный гомоморфизм групп. Тогда φ является мономорфизмом абелевых групп.

Замечание. Каждый конечно-порожденный проективный модуль P над кольцом A выделяется прямым слагаемым в свободном модуле F конечного ранга. Обозначим через $V = V_P$ матрицу канонической проекции модуля F на прямое слагаемое P. Ясно, что $V^2 = V$ и $P = VF$. Пусть G – свободный A – модуль ранга n, $M_n(A)$ – кольцо $n \times n$ – матриц над кольцом A и $U \in M_n(A)$. Будем говорить, что матрица U соответствует проективному модулю P, если $U^2 = U$ и $UG \cong P$. Обозначим через $U^{(k)}$, где k – положительное целое число, матрицу размера $(n+k) \times (n+k)$, полученную из матрицы U добавлением справа k нулевых столбцов, а снизу – k нулевых строк. Ясно, что матрицы V и $V^{(k)}$ соответствуют модулю P. Очевидно, любая матрица, сопряженная с матрицей V, также соответствует модулю P. Будем говорить, что матрица $U \in M_n(A)$ имеет ранг не больше k, если все миноры матрицы k, имеющие порядок больше k, равны нулю. Обозначим через $tr\, U$ след матрицы U.

Лемма 1. Пусть A – коммутативное кольцо с единицей и $U \in M_n(A)$. Тогда матрица U соответствует проективному A-модулю ранга 1 если и только если $U^2 = U$, $tr\, U = 1$ и $rg\, U \leq 1$.

Доказательство. Пусть m – максимальный идеал кольца A; A_m – локализация кольца A относительно максимального идеала m и $\varphi_m : A \to A_m$ – канонический гомоморфизм колец. Далее, пусть F – свободный A-модуль ранга n, $P = UF$.

Гомоморфизм φ_m индуцирует гомоморфизм $\varphi_m = M_n(\varphi_m) : M_n(A) \to M_n(A_m)$. Очевидно, что $P_m = U^{\varphi_m} F_m$, $(U^{\varphi_m})^2 = U^{\varphi_m}$, $rg\, U^{\varphi_m} \leq rg\, U$, $tr\, U^{\varphi_m} = (tr\, U)^{\varphi_m}$. Если P – проективный модуль ранга 1, то P_m – свободный A_m-модуль. Поэтому $rg\, U^{\varphi_m} \leq 1$ и $tr\, U^{\varphi_m} = 1$ для всех m. Значит, $rg\, U \leq 1$ и $tr\, U = 1$. Наоборот, пусть $rg\, U \leq 1$, $tr\, U = 1$ и $U^2 = U$. Тогда P – проективный A-модуль. Так как $rg\, U^{\varphi_m} \leq rg\, U \leq 1$, то любые два элемента A_m -модуля P_m линейно зависимы. Из равенства $tr\,U^{\varphi_m}=\varphi_m(trU)=1$ следует, что $U^{\varphi_m}\neq 0$ и $P_m\neq 0$. Но P_m – свободный A_m -модуль. Значит, P_m – свободный A_m -модуль ранга 1.

Лемма 2. Пусть A – коммутативное кольцо с 1, P – проективный A -модуль ранга 1. Предположим, что $\dim A\le d$. Тогда существует матрица $V\in M_{d+2}(A)$, соответствующая модулю P. Если матрица $U\in M_{d+2}(A)$ также соответствует модулю P, то $U=X^{-1}VX$, где $X\in GL(d+2,A)$.

Доказательство. Выберем наименьшее возможное число $n\ge d+2$, для которого существует проективный A-модуль Q такой, что $P\oplus Q$ – свободный A-модуль ранга n. Предположим, что $n>d+2$. Тогда ранг $rg\,Q$ модуля Q удовлетворяет соотношению $rg\,Q=n-rg\,P=n-1>d+2$. По теореме Серра модуль Q содержит унимодулярный элемент (см. [1], гл. IV, теорема 2.5, следствие 2.7). Поэтому $Q\cong Q_0\oplus A$. Значит, $A^n=P\oplus Q\cong P\oplus Q_0\oplus A$. Так как $rg(P\oplus Q_0)=n-1$, то $P\oplus Q_0\cong A^{n-1}$ (см. [1], гл. IV, следствие 3.5). Получили противоречие с выбором числа n. Итак, $n=d+2$ и $P\oplus Q\cong A^{d+2}$. Предположим, что $P\oplus R\cong A^{d+2}$. Пусть U и V – матрицы проекций свободного A-модуля A^{d+2} на первое слагаемое, соответствующие разложениям $P\oplus Q\cong A^{d+2}$ и $P\oplus R\cong A^{d+2}$. Так как $rg\,Q=d+1>d$, то $Q\cong R$ (см. [1], гл. IV, следствие 3,5). Пусть $\alpha: Q\to R$-изоморфизм A-модулей. Тогда $id_P\oplus\alpha: A^{d+2}\to A^{d+2}$ – также изоморфизм. Пусть X – его матрица, тогда $U=X^{-1}VX$.

Доказательство теоремы 1. Превратим A_{i-1} в A_i -модуль, полагая $a*b=\varphi_i(a)\,b$ для всех $a\in A_i$, $b\in A_{i-1}$. Положим $\varphi_i^*(P)=P\otimes_{A_i}A_{i-1}$, где P – проективный A_i -модуль ранга 1. Очевидно, $\varphi_i^*(P)$ – проективный A_{i-1} -модуль ранга 1. Каждый элемент группы $\varprojlim(Pic\,A_i, Pic\,\varphi_i)$ представляет собой набор $\{P_i,\ i=1,2,\dots\}$, где P_i – проективный A_i -модуль ранга 1 и $\varphi_i^*(P_i)\cong P_{i-1}$. Достаточно найти такой проективный A- модуль P ранга 1, что $\pi_i^*(P)\cong P_i$ для всех $i=1,2,\dots$. В силу леммы 2 существует матрица $V_i\in M_{d+2}(A_i)$, соответствующая A_i -модулю P_i. Пусть $\varphi_i=M_n(\varphi_i): M_n(A_i)\to M_n(A_{i-1})$. Тогда по лемме 2 следует $V_i^{\varphi_i}=X_{i-1}^{-1}V_{i-1}X_{i-1}$, где $X_{i-1}\in GL(d+2,A_{i-1})$. Обозначим через Y_i $(2d+4)\times(2d+4)$ -матрицу, у которой по диагонали стоят матрицы X_i и X_i^{-1}, а все остальные элементы – нулевые. Очевидно, что $(V_i^{(d+2)})^{\varphi_i}=Y_{i-1}^{-1}V_{i-1}^{(d+2)}Y_{i-1}$.
По лемме Уайтхеда $Y_i\in E_{2d+4}(A_i)$, где $E_{2d+4}(A_i)$ – подгруппа группы $GL(2d+4,A_i)$, порожденная элементарными матрицами (см. [1], гл. V, предложение 1.7). Ясно, что $(E_{2d+4}(A_i))^{\varphi_i}=E_{2d+4}(A_{i-1})$. Положим $U_1=V_1^{(d+2)}$. Выберем $Z_2\in E_{2d+4}(A_2)$ так, чтобы $Z_2^{\varphi_2}=Y_1$.

Положим $U_2 = Z_2 V_2^{(d+2)} Z_2^{-1}$, $W_2 = Z_2 Y_2$. Ясно, что $W_2 \in E_{2d+4}(A_2)$, $W_2^{-1} U_2 W_2 = Y_2^{-1} V_2^{(d+2)} Y_2$ и $U_2^{\varphi_2} = Z_2^{\varphi_2} (V_2^{(d+2)})^{\varphi_2} (Z_2^{\varphi_2})^{-1} = V_1^{(d+2)}$. Предположим теперь, что для всех $k < n$ найдены матрицы $U_k \in M_{2d+4}(A_k)$, соответствующие модулям P_k, и матрица $W_{n-1} \in E_{2d+4}(A_{n-1})$ такие, что $U_k^{\varphi_k} = U_{k-1}$ для всех $k < n$ и $(V_n^{(d+2)})^{\varphi_n} = W_{n-1}^{-1} U_{n-1} W_{n-1}$. Выберем матрицы $Z_n \in E_{2d+4}(A_n)$ так, чтобы $Z_n^{\varphi_n} = W_{n-1}$. Положим $U_n = Z_n V_n^{(d+2)} Z_n^{-1}$. Ясно, что матрица U_n соответствует модулю P_n. Положим $W_n = Z_n Y_n$. Очевидно, что $W_n \in E_{2d+4}(A_n)$. Далее, $U_n^{\varphi_n} = Z_n^{\varphi_n} (V_n^{(d+2)})^{\varphi_n} (Z_n^{\varphi_n})^{-1} = U_{n-1}$ и $W_n^{-1} U_n W_n = Y_n^{-1} Z_n^{-1} (Z_n V_n^{(d+2)}) \times$ $\times Z_n^{-1} Z_n Y_n = Y_n^{-1} V_n^{(d+2)} Y_n = (V_{n+1}^{(d+2)})^{\varphi_{n+1}}$.

Из принципа математической индукции следует, что существует такая последовательность $(2d+4)\times(2d+4)$ -матриц $U_1, U_2, \ldots, U_n$, что $U_n^{\varphi_n} = U_{n-1}$ и каждая матрица U_n соответствует модулю P_n. Так как $M_{2d+4}(\varprojlim(A_i; \varphi_i)) = \varprojlim(M_{2d+4}(A_i), \varphi_i)$, то существует матрица $U \in M_{2d+4}(A)$, такая, что $U^{\alpha_i} = U_i$, где $\alpha_i = M_{2d+4}(\pi_i)$. Поскольку $U_i^2 = U_i$ и $tr\, U_i = 1$, $rg\, U_i \leq 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots$, то $U^2 = U$, $tr\, U = 1$ и $rg\, U \leq 1$ (см. лемму 1). Поэтому матрица A соответствует проективному A_i -модулю ранга 1. Очевидно, что матрица U^{α_i} соответствует A_i -модулю $\pi_i^*(P)$. Но $U^{\alpha_i} = U_i$. Поэтому $\pi_i^*(P) \cong P_i$, для всех $i = 1, 2, \ldots$. Следовательно, φ – эпиморфизм абелевых групп.

Доказательство теоремы 2. Пусть P – проективный модуль ранга 1 над кольцом A. Обозначим теперь $\pi_i^*(P)$ – проективный A_i -модуль $P \otimes_A A_i$, через $[P]$ – элемент группы $Pic\, A$, задаваемый модулем P. Предположим, что $[P] \in ker\, \varphi$. Тогда $\pi_i^*(P)$ – свободный A_i -модуль ранга 1 для всех. Покажем, что P – свободный A -модуль ранга 1. Действительно, пусть Q – такой проективный A -модуль, что $P \oplus Q \cong A^n$ и N – это $(n\times n)$ -матрица проекции модуля $P \oplus Q$ на прямое слагаемое P. Обозначим через e_n единичную $(n\times n)$ -матрицу, через V_n – матрицу размера $(n\times n)$, у которой в правом нижнем углу стоит 1, а все остальные элементы – нули. Ясно, что $P \oplus Q \oplus A \cong A^{n+1}$. Так как $\pi_i^*(A) = A_i$, то $\pi_i^*(P) \oplus \pi_i^*(Q) \oplus A_i \cong A_i^{n+1}$. Но $\pi_i^*(P) \cong A_i$. Поэтому существует автоморфизм σ_i модуля A_i^{n+1}, оставляющий элементы модуля $\pi_i^*(Q)$ неподвижными и переводящий A_i -модуль $\pi_i^*(P)$ в A_i -модуль A_i, а модуль A_i в A_i -модуль $\pi_i^*(P)$. Пусть X_i – матрица автоморфизма θ_i. Ясно, что $X_i \in GL(n+1, A_i)$. Очевидно, что гомоморфизм π_i : $: A \to A_i$ индуцирует гомоморфизм колец матриц $M_{n+1}(A) \to M_{n+1}(A_i)$. Обозначим этот гомоморфизм также π_i. Ясно, что матрица $N^{(1)}$ соответствует проективному модулю P, а матрица $\pi_i(N^{(1)})$ – проективному модулю $\pi_i^*(P)$. Кроме того, матрица $V_{n+1} \in M_{n+1}(A_i)$ соответствует модулю A_i и $\pi_i(N^{(1)}) = X_i^{-1} V_{n+1} X_i$. Положим

$$Z(n, A_i) = \{X \in GL(n, A_i) \,/\, X^{-1} V_n X = V_n\}.$$

Ясно, что

$$Z(n, A_i) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \Big/ \varepsilon \in U(A_i),\quad Y \in GL(n-1, A_i) \right\}.$$

Так как $\psi_i \pi_i = \pi_{i-1}$, то $\psi_i(X_i^{-1} V_{n+1} X_i) = \psi_i \pi_i (N^{(1)}) = \pi_{i-1}(N^{(1)}) = X_{i-1}^{-1} V_{n+1} X_{i-1}$. Поэтому $X_{i-1} \psi_i(X_i^{-1}) \in Z(n+1, A_i)$. Пусть $K_j \in M_{n_j}(A_i)$, $j = 1, 2, \dots, t$. Положим $m = n_1 + n_2 + \dots + n_t$. Обозначим через $diag(K_1, K_2, \dots, K_t)$ матрицу размера $m \times m$, у которой по диагонали стоят матрицы $K_1, K_2, \dots, K_t$, а все остальные элементы равны нулю. Положим $\tilde{X}_i = diag(X_i, X_i^{-1}, \varepsilon_{n+1})$. Тогда $\pi_i(N^{(2n+3)}) = \tilde{X}_i^{-1} V_{3n+3} \tilde{X}_i$. Покажем, что для всех $j \geq i > 1$ существуют матрицы $Y_{ji} \in Z(3n+3, A_j)$, такие, что $\psi_j(Y_{ii} \tilde{X}_i) = \tilde{X}_{i-1}$ и $\psi_j(Y_{ji}) = Y_{j-1,i}$ для всех $j > i$. Имеем

$$\tilde{X}_{i-1} \psi_i(\tilde{X}_i^{-1}) = diag(X_{i-1} \psi_i(X_i^{-1}),\ X_{i-1}^{-1} \psi_i(X_i),\ \varepsilon_{n+1}) =$$

$$= diag(X_{i-1} \psi_i(X_i^{-1}),\ \psi_i(X_i) X_{i-1}^{-1},\ \varepsilon_{n+1})\, diag(\varepsilon_{n+1}, F),$$

где $F \in E_{2n+2}(A_{i-1})$ (см. [А], гл. V, предложение 1.7). Так как $X_{i-1} \psi_i(X_i^{-1}) \in Z(n+1, A_{i-1})$, то $X_{i-1} \psi_i(X_i^{-1}) = diag(\varepsilon, Y)$, где $\varepsilon \in U(A_{i-1})$, $Y \in GL(n, A_{i-1})$. Поэтому

$$\tilde{X}_{i-1} \psi_i(X_i^{-1}) = diag(\varepsilon, Y, \varepsilon^{-1}, Y^{-1}, \varepsilon_{n+1})\, diag(\varepsilon_{n+1}, F) =$$

$$= diag(\varepsilon, \varepsilon_n, \varepsilon^{-1}, \varepsilon_{2n+1})\, diag(\varepsilon_1, G)\, diag(\varepsilon_{n+1}, F),$$

где $G \in E_{3n+2}(A_{i-1})$ (см. [А], гл. V, предложение 1.7). Итак,

$$\tilde{X}_{i-1} \psi_i(X_i^{-1}) = diag(\varepsilon, \varepsilon_n, \varepsilon^{-1}, \varepsilon_{2n+1})\, diag(\varepsilon_1, H),$$

где $H \in E_{3n+2}(A_{i-1})$.

Наше утверждение теперь следует из сюръективности гомоморфизмов $\psi_i : U(A_i) \to U(A_{i-1})$ и $\psi_i : E_{3n+2}(A_i) \to E_{3n+2}(A_{i-1})$. Положим $W_m = Y_{m1} Y_{m2} \dots Y_{mm} \tilde{X}_m$. Так как $Y_{mi} \in Z(3n+3, A_m)$, то $\pi_m(N^{(2n+3)}) = \tilde{X}_m^{(-1)} V_{3n+3} \tilde{X}_m = W_m^{-1} V_{3n+3} W_m$. Далее, $\varphi_m(W_m) = Y_{m-1,1} \dots Y_{m-1,m-1} \tilde{X}_{m-1} = W_{m-1}$. Переходя в равенстве $\pi_m(N^{(2n+3)}) = W_m^{-1} V_{3n+3} W_m$ к пределу, получаем, что $N^{(2n+3)} = W^{-1} V_{3n+3} W$. Следовательно, P – свободный модуль ранга 1 и φ – мономорфизм.

1. Басс Х. Алгебраическая К-теория. – М.: Мир, 1973. – 591 с.

УДК 517.925.71

В.Р.Смилянский

МНОЖИТЕЛИ СТОКСА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Уравнение для сфероидальных волновых функций здесь берется в виде

$$(z^2-1)^2 y'' + [c + b(z^2-1) + a(z^2-1)^2] y = 0 \,, \qquad (1)$$

где a, b, c – постоянные и $a \neq 0$. К этому виду соответствующее уравнение, взятое из § 16.9 в [1], приводится элементарной линейной заменой. Оно имеет одну иррегулярную особую точку первого ранга $z = \infty$ и две регулярные особые точки $z = \pm 1$. Уравнение (1) имеет следующую фундаментальную систему формальных решений:

$$\hat{\varphi}_k = e^{\lambda_k z} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{\nu k} z^{-\nu} \quad k = 1,2 \,, \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-a} \qquad (2)$$

(можно выбрать и $\lambda_{1,2} = \mp\sqrt{-a}$), где $C_{01} = C_{02}$.

Введем в комплексной z-плоскости линии Стокса $Re\, \lambda_1 z = Re\, \lambda_2 z$: $l_1, l_2, l_3, \dots$, где нумерация производится против часовой стрелки. Обозначим через s_ν сектор $l_\nu \le arg\, z < l_{\nu+1}$. Как известно [2,3], если зафиксировать C_{01}, C_{02} и нумерацию λ_k в выражении (2), то в каждом секторе s_ν существует единственная фундаментальная система решений $\varphi_{1\nu}(z)$, $\varphi_{2\nu}(z)$, для которой соответственно формальные решения $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$ являются асимптотическими представлениями при $|z| \to \infty$ $(arg\, z \in s_\nu)$. Обозначим такую систему в виде однострочной фундаментальной матрицы $\Phi_\nu(z)\{\varphi_{1\nu}(z), \varphi_{2\nu}(z)\}$. Пусть нумерация λ_1, λ_2 выбрана так, что $Re\, \lambda_1 z < Re\, \lambda_2 z$ в секторе $l_1 < arg\, z < l_2$. Существуют соотношения: $\Phi_1(z) = \Phi_2(z) D_1$, $\Phi_2(z) = \Phi_3(z) D_2$, где D_1, D_2 – постоянные неособые матрицы. Для решения так называемой боковой задачи связи в рассматриваемом случае нужно найти матрицы

D_1, D_2. Уравнение (1) является уравнением типа (6.1), взятом из [4].

Матрицы D_1, D_2 имеют вид

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1, & d \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ d, & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где d – единственный искомый множитель Стокса.

В настоящей работе элемент d выражен через значения в точке $z=0$ канонических решений y_1, y_2 (и их производных) уравнения (1) в окрестности регулярной особой точки $z=1$. Особые точки $z = \pm 1$ имеют одни и те же показатели: $q_{1,2} = (1 \pm \sqrt{1-c})/2$.

Если $(q_1 - q_2)$ не равны целому числу, то канонические решения имеют вид

$$y_1(z) = (z-1)^{q_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(q_1)(z-1)^\nu, \quad y_2(z) = (z-1)^{q_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(q_2)(z-1)^\nu,$$

$$\bar{y}_1(z) = (z+1)^{q_1} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{C}_\nu(q_1)(z+1)^\nu, \quad \bar{y}_2(z) = (z+1)^{q_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{C}_\nu(q_2)(z+1)^\nu. \tag{4}$$

Коэффициенты $C_\nu(q_k)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$[\beta_0(q_k+\tau)(q_k+\tau-1)+\gamma_0]C_\tau + [\beta_1(q_k+\tau-1)(q_k+\tau-2)+\gamma_1]C_{(\tau-1)} +$$

$$+ [\beta_2(q_k+\tau-2)(q_k+\tau-3)+\gamma_2]C_{(\tau-2)} + \gamma_3 C_{(\tau-3)} + \gamma_4 C_{(\tau-4)} = 0,$$

$$\tau = 1, 2, \dots; \ \beta_0 = 4, \quad \beta_1 = 4, \ \beta_2 = 1; \ \gamma_0 = c, \quad \gamma_1 = 2b,$$

$$\gamma_2 = 4a + b, \quad \gamma_3 = 4a, \quad \gamma_4 = a, \tag{5}$$

где $C_\omega(q_k) = 0$, если $\omega < 0$. Рекуррентные соотношения для коэффициентов $\bar{C}_\nu(q_k)$ получаются заменой в выражениях (5) β_k и γ_ν на $\bar{\beta}_k$ и $\bar{\gamma}_\nu$, где $\bar{\beta}_0 = \beta_0$, $\bar{\beta}_1 = -\beta_1$, $\bar{\beta}_2 = \beta_2$,
$\bar{\gamma}_0 = \gamma_0$, $\bar{\gamma}_1 = -\gamma_1$, $\bar{\gamma}_2 = \gamma_2$, $\bar{\gamma}_3 = -\gamma_3$, $\bar{\gamma}_4 = \gamma_4$.

Следовательно, $\bar{C}_\nu(q_k) = C_\nu(q_k)(-1)^\nu$.

Пусть $(q_1 - q_2) = \Delta > 0$ – целое, тогда

$$y_2(z) = \varepsilon y_1(z)\ln(z-1) + (z-1)^{q_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu (z-1)^\nu, \tag{6}$$

$$\bar{y}_2(z) = \bar{\varepsilon}\bar{y}_1(z)\ln(z+1) + (z+1)^{q_2} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu d_\nu (z+1)^\nu. \tag{7}$$

Здесь $\bar{d}_\nu = (-1)^\nu d_\nu$, так как решения $y_2(z)$, $\bar{y}_2(z)$ могут быть получены дифференцированием по параметру (метод Фробениуса). Этим же методом могут быть найдены константы ε, $\bar{\varepsilon}$. Покажем, что в рассматриваемом случае $\bar{\varepsilon} = (-1)^\Delta \varepsilon$. Подставляя в (1) решение (6) и учитывая, что функция $y_1(z)$ является решением уравнения (1), получаем следующие рекуррентные соотношения:

$$\varepsilon\{\beta_0[2(q_2+\tau)-1]C_{(\tau-\Delta)}(q_1)+\beta_1[2(q_2+\tau-1)-1]C_{(\tau-\Delta-1)}(q_1)+$$

$$+\beta_2[2(q_2+\tau-2)-1]C_{(\tau-\Delta-2)}(q_1)+[\beta_0(q_2+\tau)(q_2+\tau-1)+\gamma_0]d_\tau\,+$$

$$+[\beta_1(q_2+\tau-1)(q_2+\tau-2)+\gamma_1]d_{(\tau-1)}+[\beta_2(q_2+\tau-2)(q_2+\tau-3)+\gamma_2]d_{(\tau-2)}+$$

$$+\gamma_3 d_{(\tau-3)}+\gamma_4 d_{(\tau-4)}=0, \qquad \tau=1,2,\dots, \tag{8}$$

где C_ω , $d_\omega = 0$, если $\omega < 0$. Заменяя в соотношениях (8) β_1 , γ_1 , γ_3 , $C_\omega(q_1)$, d_ω соответственно на $-\beta_1$, $-\gamma_1$, $-\gamma_3$, $(-1)^\omega C_\omega(q_1)$, $(-1)^\omega d_\omega$, а также ε на $\bar{\varepsilon}$, получаем искомое выражение для $\bar{\varepsilon}$.

В случае $q_1 = q_2$ в выражениях (6), (7) надо положить $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = 1$, $d_0 = 0$. Введем однострочечные фундаментальные матрицы $X\{y_1(z), y_2(z)\}$ и $\bar{X}\{\bar{y}_1(z), \bar{y}_2(z)\}$. Ниже потребуется сшить фундаментальные матрицы X и $\bar{X}$, т.е. найти постоянную матрицу $\bar{A} = (\alpha_{jk})$ в соотношении $\bar{X} = X\bar{A}$. При сшивке будет предполагаться, что $-3\pi/2 \le \arg(z-1) < \pi/2$ для решений $y_1(z)$, $y_2(z)$ и $-3\pi/2 \le \arg(z+1) < \frac{\pi}{2}$ для решений $\bar{y}_1(z)$, $\bar{y}_2(z)$, т.е. что в точке $z=0$: $\arg(z-1) = -\pi$, $\arg(z+1) = 0$. С учетом этого (если необходимо) имеем: $q_1 - q_2 \ne$ целому числу.

$$y_k(0) = (-1)^{q_k}\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(q_k)(-1)^\nu, \quad y_k'(0) = (-1)^{q_k-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(q_k+\nu)C_\nu(q_k)(-1)^\nu,$$

$$\bar{y}_k(0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu(q_k)(-1)^\nu, \quad \bar{y}_k'(0) = \sum_{\nu=0}^{\infty}(q_k+\nu)C_\nu(q_k)(-1)^\nu, \tag{9}$$

$$k=1,2\ ;$$

когда $q_1 - q_2 = \Delta > 0$ – целое,

$$y_2(0) = -i\pi\varepsilon y_1(0) + (-1)^{q_2}\sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu(-1)^\nu, \qquad i = \sqrt{-1},$$

$$y_2'(0) = -i\pi\varepsilon y_1(0) - \varepsilon y_1(0) + (-1)^{q_2-1}\sum_{\nu=0}^{\infty}(q_2+\nu)d_\nu(-1)^\nu,$$

$$\bar{y}_2(0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu (-1)^\nu, \quad \bar{y}_2'(0) = \varepsilon\bar{y}_1(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty}(q_2+\nu)d_\nu(-1)^\nu \tag{10}$$

Если $q_1 = q_2$, то в выражениях (10) нужно положить $\varepsilon = \bar{\varepsilon} = 1$, $d_0 = 0$.

Теорема I. Если $q_1 - q_2 \neq$ целому числу, то

$$d = i[2 - (2\delta \sin\pi\sqrt{1-c})^2],$$

$$\delta = [y_1(0)y_2'(0) + y_1'(0)y_2(0)]/[y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0)], \tag{11}$$

где для $y_k(0)$, $y_k'(0)$ используются выражения (9).

Если $q_1 - q_2 = \Delta > 0$ – целое, то

$$d = ie^{i4\pi q_1}[2 + (2\pi\varepsilon\alpha_{21})^2],$$

$$\alpha_{21} = -2y_1(0)y_1'(0)e^{i\pi q_1}/[y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0)], \tag{12}$$

где для $y_2(0)$, $y_2'(0)$ используются выражения (10).

Если $q_1 = q_2$, то справедлива формула (12), причем в выражениях (10) и (12) следует положить $\varepsilon = 1$, $d_0 = 0$.

Доказательство. Пусть $\Phi(z)\{\varphi_1(z), \varphi_2(z)\}$ – любая фундаментальная матрица уравнения (1) и пусть значение z взято в окрестности точки $z = \infty$. Произведем простой обход точки $z = \infty$ в отрицательном направлении, тогда $\Phi(ze^{i2\pi}) = \Phi(z)V$, где V – постоянная неособая (циклическая) матрица. Как показано в [2], в рассматриваемом случае искомый множитель Стокса $d = i(\rho_1 + \rho_2)$, где ρ_1, ρ_2 – характеристические корни матрицы V, т.е. $d = i\,Sp\,V$.

Найдем циклическую матрицу для фундаментальной матрицы X. Обход обеих особых точек $z = \pm 1$ по контуру 2 эквивалентен обходу по контуру 1. Обход начинаем из точки $z = 0$, причем полагаем, что в этой точке в начале обхода $arg(z-1) = -\pi$. Начиная с точки $z = 0$, обойдем точку $z = 1$ по правой петле контура 2. Это дает $X \to XC = \bar{X}\bar{A}^{-1}C$, где C – постоянная неособая матрица и $arg(z+1) = 0$ в точке $z = 0$ для фундаментальной матрицы $\bar{X}$. Обходя далее точку $z = -1$ по левой петле, получаем $X \to \bar{X}C\bar{A}^{-1}C = X\bar{A}C\bar{A}^{-1}C$. Таким образом, $V = \bar{A}C\bar{A}^{-1}C$. Если $q_1 - q_2 \neq$ целому числу, то $A = \mathrm{diag}(e^{i2\pi q_1}, e^{i2\pi q_2})$. Если $q_1 - q_2 = \Delta > 0$ –

целое, то

$$C = e^{i2\pi q_1}\begin{pmatrix} 1, & i2\pi\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Если $q_1 = q_2$, то в (13) нужно положить $\varepsilon = 1$. Элементы α_{jk} матрицы $\bar{A}$ могут быть найдены из следующих уравнений:

$$y_1(0)\alpha_{11} + y_2(0)\alpha_{21} = \bar{y}_1(0), \quad y_1(0)\alpha_{12} + y_2(0)\alpha_{22} = \bar{y}_2(0),$$

$$y_1'(0)\alpha_{11} + y_2'(0)\alpha_{21} = \bar{y}_1'(0), \quad y_1'(0)\alpha_{12} + y_2'(0)\alpha_{22} = \bar{y}_2'(0). \tag{14}$$

Решая их и выражая в решениях величины $\bar{y}_k(0)$, $\bar{y}_k'(0)$ через линейные комбинации из величин $y_k(0)$, $y_k'(0)$, можно прямым вычислением показать, что $\det\bar{A} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$ при любых $q_{1,2}$. Выражая произведение $\alpha_{12}\alpha_{21}$ через $\alpha_{11}\alpha_{22}$, находим, что в случае, когда $q_1 - q_2 \neq$ целому числу

$$Sp\,\bar{A}C\bar{A}^{-1}C = 2 - 4\alpha_{11}\alpha_{22}\sin^2\pi(q_1 - q_2). \tag{15}$$

Если $q_1 - q_2 = \Delta > 0$ – целое, то выражение имеет вид

$$Sp\,\bar{A}C\bar{A}^{-1}C = \left[2 + (2\pi\varepsilon\alpha_{21})^2\right]e^{i4\pi q_1}. \tag{16}$$

Если $q_1 = q_2$, то справедлива формула (16), причем в ней и в выражениях (10) следует положить $\varepsilon = 1$, $d_0 = 0$. Подставляя в (15), (16) найденные из уравнений (14) и выраженные только через $y_k(0)$, $y_k'(0)$ элементы α_{jk}, получаем (11) и (12).

Введем матрицы

$$\Phi^*(z) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z), & \varphi_2(z) \\ \varphi_1'(z), & \varphi_2'(z) \end{pmatrix}, \quad \Phi_\nu^*(z) = \begin{pmatrix} \varphi_{1\nu}(z), & \varphi_{2\nu}(z) \\ \varphi_{1\nu}'(z), & \varphi_{2\nu}'(z) \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Асимптотическим представлением производных $\varphi_{1\nu}'(z)$, $\varphi_{2\nu}'(z)$ в секторе $S_\nu(|z| \to \infty)$ являются производные $\hat{\varphi}_1'(z)$, $\hat{\varphi}_2'(z)$. Очевидно, $\Phi_1^*(z) = \Phi_2^*(z)D_1$, $\Phi_2^*(z) = \Phi_3^*(z)D_2$, где D_1, D_2 – найденные матрицы.

Рассмотрим следующую систему из двух уравнений:

$$\vec{w}' = A(z)\vec{w}, \quad A(z) = A_0 + \frac{A_{-1,1}}{z-1} + \frac{A_{-1,2}}{z+1},$$

$$A_0 = diag\left\{a_{11}^{(0)}, a_{22}^{(0)}\right\}, \quad A_{-1,\nu} = \left(a_{jk}^{(-1,\nu)}\right)_1^2, \quad \nu = 1,2, \tag{18}$$

где A_0, $A_{-1,\nu}$ – постоянные матрицы. Система (18), как и уравнение (1), имеет одну иррегулярную особую точку первого ранга $x = \infty$ и две регулярные особые точки $x = \pm 1$. Система (18) имеет формальную матрицу-решение. Для нее ставится "боковая задача связи". Вследствие этого возникает необходимость установить условия, при которых фундаментальная матрица системы (18) может быть выражена через матрицу $\varphi^*(x)$, а значит, и через матрицы $\varphi_\nu^*(x)$. Для такого случая "боковая задача связи" уже решена выше.

Теорема 2. Пусть элементы матриц A_0, $A_{-1,\nu}$ удовлетворяют условиям

$$a_{11}^{(0)} \neq a_{22}^{(0)}, \qquad a_{12}^{(-1,1)} = -a_{12}^{(-1,2)} \neq 0, \tag{19}$$

$$\left(a_{11}^{(-1,1)} - a_{22}^{(-1,1)}\right) + \left(a_{11}^{(-1,2)} - a_{22}^{(-1,2)}\right) + 2 = 0, \tag{20}$$

$$a_{11}^{(-1,2)} - a_{22}^{(-1,2)} + 1 = a_{12}^{(-1,2)}\left(a_{21}^{(-1,1)} + a_{21}^{(-1,2)}\right), \tag{21}$$

тогда фундаментальная матрица $W(x)$ системы (18) выражается через матрицу $\varphi^*(x)$ следующим образом:

$$W(x) = P^*(x)\begin{pmatrix} \theta(x), & 0 \\ \theta'(x), & \theta(x) \end{pmatrix}\varphi^*(x), \tag{22}$$

$$P^*(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{2a_{12}^{(-1,1)}}{x^2-1} & , 0 \\ -a_{11}^{(0)} - \dfrac{a_{11}^{(-1,1)}+1}{x-1} - \dfrac{a_{11}^{(-1,2)}+1}{x+1} & , 1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\theta(x) = e^{\frac{1}{2}\left(a_{11}^{(0)} + a_{22}^{(0)}\right)x}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}\left(a_{11}^{(-1,1)} + a_{22}^{(-1,1)} + 1\right)},$$

$$\theta(x) = e^{\frac{1}{2}\left(a_{11}^{(0)} + a_{22}^{(0)}\right)x}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}\left(a_{11}^{(-1,1)} + a_{22}^{(-1,1)} + 1\right)}, \tag{24}$$

причем параметры a, b, c уравнения (1) имеют вид

$$a=-\left(a_{11}^{(0)}-a_{22}^{(0)}\right)^2/4, \tag{25}$$

$$b=\left(a_{22}^{(0)}-a_{11}^{(0)}\right)\left(a_{11}^{(-1,1)}-a_{22}^{(-1,1)}+1\right), \tag{26}$$

$$c=-\left\{\left[\left(a_{11}^{(-1,1)}-a_{22}^{(-1,1)}\right)^2-1\right]+4a_{12}^{(-1,1)}a_{21}^{(-1,1)}\right. . \tag{27}$$

Для доказательства приведем систему (18) к уравнению

$$v''-\left(b_{22}^{(0)}+\frac{b_{22}^{(-1,1)}}{x-1}+\frac{b_{22}^{(-1,2)}}{x+2}\right)v'-$$

$$-\left(b_{21}^{(0)}+\frac{b_{21}^{(-1,1)}}{x-1}+\frac{b_{21}^{(-2,1)}}{(x-1)^2}+\frac{b_{21}^{(-1,2)}}{x+1}+\frac{b_{21}^{(-2,2)}}{(x+1)^2}\right)v=0, \tag{28}$$

где $b_{21}^{(0)}$, $b_{22}^{(0)}$, $b_{21}^{(-k,\nu)}$, $b_{22}^{(-k,\nu)}$ – постоянные. Полагая $v_1=v$, $v_2=v'$, перейдем к эквивалентной уравнению (28) системе

$$\vec{v}'=B(x)\vec{v},\quad B(x)=B_0+\frac{B_{-1,1}}{x-1}+\frac{B_{-2,1}}{(x-1)^2}+\frac{B_{-1,2}}{x+1}+\frac{B_{-2,2}}{(x+1)^2},$$

$$B_0=\begin{pmatrix}0, & 1\\ b_{21}^{(0)}, & b_{22}^{(0)}\end{pmatrix}\qquad B_{-1,\nu}=\begin{pmatrix}0, & 0\\ b_{21}^{(-1,\nu)}, & b_{22}^{(-1,\nu)}\end{pmatrix}\qquad B_{-2,\nu}=\begin{pmatrix}0, & 0\\ b_{21}^{(-2,\nu)}, & 0\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Пусть $\vec{w}=P(x)\vec{v}$ $(\det P(x)\neq 0)$. Как известно, матрица $P(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$P'(x)=A(x)P(x)-P(x)B(x). \tag{30}$$

Матрицу $P(x)$ будем искать в виде

$$P(x)=P_0+\frac{P_{-1,1}}{x-1}+\frac{P_{-1,2}}{x+1},\qquad P_0=\left(p_{jk}^{(0)}\right),\quad P_{-1,\nu}=\left(p_{jk}^{(-1,\nu)}\right), \tag{31}$$

где первая строка постоянной матрицы P_0 и вторые столбцы постоянных матриц $P_{-1,\nu}$ тождественно равны нулю.

Лемма. Система (18) заменой $\vec{w}=P(z)\vec{v}$ приводится к системе (29), если $a_{12}^{(-1,1)}=-a_{12}^{(-1,2)}\neq 0$. В этом случае

$$p_{21}^{(0)}=-a_{11}^{(0)}p_{22}^{(0)}, \qquad p_{11}^{(-1,\nu)}=a_{12}^{(-1,\nu)}p_{22}^{(0)}, \qquad p_{21}^{(-1,\nu)}=-(a_{11}^{(-1,\nu)}+1)p_{22}^{(0)}, \tag{32}$$

$$b_{22}^{(-1,\nu)}=a_{11}^{(-1,\nu)}+a_{22}^{(-1,\nu)}+1, \qquad b_{21}^{(-2,\nu)}=-\det A_{-1,\nu}-a_{11}^{(-1,\nu)}-a_{22}^{(-1,\nu)}-1, \tag{33}$$

$$b_{21}^{(0)}=-a_{11}^{(0)}a_{22}^{(0)}, \qquad b_{22}^{(0)}=a_{11}^{(0)}+a_{22}^{(0)}, \tag{34}$$

$$b_{21}^{(-1,\nu)}=-a_{22}^{(0)}(a_{11}^{(-1,\nu)}+1)-a_{11}^{(0)}a_{22}^{(-1,\nu)}+$$

$$+\sum_{\eta=1}^{2}{}' \frac{1}{(z_\nu-z_\eta)}\Big[a_{12}^{(-1,\eta)}(a_{21}^{(-1,\nu)}-a_{21}^{(-1,\eta)})-a_{22}^{(-1,\nu)}(a_{11}^{(-1,\eta)}+1)-$$

$$-a_{22}^{(-1,\eta)}(a_{11}^{(-1,\nu)}+1)\Big], \qquad z_1=1, \quad z_2=-1, \tag{35}$$

где апостроф после знака суммы здесь и далее означает, что $\eta\neq\nu$.

Доказательство леммы. Подставляя в уравнение (30) выражения для матриц $A(z)$, $B(z)$, $P(z)$ (см. формулы (18), (29), (31)), приводя подобные члены, приравнивая коэффициенты при них нулю и учитывая, что $P_{-1,\nu}B_{-1,\eta}\equiv P_{-1,\nu}B_{-2,\eta}\equiv 0$ $(\nu=1,2;\ \eta=1,2)$, получаем следующую систему матричных уравнений:

$$A_0P_0-P_0B_0=0, \qquad P_{-1,\nu}+A_{-1,\nu}P_{-1,\nu}-P_0B_{-2,\nu}=0,$$

$$A_0P_{-1,\nu}+A_{-1,\nu}P_0-P_{-1,\nu}B_0-P_0B_{-1,\nu}+$$

$$+\sum_{\eta=1}^{2}{}' \frac{1}{z_\nu-z_\eta}\Big[A_{-1,\nu}P_{-1,\eta}+A_{-1,\eta}P_{-1,\nu}\Big]=0. \tag{36}$$

Обозначим через $\vec{p}_\nu$ ненулевые векторы-столбцы матриц $P_{-1,\nu}$ и через $\vec{p}_{0,1}$, $\vec{p}_{0,2}$ соответственно первый и второй столбцы матрицы P_0. Тогда, как легко видеть, система уравнений (36) может быть записана в следующей компактной форме:

$$A_0\vec{p}_{01}-b_{21}^{(0)}\vec{p}_{02}=0, \tag{37}$$

$$\vec{p}_{01}=(A_0-b_{22}^{(0)}E)\vec{p}_{02}=0, \tag{38}$$

$$\vec{p}_\nu = (A_{-1,\nu} - b_{22}^{(-1,\nu)} E)\vec{p}_{02}, \tag{39}$$

$$(A_{-1,\nu} + E)\vec{p}_\nu = b_{21}^{(-2,\nu)} \vec{p}_{02}, \tag{40}$$

$$A_0\vec{p}_\nu + A_{-1,\nu}\vec{p}_{01} - b_{21}^{(-1,\nu)}\vec{p}_{02} +$$

$$+ \sum_{\eta=1}^{2}{}' \frac{1}{x_\nu - x_\eta}\left[A_{-1,\nu}\vec{p}_\eta - A_{-1,\eta}\vec{p}_\nu\right] = 0, \tag{41}$$

где E – единичная матрица. Подставляя выражения для $\vec{p}_{01}$ из (38) и для $\vec{p}_\nu$ из (39) в уравнения (37), (40), (41), получаем следующую систему уравнений:

$$\left[A_{-1,\nu}^2 + A_{-1,\nu}(1 - b_{22}^{(-1,\nu)}) - (b_{22}^{(-1,\nu)} + b_{21}^{(-2,\nu)})E\right]\vec{p}_{02} = 0, \tag{42}$$

$$\left[A_0^2 - A_0 b_{22}^{(0)} - b_{21}^{(0)} E\right]\vec{p}_{02} = 0, \tag{43}$$

$$A_0(A_{-1,\nu} - b_{22}^{(-1,\nu)}E) + A_{-1,\nu}(A_0 - b_{22}^{(0)}E) - b_{21}^{(-1,\nu)}E +$$

$$+ \sum_{\eta=1}^{2}{}' \frac{1}{(x_\nu - x_\eta)}\left[A_{-1,\nu}(A_{-1,\nu} - b_{22}^{(-1,\eta)}E) + A_{-1,\eta}(A_{-1,\nu} - b_{22}^{(-1,\nu)}E)\right]\vec{p}_{02} = 0. \tag{44}$$

Необходимо, чтобы уравнение (42) тождественно удовлетворялось при любом векторе $\vec{p}_{02}$, т.е. чтобы выражение в квадратных скобках в (42) было тождественно равно нулю. Для этого по теореме Гамильтона – Кэли, должны выполняться соотношения (33). Так как по условию $p_{12}^{(0)} = 0$, то (43), (44) эквивалентны следующей скалярной системе уравнений: $g_\nu p_{22}^{(0)} = 0, \ (\nu = \overline{1,5})$, где коэффициенты g_ν не зависят от элемента $p_{22}^{(0)}$. Так как $p_{22}^{(0)} \neq 0$, то нужно положить равными нулю коэффициенты при $p_{22}^{(0)}$: $g_\nu = 0 \ (\nu = \overline{1,5})$. Из последней системы уравнений получаем выражения (34), (35) и условие $a_{12}^{(-1,1)} = -a_{12}^{(-1,2)}$. Далее с помощью (38), (39), (34), (33) находим (32).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Пусть система (18) уже приведена к уравнению (28) в соответствии с леммой. Стандартной заменой $v = \theta(x)y$ уравнение (28) приводится к виду

$$y'' + \left(F_0 + \frac{F_1}{x-1} + \frac{F_2}{(x-1)^2} + \frac{G_1}{x+1} + \frac{G_2}{(x+1)^2}\right)y = 0, \tag{45}$$

где коэффициенты F_0, F_ν, G_ν – известные функции параметров

$b_{21}^{(0)}$, $b_{22}^{(0)}$, $b_{21}^{(k,\nu)}$, $b_{22}^{(-k,\nu)}$ (а значит, в силу соотношений (33) - (35) также и элементов матриц A_0, $A_{-1,\nu}$). Уравнение (1) может быть представлено в форме (45) и для него

$$F_1 = -G_1 = \left(b - \frac{c}{2}\right)/2, \qquad F_2 = G_2 = c/4. \tag{46}$$

Следовательно, для того чтобы полученное из (28) уравнение (45) было уравнением для сфероидальных волновых функций, нужно потребовать: $F_1 = -G_1$; $F_2 = G_2$. Условие $F_1 = -G_1$ приводит к (20), а $F_2 = G_2$, с использованием (19) и (20), - к (21). Используя соотношения (46) и явные выражения коэффициентов F_0, F_ν, G_ν через элементы матриц A_0, $A_{-1,\nu}$, можно для рассматриваемого случая найти параметры a, b, c. Соответствующее вычисление дает выражения (25) - (27). Функция $\theta(x)$, первоначально выраженная через параметры $b_{22}^{(0)}$, $b_{22}^{(-1,\nu)}$, в окончательной форме приводится к виду (24). Полагая в (32) $\rho_{22}^{(0)} = 1$, получаем матрицу $\rho^*(x)$ в выражении (23).

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. - М. : Наука, 1967. - 299 с.
2. Смилянский В.Р. Некоторые свойства множителей Стокса. I // Исследования по теории операторов и их приложениям. - Киев : Наук. думка, 1979. - С. 97-107.
3. Смилянский В.Р. Некоторые свойства множителей Стокса. II // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения.- Киев : Наук. думка, 1981. - С. 107-117.
4. Смилянский В.Р. О множителях Стокса для различных систем линейных дифференциальных уравнений. I // Дифференц. уравнения. - 1970. - 6, № 3. - С. 483-496.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М. : Наука, 1967. - 575 с.

УДК 517.4

<ins>Оценки снизу показателя Ляпунова некоторых конечно-разностных уравнений с квазипериодическими коэффициентами</ins> / Л.А.Пастур // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций: Сб. науч. тр. – Киев : Наук. думка, 1987. – С. 3-12.

Описаны два метода оценки снизу показателей Ляпунова конечно-разностных уравнений (в первую очередь II порядка) типа дискретного аналога уравнения Шредингера, "потенциал" которого – тригонометрический полином, являющийся квазипериодической функцией дискретного аргумента или функцией несколько более общего вида. Один из методов основан на обобщенном преобразовании Фурье и рассмотрении наряду с заданным уравнением некоторого дуального к нему уравнения. Второй метод использует свойство субгармоничности показателя Ляпунова по параметрам, от которых потенциал зависит аналитически. Оба метода приводят к таким оценкам снизу, из которых вытекает положительность показателя Ляпунова при всех значениях спектрального параметра, если только амплитуда потенциала достаточно велика. Отсюда, в частности, вытекает отсутствие абсолютно непрерывного спектра у самосопряженного оператора, порождаемого указанными уравнениями в пространстве $l^2(\mathbb{Z})$. Библиогр.: 14 назв.

УДК 517.4

<ins>Эргодические свойства и существенная самосопряженность случайных матричных операторов</ins> / А.Л.Фиготин // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. Киев : Наук. думка, 1987. – С. 13-27.

Рассматриваются случайные метрические транзитивные симметрические матричные операторы в $l_2(\mathbb{Z}^d)$. Для широкого класса таких операторов установлена их существенная самосопряженность, а также доказано существование для них нормированной функции распределения собственных значений $N(\lambda)$, которая неслучайна. Дано представление функции $N(\lambda)$ через математическое ожидание диагонального элемента разложения единицы, отвечающего рассматриваемым операторам. Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.98

Спектральные инварианты оператора Шредингера на торе с константой связи при потенциале / М.В.Новицкий // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев: Наук. думка, 1987. - С. 27-32.

Доказано, что для оператора Шредингера $H=-\Delta+\beta V$ на двухмерном торе с константой связи $\beta>0$ при потенциале V по первым трем коэффициентам I_1, I_2, I_3 из разложения функции $sp[R_z(\beta)-R_z(0)]$ по степеням β при $\beta\downarrow 0$ в классе четных потенциалов можно восстановить V с точностью до четырех замен переменных специального вида.

УДК 517.9 + 519.219

О построении решений стохастической модифицированной системы уравнений Кармана / И.Д.Чуешов // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 32-43.

Доказано существование и единственность решения стохастической модифицированной системы уравнений Кармана, описывающей нелинейные колебания упругой пологой оболочки с учетом инерции вращения элементов. Изучаются свойства решений, установлена разрешимость соответствующего рассматриваемой системе прямого уравнения Колмогорова как в нестационарном, так и стационарном случаях. Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.946

Осреднение цилиндрических оболочек, ослабленных большим числом отверстий / И.Ю.Чудинович // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 43-57.

Предложена и обоснована процедура осреднения цилиндрических оболочек, ослабленных большим числом отверстий. Доказано, что при неограниченном увеличении числа отверстий, диаметры которых стремятся к нулю, решения уравнений равновесия при неизменной внешней нагрузке стремятся к решению некоторой осредненной системы дифференциальных уравнений. Библиогр.: 9 назв.

УДК 512.554.32 + 517.957

О классификации эволюционных уравнений второго порядка / В.Н.Робук // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций: Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 58-66.

На основе процедуры Уолквиста - Эстабрука разработан новый метод классификации нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных эволюционного типа по признаку наличия универсальной лиевской $F-G$ пары нулевого порядка $UFGLie$. Классификационный метод продемонстрирован на примере эволюционных уравнений второго порядка. Построены все уравнения диффузии, обладающие хотя бы одной нетривиальной лиевской $F-G$ парой нулевого порядка и одновременно для каждого такого уравнения перечислены все нетривиальные лиевские $F-G$ пары нулевого порядка. В результате решения задачи о построении фактор-алгебры Ли, свободной алгебры Ли по идеалу, порожденному образующими и набором коммутационных соотношений, удалось задать все $UFGLie$ для нелинейных уравнений диффузии в терминах базисных элементов и структурных констант соответствующих абстрактных алгебр Ли. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517 + 519.46

Внешняя сопряженность автоморфизмов из нормализатора потока / С.И.Безуглый // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 66-73.

Задача нахождения необходимых и достаточных условий внешнего сопряжения для действий счетной аменабельной группы, лежащей в нормализаторе потока, сводится к ранее решенной задаче о полной системе инвариантов внешнего сопряжения действий аменабельной группы из нормализатора базисного автоморфизма потока. Полученный результат обобщен на группы автоморфизмов аппроксимируемых измеримых группоидов. Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.986

Марковское свойство для состояний на алгебрах квазилокальных наблюдаемых квантовых систем / Г.Н.Жолткевич // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 74-77.

Введено определение марковости для состояний на алгебрах квазилокальных наблюдаемых квантовых решетчатых систем. Найдено характеристическое свойство марковости в терминах модулярного оператора состояния. Доказано, что введенное определение более общее, чем определения Аккарди и де Пиллиса. Библиогр.: 7 назв.

УДК 519.4

О когомологиях эргодического действия Γ-группы на однородном пространстве компактной группы Ли / С.Л.Гефтер // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций: Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 77-83.

Изучаются коциклы эргодических динамических систем, порожденных плотным вложением счетной группы со свойством Γ в компактную группу Ли. Вычислена одномерная группа когомологий для действия Γ-группы на однородном пространстве односвязной компактной полупростой группы Ли. Приведены примеры эргодических действий с непрерывными локально компактными группами когомологий. Библиогр.: 9 назв.

УДК 517.5

Абстрактная интерполяционная задача и теория расширений изометрических операторов / В.Э.Кацнельсон, А.Я.Хейфец, П.М.Юдицкий // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 83-96.

Сформулирована абстрактная классическая интерполяционная задача для сжимающих голоморфных в единичном круге оператор-функций. Получено основное матричное неравенство, адекватное исходной задаче. Дано описание множества решений, опирающееся на формулу резольвент Д.З.Арова. Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.982

Свойства Банаха - Сакса и задача трех пространств / М.И.Островский, А.Н.Пличко // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 96-105.

Рассматривается задача трех пространств для слабого свойства Банаха - Сакса. Доказано, что пространство без какого-либо свойства Банаха - Сакса имеет подпространство с базисом без того же свойства. Завершается работа доказательством того, что пространства без свойств Банаха - Сакса могут быть насыщены l_p. Библиогр.: 11 назв.

УДК 512.86

О покрытиях линейного пространства нетривиальными подпространствами / Ю.И.Любич // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С.105-108.

Рассматривается линейное пространство E над произвольным полем K. Через $c(E,K)$ обозначается наименьшая мощность покрытий пространства E нетривиальными подпространствами. Доказаны следующие утверждения: 1) если K конечно, то $c(E,K) = card(K+1)$; 2) если K бесконечно, E конечномерно, то $c(E,K) = card\,K$; 3) если K бесконечно, E бесконечномерно, то мощность $c(E,K)$ счетна.

УДК 519.2

Замечание к теореме Н.А.Сапогова об устойчивости разложений нормального распределения / Г.П.Чистяков // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С.108-116.

Показывается, что оценка в теореме Н.А.Сапогова остается точной и в случае специального выбора компонент $F_1(x)$, $F_2(x) = 1 - F_1(-x+0)$. Библиогр.: 1 назв.

УДК 517.5

Полнота и минимальность системы Рэлея / Ю.И.Любарский // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. научн. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 116-126.

Устанавливаются полнота и минимальность с конечным дефектом в пространстве $L^2(0,\pi)$ системы функций $\{e^{\psi(t)\sqrt{k^2-\omega^2}} \sin k\varphi(t)\}_{k=1}^{\infty}$ при некоторых естественных ограничениях на функции φ и ψ . Библиогр.: 6 назв.

УДК 512.66

О группе Пикара проективного предела колец / К.И.Бейдар, А.А.Столин // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С. 126-131.

Получены достаточные условия для того, чтобы канонический гомоморфизм группы Пикара проективного предела коммутативных колец с единицей и сюръективных гомоморфизмов в проективный предел групп Пикара этих колец был инъективным (сюръективным) гомоморфизмом. Библиогр.: 1 назв.

УДК 517.925.71

Множители Стокса для дифференциального уравнения для сфероидальных волновых функций / В.Р.Смилянский // Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций : Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1987. - С.131-140.

Для дифференциального уравнения множители Стокса "боковая задача связи" выражены через взятые в точке $x=0$ канонические решения уравнения в окрестности регулярной особой точки $x=1$. Библиогр.: 5 назв.

ОПЕРАТОРЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ
И ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Сборник научных трудов

Утверждено к печати ученым советом
Физико-технического института низких температур АН УССР

Редактор О.Н.Шевчук
Обложка художника В.С.Мельничука
Художественный редактор А.А.Ярошенко
Технический редактор Т.К.Валицкая
Корректоры В.И.Гломозда, С.И.Колесник

ИБ № 8084

Подп. в печ. 20.10.87. БФ 24346. Формат 60х84/16. Бум. офс. № 1. Офс. печ. Усл. печ. л. 8,60. Усл. кр.-отт. 8,83. Уч.-изд.л. 7,21. Тираж 1000 экз. Заказ 7-259 Цена 1 р. 40 к.

Оригинал-макет подготовлен в издательстве "Наукова думка". 252601 Киев 4, ул, Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев 4, ул. Репина, 4.