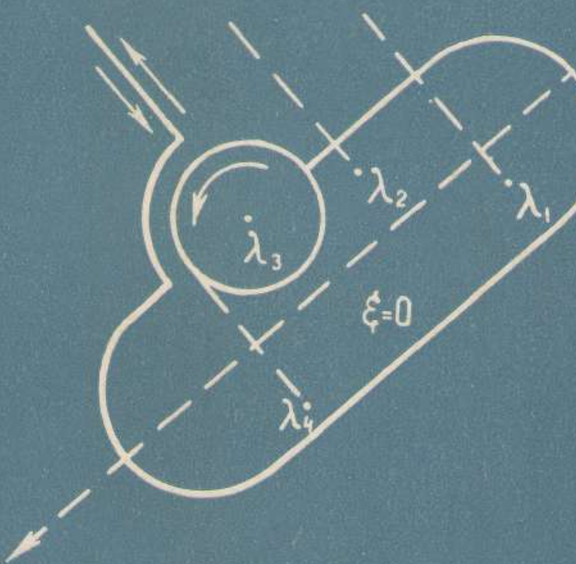
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА



АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

КИЕВ НАУКОВА ДУМКА 1982

УДК 517.9; 519.210

Функциональный анализ и прикладная математика: Сб. науч. тр. - Киев : Наук. думка, 1982. - 216 с.

Исследуются теория функций, теория операторов, дифференциальные уравнения и их приложения. Найдены интегральные представления типа Крейна - Мильмана для семейства функций, удовлетворяющих системе неравенств, изучены нули квазиполиномов многих переменных, предельный переход по малому параметру в матрицах Грина сингулярно возмущенных дифференциальных операторов. Доказано отсутствие абсолютно непрерывной компоненты спектра у случайных матриц Якоби. Рассмотрены задача о колебаниях идеальной жидкости, обратная задача рассеяния на оси для уравнения Штурма - Лиувилля с квадратично-убывающим потенциалом. На примере атома гелия предложена конструктивная реализация вариационного принципа.

Для специалистов в области теории функций, математического анализа и прикладной математики.

Редакция информационной литературы

Ф $\frac{1702070000-712}{М221(04)-82}$

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Давыдов Р.Н. Обратная задача рассеяния на оси для уравнения Штурма - Лиувилля с квадратично-убывающим потенциалом 3

Дольберг М.Д., Чудинович И.Ю. Предельный переход по малому параметру в матрицах Грина сингулярно возмущенных дифференциальных операторов 13

Жолткевич Г.Н. О конечнопорожденных группах размерности с одним состоянием 24

Еременко А.Э. Элементарное замечание о множестве целых решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений 31

Кацнельсон В.Э. Интерполяция "на спектре" в классе функций Стилтьеса (случай одного узла) 33

Копачевский Н.Д. О свойствах системы мод поверхностных волн во вращающейся идеальной жидкости 43

Копачевский Н.Д. О p-базисности системы корневых векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ 55

Кириченко Ю.В. Корректная разрешимость субпериодической краевой задачи в бесконечном брусе 71

Новицкий М.В. Вполне L-супергармонические функции, ассоциированные с последовательностью $\langle \lambda_n \rangle$ 81

Островская С.И. О конечных группах, обладающих вполне унитарным элементом 100

Потапов В.П. К теории матричных кругов Вейля 113

Ратнер А.М. Конструктивная реализация вариационного принципа на примере атома гелия 121

Ронкин А.Л. О квазиполиномах 131

Смилянский В.Р. Множители Стокса и коэффициенты связи для некоторых уравнений 157

Сыркин Е.С., Феодосьев С.Б. Исследование температурной зависимости среднеквадратичных смещений и скоростей идеальных и примесных атомов в анизотропных кристаллах .. 173

Фиготин А.Л. Об отсутствии абсолютно непрерывной составляющей спектра у случайных матриц Якоби.I............ 192

Фиготин А.Л. Об отсутствии абсолютно непрерывной составляющей у случайных матриц Якоби.П. 200

УДК 517.9

Р.Н.Давыдов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ НА ОСИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ С КВАДРАТИЧНО-УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

I. Обозначим через $\mathcal{V}(l^-,l^+)$ множество вещественных функций $q(x)$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{-1}\left|q(x)-\frac{l^-(l^-+1)}{x^2}\right|^2 e^{\varepsilon|x|}dx+\int_{-1}^{1}|q(x)|^2dx+\int_{1}^{\infty}\left|q(x)-\frac{l^+(l^++1)}{x^2}\right|^2 e^{\varepsilon x}dx<\infty .$$

Здесь l^-, l^+ - произвольные целые неотрицательные числа, ε - произвольное положительное число, свое для каждого $q(x)$.

Известно, что уравнение Штурма - Лиувилля /Ш.-Л./

$$L[y]=-y''+q(x)y=z^2y, \quad -\infty<x<\infty \qquad /1/$$

с потенциалом $q(x)\in\mathcal{V}(l^-,l^+)$ имеет решения $e^{\pm}(z,x)$, удовлетворяющие асимптотическим равенствам

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\pm}(z,x)e^{-izx}=1, \qquad /2/$$

причем эти решения представимы с помощью операторов преобразования в таком виде [1]:

$$e^{\pm}(z,x)=e_0^{\pm}(z,x)+\int_{-\infty}^{\infty}K^{\pm}(x,t)e_0^{\pm}(z,t)dt, \qquad /3/$$

где функции $e_0^{\pm}(z,x)$ удовлетворяют асимптотикам /2/ и являются решениями уравнений

$$-y''+p_l^{\pm}(x)y=z^2y, \quad -\infty<x<\infty$$

с потенциалами

$$p_l^+(x)=\begin{cases}\dfrac{l^+(l^++1)}{x^2}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}, \quad p_l^-(x)=\begin{cases}0, & x>-1\\ \dfrac{l^-(l^-+1)}{x^2}, & x\le -1\end{cases}.$$

Ядра $K^{\pm}(x,t)\equiv 0$ при $\pm t<\pm x$ и вместе с первыми производными по x и t принадлежат при каждом x множеству $\mathfrak{G}(0,0)$.

При всех $z\neq 0$ из некоторой полосы $\Pi=\{z: |Jm\, z|<\varepsilon\}$ /здесь и впредь мы не останавливаемся на уточнении величины ε) пары функций $e^{+}(z,x)$, $e^{+}(-z,x)$ и $e^{-}(z,x)$, $e^{-}(-z,x)$ образуют фундаментальные системы решений уравнения /1/, следовательно,

$$e^{+}(z,x)=b(z)e^{-}(-z,x)+a(z)e^{-}(z,x), \qquad /4/$$

$$e^{-}(-z,x)=-b(-z)e^{+}(z,x)+a(z)e^{+}(-z,x). \qquad /5/$$

Обозначим вронскиан $W(y_1,y_2)=y_1'y_2-y_1y_2'$. Тогда

$$2iz\,a(z)=W(e^{+}(z,x),e^{-}(-z,x)), \qquad /6/$$

$$2iz\,b(z)=W(e^{-}(z,x),e^{+}(z,x)), \qquad /7/$$

откуда следует, что $\overline{a(z)}=a(-\bar z)$, $\overline{b(z)}=b(-\bar z)$. Поэтому

$$1=a(z)a(-z)-b(z)b(-z)=|a(\lambda)|^2-|b(\lambda)|^2,\ (Jm\,\lambda=0). \qquad /8/$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только случай, когда оператор L не имеет дискретного спектра, поскольку общий случай легко сводится к этому с помощью преобразований Крума [2]. При таких условиях функция $a(z)$ в замкнутой верхней полуплоскости не обращается в нуль, $|a(\lambda)|\geqslant 1$, следовательно, $a(z)$ не имеет нулей и в некоторой более широкой полуплоскости $Jm\,z\geqslant-\varepsilon_2$. Разделив обе части равенств /3/, /4/ на $a(z)$, придем к определенным при всех $z\neq 0$ из полосы $\Pi_2=\{z: |Jm\,z|\leqslant\varepsilon_2\}$ решениям уравнения /1/

$$u^{-}(z,x)=t(z)e^{+}(z,x)=r^{-}(z)e^{-}(-z,x)+e^{-}(z,x),$$

$$u^{+}(z,x)=t(z)e^{-}(-z,x)=r^{+}(z)e^{+}(z,x)+e^{+}(-z,x),$$

где
$$t(z)=a(z)^{-1},\ r^{-}(z)=b(z)t(z),\ r^{+}(z)=-b(-z)t(z).$$

Функция $t(z)$ называется коэффициентом прохождения, а функции $r^{-}(z)$, $r^{+}(z)$ соответственно левым и правым коэффициентами отражения.

Обратная задача рассеяния состоит в восстановлении потенциала $q(x)$ по известному коэффициенту отражения $r^{-}(x)$ /или $r^{+}(x)$/ и нахождении необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять функция $r^{-}(z)(r^{+}(z))$ для того, чтобы она была коэффициентом отражения некоторого уравнения Ш.-Л. с потенциалом из $\mathcal{V}(l^-, l^+)$.

В случае $l^- = l^+ = 0$ решение этой задачи было получено Л.Д.Фаддеевым [3] /см. также [4] /.

В настоящей работе дается полное решение этой задачи для операторов Ш.-Л. с потенциалом $q(x) \in \mathcal{V}(1,0)$.

Окончательный результат содержится в следующей теореме.

1. Теорема I. Функция $r^-(z)$ является левым коэффициентом отражения некоторого уравнения Ш.-Л. с потенциалом $q(x) \in \mathcal{V}(1,0)$, который однозначно определяется по $r^-(z)$, тогда и только тогда, когда

I. Функция $r^-(z)$ аналитична в некоторой полосе $|Jm\, z| < \varepsilon$, $\overline{r^-(z)} = r^-(-\bar{z})$. Функция $z r^-(z)$ суммируема с квадратом модуля на любой прямой из полосы и равномерно убывает при $|z| \to \infty$. На вещественной оси $|r^-(\lambda)| < 1$ $(\lambda \neq 0)$.

II. В точке $z = 0$ имеет место разложение в ряд Тэйлора

$$r^-(z) = 1 + r_2 z^2 + i r_3 z^3 + r_4 z^4 + \dots, \quad |r_2| + |r_4| \neq 0.$$

Заметим, что условие II может быть заменено эквивалентным условием

II. В достаточно малой окрестности нуля функция $r^-(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$c_2 |z|^4 \le 1 - |r^-(z)| \le c_1 |z|^2; \; r^-(0) = 1, \; \dot{r}^-(0) = 0.$$

Это условие более наглядно выражает зависимость между скоростью приближения $r^-(z)$ к I, когда $\lambda \to 0$ и величиной l^-.

2. Свойства коэффициентов отражения. Пусть $q(x) \in \mathcal{V}(1,0)$. В этом случае $e_0^+(z, x) = e^{izx}$,

$$e_0^-(z, x) = \begin{cases} e^{izx}\left(1 - \dfrac{1}{izx}\right), & x \le -1, \\ (2z^2)^{-1}\left[(2z^2 - 2iz - 1)e^{izx} + e^{-2iz}e^{-izx}\right], & x > -1. \end{cases}$$

Лемма I. Функции $b(z)$ и $a(z)$ имеют следующий вид:

$$b(z) = \frac{\beta}{z^2} + \frac{1}{z}\int_{-\infty}^{\infty} B_1(t) e^{izt} dt + \frac{1}{z^2}\int_{-\infty}^{\infty} B_2(t) e^{izt} dt,$$

$$a(z) = 1 + \frac{1}{z}\left(\alpha_1 + \int_0^{\infty} A_1(t) e^{izt} dt\right) + \frac{1}{z^2}\left(\alpha_2 + \int_0^{\infty} A_2(t) e^{izt} dt\right),$$

где $B_i(t) \in \mathcal{V}(0,0)$, $A_i(t) \in \mathcal{V}(0,0)$, $\alpha_i = const$, $\beta = const$.

Доказательство леммы нетрудно получить, подставляя в формулы /6/ и /7/ представления /3/функций $e^{\pm}(\varkappa, x)$.

Лемма 2. Функции $r^{+}(\varkappa)$, $r^{-}(\varkappa)$ имеют в нуле устранимую особенность. В окрестности нуля имеет место разложение в ряд Тэйлора.

$$r^{-}(\varkappa) = 1 + r_2 \varkappa^2 + i r_3 \varkappa^3 + r_4 \varkappa^4 + \dots, \quad |r_2| + |r_4| \neq 0.$$

Введем следующие решения уравнения /1/ при $\varkappa = 0$:

$$v^{+}(x) = e^{+}(0, x), \quad v^{-}(x) = i\varkappa e^{-}(-\varkappa, x)\Big|_{\varkappa = 0}.$$

Заметим, что эти решения однозначно определяются асимптотиками

$$v^{+}(x) = 1 + O(1) \quad (x \to \infty), \quad v^{-}(x) = x^{-1}(1 + O(1)) \quad (x \to \infty).$$

Имеются две возможности: А/ Решения $v^{+}(x)$ и $v^{-}(x)$ независимы, т.е.

$$\lim_{\varkappa \to 0} \varkappa^2 a(\varkappa) = -\frac{1}{2} \lim_{\varkappa \to 0} W\left[e^{+}(\varkappa, x), \ i\varkappa e^{-}(-\varkappa, x)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2} W(v^{+}(x), v^{-}(x)) = \lim_{\varkappa \to 0} \varkappa^2 b(\varkappa) \neq 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\varkappa \to 0} r^{+}(0) = -1, \qquad \lim\limits_{\varkappa \to 0} r^{-}(\varkappa) = 1.$

Б/ Решения $v^{+}(x)$ и $v^{-}(x)$ зависимы. В этом случае

$$\lim_{\varkappa \to 0} r^{\pm}(\varkappa) = 1.$$

Случай Б/ соответствует наличию у оператора L виртуального уровня. Более подробное исследование поведения функций $a(\varkappa)$ и $b(\varkappa)$ в нуле позволяет установить, что они имеют в этой точке в случае А/ полюс второго порядка и допускают в ее окрестности разложения в ряд Лорана вида

$$a(\varkappa) = \varkappa^{-2}(\alpha_0 + i\alpha_1 \varkappa + \alpha_2 \varkappa^2 + i\alpha_3 \varkappa^3 + \dots),$$

$$b(\varkappa) = \varkappa^{-2}(\alpha_0 + i\alpha_1 \varkappa + \alpha_2 \varkappa^2 + i\beta_3 \varkappa^3 + \dots),$$

а функция $r^{-}(\varkappa)$ аналитична в окрестности нуля

$$r^{-}(\varkappa) = 1 + i r_3 \varkappa^3 + r_4 \varkappa^4 + \dots,$$

причем, в силу равенства /8/, $|a(\lambda)|^{-2} = 1 - |r^{-}(\lambda)|^2$, откуда следует, что $-2r_4 = \alpha_0^{-2} \neq 0$.

В случае Б/ $a(z)$ и $b(z)$ имеют в нуле полюс первого порядка

$$a(z)=z^{-1}(i\alpha_1+\alpha_2 z+i\alpha_3 z^2+\dots),$$

$$b(z)=z^{-1}(i\alpha_1+\alpha_2 z+i\beta_3 z^3+\dots),$$

$$r^-(z)=1+r_2 z^2+ir_3 z^3+\dots, \qquad r_2\neq 0.$$

Доопределим функции $r^{\pm}(z)$ предельными значениями в точке $z=0$.

Как следствие из леммы I вытекает суммируемость с квадратом модуля на любой прямой и равномерное убывание при $|z|\to\infty$ в полосе Π_2 функций $zr^{\pm}(z)$. Тем самым доказана необходимость условий теоремы I.

<u>Лемма 3.</u> Функции $a(z)$ и $r^+(z)$ восстанавливаются по $r^-(z)$ с помощью формул

$$a(z)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-|r^-(\lambda)|^2)}{\lambda-z}d\lambda\right\},\ \operatorname{Im} z\geqslant 0, \qquad /9/$$

$$a(z)=a(-z)^{-1}\left[1-r^-(z)r^-(-z)\right]^{-1},\ \operatorname{Im} z<0, \qquad /10/$$

$$r^+(z)=-r^-(-z)\frac{a(-z)}{a(z)}.$$

Интеграл в формуле /9/ - интеграл Шварца для полуплоскости, для обоснования сходимости которого нужно воспользоваться леммой 2 и тем фактом, что

$$2\ln|a(\lambda)|=-\ln(1-|r^-(\lambda)|^2)=O(\lambda^{-2}),\quad |\lambda|\to\infty.$$

Обозначим

$$R^{\pm}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r^{\pm}(\lambda)e^{\pm i\lambda x}d\lambda.$$

Обычным образом устанавливается, что функции $R^+(x)$ и $K^+(x,y)$ связаны интегральным уравнением Марченко /см. [3, 4] /

$$R^+(x+y)+K^+(x,y)+\int_x^{\infty}K^+(x,t)R^+(t+y)\,dt=0,\quad y>x, \qquad /11/$$

причем
$$q(x)=-2\frac{d}{dx}K^+(x,x).$$

Наряду с /11/ рассмотрим уравнение

$$R^-(x+y)+\tilde{K}^-(x,y)+\int_{-\infty}^{x}\tilde{K}^-(x,t)R^-(t+y)dt=0. \qquad /12/$$

Если функции $r^{\pm}(z)$ удовлетворяют условиям I, то функции $R^{\pm}(x)\in \mathscr{C}_{\gamma}(0,0)$ абсолютно непрерывны, и $R^{\pm}(x)'\in \mathscr{C}_{\gamma}(0,0)$. Уравнения /11/ и /12/ имеют единственные решения $K^+(x,y)\in\mathscr{C}_{\gamma}(0,0)$, $\tilde{K}(x,y)\in\mathscr{C}_{\gamma}(0,0)$, при всех значениях z из полосы Π функции

$$e^+(z,x)=e^{izx}+\int_{x}^{\infty}K^+(x,t)e^{izt}dt,$$

$$\tilde{e}^-(z,x)=e^{izx}+\int_{-\infty}^{x}\tilde{K}^-(x,t)e^{izt}dt$$

удовлетворяют уравнениям

$$-y''+q^{\pm}(x)y=z^2y,$$

где $\quad q^+(x)=-2\frac{d}{dx}K^+(x,x), \qquad q^-(x)=2\frac{d}{dx}\tilde{K}^-(x,x)$ и $\forall\varepsilon_1<\varepsilon$

$$\int_{a}^{\infty}\left|q^{\pm}(\pm x)\right|^2 e^{2\varepsilon_1 x}dx<\infty, \qquad a>-\infty.$$

Следовательно, каждому коэффициенту отражения отвечает единственный потенциал.

3. Докажем теперь достаточность условий теоремы I. Пусть функция $r^-(z)$ удовлетворяет условиям I и II.

<u>Лемма 4.</u> Если функция $r^-(z)$ удовлетворяет условиям теоремы I, то функция $a(z)$, построенная по формулам /9/, /10/, аналитична в некоторой полосе Π_2 за исключением точки $z=0$, в которой имеет полюс первого порядка, если коэффициент $r_2\neq 0$, и второго порядка, если $r_2=0$. При $|z|\to\infty$ функция $a(z)\to 1$ равномерно в полосе. Функция $r^-(-z)\frac{a(-z)}{a(z)}$ удовлетворяет условию I.

Доказательство леммы получим, проведя рассуждения леммы 3 в обратную сторону.

Обозначим $r^+(z)=-r^-(z)\frac{a(-z)}{a(z)}$. Решив уравнения /11/ и /12/, построим функции $e^+(z,x)$, $\tilde{e}^-(z,x)$. Рассмотрим преобразование Крума

$$\mathbf{K}\left[f(x)\right]=f(x)-x^{-2}\tilde{e}^{-}(0,x)J^{-1}(x)\,W\left\{\tilde{e}^{-}(0,x),\,f(x)\right\},\qquad /13/$$

где $J(x)=\frac{1}{2}W\left\{\tilde{e}^{-}(0,x),\ \ddot{\tilde{e}}^{-}(0,x)\right\}$. Заметим, что функция $\ddot{\tilde{e}}^{-}(0,x)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{e}^{-}(x,x)\Big|_{x=0}$

удовлетворяет уравнению $-y''+q^{-}(x)y=2\tilde{e}^{-}(0,x)$, поэтому $J'(x)=\left[\tilde{e}^{-}(0,x)\right]^2$, и, если функция $f(x)$ является решением уравнения $-f''+\tilde{q}(x)f=x^2f$, то функция $F(x)=\mathbf{K}\left[f(x)\right]$ суть решение уравнения $-F''+Q(x)F=x^2F$, где $Q(x)=q^{-}(x)-2\frac{d}{dx}\left[J'(x)J^{-1}(x)\right]$.

Преобразование /13/ определено для всех x за исключением может быть одной точки x_0, в которой $J(x_0)=0$. Эту точку мы пока исключим из рассмотрения.

В силу определения $J(x)=x+O(e^{\varepsilon x})$ при $x\to-\infty$, откуда $Q(x)=\frac{2}{x^2}+O(e^{\varepsilon x})$. Завершая доказательство теоремы 1, мы покажем, что $Q(x)\equiv q^{+}(x)\in\mathcal{C}(1,0)$, а функция $r^{-}(x)$ является коэффициентом отражения для уравнения Ш.-Л. с потенциалом $q^{+}(x)$.

Введем

$$\Phi^{+}(x,y)=R^{+}(x+y)+\int_x^\infty R^{+}(y+t)K^{+}(x,t)\,dt.$$

Очевидно,

$$\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{-N}^{N}\Phi^{+}(x,y)e^{-i\lambda y}dy=r^{+}(\lambda)e^{+}(\lambda,y).$$

Однако $\Phi^{+}(x,y)=-K^{+}(x,y)$, $y>x$ и, значит,

$$\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{-N}^{N}\Phi^{+}(x,y)e^{-i\lambda y}dy=e^{-i\lambda x}-e^{+}(-\lambda,x)+\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{-N}^{x}\Phi^{+}(x,y)e^{-i\lambda y}dy.$$

Обозначив

$$h^{-}(-\lambda,x)=a(\lambda)e^{-i\lambda x}\left[1-\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_{-N}^{x}\Phi^{+}(x,y)e^{-i\lambda(y-x)}dy\right],\qquad /14/$$

получим равенство

$$r^{+}(\lambda)e^{+}(\lambda,x)+e^{+}(-\lambda,x)=\left[a(\lambda)\right]^{-1}h^{-}(-\lambda,x).\qquad /15/$$

Подобным же образом устанавливаем, что

$$r^-(\lambda)\,\tilde{e}^-(-\lambda,x)+\tilde{e}^-(\lambda,x)=[a(\lambda)]^{-1}\tilde{h}^+(\lambda,x), \qquad /16/$$

где

$$\tilde{h}^+(\lambda,x)=a(\lambda)e^{i\lambda x}\left[1-\underset{N\to\infty}{l.i.m.}\int_x^N \Phi^-(x,y)e^{-i\lambda(x-y)}dy\right]. \qquad /17/$$

Перечислим необходимые нам свойства функций $h^-(-z,x)$, $\tilde{h}^+(z,x)$. Из формул /14/ и /17/ следует, что $h^-(-z,x)$ и $\tilde{h}^+(z,x)$ аналитичны в верхней полуплоскости и $\overline{h^-(-z,x)}=h^-(\bar{z},x)$, $\overline{\tilde{h}^+(z,x)}=\tilde{h}^+(-\bar{z},x)$. В силу равенств /15/ и /16/ они непрерывны при вещественных $z\neq 0$, и

$$W[e^+(z,x),h^-(-z,x)]=W[\tilde{h}^+(z,x),\tilde{e}^-(-z,x)]=2iz\,a(z). \qquad /18/$$

Из тех же формул заключаем, что

$$\lim_{|z|\to\infty} e^{izx}h^-(-z,x)=\lim_{|z|\to\infty} e^{-izx}\tilde{h}^+(z,x)=1. \qquad /19/$$

Обозначим $E^-(z,x)=K[\tilde{e}^-(z,x)]$, $H^+(z,x)=K[\tilde{h}^+(z,x)]$ и подвергнем преобразованию /13/ равенство /16/, которое примет вид

$$r^-(\lambda)E^-(-\lambda,x)+E^-(\lambda,x)=[a(\lambda)]^{-1}H^+(\lambda,x). \qquad /20/$$

Произведя комплексное сопряжение над обеими частями равенства /20/, получим

$$r^-(-\lambda)E^-(\lambda,x)+E^-(-\lambda,x)=[a(-\lambda)]^{-1}H^+(-\lambda,x). \qquad /21/$$

Решим систему уравнений /20/, /21/ относительно $E^-(-\lambda,x)$,

$$H^+(-\lambda,x)+r^+(\lambda)\,H^+(\lambda,x)=[a(\lambda)]^{-1}E^-(-\lambda,x). \qquad /22/$$

Исключая теперь из /15/ и /22/ $r^+(\lambda)$ найдем, что

$$a(\lambda)^{-1}[h^-(-\lambda,x)H^+(\lambda,x)-E^-(-\lambda,x)e^+(\lambda,x)]=e^+(-\lambda,x)H^+(\lambda,x)-H^+(-\lambda,x)e^+(\lambda,x).$$

Левая часть последнего равенства определяет аналитическую в верхней полуплоскости функцию

$$g(z)=a(z)^{-1}[h^-(-z,x)H^+(z,x)-E^-(-z,x)e^+(z,x)],$$

Преобразование /13/ сохраняет для функций $H^+(z,x)$, $E^-(-z,x)$ асимптотики /19/, поэтому

$$\lim_{|z|\to\infty} g(z)=0, \qquad Jm\, z \geqslant 0.$$

Дальнейшее доказательство разобьем на два варианта.

1. Пусть в окрестности нуля $r^-(z)=1+ir_3 z^3+r_4 z^4+\ldots$. В этом случае $a(z)$ имеет в нуле полюс второго порядка, а $r^+(0)=-1$. Значит, функции $z^2\tilde{h}^+(z,x)$ и $z^2 h^-(-z,x)$, аналитичны в точке $z=0$, и

$$\lim_{z\to 0} z^2 h^-(-z,x)=0, \qquad \lim_{z\to\infty} z^2\tilde{h}^+(z,x)=2\alpha_0\tilde{e}^-(0,x),$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}z^2\tilde{h}^+(z,x)=2\alpha_1\tilde{e}^-(0,x),\ \lim_{z\to 0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}z^2\tilde{h}^+(z,x)=4\alpha_2\tilde{e}^-(0,x)+$$
$$+2\alpha_0\ddot{\tilde{e}}^-(0,x),$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{\partial^3}{\partial z^3}z^2\tilde{h}^+(z,x)=12\alpha_3\tilde{e}^-(0,x)+6\alpha_0 ir_3\tilde{e}^-(0,x)+6\alpha_1\ddot{\tilde{e}}^-(0,x).$$

Следовательно,

$$\lim_{z\to 0} W\left[\tilde{e}^-(0,x),\tilde{h}^+(z,x)\right]=\lim_{z\to 0} W\left[\tilde{e}^-(0,x),\frac{z^2\tilde{h}^+(z,x)-2\alpha_0\tilde{e}^-(0,x)-2z\alpha_1\tilde{e}^-(0,x)}{z^2}\right]=$$
$$=W\left[\tilde{e}^-(0,x),\lim_{z\to 0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{z^2\tilde{h}^+(z,x)}{2}\right]=\alpha_0 W\left[\tilde{e}^-(0,x),\ddot{\tilde{e}}^-(0,x)\right].$$

Откуда заключаем, что

$$\lim_{z\to 0} a(z)^{-1}H^+(z,x)=\alpha_0^{-1}\lim_{z\to 0}\left\{z^2\tilde{h}^+(z,x)-\tilde{e}^-(0,x)J^{-1}(x)W\left[\tilde{e}^-(0,x),\tilde{h}^+(z,x)\right]\right\}=0.$$

Функция $zh^-(-z,x)$ ограничена в нуле, поэтому

$$\lim_{z\to 0}\left[a(z)\right]^{-1}zh^-(-z,x)H^+(z,x)=0.$$

Нетрудно убедиться, что и

$$\lim_{z\to 0}\frac{zE^-(-z,x)e^+(z,x)}{a(z)}=\alpha_0^{-1}e^+(0,x)\lim_{z\to 0} z^3\tilde{e}^-(-z,x)-\tilde{e}^-(0,x)J^{-1}(x)zW\left[\tilde{e}^-(0,x),\tilde{e}^-(-z,x)\right]=0.$$

Таким образом, точка $z=0$ является устранимой особенностью нечетной функции $g(z)$. Продолжая ее нечетным образом в нижнюю полуплоскость, получаем целую функцию, стремящуюся к нулю при $|z|\to\infty$. По теореме Лиувилля $g(z)\equiv 0$, значит

$$e^{+}(-\lambda,x)\,H^{+}(\lambda,x)=H^{+}(-\lambda,x)\,e^{+}(\lambda,x).$$

Функция $e^{+}(0,x)$ по теореме Штурма обращается в нуль не более одного раза в точке x_1. Покажем, что при любых $x\neq x_1$ функция

$$\rho(z)=\frac{H^{+}(z,x)}{e^{+}(z,x)}$$

голоморфна в верхней полуплоскости. Вследствие простоты нулей $e^{+}(z,x)$ достаточно убедиться, что, если $e^{+}(z,x)=0$, то и $H^{+}(z,x)=0$. Но поскольку $2iz\,a(z)\neq 0$, то $h^{-}(-z,x)\neq 0$ в силу /18/, а из определения функции $g(z)$ следует, что $H^{+}(z,x)=0$.

Продолжив четным образом $\rho(z)$ в нижнюю полуплоскость, мы получим голоморфную во всей плоскости за исключением нуля функцию, причем

$$\lim_{|z|\to\infty}\rho(z)=1.$$

Определим теперь поведение функции $zH^{+}(z,x)$ вблизи нуля.

$$\lim_{z\to 0} zH^{+}(z,x)=\lim_{z\to 0}\left\{z\tilde{h}^{+}(z,x)-z^{-1}\tilde{e}^{-}(0,x)J^{-1}(x)\,W\left[\tilde{e}^{-}(0,x),\tilde{h}^{+}(z,x)\right]\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z^{2}\tilde{h}^{+}(z,x)-2\alpha_0\tilde{e}^{-}(0,x)}{z}+\lim_{z\to 0}\tilde{e}^{-}(0,x)\left\{\frac{2\alpha_0}{z}-\frac{J^{-1}(x)}{z}W\left[\tilde{e}^{-}(0,x),\tilde{h}^{+}(z,x)\right]\right\}=$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}z^{2}\tilde{h}^{+}(z,x)-\frac{\tilde{e}^{-}(0,x)}{J(x)}\lim_{z\to 0}W\left[\tilde{e}^{-}(0,x),\frac{\tilde{h}^{+}(z,x)-\alpha_0\ddot{\tilde{e}}^{-}(0,x)}{z}\right]=$$

$$=\tilde{e}^{-}(0,x)\left\{2\alpha_1-J^{-1}(x)\lim_{z\to 0}W\left[\tilde{e}^{-}(0,x),\frac{z^{2}h^{+}(z,x)-2\alpha_0\tilde{e}^{-}(0,x)}{z^{3}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2\alpha_1\tilde{e}^{-}(0,x)z+2\alpha_2\tilde{e}^{-}(0,x)z^{2}+\alpha_0\ddot{\tilde{e}}^{-}(0,x)z^{2}}{z^{3}}\right]\right\}=\tilde{e}^{-}(0,x)\left\{2\alpha_1-\right.$$

$$\left.-J^{-1}(x)\lim_{z\to 0}W\left[\tilde{e}^{-}(0,x),\frac{\partial^{3}}{\partial z^{3}}\frac{z^{2}\tilde{h}^{+}(z,x)}{6}\right]\right\}=0.$$

Так как при рассматриваемых $x\,e^+(0,x)\neq 0$, то

$$\lim_{z\to 0} z\rho(z) = \lim_{z\to 0}\frac{zH^+(z,x)}{e^+(z,x)} = 0,$$

значит $\rho(z)$ имеет в нуле устранимую особенность, откуда, в силу теоремы Лиувилля, $\rho(x)\equiv 1$.

2. Пусть теперь в окрестности нуля

$$r^-(x) = 1 + r_2 x^2 + i r_3 x^3 + \ldots, \quad r_2 \neq 0.$$

Этот случай несколько проще, чем предыдущий. Проводя аналогичные рассуждения, мы найдем, что $g(z)\equiv 0$, а $\rho(x)\equiv 1$.

Итак, в обоих случаях $H^+(z,x)\equiv e^+(z,x)$. По непрерывности это тождество можно распространить и на $x=x_0$, $x=x_1$, следовательно, ни в какой конечной точке $J(x)$ не обращается в нуль, и

$$q^+(x)\equiv Q(x)=\tilde q^-(x)-2\frac{d}{dx}\left[J'(x)J^{-1}(x)\right].$$

Теорема доказана.

1. Сохин А.С. Об операторах преобразования для уравнения с особенностью одного вида. - Вестник Харьков. ун-та, 1974, вып.39, с. 36-42.
2. Crum M.M. Associated Sturm-Liouville Systems. - The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford (2), 1955, 6, N 2, p.121-128.
3. Фаддеев Л.Д. Свойства S=матрицы одномерного уравнения Шредингера. - Тр. матем. ин-та АН СССР, 1964, 73, с. 314-336.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения. - Киев, 1977, с. 264-283.

УДК 517.929.7

М.Д.Дольберг, И.Ю.Чудинович

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ В МАТРИЦАХ ГРИНА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Асимптотика решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений при стремлении к нулю коэффициента при старшей производной рассмотрена в [1-3].

В случаях, когда коэффициенты дифференциальных уравнений являются достаточно гладкими, хорошо известные методы позволяют получить асимптотику решений соответствующих краевых задач.

Однако многие задачи математической физики приводят к необходимости изучения аналогичных вопросов для обобщенных краевых задач, сводящихся к дифференциальным лишь в частных случаях. Кроме того, в этих задачах весьма желательно установить равномерную по обеим переменным асимптотику функций Грина и их производных при стремлении параметра к нулю.

Метод исследования этих вопросов, используемый нами, был впервые применен в [5] при решении конкретной механической задачи. В настоящей работе приведены формулировка основной теоремы и схема ее доказательства. Полностью доказательство изложено в [7].

Начнем с определений и постановки задачи. Введем вещественное гильбертово пространство H_n, состоящее из вектор-столбцов

$$U_n(x) = \left(u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)\right)^T,$$

где "т" обозначает операцию транспонирования, $u^{(n)}(x) \in L_2(0,1)$. Скалярное произведение в H_n определим формулой

$$M_n^{\varepsilon}(U_n, V_n) = \varepsilon M_n^{0}(U_n, V_n) + M_m^{0}(U_m, V_m) +$$

$$+ (\tilde{A} U_n(0), V_n(0)) + (\tilde{B} U_n(1), V_n(1)),$$

где

$$M_n^{0}(U_n, V_n) = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, u^{(n-i)}(x)\, v^{(n-i)}(x)\, dx,$$

$$M_m^{0}(U_m, V_m) = \int_0^1 \sum_{j=0}^{m} p_j(x)\, u^{(m-j)}(x)\, v^{(m-j)}(x)\, dx,$$

$$(\tilde{A} U_n(0), V_n(0)) = \sum_{l,k=0}^{n-1} \tilde{\alpha}_{lk}\, u^{(l)}(0)\, v^{(k)}(0),$$

$$\left(\tilde{B}U_n(1),\, V_n(1)\right) = \sum_{l,k=0}^{n-1} \tilde{\beta}_{lk}\, u^{(l)}(1)\, v^{(k)}(1),$$

$a_0(x)$, $p_0(x)$ – кусочно-непрерывны, положительны на $[0,1]$, $0 \le a_i(x) \in L(0,1) \; |1 \le i \le n|$, $0 \le p_j(x) \in L(0,1) \; |1 \le j \le m|$, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ – неотрицательные матрицы, $n > m \geq 1$, $\varepsilon > 0$. Разумеется, скалярное произведение M_n^ε предполагается невырожденным на H_n. Еще одно ограничение на M_n^ε будет введено ниже.

Разыскивается решение $W_n \in H_n$ уравнения

$$M_n^\varepsilon(U_n, W_n) = \int_0^1 U_n^T(x)\, dQ_n(x), \qquad /1/$$

$\forall U_n \in H_n$, где $Q_n(x)$, n-компонентный вектор-столбец, составленный из функций ограниченной вариации на $[0, 1]$. Известно, что W_n дается формулой

$$W_n(x) = \int_0^1 K_n^\varepsilon(x,s)\, dQ_n(s),$$

где $K_n^\varepsilon(x,s) = \left\| K_{n,ij}^\varepsilon(x,s) \right\|_{i,j=0}^{n-1}$ – матрица Грина, непрерывная по совокупности аргументов, обладающая следующими свойствами:

1/ $K_{n,ij}^\varepsilon(x,s) = K_{n,ji}^\varepsilon(s,x) = \dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i\, \partial s^j} K_{n,00}^\varepsilon(x,s)$;

2/ $\displaystyle\int_0^1\!\!\int_0^1 dQ_n(x)^T K_n^\varepsilon(x,s)\, dQ_n(s) \geq 0 \qquad \forall Q_n(x)$.

В случае, когда коэффициенты формы M_n^ε и компоненты вектора $Q_n(x)$ достаточно гладки, уравнение /1/ эквивалентно краевой задаче для некоторого дифференциального оператора $2n$-го порядка. Но и в нашем случае известная процедура /см., например, [4] / позволяет поставить в соответствие форме $M_n^\varepsilon(U_n, V_n)$ некоторый оператор, который мы станем называть обобщенным дифференциальным оператором M_n^ε.

Разыскивается $\lim K_n^{\varepsilon}(x, s)$ при $\varepsilon \to +0$. Перед тем как оформулировать основную теорему, проделаем некоторые преобразования.

Прежде всего представим матрицы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ в виде $\tilde{A} = A^T A$, $\tilde{B} = B^T B$, где $A = \| \alpha_{ij} \|_{i,j=0}^{n-1}$ – нижняя треугольная матрица, обладающая следующим свойством. Если $\alpha_{ii} = 0$ для некоторого i, то $\alpha_{ik} = 0$ / $k = 0, \ldots, n-1$/. Аналогичными свойствами обладает матрица $B = \| \beta_{ij} \|_{i,j=0}^{n-1}$. Далее представим A и B в виде $A = A^0 + A^1$, $B = B^0 + B^1$.

$$A^0 = \| \alpha_{ij}^0 \|_{i,j=0}^{n-1}, \qquad \alpha_{ij}^0 = \begin{cases} 0, & i \le m-1, \\ \alpha_{ij}, & i \ge m; \end{cases}$$

$$A^1 = \| \alpha_{ij}^1 \|_{i,j=0}^{n-1}, \qquad \alpha_{ij}^1 = \begin{cases} \alpha_{ij}, & i \le m-1, \\ 0, & i \ge m. \end{cases}$$

Матрицы $B^0 = \| \beta_{ij}^0 \|_{i,j=0}^{n-1}$ и $B^1 = \| \beta_{ij}^1 \|_{i,j=0}^{n-1}$ определяются аналогично.

Очевидно,

$$\left(\tilde{A} U_n(0),\ V_n(0)\right) = \left(A^0 U_n(0),\ A^0 V_n(0)\right) + \left(A^1 U_n(0),\ A^1 V_n(0)\right),$$

$$\left(\tilde{B} U_n(1),\ V_n(1)\right) = \left(B^0 U_n(1),\ B^0 V_n(1)\right) + \left(B^1 U_n(1),\ B^1 V_n(1)\right).$$

В дальнейшем через A^1, B^1 мы будем обозначать также матрицы $\| \alpha_{ij}^1 \|_{i,j=0}^{m-1}$, $\| \beta_{ij}^1 \|_{i,j=0}^{m-1}$ соответственно. Это не приведем к недоразумениям, так как смысл A^1, B^1 будет ясен из текста.

Нам понадобится еще одно гильбертово пространство H_m, состоящее из вектор-столбцов

$$U_m(x) = \left(u(x),\ u'(x), \dots,\ u^{(m-1)}(x)\right)^T,$$

$u^{(m)}(x) \in L_2(0, 1)$, со скалярным произведением

$$M_m(U_m, V_m) = M_m^0(U_m, V_m) +$$

$$+ \left(A^1 U_m(0),\ A^1 V_m(0)\right) + \left(B^1 U_m(1),\ B^1 V_m(1)\right).$$

Потребуем невырожденности формы $M_m(U_m, V_m)$ /в этом и состоит дополнительное ограничение на M_n^ε /. Матрицу Грина соответствующего обобщенного дифференциального оператора M_m обозначим через $K_m(x,s) = \| K_{m,ij}(x,s) \|_{i,j=0}^{m-1}$.

Теорема. При $0 \le i, j \le m-1$ существует равномерный по совокупности (x, s) предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K_{n,ij}^{\varepsilon}(x,s) = K_{m,ij}(x,s).$$

Перед тем как перейти к изложению схемы доказательства теоремы, отметим, что именно равномерность предельного перехода по совокупности переменных является центральным вопросом, обсуждаемым в работе.

Для упрощения записи считаем $\tilde{A} = 0$.

1. Предположим, что форма $M_n^0(U_n, V_n)$ невырождена на H_n. Тогда $M_n^0(U_n, V_n)$ и $M_n^0(U_n, V_n) + \varepsilon^{-1}(B^0 U_n(1),\ B^0 V_n(1))$ определяют обобщенные дифференциальные операторы с матрицами Грина $N_n(x,s)$ и $N_n^\varepsilon(x,s)$ соответственно.

Без труда доказывается существование равномерного по (x, s) предела

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N_n^\varepsilon(x,s) = G_n(x,s),$$

причем $G_n(x,s)$ является матрицей Грина обобщенного дифференциального оператора, определяемого многообразием $\bar{H}_n$ векторов из H_n, подчиненных условиям $B^0 U_n(1) = 0$ и формой $M_n^0(U_n, V_n)$ на $\bar{H}_n$.

Более того, можно получить важные соотношения для элементов матрицы $S_n^\varepsilon(x,s) = \varepsilon^{-1}\left[N_n^\varepsilon(x,s) - G_n(x,s)\right]$

$$S^\varepsilon_{n,ij}(x,s) = \sum_{k,l=m}^{n-1} d_{kl}(\varepsilon) \times$$

$$\times \left[\sum_{r=0}^{n-1} N_{n,ir}(x,1)\beta^0_{kr}\right]\left[\sum_{t=0}^{n-1} N_{n,jt}(s,1)\beta^0_{lt}\right], \qquad /2/$$

где $d_{kl}(\varepsilon)$ непрерывны при $\varepsilon \geq 0$.

2. Построим гильбертово пространство H_{m+1}, изометричное H_m. Для этого сопоставим каждому вектору

$$U_m(x) = \left(u(x), u'(x), \ldots, u^{(m-1)}(x)\right)^T \in H_m$$

вектор-столбец $U_{m+1}(x) = \left(u(x), \ldots, u^{(m-1)}(x), u^{(m)}(x)\right)^T$. Скалярное произведение векторов U_{m+1}, V_{m+1} определим формулой

$$M_{m+1}(U_{m+1}, V_{m+1}) = \int_0^1 U_{m+1}(x)^T F(x) V_{m+1}(x)\,dx,$$

где

$$F(x) = \begin{pmatrix} p_m(x) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_{m-1}(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_0(x) \end{pmatrix} +$$

$$
+\delta(x-1)\left(\begin{array}{c|c} B^{1^T} B^1 & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline 0\ldots 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Условимся также сопоставлять векторам

$$
U_n(x) = \left(u(x),\ldots,u^{(n-1)}(x)\right)^T \in H_n
$$

векторы $U_{m+1}(x) = \left(u(x),\ldots,u^{(m)}(x)\right)^T \in H_{m+1}$, а матрицам $N_n^\varepsilon(x,s)$, $N_n(x,s)$, $G_n(x,s)$, $S_n^\varepsilon(x,s)$ - матрицы $N_{m+1}^\varepsilon(x,s)$, $N_{m+1}(x,s)$, $G_{m+1}(x,s)$, $S_{m+1}^\varepsilon(x,s)$, образованные из их первых $m+1$ строк и столбцов.

Рассмотрим уравнение для первого столбца $W_n^\varepsilon(x,s)$ матрицы $K_n^\varepsilon(x,s)$.

$$
\varepsilon M_n^0(U_n, W_n^\varepsilon) + M_m^0(U_m, W_m^\varepsilon) +
$$

$$
+\left(B^0 U_n(1), B^0 W_n^\varepsilon(1,s)\right) + \left(B^1 U_n(1), B^1 W_n^\varepsilon(1,s)\right) =
$$

$$
= \int_0^1 U_n(x)^T Q_n(x)\,dx, \qquad /3/
$$

где $Q_n(x) = \left(\delta(x-s), 0,\ldots,0\right)^T$.

Пусть $\Delta_{m+1}(x,t;\lambda)$ - матрица-резольвента ядра $G_{m+1}(x,t)$ с весом $F(t)$. Нетрудно проверить, что переход от /3/ к интегральному уравнению для усеченного вектора $W_{m+1}^\varepsilon(x,s)$ приведет к

$$
W_{m+1}^\varepsilon(x,s) = \varepsilon^{-1}\int_0^1 \Delta_{m+1}(x,t;-\varepsilon^{-1})Q_{m+1}(t)\,dt +
$$

$$
+\varepsilon^{-1}\int_0^1\int_0^1 \left[\delta(x-y)I_{m+1} - \varepsilon^{-1}\Delta_{m+1}(x,y;-\varepsilon^{-1})F(y)\right] \times
$$

$$
\times\left[N_{m+1}^\varepsilon(y,t) - G_{m+1}(y,t)\right]\left[Q_{m+1}(t) - F(t)W_{m+1}^\varepsilon(t,s)\right]dy\,dt, \qquad /4/
$$

где Q_{m+1} - вектор, составленный из первых $m+1$ компонент вектора Q_n, I_{m+1} - единичная матрица с $m+1$-й строкой.

Формулу /4/ удобно записать в операторной форме

$$W^{\varepsilon}_{m+1} = \varepsilon^{-1}\Delta_{m+1}(-\varepsilon^{-1})\,Q_{m+1} + \varepsilon^{-1}\left(I_{m+1} - \varepsilon^{-1}\Delta_{m+1}(-\varepsilon^{-1})F\right)\times$$

$$\times\left(W^{\varepsilon}_{m+1} - G_{m+1}\right)\left(Q_{m+1} - FW^{\varepsilon}_{m+1}\right). \qquad /5/$$

Правила действия операторов, входящих в /5/, на векторы легко установить, сопоставляя формулу /4/ с /5/.

3. Займемся изучением $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}\Delta_{m+1}(-\varepsilon^{-1})\,Q_{m+1}$.

Пусть

$$\varphi^{i}_{m+1} = \left(\varphi_i(x),\dots,\varphi_i^{(m)}(x)\right)^T -$$

ортонормированные в H_{m+1} фундаментальные векторы интегрального уравнения $\varphi_{m+1} = \lambda G_{m+1} F\varphi_{m+1}$, а λ_i - соответствующие характеристические числа. Для $\Delta_{m+1}(x,s;-\varepsilon^{-1})$ справедливо представление

$$\Delta_{m+1}(x,s;-\varepsilon^{-1}) = \varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varphi^{i}_{m+1}(x)\,\varphi^{i}_{m+1}(s)^T}{\varepsilon\lambda_i + 1}, \qquad /6/$$

причем ряд в /6/ сходится равномерно по (x,s) в силу позитивности ядра $G_{m+1}(x,s)$.

Можно доказать полноту системы φ^{i}_{m} / $i = 1, 2, \dots$ / в пространстве H_m. Разлагая затем столбцы матрицы $K_m(x,s)$ в ряд по системе φ^{i}_{m} / $i = 1, 2, \dots$/, придем к соотношению

$$K_m(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi^{i}_{m}(x)\,\varphi^{i}_{m}(s)^T, \qquad /7/$$

причем ряд сходится в среднем квадратичном по (x, s). Но из позитивности и непрерывности $K_m(x, s)$ следует /см. [6] / равномерная по обеим переменным сходимость ряда в /7/.

Работая с векторами $\varphi^{i}_{m+1}(x)$, аналогичным образом можно доказать равенства

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial s^l} K_{m,00}(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^{(k)}(x)\varphi_i^{(l)}(s)$$

при $k + l \le 2m - 1$, но ряд сходится, вообще говоря, в среднем квадратичном по одной переменной равномерно по другой. Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1} \Delta_{m+1,ij}(x, s; -\frac{1}{\varepsilon}) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial s^j} K_{m,00}(x,s),$$

причем при $0 \le i, \quad j \le m-1$ сходимость равномерна по (x, s), а при $i + j \le 2m - 1$ – сходимость лишь в среднем квадратичном по одной переменной равномерно по другой.

4. Рассмотрим $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-1}\left(I_{m+1} - \varepsilon^{-1}\Delta_{m+1}(-\varepsilon^{-1})F\right) \times$

$$\times \left(N^{\varepsilon}_{m+1} - G_{m+1}\right)\left(Q_{m+1} - FW^{\varepsilon}_{m+1}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left(I_{m+1} - \varepsilon^{-1}\Delta_{m+1}(-\varepsilon^{-1})F\right) S^{\varepsilon}_{m+1}\left(Q_{m+1} - FW^{\varepsilon}_{m+1}\right).$$

Несложное, но громоздкое исследование показывает, что этот вектор стремится при $\varepsilon \to 0$ к нулю. Причем его первые m компонент стремятся к пределу равномерно по (x, s), а $m + 1$ -я компонента – в среднем квадратичном по одной переменной равномерно по другой. При доказательстве существенно используются соотношения /2/.

Таким образом,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K^{\varepsilon}_{m,i0}(x, s) = K_{m,i0}(x, s)$$

/ $i = 0, \ldots; \ m - 1$/ равномерно по / $x, \ s$ /.

Аналогичное рассмотрение для других столбцов $K_n^{\varepsilon}(x, s)$ приводит к равенствам

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K^{\varepsilon}_{n,ij}(x, s) = K_{m,ij}(x, s)$$

$/ 0 \leq i, \ j \leq m-1 \ /$ равномерно по (x, s).

Более того,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K^{\varepsilon}_{n,ij}(x,s) = \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \, \partial s^j} K_{m,00}(x, s)$$

$$(i+j \leq 2m-1).$$

в среднем квадратичном по одной переменной равномерно по другой.

5. Для завершения доказательства теоремы осталось избавиться от ограничения, состоящего в невырожденности формы M_n^0 на H_n. Для этого рассмотрим многообразие $H_{n,0}$ пространства H_n, состоящее из векторов $U_n \in H_n$ таких, что

$$\varepsilon M_n^0 (U_n, U_n) + (B^0 U_n(1), B^0 U_n(1)) = 0.$$

Это многообразие является конечномерным подпространством H_n размерности $\alpha \leq n$. Выберем базис $\{V_{n,i}\}_{i=1}^{\alpha}$ в $H_{n,0}$, обладающий свойством

$$M_n^{\varepsilon} (V_{n,i}, V_{n,j}) = \delta_{ij}$$

$$(1 \leq i, \ j \leq \alpha).$$

Обозначим $H_n \ominus H_{n,0} = H_n^{\perp}$. Матрицу влияния /Грина/, отвечающую $H_n^{\perp}$ со скалярным произведением $M_n^{\varepsilon}(U_n, V_n)$ обозначим $K_n^{\perp\varepsilon}(x, s)$. Легко проверить равенство

$$K_n^{\varepsilon}(x,s) = K_n^{\perp\varepsilon}(x,s) + \sum_{i=1}^{\alpha} V_{n,i}(x) \, V_{n,i}(s)^T. \qquad /8/$$

В пространстве H_m выделим конечномерное подпространство $H_{m,0}$ с базисом $\{V_{m,i}\}_{i=1}^{\alpha}$ и его ортогональ-

ное /в смысле $M_m(U_m, V_m)$ / дополнение $H_m^\perp$.
Для $K_m(x,s)$ справедливо разложение, аналогичное /8/,

$$K_m(x,s) = K_m^\perp(x,s) + \sum_{i=1}^{\infty} V_{m,i}(x) V_{m,i}(s)^T .$$

Повторив с небольшими изменениями рассуждения, приведенные в предыдущих пунктах, придем к соотношению

$$\lim_{\varepsilon \to 0} K_{m,ij}^{\perp\varepsilon}(x,s) = K_{m,ij}^\perp(x,s)$$

$/0 \le i,\ j \le m-1$ / равномерно по (x,s), которое и доказывает теорему.

В нашу схему можно включить случай "геометрических" краевых условий. Это соответствует выделению из H_n подпространства векторов, подчиненных условиям $CU_n(0) = 0,\ DU_n(1) = 0$. Формулировка теоремы в этом случае не представляет трудности. Ее же доказательство лишь незначительно отличается от доказательства, приведенного в тексте.

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. - Успехи мат. наук, 1957, 12, вып. 5, с. 3-122.
2. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. - Успехи мат. наук, 1960, 15, вып. 3, с. 3-80.
3. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. - М.: Наука, 1973. - 272 с.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.: Мир, 1972. - 740 с.
5. Дольберг М.Д. К вопросу о критических угловых скоростях вращающегося вала. - Докл. АН СССР, 1952, 85, № 1, с. 45-48.
6. Дольберг М.Д. К вопросу о решении интегрального уравнения с помощью рядов. - Докл. АН СССР, 1960, 134, № 1, с. 25-28.
7. Дольберг М.Д., Чудинович И.Ю. О матрицах Грина сингулярно возмущенных обобщенных дифференциальных операторов. М., 1979.- 32 с. - Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3221 - 79 Деп.

УДК 517.39 + 571.91 + 513.88

Г.Н.Жолткевич

О КОНЕЧНОПОРОЖДЕННЫХ ГРУППАХ РАЗМЕРНОСТИ С ОДНИМ СОСТОЯНИЕМ

Группой размерности называется счетная упорядоченная абелева группа, для которой позитивный конус является порождающим и порядок удовлетворяет свойство Рисса. К классификации таких групп сводится, как показал Эллиот [1], классификация AF-алгебр. Данная работа посвящена исследованию размерностных групп, допускающих представление в виде индуктивного предела системы Эллиота [2] и выяснению условий, при которых группа имеет одно состояние. В работе получена оценка гомоморфизмов, входящих в систему Эллиота, достаточная для существования только одного состояния на индуктивном пределе системы.

Основные определения и обозначения. Пусть A есть AF-алгебра, P/A/ - множество проекторов A. Назовем два проектора p, q эквивалентными, если существует $x \in A$ такой, что $p = x^* x$, $q = x x^*$. Множество классов эквивалентности обозначим $N_0(A)$.

Пусть $F_0(A)$ - свободная абелева группа, порожденная $N_0(A)$, $R_0(A) \subset F_0(A)$ - подгруппа, порожденная элементами вида $[p+q] - [p] - [q]$, где $p \perp q$.

Группой размерности алгебры A называется фактор группа $K_0(A) = F_0(A) / R_0(A)$.

В $K_0(A)$ можно ввести естественный порядок, определяемый конусом, натянутым на $N_0(A)$. K_0 является функтором из категории AF-алгебр в категорию упорядоченных групп.

Как показано в [3], абелева группа с порядком G будет размерностной группой для некоторой AF-алгебры A, тогда и только тогда, когда

1/ G - счетная без кручения;

2/ конус G_+, задающий порядок, порождающий, т.е. $G_+ - G_+ = G$;

3/ G обладает свойством интерполяции Рисса: $\forall a, b, c, d \in G: a, b \le c, d \ \exists e \in G: a, b \le e \le c, d$.

Пусть у нас есть AF-алгебра $A = \varinjlim (A_s, \psi_s)$ где A_s - конечномерные алгебры, тогда, как показано Эллиотом [1],

$$K_0(A) = \varinjlim (K_0(A_s), K_0(\psi_s)).$$

Очевидно, что $K_0(A_s) = \mathbb{Z}^{r(s)}$. Обозначим $\varphi(s) = K_0(\psi_s)$. Тогда индуктивная система для $K_0(A)$ имеет вид

$$\mathbb{Z}^{r(1)} \xrightarrow{\varphi^{(1)}} \mathbb{Z}^{r(2)} \xrightarrow{\varphi^{(2)}} \ldots \xrightarrow{\varphi^{(s-1)}} \mathbb{Z}^{r(s)} \xrightarrow{\varphi^{(s)}} \ldots \qquad /1/$$

Система /1/ называется системой Браттели.

Очевидно, что $\varphi(s)$ можно считать мономорфизмами.

Система /1/, для которой $r(s) = r = const$, а $\varphi(s) \in GL(r, \mathbb{Z})$, $\varphi_{ij}(s) > 0$ называется системой Эллиота.

Итак, нами рассматривается система

$$\mathbb{Z}^r \xrightarrow{\varphi^{(1)}} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\varphi^{(2)}} \mathbb{Z}^r \xrightarrow{\varphi^{(3)}} \ldots , \qquad /2/$$

где $\varphi_{ij}(S) > 0 \quad (1 \leq i, j \leq r)$, $\varphi(S) \in GL(r, \mathbb{Z})$.

Для системы /2/ положительный конус индуктивного предела может быть описан следующим образом: обозначим $\rho(s) = \varphi(s)\varphi(s-1)\ldots\varphi(1)$, $\rho(0) = 1$, G - индуктивный предел системы /2/, тогда легко видеть, что $G_+ = \bigcup_{s \geq 0} \rho(s)^{-1}\mathbb{Z}^r_+$, где $\mathbb{Z}^r_+$ - конус, натянутый на стандартные образующие $\{e_i\}_{i=1}^r$ группы $\mathbb{Z}^r : (e_i)_j = \delta_{ij}$.

Следуя [4], введем следующее определение: элемент $u \in G_+$ называется строгой единицей, если $\forall x \in G_+ \ \exists n \geq 0 : x \leq nu$.

Предложение I. Пусть $e_1, \ldots, e_r$ образы стандартных образующих группы $\mathbb{Z}^r$ в G, тогда $e = e_1 + \ldots + e_r$ является строгой единицей в G.

Доказательство. Действительно, если $x \in G_+$, то $\exists s_0 : \rho(s_0)x \in \mathbb{Z}^r_+$, т.е.

$$\sum_{j=1}^r \rho_{ij}(s_0)x_j \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Поскольку $\det \rho(s) \neq 0$ и $\rho_{ij}(s) > 0$, то $\sum_{j=1}^r \rho_{ij}(s_0) > 0$ и при

$$n \geq \left[\frac{\sum_{j=1}^r \rho_{ij}(s_0)x_j}{\sum_{j=1}^r \rho_{ij}(s_0)} \right] + 1$$

$$\sum_{j=1}^r \rho_{ij}(s_0)(ne - x)_j \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, r), \quad \text{т.е.}$$

$$ne - x \in G_+ \quad \text{и} \quad x \leq ne.$$

Назовем $f \in Hom(G, \mathbb{R})$ положительным, если $f(G_+) \subset \mathbb{R}_+$.

Положительный гомоморфизм f в $\mathbb{R}$ назовем состоянием, если $f(e) = 1$.

Множество состояний на G обозначим $S_e(G)$.

Очевидно, что $Hom(G, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^r$ и состояния образуют симплекс в $\mathbb{R}^r$.

Как в [4], определим на G_+ функции

$$f^*(x) = \inf\left\{\frac{m}{n} : nx \le me, \quad n > 0, \quad m \ge 0\right\},$$

$$f_*(x) = \sup\left\{\frac{m}{n} : nx \le me, \quad n > 0, \quad m \ge 0\right\}.$$

Очевидно, что $\forall f \in S_e(G) \quad f_*(x) \le f(x) \le f^*(x)$, где $x \in G_+$.

Теорема I. Пусть G - упорядоченная группа, e - строгая единица, $x \in G_+$, $p \in \mathbb{R}: f_*(x) \le p \le f^*(x)$.

Тогда существует $f \in S_e(G)$ такое, что $f(x) = p$.

Доказательство: см. / [4, лемма 4.1] /.

Следствие I. Для того чтобы индуктивный предел системы /2/ имел одно состояние, необходимо и достаточно,

$$f_*(e_i) = f^*(e_i), \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Вычислим теперь функции f_*, f^* для системы /2/.

Пусть $x \in G_+$ и $me - nx \in G_+$, тогда $\exists s_0$: $\rho(s_0)(me - nx) \in \mathbb{Z}_+^r$, т.е.

$$m\sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}(s_0) - \sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}(s_0)x_j \ge 0 \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Откуда

$$\frac{m}{n} \ge \max_{1 \le i \le r} \frac{\sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}(s_0)x_j}{\sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}(s_0)},$$

$$f^*(x) = \inf\left\{\max_{1 \le i \le r} \frac{\sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}(s_0)x_j}{\sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}(s_0)}, \; s \ge 0\right\}.$$

Аналогично,

$$f_*(x)=\sup\left\{\min_{1\le i\le r}\frac{\sum_{j=1}^{r}\rho_{ij}(s_0)x_j}{\sum_{j=1}^{r}\rho_{ij}(s_0)},\ s\geq 0\right\}.$$

Обозначим $\quad n_i(s)=\sum_{j=1}^{r}\rho_{ij}(s) \qquad (i=1,\dots,r),$

$$J_{ij}(s)=\frac{\rho_{ij}(s)}{n_i(s)} \qquad (i,j=1,\dots,r).$$

Тогда

$$f^*(x)=\inf\left\{\max_{1\le i\le r}\left[J(s)x\right]_i,\ s\geq 0\right\}$$

$$f_*(x)=\sup\left\{\min_{1\le i\le r}\left[J(s)x\right]_i,\ s\geq 0\right\}.$$

Рассмотрим матрицу $\quad N_{ij}(s)=\frac{\delta_{ij}}{n_i(s)} \qquad (i,j=1,\dots,r),$

тогда

$$J(s)=N(s)\rho(s)=N(s)\varphi(s)\rho(s-1)=$$

$$=N(s)\varphi(s)N(s-1)^{-1}N(s-1)\rho(s-1)=N(s)\varphi(s)\,N(s-1)^{-1}J(s-1),$$

$$J(s)=N(s)\varphi(s)N(s-1)^{-1}J(s-1).$$

Пусть $\quad \alpha(s)=N(s)\,\varphi(s)\,N(s-1)^{-1}$, тогда легко видеть, что

$$\alpha_{ij}(s)=\frac{n_j(s-1)}{n_i(s)}\varphi_{ij}(s) \qquad (i,j=1,\dots,r).$$

Поскольку

$$1=\sum_{j=1}^{r}J_{ij}(s)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\alpha_{ik}(s)J_{kj}(s-1)=$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\alpha_{ik}(s)\sum_{j=1}^{r}J_{kj}(s-1)=\sum_{k=1}^{r}\alpha_{ik}(s).$$

$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_{ij}(s)=1.$$

Покажем теперь, что

$$f^*(e_k)=\lim_{s\to\infty}\max_{1\le i\le r}J_{ik}(s),$$

$$f_*(\ell_k) = \lim_{s\to\infty} \min_{1\le i\le r} J_{ik}(s).$$

Действительно,

$$f^*(\ell_k) = \inf\left\{\max_{1\le i\le r} J_{ik}(s),\ s\ge 0\right\}.$$

Пусть $D_k^+(s) = \max_{1\le i\le r} J_{ik}(s)$, докажем, что $D_k^+(s)$ убывает.

$$D_k^+(s) = J_{i_+k}(s) = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{i_+j}(s)\, J_{jk}(s-1) \le$$

$$\le D_k^+(s-1)\sum_{j=1}^{r} \alpha_{i_+j}(s) = D_k^+(s-1), \quad \text{т. е.}$$

$$D_k^+(s) \le D_k^+(s-1) \quad \text{и}$$

$f^*(e_k) = \lim_{s\to\infty} \max_{1\le i\le r} J_{ik}(s)$, аналогично для $f_*(e_k)$.

В силу следствия I, для того чтобы система /2/ имела одно состояние, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{s\to\infty}\left[D_k^+(s) - D_k^-(s)\right] = 0 \quad (k = 1,\dots,r),$$

$$D_k^+(s) = \max_{1\le i\le r} J_{ik}(s), \qquad D_k^-(s) = \min_{1\le i\le r} J_{ik}(s).$$

Теорема 2. Пусть $M(s) = \dfrac{\min_{1\le i,j\le r}\varphi_{ij}(s)}{\max_{1\le i,j\le r}\varphi_{ij}(s)}$ и $\sum_{s=1}^{\infty} M(s) = \infty$, тогда система /2/ имеет только одно состояние.

Доказательство. Пусть $i_+(s)$, $i_-(s)$ такие, что

$$J_{i_+(s),k}(s) = D_k^+(s), \qquad J_{i_-(s),k}(s) = D_k^-(s), \text{ а}$$

$$R_+(s) = \left\{j:\ 1\le j\le r,\ \alpha_{i_+(s),j}(s) - \alpha_{i_-(s),j}(s) \ge 0\right\},$$

$$R_-(s) = \left\{j:\ 1\le j\le r,\ \alpha_{i_+(s),j}(s) - \alpha_{i_-(s),j}(s) < 0\right\}.$$

Тогда

$$D_k^+(s) - D_k^-(s) = \sum_{j=1}^{k} \left[\alpha_{i_+(s),j}(s) - \alpha_{i_-(s),j}(s)\right] J_{jk}(s-1) =$$

$$= \sum_{j\in R_+(s)} \left[\alpha_{i_+(s),j}(s) - \alpha_{i_-(s),j}(s)\right] J_{jk}(s-1) -$$

$$- \sum_{j\in R_-(s)} \left[\alpha_{i_-(s),j}(s) - \alpha_{i_+(s),j}(s)\right] J_{jk}(s-1) \le$$

$$\le D_k^+(s-1) \sum_{j\in R_+(s)} \left[\alpha_{i_+(s),j}(s) - \alpha_{i_-(s),j}(s)\right] - \qquad (3)$$

$$- D_k^-(s-1) \sum_{j\in R_-(s)} \left[\alpha_{i_-(s),j}(s) - \alpha_{i_+(s),j}(s)\right] .$$

Пусть
$$h(s) = \sum_{j\in R_+(s)} \left[\alpha_{i_+(s),j}(s) - \alpha_{i_-(s),j}(s)\right] .$$

Поскольку
$$\sum_{j=1}^{r} \left[\alpha_{i_+(s),j}(s) - \alpha_{i_-(s),j}(s)\right] = 0,$$

то
$$h(s) = \sum_{j\in R_-(s)} \left[\alpha_{i_-(s),j}(s) - \alpha_{i_+(s),j}(s)\right]$$

и
$$0 < h(s) < 1.$$

Таким образом, из /3/ получаем

$$D_k^+(s) - D_k^-(s) \le h(s)\left[D_k^+(s-1) - D_k^-(s-1)\right],$$

$$D_k^+(s) - D_k^-(s) \le \prod_{j=1}^{s} h(j).$$

Рассмотрим произведение $\prod_{s=1}^{\infty} h(s)$.
Покажем, что при $\sum_{s=1}^{\infty} M(s) = \infty$ оно расходится к нулю.

$$1 - h(s) = 1 - \sum_{j\in R_+(s)} \left[\alpha_{i_+(s),j}(s) - \alpha_{i_-(s),j}(s)\right] = \qquad /4/$$

$$= \sum_{j\in R_-(s)} \alpha_{i_+(s),j}(s) + \sum_{j\in R_+(s)} \alpha_{i_-(s),j}(s) \ge \alpha_{i_\pm j_0}(s) ,$$

где j_0 такой, что $n_{j_0}(s-1) = \max_{1 \le j \le r} n_j(s-1)$, а

$$i_\pm = \begin{cases} i_+(s), & j_0 \in R_-(s), \\ i_-(s), & j_0 \in R_+(s). \end{cases}$$

$$\alpha_{i_\pm j_0}(s) = \frac{n_{j_0}(s-1)}{n_{i_\pm}(s)} \varphi_{i_\pm j_0}(s) \geqslant \frac{n_{j_0}(s-1)}{n_{i_\pm}(s)} \min_{1 \le i, j \le r} \varphi_{ij}(s). \qquad /5/$$

Легко видеть, что $n(s) = \varphi(s)\, n(s-1)$, действительно,

$$n_i(s) = \sum_{j=1}^{r} \rho_{ij}(s) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{t=1}^{r} \varphi_{it}(s) \rho_{tj}(s) =$$

$$= \sum_{t=1}^{r} \varphi_{it}(s) \sum_{j=1}^{r} \rho_{tj}(s-1) = \sum_{t=1}^{r} \varphi_{it}(s)\, n_t(s-1).$$

Из /5/ получаем

$$\alpha_{i_\pm j_0}(s) \geqslant \frac{n_{j_0}(s-1) \min_{1 \le i, j \le r} \varphi_{ij}(s)}{\sum_{t=1}^{r} \varphi_{i_\pm t}(s)\, n_t(s-1)} \geqslant \frac{M(s)}{r}.$$

В силу /4/, имеем

$$h(s) \le 1 - \frac{M(s)}{r}. \qquad /6/$$

Поскольку ряд $\sum_{s=1}^{\infty} M(s) = \infty$, то произведение

$\prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{M(s)}{r}\right) = 0$ и $\lim_{s \to \infty} \left[D_k^+(s) - D_k^-(s) \right] = 0.$

1. Elliott G. On the classification of inductive limits of sequence of semisimple finite dimensional algebras. – J. Algebra, 1976, 38, p. 29–44.

2. Effros E.G. and Shen C.L. Dimension groups and finite difference equations, 1979, препринт. – 27 с.

3. Shen C.Z. Anote on the automorphism groups of simple dimension groups, 1979, препринт. – 13 с.

4. Goodearl K.R., Handelman D. Rank functions and K_0^o of regular rings. – J. Pure and Appl. Algebra, 1976, 7, p. 195–216.

УДК 517.925.6

А.Э.Еременко

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ О МНОЖЕСТВЕ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dy_j/dx = f_j(y_1, \dots, y_n, x, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad j=1,\dots,n, \qquad /1/$$

где f_j – целые функции от всех своих переменных, λ_k – комплексные параметры. Каждой точке $w=(y_1^0,\dots,y_n^0, \lambda_1,\dots,\lambda_m) \in \mathbb{C}^{m+n} = \mathbb{C}^N$ соответствует решение задачи Коши для системы /1/ с начальными условиями $y_j(0)=y_j^0$, $j=1,\dots,n$. Это решение обозначим через $y(w,x)$. Вектор $y(w,x)$ голоморфен в некоторой окрестности гиперплоскости $x=0$ в $\mathbb{C}^{N+1}$.

Нас интересует вопрос о множестве значений $w \in \mathbb{C}^N$, при которых вектор $y(w,x)$ целый /т.е., его компоненты – целые функции от x /. Если решение $y(w,x)$ целое при всех $w \in \mathbb{C}^N$, то система /1/ является системой без подвижных особенностей [1]. Таковы, например, линейные системы. Нелинейные системы обладают подвижными особенностями и могут иметь как целые, так и нецелые решения, в зависимости от w.

Например, система

$$y_1' = y_2, \qquad y_2' = y_2^3 - y_1^3 + y_1$$

имеет целое решение $y_1 = y_2 = \exp(x-a)$ при начальных условиях $y_1(0) = y_2(0)$, однако, можно показать, что не все решения этой системы целые [1, с. 164]. Более простым примером такой ситуации служит уравнение $y' = (y-x)(y-x-1)+1$, которое обладает только двумя целыми решениями: $y=x$ и $y=x+1$. /Если бы существовало другое целое решение y, то в силу теоремы единственности функция $y(x)-x$ нигде не обращалась бы в 0 и 1, что противоречит теореме Пикара./

Оказывается, если не все решения системы /1/ целые, то целых решений в некотором смысле очень мало.

Подмножество $\mathbb{C}^N$ называется $\mathbb{C}^N$-полярным, если существует плюрисупергармоническая в $\mathbb{C}^N$ функция, которая обращается в бесконечность в точности на этом множестве. Отметим, что пересечение $\mathbb{C}^N$-полярного множества с каждой комплексной прямой либо совпадает с этой прямой, либо имеет логарифмическую емкость нуль.

Теорема. Множество точек $w \in \mathbb{C}^N$, для которых $y(w,z)$ - целая функция от z, либо совпадает с $\mathbb{C}^N$, либо является $\mathbb{C}^N$-полярным.

Доказательство. Для любого $w \in \mathbb{C}^N$ обозначим через $\rho(w)$ радиус наибольшего круга в z-плоскости, внутри которого функция $y(w,z)$ голоморфна. Воспользуемся теоремой об аналитической зависимости от параметров в следующей форме /см. [2] /.

Пусть некоторое решение $y(w_0;z)$ системы /1/ голоморфно в круге $|z| < r$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что всякое решение $y(w,z)$, для которого $|w - w_0| < \delta$, голоморфно в круге $|z| < r - \varepsilon$. Кроме того, $y(w,z)$ есть аналитическая функция двух переменных в области $|w - w_0| < \delta$, $|z| < r - \varepsilon$.

По этой теореме функция $\rho(w)$ полунепрерывна снизу, то есть $\underline{\lim}_{w \to w_0} \rho(w) \geqslant \rho(w_0)$. Эта функция равна наименьшему из радиусов сходимости рядов Маклорена компонент $y(w,z)$. Полунепрерывная снизу регуляризация функции $\ln \rho(w)$ плюрисупергармонична [3]. Поскольку $\ln \rho(w)$ полунепрерывна, она плюрисупергармонична, и если $\ln \rho(w) \not\equiv \infty$, то множество, на котором $\ln \rho(w) = \infty$, $\mathbb{C}^N$-полярно, что и требовалось доказать.

1. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. - М.-Л.: Гос. изд-во техн. тех. лит-ры, 1950.- 436 с.

2. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Изд-во иностр. лит., 1958. - 474 с.

3. Ронкин Л.И. Элементы теории аналитических функций многих комплексных переменных. - Киев: Наук. думка, 1977. - 163 с.

УДК 519.210

В.Э.Кацнельсон

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ "НА СПЕКТРЕ" В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ СТИЛТЬЕСА
/случай одного узла/

1. Символом $\mathbb{C}$ будем обозначать комплексную плоскость, символом $\bar{\mathbb{C}}$ – комплексную плоскость с разрезом по отрицательной полуоси: $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Если a – матрица, то a^* – эрмитово-сопряженная к ней матрица, если z – комплексное число, то $\bar{z}$ – комплексно-сопряженное к нему число. Квадратную матрицу ρ будем называть неотрицательной и писать $\rho \geq 0$, если неотрицательна соответствующая эрмитова форма. По определению, $\rho_1 \geq \rho_2$, если $\rho_1 - \rho_2 \geq 0$.

Символом 1 будем обозначать как число единица, так и единичную матрицу размера $m \times m$: при этом символ 1 часто будем опускать: например, вместо $\lambda 1$, где λ – число, будем писать λ /таким образом, запись λ может означать как число λ, так и матрицу, кратную единичной, в зависимости от контекста; путаница не возникнет/.

Символом I будем обозначать единичную матрицу размера $2m \times 2m$:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

символом J_N – следующую $2m \times 2m$ –матрицу:

$$J_N = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Определение.</u> Голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ квадратная матрица-функция $n(z)$ называется неванлинновской, если

$$\frac{n(z) - n^*(z)}{i} \geq 0 \qquad (\operatorname{Im} z > 0).$$

Класс всех неванлинновских функций называется неванлинновским классом и обозначается символом N.

<u>Определение.</u> Голоморфная в $\bar{\mathbb{C}}$ функция $s(z)$ называется стилтьесовской, если

1/ $\dfrac{s(z) - s^*(z)}{i} \geq 0 \qquad (\operatorname{Im} z > 0);$

2/ $s(x) \geqslant 0 \qquad (0 < x < \infty)$.

Класс всех стилтьесовских функций называется стилтьесовским классом и обозначается символом $\mathbf{S}$.

Отметим, что из $s(z) \in \mathbf{S}$ следует неравенство

$$s(z) + s^*(z) \geqslant 0 \qquad (Re\, z > 0).$$

Важной для нас является

Теорема I. Если $s(z) \in \mathbf{S}$, то $s(z) \in \mathbf{N}$ и $-z^{-1} s(z) \in \mathbf{N}$. Обратно, если голоморфная в $Im\, z > 0$ функция $s(z)$ такова, что $s(z) \in \mathbf{N}$ и $-z^{-1} s(z) \in \mathbf{N}$, то $s(z)$ является функцией класса $\mathbf{S}$.

Эта теорема доказана в [2] /приложение/.

Функции класса $\mathbf{S}$ *могут иметь особенности лишь на отрицательной полуоси*, и каждая точка отрицательной полуоси может быть особой точкой аналитической функции класса $\mathbf{S}$. Поэтому отрицательную полуось естественно называть "спектром" класса $\mathbf{S}$.

В [1, 2] рассматривалась следующая интерполяционная задача. Даны лежащие в $\overset{\frown}{\mathbf{C}}$ узлы интерполяции $z_1, \ldots, z_n$ и матрицы $s_1, s_2, \ldots, s_n$ - интерполируемые значения. Требуется описать условия, при которых в классе $s(z) \in \mathbf{S}$ разрешима интерполяционная задача $s(z_j) = s_j \ (1 \leqslant j \leqslant n)$ и описать множество ее решений. Представляет интерес, как теоретический, так и прикладной, *интерполяционная задача в классе* $\mathbf{S}$ в случае, когда узлы интерполяции лежат на отрицательной полуоси, т.е. "на спектре" класса $\mathbf{S}$. При интерполяции в узлах, принадлежащих $\overset{\frown}{\mathbf{C}}$, т.е. лежащих "вне спектра", интерполируемые значения должны удовлетворять определенным условиям, заключающимся в неотрицательности некоторых квадратичных форм, построенных по интерполяционным данным /см. [2, гл. УШ, § 9, п°5]; [1, теорема 3.6] /. Из этих условий следует, что интерполируемые значения не могут быть произвольными. При интерполяции же "на спектре" интерполируемые значения могут быть совершенно произвольными эрмитовыми матрицами. И при интерполяции на спектре возникают условия типа неотрицательности некоторых эрмитовых форм, но эти условия налагают ограничения на значения в узлах интерполяции производных интерполирующей функции, а не на значения самой функции.

Функции класса S имеют механическую интерпретацию. Так, коэффициент динамической упругости, или импеданс, как функция от переменного $z = -\omega^2$ / ω - частота/ таких механичесих систем, как нить с бусинками /см. [3], приложение 2/ или система дисков на упругом валу /см. [4, гл. IX, п° 4]/, является рациональной функцией класса S. Наоборот, всякая рациональная функция $s(z) \in S$ является коэффициентом динамической упругости такой механической системы: параметры системы могут быть определены посредством разложения функции $s(z)$ в цепную дробь Стилтьеса /см. [3, приложение 2] /. Интерполяционные задачи с узлами интерполяции "на спектре", таким образом, могут быть использованы при решении задачи синтеза механической системы, коэффициент динамической упругости которой принимает предписанные значения на предписанных частотах ω_1, ω_2, ..., ω_n.

Рассмотрим случай, когда узел интерполяции один: $z_0 = -\lambda_0$, где $\lambda_0 > 0$. Случай задачи с одним узлом интерполяции весьма важен и решение такой задачи является составным элементом пошагового интерполяционного алгоритма Шура. При практической реализации пошаговый метод имеет ряд преимуществ перед "групповым" /"групповым" мы называем метод, аналогичный изложенному в [1, п°. 3]/.

2. Пусть $z_0 = -\lambda_0$, где $\lambda_0 > 0$. Мы будем говорить, что функция $s(z) \in S$ аналитична в точке z_0, если $s(z)$ является однозначной аналитической функцией на множестве $\mathbb{C} \cup V$, где V - некоторая окрестность точки $\{z_0\}$.

Пусть $s(z)$ - функция класса S, аналитическая в z_0. Так как $s(z) = s^*(\bar{z})$ $(z \in {}^-\mathbb{C})$, то при $z \to z_0$, получим

$$s(z_0) = s(z_0)^*.$$

Переходя к пределу в неравенствах

$$\frac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0 \qquad (Im\, z \neq 0),$$

$$\frac{-z^{-1} s(z) + \bar{z}\, s^*(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0 \qquad (Im\, z \neq 0),$$

справедливых, так как $s(z) \in N$, $-z^{-1} s(z) \in N$ /теорема 1/, получаем

$$s'(-\lambda_0) \geqslant 0, \qquad s'(-\lambda_0) + \lambda_0^{-1} s(\lambda_0) \geqslant 0. \qquad /1/$$

Мы рассмотрим следующую интерполяционную задачу.

Дана произвольная эрмитова матрица s_0, и матрица r, удовлетворяющая неравенствам

$$r \geqslant 0, \qquad r + \lambda_0^{-1} s_0 \geqslant 0. \qquad /2/$$

Требуется описать множество всех функций $s(z) \in \mathcal{S}$, аналитических[*] в точке $z = -\lambda_0$ и удовлетворяющих "интерполяционным" условиям

$$s(-\lambda_0) = s_0, \qquad s'(-\lambda_0) \leqslant r.$$

Условия /2/, как следует из /1/, необходимы для разрешимости задачи / I /. Оказывается, что условия /2/ являются и достаточными для ее разрешимости, а при выполнении условий

$$r > 0, \qquad r + \lambda_0^{-1} s_0 > 0 \qquad /3/$$

множество решений этой задачи бесконечно. Оно будет нами описано в п. 4.

Переформулируем интерполяционную задачу / I / в терминах матричных неравенств.

<u>Теорема 2.</u> Для того чтобы аналитическая в $\bar{C}$ /и в $-\lambda_0$/ функция $s(z)$ была решением интерполяционной задачи (I) в классе $\mathcal{S}$, необходимо и достаточно, чтобы в полуплоскости $Im\, z > 0$ выполнялись матричные неравенства

$$\left[\begin{array}{c|c} r & \dfrac{s(z) - s_0}{z + \lambda_0} \\ \hline \dfrac{s^*(z) - s_0}{z + \lambda_0} & \dfrac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array}\right] \geqslant 0, \qquad /\text{ОМН I}/$$

---

[*] Мы ограничиваемся здесь интерполяцией функциями, аналитическим в точке $z = -s_0$; желая избежать рассмотрения вопроса о том, в каком смысле следует понимать интерполяционные условия / I /. Условиям /I/ можно придать смысл, и не предполагая аналитичности функции $s(z)$ в узле интерполяции, а понимая эти условия как некоторое асимптотическое соотношение. Здесь мы будем интересоваться, главным образом, "формальной" стороной дела.

$$\begin{bmatrix} \lambda_0^{-1}(r+\lambda_0^{-1}s_0) & \dfrac{-z^{-1}s(z)-\lambda_0^{-1}s_0}{z+\lambda_0} \\ * & \dfrac{-z^{-1}s(z)+\bar z^{-1}s^*(z)}{z-\bar z} \end{bmatrix} \geq 0. \qquad /\text{ОМН } 2/$$

Доказательство. Если известно, что $s(z) \in S$, то, согласно теореме I, $s(z) \in N$ и $-z^{-1}s(z) \in N$. Неравенства /ОМН I/ и /ОМН 2/ для функции $s(z)$ получаются из неравенств Шварца – Пика для функций $s(z)$ и $-z^{-1}s(z) \in N$, записанных для узлов z_1 и $z_2 = z$ $(Im\, z_1 > 0,\ Im\, z_2 > 0)$ с последующим предельным переходом $z_1 \to -\lambda_0$, и с учетом интерполяционных условий / I /. Обратно, пусть известно, что аналитическая в $\mathbb{C}$ / и в $-\lambda_0$ / функция $s(z)$ удовлетворяет в $Im\, z > 0$ неравенствам /ОМН I/ и /ОМН 2/. Из /ОМН I/ следует, что $\frac{s(z)-s^*(z)}{i} \geq 0$ $(Im\, z > 0)$ из /ОМН 2/ следует, что $i(z^{-1}s(z)-\bar z^{-1}s^*(z)) \geq 0$ $(Im\, z > 0)$. Значит, по теореме I, $s(z) \in S$. Имеем $\frac{s(z)-s^*(z)}{z-\bar z} \to s'(-\lambda_0)$ при $z \to -\lambda_0$. Устремляя $z \to \lambda_0$ $Im\, z > 0$, получаем из /ОМН I/:

$$s(-\lambda_0) = s_0, \qquad \begin{bmatrix} r & s'(-\lambda_0) \\ s'(-\lambda_0) & s'(-\lambda_0) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Последнее же неравенство эквивалентно неравенству.

$$0 \leq s'(-\lambda_0) \leq r_0.$$

Таким образом, интерполяционная задача / I / в классе S полностью адекватна задаче описания множества аналитических функций $s(z)$, удовлетворяющих в $Im\, z > 0$ системе неравенств /ОМН I/ и /ОМН 2/.

Применяя лемму о блок-матрице /5, гл. 2, § 2/ приведем /ОМН I/ к эквивалентному виду

$$\frac{s(z)-s^*(z)}{i} \geq \frac{z-\bar z}{i} \cdot \frac{s^*(z)-s_0}{\bar z+\lambda_0}\, r^{-1}\, \frac{s(z)-s_0}{z+\lambda_0}, \qquad /4/$$

а /ОМН 2/ – к эквивалентному виду

$$\frac{-z^{-1}s(z)+\bar z^{-1}s^*(z)}{i} \geq \frac{z-\bar z}{i}\cdot\frac{-\bar z^{-1}s^*(z)\lambda_0-s_0}{\bar z+\lambda_0}\times$$

$$\times\left[s_0+\lambda_0 r\right]^{-1}\frac{-z s(z)\lambda_0-s_0}{z+\lambda_0}\,. \qquad /5/$$

Неравенство /4/ можно записать в виде

$$\left[s^*(z),1\right]\left\{J_H-\frac{z-\bar z}{i}\cdot\frac{1}{\bar z+\lambda_0}\cdot\begin{bmatrix}1\\-s_0\end{bmatrix}r^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[1,-s_0\right]\frac{1}{z+\lambda_0}\right\}\times\begin{bmatrix}s(z)\\1\end{bmatrix}\geq 0, \qquad /6/$$

а неравенство /5/ – в виде

$$\left[s^*(z),1\right]\rho^*(z)\times\left\{J_H-\frac{z-\bar z}{i}\cdot\frac{1}{\bar z+\lambda_0}\begin{bmatrix}\lambda_0\\-s_0\end{bmatrix}\times\right. \qquad /7/$$

$$\left.\times\left[s_0+\lambda_0 r\right]^{-1}\left[\lambda_0\ -s_0\right]\frac{1}{z+\lambda_0}\right\}\times\rho(z)\begin{bmatrix}s(z)\\1\end{bmatrix}\geq 0;$$

$$\rho(z)=\left[\begin{array}{c|c}-z^{-1} & 0\\ \hline 0 & 1\end{array}\right]. \qquad /8/$$

Таким образом, система неравенств /ОМН I/ и /ОМН 2/, а следовательно, и интерполяционная задача / I /, эквивалентна системе неравенств /6/, /7/ относительно /аналитической/ функции $s(z)$. Именно с системой неравенств /6/ – /7/ мы и будем в дальнейшем иметь дело.

Систему неравенств /6/ – /7/ мы будем решать, факторизуя правые части этих неравенств. Соответствующая факторизационная алгебра будет изложена в п. 3.

3. Пусть λ_0 – число, s_0 и r – $m\times m$ матрицы, удовлетворяющие условиям

$$s_0=s_0^*; \qquad /9/$$

$$r>0; \qquad /10/$$

$$r+\lambda_0^{-1}s_0>0. \qquad /11/$$

Положим

$$A=\left[\begin{array}{c|c} r & 0 \\ \hline 0 & r+\lambda_0^{-1}s_0 \end{array}\right]; \qquad /12/$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{z+\lambda_0}\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline -1 & z/\lambda_\rho \end{array}\right](2m\times 2m); \qquad /13/$$

$$\Omega_\rho(z)=\frac{1}{z+\lambda_0}\left[\begin{array}{c|c} -z & 1 \\ \hline -1 & -1/\lambda_0 \end{array}\right](2m\times 2m). \qquad /14/$$

Введем в рассмотрение матрицы-функции $\omega(z)$ и $\omega_\rho(z)$:

$$\omega(z)=I+\begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\Omega(z)\,A^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad /15/$$

$$\omega_\rho(z)=I+\begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\Omega_\rho(z)\,A^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad /16/$$

Коммутируя матрицу $\rho(z)$ /см /8/ / с матрицами, участвующими в выражении /7/ для $\omega(z)$, получим, что $\omega(z)$ и $\omega_\rho(z)$ связаны друг с другом соотношением

$$\omega_\rho(z)=\rho(z)\,\omega(z)\,\rho^{-1}(z). \qquad /17/$$

Вычислим J-формы $\omega(z)\,J_H\,\omega^*(\zeta)-J_H$ и $\omega_\rho(z)\,J_H\,\omega_\rho^*(\zeta)-J_H$. При этих вычислениях мы будем существенно использовать следующее непосредственно проверяемое <u>основное тождество</u>:

$$A^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}A^{-1}=$$
$$=A^{-1}\begin{bmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{bmatrix}A^{-1}, \qquad /18/$$

а также тождества

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\Omega(z)\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & -\lambda_0 \end{bmatrix}+\Omega(z)\begin{bmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad /19/$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar\zeta & 0 \\ 0 & -\lambda_0 \end{bmatrix}\Omega^*(\zeta)+\begin{bmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{bmatrix}\Omega^*(\zeta). \qquad /20/$$

Подставляя выражение /15/ в J-форму, получаем

$$\frac{\omega(z) J_H \omega^*(\zeta) - J_H}{i} = \begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega(z) A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A^{-1} \Omega^*(\zeta) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix} - \qquad /21/$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega(z) A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A^{-1} \Omega^*(\zeta) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Преобразуя последнее слагаемое правой части /21/ согласно основному тождеству /18/ и коммутируя матрицы в первом и втором слагаемых правой части, получаем

$$\frac{\omega(z) J_H \omega^*(\xi) - J_H}{i} = \begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega(z) A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A^{-1} \Omega^*(\xi) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix} - \qquad /22/$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega(z) A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{bmatrix} \Omega^*(\xi) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega(z) A^{-1} \Omega^*(\zeta) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Подставляя, наконец, в первое и второе слагаемое правой части /22/ соответственно выражения /20/ и /19/ и учитывая, что

$$A^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\xi} & 0 \\ 0 & -\lambda_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & -\lambda_0 \end{bmatrix} A^{-1} = -(z-\bar{\xi}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r^{-1} [1, \ 0],$$

получаем

$$\omega(z) J_H \omega^*(\zeta) - J_H =$$

$$= \frac{z-\bar{\xi}}{i} \begin{bmatrix} 0 & -s_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Omega(z) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r^{-1} [1, 0] \, \Omega^*(\zeta) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s_0 & 0 \end{bmatrix}$$

или

$$\omega(z)\, J_H\, \omega^*(\zeta) - J_H = \frac{z-\bar\zeta}{i}\cdot\frac{1}{z+\lambda_0}\begin{bmatrix} s_0 \\ 1 \end{bmatrix} r^{-1} [s_0, 1]\, \frac{1}{\bar\zeta+\lambda_0}\,. \qquad /23/$$

Из /23/ и /19/ следует, что

$$\omega(z)\, J_H\, \omega^*(z) \geq J_H \qquad (Im\, z \geq 0). \qquad /24/$$

По принципу симметрии,

$$\omega^{-1}(z) = J_H\, \omega^*(\bar z)\, J_H \qquad (\forall z) \qquad /25/$$

и значит

$$\omega^{-1*}(z)\, J_H\, \omega^{-1}(z) =$$

$$= J_H - \frac{z-\bar z}{i}\cdot\frac{1}{\bar z+\lambda_0}\begin{bmatrix} 1 \\ -s_0 \end{bmatrix} r^{-1} [1, -s_0]\, \frac{1}{z+\lambda_0}\,. \qquad /26/$$

Аналогично вычисляется J-форма $\omega_\rho(z)\, J_H\, \omega_\rho^*(\zeta)$. Вместо тождеств /18/ и /19/ нужно при этом вычислении пользоваться тождествами

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \Omega_\rho(z)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 z \end{bmatrix} + \Omega_\rho(z)\begin{bmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \lambda_0\bar\zeta \end{bmatrix}\Omega_\rho^*(\zeta) + \begin{bmatrix} 0 & \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 \end{bmatrix}\Omega_\rho^*(\zeta).$$

$$\omega_\rho(z)\, J_H\, \omega_\rho^*(\zeta) - J_H =$$

$$= \frac{z-\bar\zeta}{i}\cdot\frac{1}{z+\lambda_0}\begin{bmatrix} \lambda_0 & s_0 \\ & 1 \end{bmatrix}(\lambda_0 r + s_0)^{-1}[\lambda_0 s_0\ 1]\,\frac{1}{\bar\zeta+\lambda_0}\,. \qquad /27/$$

Из /27/ и /11/ следует, что

$$\omega_\rho(z)\, J_H\, \omega_\rho^*(z) - J_H \geq 0 \qquad (Im\, z \leq 0). \qquad /28/$$

По принципу симметрии,

$$\omega_\rho^{*-1}(z)\, J_H\, \omega_\rho^{-1}(z) =$$

$$= J_H - \frac{z-z^{-1}}{i}\ \frac{1}{\bar z+\lambda_0}\begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda_0 s_0 \end{bmatrix}(\lambda_0 r + s_0)^{-1}[1, -\lambda_0 s_0]\,\frac{1}{z+\lambda_0}\,. \qquad /29/$$

Отсюда и из /17/ следует,

$$\omega^{*-1}(z)\,\rho^*(z)\,J_H\,\rho(z)\,\omega^{-1}(z)=\rho^*(z)\Big\{J_H-\frac{z-\bar z}{i}\,\times$$

$$\times\frac{1}{\bar z+\lambda_0}\begin{bmatrix}1\\ -\lambda_0 s_0\end{bmatrix}(\lambda_0 r+s_0)^{-1}\big[1,-\lambda_0 s_0\big]\frac{1}{z+\lambda_0}\Big\}\,\rho(z). \qquad /30/$$

Из /24/ и /25/ следует

<u>Теорема 3</u>. Функция $\omega(z)$, определенная в /15/, /12/, /13/, является при условии /9/ - /11/ матрицей-функцией класса W_s. Матрицы функции $\omega(z)$ и $\omega^{-1}(z)$ имеют простой полюс в точке $z=-\lambda_0$ и голоморфны во всех остальных точках замкнутой комплексной плоскости. /Определение класса W_s см. в [1, п°1]/.

4. Сравнивая /6/ с /26/, а /7/ с /30/ убеждаемся в том, что система /6/ - /7/ может быть записана в виде

$$\big[s^*(z),1\big]\,\omega^{*-1}(z)\,J_H\,\omega^{-1}(z)\begin{bmatrix}s(z)\\ 1\end{bmatrix}\geqslant 0 \quad (\operatorname{Im} z>0), \qquad /31/$$

$$\big[s^*(z),1\big]\,\omega^{*-1}(z)\,\rho^*(z)\,J_H\,\rho(z)\,\omega^{-1}(z)\begin{bmatrix}s(z)\\ 1\end{bmatrix}\geqslant 0 \quad (\operatorname{Im} z>0). \qquad /32/$$

Теперь, точно так же, как в [1] устанавливалась теорема 3.5, можно сделать вывод о том, что имеет место

<u>Теорема 4</u>. Общее решение $s(z)$ /в классе функций S, аналитических в $\mathbb{C}$ / системы неравенств /ОМН 1/ - /ОМН 2/ может быть при условиях /3/ параметризовано посредством дробно-линейного преобразования

$$s(z)=\big[\alpha(z)\,p(z)+\beta(z)\,q(z)\big]\,\big[\gamma(z)\,p(z)+\delta(z)\,q(z)\big]^{-1},$$

где матрица преобразования

$$\begin{bmatrix}\alpha(z) & \beta(z)\\ \gamma(z) & \delta(z)\end{bmatrix}=\omega(z) \qquad (2m\times 2m)$$

определена в /15/, /12/, /13/, а "параметр" $[p(z),\ q(z)]$ пробегает множество всех классов эквивалентности стилтьесовских пар. /По поводу стилтьесовских пар см. [1, п° 3] /.

1. Дюкарев Ю.М., Кацнельсон В.Э. Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса и связанные с ними интерполяционные задачи. - В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, изд-во Харьков. ун-та, 1981, вып. 36.

2. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. - М.: Наука, 1973. - 551 с.

3. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. - М.-Л.: Гос. изд-во техн. тех. лит-ры, 1950. - 359 с.

4. Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. - М.-Л.: Гос. изд-во техн. тех. лит-ры, 1946.- 423 с.
5. Ефимов А.В., Потапов В.П. J - растягивающие матрицы-функции и их роль в математической теории электрических цепей. - Успех мат. наук, 1973, 28, вып. I /169/, с. 65-130.

УДК 517.9:532

Н.Д.Копачевский

О СВОЙСТВАХ СИСТЕМЫ МОД ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Задача о малых /линейных/ колебаниях идеальной жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде, изучалась в [1-4]. Спектр частот колебаний разбивается на два множества, отвечающих двум принципиально различным классам колебаний: поверхностным и внутренним /объемным/ волнам. Диапазону частот ω в интервале $(-2\omega_0,\ 2\omega_0)$, где $\omega_0 > 0$ - угловая скорость вращения сосуда с жидкостью, отвечают внутренние волны с предельным спектром $[-2\omega_0,\ 2\omega_0]$, а вне этого интервала имеется дискретный спектр $\{\omega_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ частот поверхностных волн с предельными точками $\omega = \pm\infty$. В [1, 2] выяснены достаточные условия /см. ниже условия /11//, обеспечивающие полноту с точностью до конечного дефекта совокупности мод поверхностных колебаний в некотором гильбертовом пространстве. Настоящая заметка посвящена получению условий полноты и минимальности мод поверхностных колебаний вращающейся жидкости, а также выводу асимптотических формул для их частот.

1. Обозначим через Ω область, занимаемую жидкостью в сосуде в состоянии равномерного вращения с угловой скоростью $\omega_0 > 0$, ее свободную поверхность - через Γ, а смоченную твердую стенку - через S. Как показано в [1, 2], задача о малых колебаниях жидкости, близких к равномерному вращению и зависящих от времени по закону $exp(i\omega t)$, может быть приведена к спектральной задаче вида

$$\omega^2\begin{pmatrix}\vec{w}\\ \eta\end{pmatrix}-2\omega_0\omega\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ \eta\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \tilde{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{w}\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{0}\\ 0\end{pmatrix}. \qquad /1/$$

Поясним обозначения из /1/. Искомый вектор-столбец $(\vec{w}, \eta)^T$ позволяет вычислить поле смещений $\vec{u}$ частиц жидкости в области Ω : $\vec{u} = \nabla\Phi + \vec{w}$; при этом скалярная функция η есть элемент гильбертова пространства $H = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$, через которую выражается потенциально-соленоидальное поле смещений $\nabla\Phi$ [1, 2]; вектор-функция $\vec{w}$ характеризует вихревую компоненту поля смещений, она является элементом гильбертова пространства $J_0(\Omega)$ /см. [5]/, которое получается замыканием в норме пространства вектор-функций $L_2(\Omega)$ множества гладких соленоидальных векторов, имеющих нулевую нормальную компоненту на $\partial\Omega$.

Оператор-матрица $(A_{ik})_{i,k=1}^{2}$ в /1/ есть гироскопический оператор, "происходящий" от кориолисовых членов в уравнении движения; это самосопряженный оператор в $J_0(\Omega) \oplus H$ с нормой, не превосходящей единицы.

Оператор $\tilde{B} = \tilde{B}^*$ в /1/ имеет вид $\tilde{B} = C^{-1/2} B C^{-1/2}$, где $C^{-1/2} = (C^{-1/2})^*$ - равномерно положительный в H оператор $(C^{-1/2} \gg 0)$, связанный с кинетической энергией системы, а $B = B^*$ - оператор потенциальной энергии. Мы будем предполагать в дальнейшем, что состояние равновесия жидкости в сосуде устойчиво по линейному приближению [1-4], т.е. $B \gg 0$, тогда и $\tilde{B} \gg 0$. Обратный оператор $\tilde{B}^{-1}$ вполне непрерывен и принадлежит классу $\mathfrak{S}_p$ /см. [6]/ при некотором $p > 0$. Для капиллярной жидкости, когда учитывается действие сил поверхностного натяжения, собственные числа λ_n оператора $\tilde{B}^{-1}$ имеют асимптотическое поведение [7]:

$$\lambda_n(\tilde{B}^{-1}) = \left(\frac{mes\,\Gamma}{4\pi}\right)^{3/2} \sigma^{-1} n^{-3/2} \left[1 + o(1)\right] \quad (n \to \infty), \qquad /2/$$

где $\sigma > 0$ - коэффициент поверхностного натяжения. Для тяжелой жидкости, когда учитываются сила тяжести интенсивностью g , действующая вдоль оси вращения, а также центробежная сила, вместо /2/ имеем [8]:

$$\lambda_n(\tilde{B}^{-1}) = \left\{\frac{1}{4\pi} \int_\Gamma a^2(x)\, d\Gamma(x)\right\}^{1/2} n^{-1/2} \left[1 + o(1)\right] \quad (n \to \infty). \qquad /3/$$

Здесь функция $a(x) > 0$ $(x \in \Gamma)$ определяется состоянием относительного равновесия: $a = \rho\left[g \cos(\vec{n}, \hat{z}) - \omega_0^2 r \cos(\vec{n}, \hat{r})\right]$, ρ - плотность жидкости, (r, θ, z) - цилиндрические координаты, для которых ось Oz есть ось вращения сосуда с жидкостью. Формулы /2/ и /3/ показывают, что $\tilde{B}^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при $p > 2/3$ для капиллярной и при $p > 2$ для тяжелой жидкости.

2. Исследуя поверхностные волновые движения, сделаем в /1/ при $|\omega| > 2\omega_0$ замену

$$2\omega_0 / \omega = \lambda \qquad (|\lambda| < 1); \qquad /4/$$

вместо /1/ мы придем к системе уравнений

$$\left(I - \lambda A_{11}\right)\vec{w} = \lambda A_{12}\eta, \quad \eta = \lambda\left(A_{21}\vec{w} + A_{22}\eta\right) + \lambda^2\left(4\omega_0^2\right)^{-1}\tilde{B}\eta. \qquad /5/$$

Так как $|\lambda| < 1$ и $\|A_{11}\| \le 1$, то оператор $I - \lambda A_{11}$ обратим, причем $R(\lambda) = (I - \lambda A_{11})^{-1}$ – аналитическая относительно λ оператор-функция, принимающая ограниченные значения, т.е. $R(\lambda) \in \mathcal{R}$.

Исключая из /5/ $\vec{w}$, приходим к одному уравнению

$$\eta = \lambda A_{22}\eta + \lambda^2\left(4\omega_0^2\right)^{-1}\tilde{B}\eta + \lambda^2 A_{21} R(\lambda) A_{12}\eta. \qquad /6/$$

Производя в /6/ замену

$$\hat{\zeta} = \left(\lambda/2\omega_0\right)\tilde{B}^{1/2}\eta, \qquad /7/$$

получаем уравнение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = H \oplus H$:

$$\zeta = \lambda D\zeta + \lambda^2 F(\lambda)\zeta, \qquad \zeta = (\eta, \hat{\zeta})^T,$$

$$D = D^* = \begin{pmatrix} A_{22}, (2\omega_0)^{-1}\tilde{B}^{1/2} \\ (2\omega_0)^{-1}\tilde{B}^{1/2}, \ 0 \end{pmatrix}, \qquad F(\lambda) = diag\left(A_{21} R(\lambda) A_{12},\ 0\right). \qquad /8/$$

Оператор D в /8/ неограничен; обратный оператор

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2\omega_0\tilde{B}^{-1/2} \\ 2\omega_0\tilde{B}^{-1/2} & -4\omega_0^2\tilde{B}^{-1/2}A_{22}\tilde{B}^{-1/2} \end{pmatrix} \qquad /9/$$

в силу свойств операторов $\tilde{B}^{-1/2}$ и A_{22} вполне непрерывен. Применяя к левой и правой частям /8/ оператор D^{-1}, получаем уравнение

$$D^{-1}\zeta = \lambda\zeta + \lambda^2 D^{-1}F(\lambda)\zeta \qquad (|\lambda| < 1), \qquad /10/$$

в котором последнее слагаемое справа можно считать возмущением с аналитической по λ оператор-функцией $\lambda^2 D^{-1} F(\lambda)$, принимающей значения на множестве вполне непрерывных операторов.

Как показано в [1, 2], при выполнении условий

$$B \gg 0, \quad \lambda_{min}(\tilde{B}) - 8\omega_0^2 > 0, \qquad /11/$$

задача /10/ имеет вещественный дискретный спектр $\{\lambda_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$, $|\lambda_n^{\pm}| < 1$, с единственной предельной точкой $\lambda = 0$, а совокупность собственных векторов $\{\xi_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ образует систему, имеющую не более конечного дефекта в $\mathcal{H}$. Мы получим ниже /см. /30// более ограничительные достаточные условия, которые обеспечивают полноту и минимальность системы $\{\xi_n^{\pm}\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}$.

3. Дальнейшие построения основаны на факторизации /разложении на множители специального вида/ операторного пучка

$$J - \mathcal{P}(\lambda), \qquad \mathcal{P}(\lambda) \stackrel{def}{=} \lambda^{-1} D^{-1} - \lambda D^{-1} F(\lambda), \qquad /12/$$

отвечающего задаче /10/; при этом используется известная факторизационная лемма /см., например, [9], лемма 1.5.1//.

Пусть H — некоторое гильбертово пространство, а $\mathcal{R} = \mathcal{R}(H)$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов, действующих в H. Обозначим через $W_{\mathcal{R}} = W$ банахову алгебру всех оператор-функций $A(\zeta)$ $(|\zeta| = 1)$, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье:

$$A(\zeta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \zeta^j A_j, \qquad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|A_j\| < \infty \qquad (A_j \in \mathcal{R}), \qquad /13/$$

с нормой

$$\|A(\zeta)\|_W = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|A_j\|. \qquad /14/$$

Рассмотрим две подалгебры W_+ и $\dot{W}_-$, прямая сумма которых равна W: W_+ — алгебра операторов вида $\sum_{j=0}^{\infty} \zeta^j A_j$, $A_j \in \mathcal{R}$; $\dot{W}_-$ — алгебра операторов вида $\sum_{j=-1}^{-\infty} \zeta^j A_j$, $A_j \in \mathcal{R}$.

Приведенный ниже результат является следствием факторизационной леммы [9] /см. также [10, предложение 0,1]/.

<u>Лемма 1</u>. Если элемент $A(\zeta) \in W_{\mathcal{R}}$ удовлетворяет условию

$$\|A(\zeta)\|_W < 1 \qquad (|\zeta| = 1), \qquad /15/$$

то элемент $I - A(\zeta)$ допускает каноническую факторизацию относительно единичной окружности $|\zeta| = 1$:

$$I - A(\zeta) = \left[I + A_+(\zeta)\right]\left[I + A_-(\zeta)\right], \quad A_+(\zeta) \in W_+ ,$$

$$\left[I + A_+(\zeta)\right]^{-1} \in W_+, \quad A_-(\zeta) \in \mathring{W}_-, \quad \left[I + A_-(\zeta)\right]^{-1} - I \in \mathring{W}_- ,$$

где оператор-функция $I + A_+(\zeta)$ /соответственно $I + A_-(\zeta)$ / голоморфна и обратима при $|\zeta| \le 1$ /соответственно при $|\zeta| \geqslant 1$ /.

4. Лемма I позволяет установить следующее предложение.

<u>Теорема I</u>. Если для некоторого $r < 1$ выполнено условие

$$\| D^{-1} \| < \varphi(r) \overset{def}{=} \frac{r(1-r)}{1-r+r^2}, \tag{16}$$

то система собственных векторов задачи /10/, отвечающих собственным числам из круга $|\lambda| < r$, полна и минимальна в $\mathcal{H}$.

<u>Доказательство</u> теоремы проведем по этапам.

А. В силу /16/ можно выбрать окружность радиуса $|\lambda| = r < 1$ таким образом, чтобы

$$r^{-1}\|D^{-1}\| + r(1-r)^{-1}\|D^{-1}\| \overset{def}{=} \|D^{-1}\|\psi(r) < 1. \tag{17}$$

При выполнении этого условия операторный пучок $J - \mathcal{P}(\lambda)$ /см. /12// непрерывно обратим на окружности $|\lambda| = r$. В самом деле, в этом случае $\|\mathcal{P}(\lambda)\| < 1$, так как

$$\|\mathcal{P}(\lambda)\| = \|\lambda^{-1}D^{-1} - \lambda D^{-1}F(\lambda)\| \le$$

$$\le r^{-1}\|D^{-1}\| + r\|D^{-1}\|\cdot\|F(\lambda)\| \le \|D^{-1}\|\ \varphi(r),$$

где использовано неравенство

$$\|F(\lambda)\| \le (1-r)^{-1}. \tag{18}$$

Для доказательства /18/ воспользуемся оценками $\|A_{ik}\| \le 1$ и определением $F(\lambda)$ /см. /8//. Для $\forall \xi = (\eta, \hat{\zeta})^T \in \mathcal{H}$ имеем

$$\|F(\lambda)\xi\|_{\mathcal{H}} = \|A_{21}R(\lambda)A_{12}\eta\| \le \|R(\lambda)\|\cdot\|\eta\| \le$$

$$\le \|(I - \lambda A_{11})^{-1}\|\cdot\|\xi\|_{\mathcal{H}} .$$

Однако при $|\lambda| = r < 1$

$$(I - \lambda A_{11})^{-1} = I + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j A_{11}^j, \tag{19}$$

так что
$$\|(I-\lambda A_{11})^{-1}\vec{w}\| \le \left(1+\sum_{j=1}^{\infty} r^{j}\right)\|\vec{w}\| = (1-r)^{-1}\|\vec{w}\|.$$

Поэтому $\|(I-\lambda A_{11})^{-1}\| \le (1-r)^{-1}$, и /18/ доказано.

B. Сделаем в уравнении
$$[J-\mathcal{D}(\lambda)]\xi = 0, \qquad /20/$$
равносильном уравнению /10/ при $\lambda \ne 0$, замену $\lambda=\zeta r$; мы придем к пучку
$$J-A(\zeta) \stackrel{def}{=} J-\frac{1}{\zeta r}D^{-1}+\zeta r D^{-1}F(\zeta r), \qquad /21/$$

Введем, согласно определениям /13/ и /14/, алгебру $W_{\mathcal{R}}$ оператор-функций $A(\zeta)$ и подалгебры W_+ и $\mathring{W}_-$. Покажем, что при выполнении условия /17/ на окружности $|\zeta|=1$ будет $\|A(\zeta)\|_W < 1$.

В самом деле,
$$\|A(\zeta)\|_W = \left\|\frac{1}{\zeta r}D^{-1}-\zeta r D^{-1}F(\zeta r)\right\|_W \le$$
$$\le \left\|\frac{1}{\zeta r}D^{-1}\right\|_W + \left\|\zeta r D^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\zeta r)^{j} F_j\right\|_W, \qquad /22/$$

где для получения оператора $F_j = diag\left(A_{21}A_{11}^{j}A_{12},\ 0\right)$ $(j=0,1,2,\dots)$ использована формула /19/. Из определения нормы /14/ и оценок $\|F_j\| \le 1$ $(\|A_{ik}\| \le 1)$ получаем, что правая часть /22/ оценивается сверху величиной
$$r^{-1}\|D^{-1}\|+r\|D^{-1}\|\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}r^{j}\right)=\|D^{-1}\|\,\Psi(r),$$
которая меньше 1 в силу выбора r /см. /17//.

C. Так как условие /15/ для $A(\zeta)$ из /21/ выполнено, то, согласно лемме 1, пучок /21/ допускает каноническую факторизацию
$$J-A(\zeta)=[J+A_+(\zeta)][J+A_-(\zeta)] \qquad /23/$$
со свойствами у функций $A_+(\zeta)$ и $A_-(\zeta)$, указанными в лемме 1.

Перепишем равенство /23/ в виде
$$\mathcal{B}(\zeta) \stackrel{def}{=} [J+A_+(\zeta)]^{-1}[J-A(\zeta)] = J+A_-(\zeta). \qquad /24/$$

Левая часть этого равенства - аналитическая оператор-функция при $|\zeta|<1$, за исключением точки $\zeta=0$, где она имеет простой полюс /см. определение $A(\zeta)$ в /21//. Правая часть /24/ аналитична при $|\zeta|\geqslant 1$. Поэтому обе части равенства /24/ представляют собой единую аналитическую оператор-функцию $\mathcal{E}(\zeta)$, единственной особенностью которой во всей расширенной комплексной плоскости ζ является простой полюс в точке $\zeta=0$. Так как $\mathcal{E}(\infty)=J$, то

$$\mathcal{E}(\zeta)=J+\frac{1}{\zeta}U, \qquad /25/$$

где $U\in\mathcal{R}$ - некоторый оператор.

D. Для нахождения вида U воспользуемся представлением

$$\left[J+A_+(\zeta)\right]^{-1}=J+\sum_{j=0}^{\infty}\zeta^j A_j^+ \qquad \left(|\zeta|<1\right) \qquad /26/$$

и вычислим предел $U=\lim\limits_{\zeta\to 0}\left[\zeta\mathcal{E}(\zeta)\right]$; получим

$$U=\lim_{\zeta\to 0}\left\{\zeta\left[J+A_0^+ +\ldots\right]\left[J-\frac{1}{\zeta r}D^{-1}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\zeta r D^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}(\zeta r)^j F_j\right]\right\}=-\frac{1}{r}\left(J+A_0^+\right)D^{-1}. \qquad /27/$$

Отсюда следует, что $U\in\mathfrak{S}_\infty$, так как $D^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty$, $A_0^+\in\mathcal{R}$.

Покажем, что U есть слабое возмущение вполне непрерывного оператора D^{-1}, т.е. в /27/ $A_0^+\in\mathfrak{S}_\infty$. Для этого в тождестве /23/, переписанном с учетом /25/ в виде

$$\left[J+A_+(\zeta)\right]\left[J-\frac{1}{\zeta_0}U\right]=J-A(\zeta),$$

сравним члены, содержащие ζ^0 ; получаем

$$J+A_+(0)+\frac{dA_+(0)}{d\zeta}(-U)=J,$$

откуда $A_+(0)=\frac{dA_+(0)}{d\zeta}U\in\mathfrak{S}_\infty$. Так как в силу /26/ $\left[J+A_+(0)\right]^{-1}=J+A_0^+$ и $A_+(0)\in\mathfrak{S}_\infty$, то по теореме Фредгольма будет $S=A_0^+\in\mathfrak{S}_\infty$ Окончательно имеем

$$U=-\frac{1}{r}\left(J+S\right)D^{-1}, \quad S\in\mathfrak{S}_\infty. \qquad /28/$$

Е. Возвращаясь к переменной λ, получаем из /23/, /25/ и /28/ представление

$$J-\mathcal{P}(\lambda)=\left[J+A_+\left(\frac{\lambda}{r}\right)\right]\left[J-\lambda^{-1}(J+S)D^{-1}\right],$$

где оператор-функция $J+A_+\left(\frac{\lambda}{r}\right)$ непрерывно обратима при $|\lambda|\le r$, а $J+S$ также обратим. Отсюда следует, что при $|\lambda|<r$ собственные значения λ пучков $J-\mathcal{P}(\lambda)$ и $J-\lambda^{-1}(J+S)D^{-1}$ и их собственные векторы совпадают. Таким образом, мы приходим к задаче на собственные значения для слабовозмущенного самосопряженного оператора:

$$(J+S)D^{-1}\xi=\lambda\xi \quad (|\lambda|<r). \qquad /29/$$

Из асимптотических формул /2/, /3/ и вида /9/ матрицы D^{-1} легко установить, что как для тяжелой, так и для капиллярной жидкости будет $D^{-1}\in\mathfrak{S}_\rho$ при некоторых $\rho>0$. Так как $Ker\, D^{-1}=\{0\}$ и $(J+S)^{-1}\in\mathcal{R}$, то по теореме М.В.Келдыша /11/, см. также /6, теорема 5.8.1/ система собственных векторов задачи /29/ полна и минимальна в $\mathcal{H}=H\oplus H$. Поэтому эти факты имеют место и для задачи /10/. Теорема доказана.

5. График функции $y=\varphi(r)$ из /16/ симметричен относительно прямой $r=1/2$, причем $\varphi(r)$ принимает в этой точке максимальное значение $\varphi(1/2)=1/3$. Поэтому следствием теоремы 1 является

<u>Теорема 2</u>. Если состояние равновесия вращающейся жидкости в сосуде устойчиво по линейному приближению ($B\gg 0$; при этом $\lambda_1(\tilde{B})=\lambda_{min}(\tilde{B})>0$) и выполняется условие

$$2\omega_0\lambda_1^{-1/2}(\tilde{B})\left\{\left[1+\omega_0^2\lambda_1^{-1}(\tilde{B})\right]^{1/2}+\omega_0\lambda_1^{-1/2}(\tilde{B})\right\}<1/3, \qquad /30/$$

то собственным частотам колебаний $\omega_j=2\omega_0/\lambda_j$, лежащим вне круга $|\omega|\le 4\omega_0$, отвечает система собственных векторов /мод поверхностных волн/, полная и минимальная в $\mathcal{H}=H\oplus H$.

<u>Доказательство</u>. Проверим сначала, что $\|D^{-1}\|$ оценивается сверху левой частью /30/. В силу определения /9/, для $\forall\xi=(\eta,\hat{\xi})^T\in\mathcal{H}$ имеем

$$\left|(2\omega_0)^{-1}\left(D^{-1}\xi,\xi\right)_{\mathcal{H}}\right|=\Big|\left(\tilde{B}^{-1/2}\hat{\xi},\eta\right)+\left(\tilde{B}^{-1/2}\eta,\hat{\xi}\right)-$$

$$-2\omega_0\left(A_{22}\tilde{B}^{-1/2}\hat{\xi},\tilde{B}^{-1/2}\hat{\xi}\right)\Big|\le 2\left\|\tilde{B}^{-1/2}\right\|\cdot\|\eta\|\,\|\hat{\xi}\|+2\omega_0\left\|\tilde{B}^{-1/2}\right\|^2\|\hat{\xi}\|^2\le$$

$$\leq \|\tilde{B}^{-1/2}\| \left[\varepsilon^{-1} \|\eta\|^2 + (\varepsilon + 2\omega_0 \|\tilde{B}^{-1/2}\|) \|\hat{\xi}\|^2 \right],$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Выбирая $\varepsilon^{-1} = \varepsilon + 2\omega_0 \|\tilde{B}^{-1/2}\|$, будем иметь

$$|(D^{-1}\xi, \xi)_{\mathcal{H}}| \leq 2\omega_0 \|\tilde{B}^{-1/2}\| \left\{ \left[1 + \omega_0^2 \|\tilde{B}^{-1/2}\|^2 \right]^{1/2} + \omega_0 \|\tilde{B}^{-1/2}\| \right\} \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} =$$

$$= 2\omega_0 \lambda_1^{-1/2}(\tilde{B}) \left\{ \left[1 + \omega_0^2 \lambda_1^{-1}(\tilde{B}) \right]^{1/2} + \omega_0 \lambda_1^{-1/2}(\tilde{B}) \right\} \|\xi\|^2_{\mathcal{H}},$$

поскольку $\|\tilde{B}^{-1/2}\| = \lambda_1^{-1/2}(\tilde{B})$. Отсюда следует оценка для $\|D^{-1}\|$.

Так как по доказанному и по условию /30/ $\|D^{-1}\| < 1/3 = \max\limits_{0 \leq r \leq 1} \varphi(r)$, то найдется такое число $r < 1/2$, что $\|D^{-1}\| = \varphi(r) < 1/3$. Тогда по теореме I система собственных векторов задачи /10/, отвечающих собственным числам λ_j из круга $|\lambda| < r < 1/2$, полна и минимальна в $\mathcal{H}$. Поэтому это утверждение имеет место и для частот $\omega_j = 2\omega_0 / \lambda_j$, лежащих вне круга $|\omega| \leq 4\omega_0$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 получаем следующее важное с физической точки зрения утверждение.

<u>Теорема 3</u>. Если состояние равновесия невращающейся жидкости в сосуде статически устойчиво по линейному приближению, т.е. при $\omega_0 = 0$ будет $B \gg 0$, то при раскручивании системы, когда увеличивается ω_0, для достаточно малых значений ω_0 имеют место утверждения теоремы 2. Иными словами, при малых ω_0 свойство полноты и минимальности мод поверхностных волн, которое имело место для невращающейся жидкости, сохраняется.

<u>Доказательство.</u> В самом деле, в этом случае $\lambda_{min}\left(\tilde{B}|_{\omega_0 = 0}\right) > 0$, причем $\lambda_{min}\left(\tilde{B}|_{\omega_0 > 0}\right)$ непрерывно меняется при увеличении ω_0. Так как левая часть /30/ непрерывна относительно ω_0 и равна нулю при $\omega_0 = 0$, то /30/ выполнено для достаточно малых $\omega_0 > 0$.

Ж. Мы получим в этом пункте асимптотические формулы для частот $\omega_n^{\pm}$ колебаний поверхностных волн при $n \to \infty$.

Если выполнены условия /II/, то единственной предельной точкой собственных значений задачи /10/ является точка $\lambda = 0$ [1, 2]. Убедимся, что при этом имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_j = \lambda_j(D^{-1})\left[1 + o(1)\right] \quad (j \to \infty). \qquad /31/$$

Вывод формулы /31/ опирается на новые результаты А.С.Маркуса и В.И.Мацаева [12] по исследованию асимцтотики спектра операторных пучков. Мы приведем здесь лишь одно утверждение из [12], причем только в той общности, которая понадобится для получения асимптотики /31/.

Рассмотрим операторный пучок вида

$$P(\mu) = I + T - \mu G + Q(\mu), \qquad /32/$$

где $G = G^* \in \mathfrak{S}_\infty$ – полный оператор ($Ker\ G = \{0\}$), $T \in \mathfrak{S}_\infty$, а $Q(\mu)$ – аналитическая вне некоторого круга $|\mu| \leq R$ оператор-функция, принимающая значения в алгебре $\mathcal{R}$ и аннулирующаяся на бесконечности. Положительные и отрицательные числа $\mu = \mu_n^{\pm}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, при которых уравнение $(I - \mu G)\xi = 0$ имеет ненулевые решения, будем называть характеристическими числами оператора G, а соответствующие числа для уравнения $P(\mu)\xi = 0$ – характеристическими числами пучка $P(\mu)$. Обозначим через $n^{\pm}(r, G) = \sum\limits_{|\mu_n^{\pm}| \leq r} 1$ функции распределения характеристических чисел $\mu_n^{\pm}$ /с учетом их кратностей/ оператора G, а через $n^{\pm}(r, P)$ – аналогичные функции для характеристических чисел пучка $P(\mu)$, лежащих в секторах $|\arg \mu - \alpha^{\pm}| < \varphi$, где $\varphi > 0$ – произвольно, $\alpha^{\pm} = \pi/2\ (1 \mp 1)$.

<u>Лемма 2</u>. [13]. Если выполнено условие

$$n^+(r, G) = cr^{\alpha}\left[1 + o(1)\right] \quad (c, \alpha > 0;\ r \to \infty), \qquad /33/$$

то в сформулированных выше предположениях для пучка $P(\mu)$

$$n^+(r, P) = cr^{\alpha}\left[1 + o(1)\right] \quad (r \to \infty). \qquad /34/$$

Совершенно аналогичное утверждение справедливо для функций $n^-(r, G)$ и $n^-(r, P)$.

Заметим, что /33/ эквивалентно соотношению

$$\mu_n^+(G) = c^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}\left[1 + o(1)\right] \quad (n \to \infty),$$

а /34/ – соотношению

$$\mu_n^+(P) = c^{-1/\alpha} n^{1/\alpha}\left[1+o(1)\right] \quad (n\to\infty),$$

поэтому из леммы 2 следует, что для каждой из ветвей характеристических чисел оператора G и пучка $P(\mu)$ главные члены асимптотики совпадают:

$$\mu_n^{\pm}(P) = \mu_n^{\pm}(G)\left[1+o(1)\right] \quad (n\to\infty). \qquad /35/$$

Теорема 4. Пусть выполнены условия /II/. Тогда для частот колебаний $\left\{\omega_n^{\pm}\right\}_{n=1}^{\infty}$ справедливы формулы

$$\omega_n^{\pm} = \pm\lambda_n\left(\tilde{B}^{1/2}\right)\left[1+o(1)\right] \quad (n\to\infty), \qquad /36/$$

которые вместе с формулами

$$\lambda_n(\tilde{B}^{1/2}) = \begin{cases} \left(\dfrac{mes\,\Gamma}{4\pi}\right)^{-3/4} \sigma^{1/2} n^{3/4}\left[1+o(1)\right] & (\sigma>0), \\ \left[\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_{\Gamma} a^2(x)\,d\Gamma(x)\right]^{-1/4} n^{1/4}\left[1+o(1)\right] & (\sigma=0), \end{cases} \qquad /37/$$

из [2, 3] определяют характер асимптотического поведения частот колебаний поверхностных волн во вращающейся капиллярной и соответственно тяжелой / $\sigma > 0$ / жидкости.

Доказательство. Приведем задачу /8/ к уравнению, отвечающему пучку вида /32/. Применив к левой и правой частям /8/ оператор $2\omega_0 K$,

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{B}^{-1/2} \\ \tilde{B}^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad /38/$$

и воспользовавшись формулой /4/, получим спектральную задачу для пучка

$$\mathcal{P}(\omega) = J + \mathcal{T} - \omega K + Q(\omega), \qquad /39/$$

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2\omega_0\tilde{B}^{-1/2}A_{22} & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q(\omega) = \frac{4\omega_0^2}{\omega} KF(2\omega_0/\omega).$$

Из представления /38/ и условия $\tilde{B}^{-1/2} > 0$ $(\tilde{B} \gg 0)$, следует $Ker K = \{0\}$. Кроме того, поскольку $\tilde{B}^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\rho$ при некотором $\rho > 0$, $A_{22} \in \mathcal{R}$, то $T \in \mathfrak{S}_\rho$. Из вида функции $Q(\omega)$ и аналитичности $F(2\omega_0/\omega)$ при $|\omega| > 2\omega_0$ получаем, что $Q(\omega)$ – аналитическая оператор-функция, принимающая значения из $\mathfrak{S}_\rho$ и аннулирующаяся на бесконечности. Таким образом, пучок /39/ имеет вид /32/ и удовлетворяет всем сформулированным выше предположениям.

Оператор K, очевидно, имеет две серии характеристических чисел: $\mu_n^{\pm}(K) = \pm\lambda_n(\tilde{B}^{1/2})$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поэтому

$$n^+(r, K) = n^-(r, K) = n(r, \tilde{B}^{1/2}), \qquad /40/$$

где $n(r, \tilde{B}^{1/2}) = n^+(r, \tilde{B}^{1/2}) = \sum_{|\lambda_n(\tilde{B}^{1/2})| \le r} 1$ – функция распределения собственных чисел неограниченного оператора $\tilde{B}^{1/2}$. В силу формул /37/ получаем, что как для капиллярной, так и для тяжелой жидкости будет $n(r, \tilde{B}^{1/2}) = cn^{\alpha}[1 + O(1)]$ $(c, \alpha > 0, r \to \infty)$. Отсюда, с использованием /40/, приходим к условию /33/ для K, а затем, согласно лемме 2, к выводу /34/ для $\mathcal{P}(\omega)$. Тогда из /35/ имеем

$$\omega_n^{\pm}(\mathcal{P}) = \mu_n^{\pm}(K)\left[1 + O(1)\right] = \pm\lambda_n\left(\tilde{B}^{1/2}\right)\left[1 + O(1)\right] \quad (n \to \infty).$$

Теорема доказана.

Важным следствием формул /36/, /37/ является такое физическое утверждение.

Теорема 5. Асимптотическое поведение при $n \to \infty$ частот колебаний $\left\{\omega_n^{\pm}\right\}_{n=1}^{\infty}$ поверхностных волн во вращающейся идеальной жидкости определяется действием центробежных, гравитационных и капиллярных сил и не зависит от кориолисовых сил.

Таким образом, все полученные здесь выводы справедливы также и для задачи о колебаниях системы несмешивающихся вращающихся жидкостей /с соответствующими изменениями формул /2/, /3/ и /37//.

1. Копачевский Н.Д. О существовании поверхностных волн в задаче о нормальных колебаниях идеальной жидкости, вращающейся в частично заполненном сосуде. - Функциональн. анализ и его приложения, 1978, 12, вып. 2, с. 84-85.

2. Копачевский Н.Д. Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости. - Препринт 38-77, Харьков, изд. ФТИНТ АН УССР, 1978. - 54 с.

3. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д. и др. Гидромеханика невесомости. - М.: Наука, 1976. - 504 с.

4. Копачевский Н.Д. Задача Коши для малых движений идеальной капиллярной вращающейся жидкости. - Докл. АН СССР, 1974, 219, № 6, с. 1310-1313.
5. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, 1970. - 288 с.
6. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. - М.: Наука, 1965. - 448 с.
7. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптических уравнений. - Сиб. мат. журн., 1979, № 1, с. 3-22.
8. Вулис И.Л., Соломяк М.З. Спектральная асимптотика вырождающихся эллиптических операторов второго порядка. - Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974, 38, № 6, с. 1362-1392.
9. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. - М.: Наука, 1971. - 352 с.
10. Gohberg J., Laiterer Ju. Die Faktorisierung der Operatorfunktion respektive von Kontur. - Mathematische Nachrichten, 1972, Band. 54, Heft 1-6, S. 41-74.
11. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. - Успехи мат. наук, 1971, 24, вып. 4 /160/, с. 15-41.
12. Маркус А.С., Мацаев В.И. Об асимптотике спектра операторов, близких к нормальным. - Функциональн. анализ и его приложения, 1979, 13, № 3, с. 93-94.

УДК 517.9

Н.Д. Копачевский

О p-БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА $I-\lambda A-\lambda^{-1}B$

В настоящей работе изучается вопрос о том, когда собственные и присоединенные векторы самосопряженного пучка операторов

$$L(\lambda)=I-\lambda A-\lambda^{-1}B, \qquad /1/$$

рассматриваемого в бесконечномерном гильбертовом пространстве H, образуют так называемый p-базис [1], т.е. базис, более близкий к ортонормированному, чем базис Рисса. Пучки вида /1/, а также соответствующие квадратичные и полиномиальные пучки операторов изучались многими авторами [2-5]. В [2-4], в частности, показано, что при положительных $A, B \in \mathfrak{S}_\infty$ и выполнении условия сильной демпфированности

$$4(Ax,x)(Bx,x)<(x,x)^2 \quad (\forall x \in H)$$

пучок $L(\lambda)$ имеет две системы собственных векторов /векторы первого и второго рода/, образующих базисы Рисса в H, а отвечающие этим системам собственные значения λ имеют асимптотику

$$\lambda_{0n}=\lambda_n(B)[1+o(1)], \quad \lambda_{\infty n}=\lambda_n^{-1}(A)[1+o(1)] \quad (n\to\infty). \qquad /2/$$

Мы рассмотрим здесь пучок /1/ для самосопряженных операторов A, $B \in \mathfrak{S}_\infty$ при некоторых естественных дополнительных предположениях /см. /3//. Будет введено понятие двукратной базисности системы собственных и присоединенных векторов /системы СПВ/ пучка $L(\lambda)$, аналогичное известному определению двукратной полноты по М.В.Келдышу [6, 4].

Понятие собственного и присоединенного векторов для произвольной оператор-функции $L(\lambda)$, голоморфной в некоторой области комплексной плоскости λ и принимающей значения на множестве ограниченных операторов, действующих в произвольном гильбертовом пространстве, определяется по М.В.Келдышу [6]. Отметим, что мы называем спектр $L(\lambda)$ дискретным, если он состоит из нормальных собственных значений, т.е. из изолированных собственных чисел $L(\lambda)$, являющихся полюсами $L^{-1}(\lambda)$ и имеющих конечные кратности.

<u>О двукратной базисности системы СПВ пучка $L(\lambda)$</u>. Будем считать, что в /1/ операторы $A, B \in \mathfrak{S}_\infty$ /определения классов $\mathfrak{S}_\infty$ и $\mathfrak{S}_p$ см. в [4]/, причем оператор A - полный, а замыкание области значений оператора B есть некоторое бесконечномерное подпространство $H_1 \subset H$.

Часто для вполне непрерывных операторов A и B, возникающих при рассмотрении краевых задач математической физики, имеют место соотношения

$$\lim_{r\to 0} n(r, A) r^{\alpha} = C_A > 0, \quad \lim_{r\to 0} n(r, B) r^{\beta} = C_\beta > 0 \ (\alpha, \beta > 0), \qquad /3/$$

где через $n(r, A)$ обозначена функция распределения собственных значений оператора A с учетом их кратностей: $n(r, A) = \sum_{|\lambda_n(A)| > r} 1$.

<u>Определение 1</u>. Следуя В.А.Пригорскому [1], будем говорить, что система векторов $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует p-базис в H, если $\psi_n = (I+T)\varphi_n$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ортонормированный базис в H, оператор $I+T$ обратим и $T \in \mathfrak{S}_p$.

Пусть P_1 - ортопроектор на H_1. Уравнение

$$L(\lambda)x = 0 \Longleftrightarrow x = \lambda A x + \lambda^{-1} B x \qquad /4/$$

можно привести к линейному уравнению относительного нового спектрального параметра. Для этого переписав /4/ в виде

$$P_1 x + P_2 x = \lambda A x + \lambda^{-1} B P_1 x, \qquad P_2 = I - P_1, \qquad /5/$$

и действуя на его обе части слева оператором P_2, получаем

$$P_2 x = \lambda P_2 A x. \qquad /6/$$

Применяя еще к /5/ слева оператор P_1/λ $(\lambda \neq 0, \neq \infty)$, будем иметь

$$\frac{P_1 x}{\lambda} = (P_1 A + B) x + (\lambda - \lambda^{-1})(-B)\left(\frac{P_1 x}{\lambda}\right). \qquad /7/$$

Из /4/ и /6/

$$x = (\lambda - \lambda^{-1}) A x + (B + A P_1)\left(\frac{P_1 x}{\lambda}\right) + A P_2 A x. \qquad /8/$$

Рассматривая /7/, /8/ как систему и осуществляя замены [7] $\lambda - \lambda^{-1} = \mu$, $P_1 x / \lambda = y \in H_1$, вместо /7/, /8/ придем к одному векторно-матричному уравнению

$$z = \mu K z + F z, \qquad z \in \mathcal{H} = H \oplus H_1, \qquad /9/$$

$$F = \begin{pmatrix} A P_2 A & B + A P_1 \\ P_1 A + B & 0 \end{pmatrix}, \qquad z = (x, y)^T, \qquad K = diag\,(A, -B),$$

Определение 2. Будем говорить, что система СПВ задачи /4/ образует почти двукратный /при $dim\,Ker\,B = 0$ – двукратный/ p-базис в H, если система СПВ задачи /9/ образует p-базис в $\mathcal{H}$.

Уравнение /9/ можно привести к задаче на собственные значения для вполне непрерывного оператора, самосопряженного в пространстве с индефинитной метрикой. В самом деле, так как $F = F^* \in \mathfrak{S}_\infty$, то при обратимом $J = I - F$ его можно переписать в виде

$$z = \mu J^{-1} K z. \qquad /10/$$

где $K = K^* \in \mathfrak{S}_\infty$, а $J^{-1} K$ – самосопряженный оператор в индефинитном скалярном произведении

$$[z, z_1] = (J z, z_1)_{\mathcal{H}}. \qquad /11/$$

Лемма I. Для задачи /4/ всегда найдется такое $a > 0$, что после замены $\lambda \to a\lambda$ оператор $I - F$ будет обратимым.

Доказательство. Так как $F \in \mathfrak{S}_\infty$, то достаточно выяснить, в силу теорем Фредгольма, когда уравнение $(I - F)_x = 0$ имеет тривиальное решение. Полагая в /9/ $\mu = 0$ и переходя к компонентам x, y, имеем

$$x = AP_2 Ax + (B + AP_1)y, \qquad y = (P_1 A + B)x. \qquad /12/$$

Пусть $\tilde{y} = P_2 Ax$, тогда из /12/ получим

$$\hat{y} = y + \tilde{y} = (A+B)x, \qquad x = (A+B)\hat{y} \Rightarrow x = (A+B)^2 x. \qquad /13/$$

Сделаем теперь замену $\lambda \to a\lambda$, $a > 0$, в исходном уравнении /4/. Это приведет к заменам $A \to aA$, $B \to a^{-1}B$, и вместо /13/ получим уравнение $x = (aA + a^{-1}B)^2 x$. Отсюда следует, что в случае обратимости $I - F$ точки ± I не могут быть собственными числами оператора $aA + a^{-1}B$, т.е. уравнение $w = (\lambda A + \lambda^{-1}B)w$, $\lambda = \pm a$, должно иметь лишь тривиальное решение. Однако таких точек $a > 0$ можно выбрать как угодно много, так как последняя задача совпадает с /4/ и имеет дискретный спектр с двумя предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ [4, 8-10].

Лемма доказана.

Будем считать, что выбор $a > 0$ уже произведен, а изучаемая задача в новых обозначениях по-прежнему имеет вид /4/.

<u>Теорема I</u>. Если выполнены условия /3/, то система СПВ задачи /4/ образует почти двукратный p=базис в H при $p > \max(\alpha, \beta)$.

<u>Доказательство</u>. Предположим сначала, что

$$\lambda_{max}(F) < 1. \qquad /14/$$

Тогда оператор $J = I - F$ равномерно положителен $(J \gg 0)$, и новая норма /11/ топологически эквивалентна старой. Осуществим в /10/ замену

$$z = J^{-1/2}\varphi. \qquad /15/$$

Применяя к обеим частям оператор $J^{1/2}$, будем иметь

$$\varphi = \mu J^{-1/2} K J^{-1/2}\varphi,$$

т.е. уравнение с полным вполне непрерывным оператором $\tilde{K} = J^{-1/2}KJ^{-1/2} = \tilde{K}^*$. Его собственные векторы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в H, при этом собственные векторы /присоединенных нет/ исходной задачи находятся по формуле /15/: $x_n = J^{-1/2}\varphi_n, \quad n=1,2,\dots$.

Покажем, что $J^{-1/2} = I + T, \ T \in \mathfrak{S}_p, \ p > \max(\alpha,\beta)$. Представим T в виде

$$T = J^{-1/2} - I = \left(J^{-1} - I\right)\left(J^{-1/2} + I\right)^{-1} = FJ^{-1}\left(J^{-1/2} + I\right)^{-1}.$$

Так как оператор $\left(J^{-1/2}+I\right)^{-1}$ ограничен, то для доказательства свойства $T \in \mathfrak{S}_p$ достаточно убедиться, что $F \in \mathfrak{S}_p$ при $p > \max(\alpha,\beta)$.

Действительно, из /3/ для s-чисел операторов A и B имеем

$$s_n(A) \sim C_A^{1/\alpha} n^{-1/\alpha}, \qquad s_n(B) \sim C_B^{1/\beta} n^{-1/\beta} \quad (n \to \infty).$$

Поэтому /см. [4, с. 49]/ для больших n получаем

$$s_{2n-1}(AP_2A) \le s_n(AP_2)\, s_n(A) \le \left[s_n(A)\right]^2 \le C_1 n^{-2/\alpha} \le C_2 (2n-1)^{-2/\alpha}$$

/с некоторыми положительными постоянными C_1 и C_2 /. Так как $s_{2n} \le s_{2n-1}$, то аналогично можно установить, что $s_{2n}(AP_2A) \le C_3(2n)^{-2/\alpha}$. Отсюда для больших n имеем оценку

$$s_n(AP_2A) \le Cn^{-2/\alpha}, \quad C = \max(C_2, C_3). \tag{16}$$

Точно так же, опираясь на неравенство /см. [4, с. 49]/ $s_{2n-1}(A+B) \le s_n(A) + s_n(B)$, будем иметь

$$s_n(A+B) \le C_4 n^{-1/\alpha} + C_5 n^{-1/\beta} \le C_6 n^{-\frac{1}{\max(\alpha,\beta)}}, \tag{17}$$

откуда получаем оценку

$$\lim_{r\to 0} n(r, A+B)\, r^{\max(\alpha,\beta)} \le C_6^{\max(\alpha,\beta)}.$$

Так как

$$n\left(r, \begin{pmatrix} 0 & A+B \\ A+B & 0 \end{pmatrix}\right) = 2n(r, A+B),$$

то отсюда следует, что

$$\lim_{r\to 0} n\left(r, \begin{pmatrix} 0 & A+B \\ A+B & 0 \end{pmatrix}\right) r^{\max(\alpha,\beta)} \le 2C_6^{\max(\alpha,\beta)},$$

т.е.

$$s_n \begin{pmatrix} 0 & A+B \\ A+B & 0 \end{pmatrix} \le C_6\, 2^{[\max(\alpha,\beta)]^{-1}} n^{-[\max(\alpha,\beta)]^{-1}} \quad (n\to\infty). \qquad /18/$$

Запишем теперь оператор F в виде

$$F = \begin{pmatrix} A\frac{B}{2}A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B+A \\ B+A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$$

и используя оценки /16/, /18/, а также уже применявшиеся неравенства для s-чисел суммы и произведения операторов; повторяя схему рассуждений, окончательно получаем

$$s_n(F) \le C_7\, n^{-[\max(\alpha,\beta)]^{-1}} + C_8\, n^{-2/\alpha} \le C_9\, n^{-[\max(\alpha,\beta)]^{-1}}. \qquad /19/$$

Отсюда следует, что $F \in \mathfrak{S}_\rho$ при $\rho > \max(\alpha,\beta)$, и теорема при выполнении условия /14/ доказана.

Пусть теперь имеется $\varkappa$ собственных значений оператора F, бóльших 1. Тогда метрика $(Jz, z)_H$ индефинитна, и мы приходим к пространству Понтрягина $\Pi_\varkappa$ и к задаче /10/ об определении характеристических чисел вполне непрерывного J-самосопряженного оператора $J^{-1}K$, действующего в $\Pi_\varkappa$. Как доказано в [4, с. 322-323], оператор $J^{-1}K$ может иметь не более $2\varkappa$ невещественных характеристических чисел $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, $n \le 2\varkappa$, каждому из которых отвечает неположительный собственный вектор.

Обозначим через L линейную оболочку векторов, отвечающую числам μ_i : $L = \text{л.о.}\left\{ L_{\mu_i}(J^{-1}K) \right\}_{i=1}^{n}$, $\dim L \le 2\varkappa < \infty$. Это подпространство невырождено, т.е. в нем нет ненулевых изотропных векторов [3], при этом пространство H разбивается на сумму инвариантных подпространств

$$H = L \,[+]\, L^{[\perp]}, \qquad /20/$$

где значками $[+]$ и $[\perp]$ обозначены J-ортогональная сумма и J-ортогональное дополнение. Пусть P - J-проектор на положительное подпространство $L^{[1]}$, $\dim L^{[1]} = \infty$. Тогда разложению /20/ отвечает матричное представление

$$J^{-1}K = \operatorname{diag}\left((I-P)J^{-1}K(I-P),\ PJ^{-1}KP\right). \qquad /21/$$

Обозначим через Q ортопроектор на $L^{[1]}$. Очевидно, в $L^{[1]}$ J-метрика порождается оператором QJQ. Поэтому имеет место представление

$$PJ^{-1}KP = \left(QJQ\right)^{-1}\left[QJQPJ^{-1}KP\right] \equiv \left(QJQ\right)^{-1}\tilde{K}, \qquad /22/$$

где $\tilde{K}$ - вполне непрерывный самосопряженный оператор, действующий в $L^{[1]}$. Действительно, для $\forall u,\ v \in L^{[1]}$ имеем $(QPu = Pu = Qu = u)$:

$$(\tilde{K}u, v)_H = (QJQPJ^{-1}KPu, v)_H = (JPJ^{-1}KPu, v)_H = [PJ^{-1}KPu, v] =$$

$$= [J^{-1}KPu, Pv] = (KPu, Pv)_H = (Pu, KPv)_H = \ldots = (u, \tilde{K}v)_H .$$

Итак, в силу /21/, /22/, спектральная задача /10/ распалась на две раздельные задачи: одна в конечномерном подпространстве L, а другая - в подпространстве $L^{[1]}$ с метрикой, определяемой взамен оператора J равномерно положительным оператором $\tilde{J} = QJQ$. Так как в подпространстве L доказываемое утверждение о p-базисности СПВ очевидно, то для завершения доказательства теоремы достаточно убедиться, что

$$\tilde{J} = Q + \tilde{F}, \quad s_n(\tilde{F}) \le Cn^{-[\max(\alpha,\beta)]^{-1}}. \qquad /23/$$

Однако /23/ следует из соотношений $QJQ = Q(I-F)Q = Q - QFQ$, $s_n(QFQ) \le s_n(F)$ $(\|Q\| = 1)$, и оценки /19/.

Теорема доказана.

Замечание I. Теорема I справедлива и в более общем случае, когда вместо условий /3/ для s-чисел A и B имеют место оценки

$$s_n(A) \le \tilde{C}_A n^{-1/\alpha}, \quad s_n(B) \le \tilde{C}_B n^{-1/\beta} \quad (n=1,2,\ldots). \qquad /24/$$

В самом деле, оценки только такого типа при больших n использовались для получения неравенств /16/-/19/.

Об асимптотике двух ветвей собственных значений. Мы получим здесь асимптотические формулы для собственных значений пучка $L(\lambda)$, аналогичные формулам /2/, для случая, когда каждый из операторов A и B имеет ветви как положительных, так и отрицательных собственных значений.

Теорема 2. Пусть для функций распределения положительных и отрицательных собственных значений операторов A и B выполнены соотношения

$$\lim_{\lambda\to 0} n^{\pm}(\lambda, A)|\lambda|^{\alpha_\pm} = C_A^{\pm} > 0, \quad \lim_{\lambda\to 0} n^{\pm}(\lambda, B)|\lambda|^{\beta_\pm} \qquad /25/$$
$$\max(\alpha_+, \alpha_-) = \alpha, \qquad \max(\beta_+, \beta_-) = \beta.$$

Тогда в задаче /4/ для ветвей $\{\lambda^{\pm}_{0n}\}_{n=1}$ и $\{\lambda^{\pm}_{\infty n}\}^{\infty}_{n=1}$ положительных и отрицательных собственных значений, имеющих соответственно в качестве предельных точки $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, имеют место асимптотические формулы

$$\lambda^{\pm}_{0n} = \lambda^{\pm}_n(B)\left[1+o(1)\right], \quad \lambda^{\pm}_{\infty n} = \left[\lambda^{\pm}_n(A)\right]^{-1}\left[1+o(1)\right] \ (n\to\infty). \quad /26/$$

Доказательство. Преобразуем при $|\lambda| > \|B\|$ пучок $L(\lambda)$ к виду

$$L(\lambda) \equiv I - \lambda A - \lambda^{-1}B = (I-\lambda^{-1}B)\left[I-\lambda(I-\lambda^{-1}B)^{-1}A\right] =$$
$$= (I-\lambda^{-1}B)\left\{I-\lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}B^n\right)A\right\} = (I-\lambda^{-1}B)\left\{I-\lambda A - \right.$$
$$\left. - BA - G_1(\lambda)\right\}, \quad G_1(\lambda) = \left(\sum_{n=2}^{\infty}\lambda^{-n+1}B^n\right)A, \quad G_1(\infty) = 0.$$

Так как при $|\lambda| > \|B\|$ первый сомножитель обратим, то спектр $L(\lambda)$ здесь совпадает со спектром второго сомножителя. Поскольку оператор A полный, а $G_1(\infty) = 0$ и имеют место первые две формулы /25/, то из [11] получаем, что справедливы вторые формулы /3.2/.

Для доказательства первых формул (26) преобразуем при $|\lambda| < \|A\|^{-1}$ пучок $L(\lambda)$ к виду

$$L(\lambda) = (I-\lambda A)\left[I-\lambda^{-1}(I-\lambda A)^{-1}B\right] = (I-\lambda A)\left[I-\lambda^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n A^n\right)B\right] =$$

$$= (I-\lambda A)\left[I-\lambda^{-1}B-AB-C_2(\lambda)B\right] \equiv (I-\lambda A)F(\lambda),$$

$$C_2(\lambda)=\lambda\sum_{n=2}^{\infty}\left(A^n\lambda^{n-2}\right), \qquad C_2(0)=0.$$

В силу обратимости $I-\lambda A$, спектр $L(\lambda)$ совпадает со спектром пучка $F(\lambda)$, в котором оператор B не является полным. Рассматривая уравнение $F(\lambda)\xi=0$ $(\xi\in H)$ и применяя к его обеим частям ортопроектор P_1 на замыкание $H_1\subset H$ области значений оператора B, получаем уравнение для

$$P_1\xi=\lambda^{-1}B(P_1\xi)+(P_1AP_1)B(P_1\xi)+\left[P_1C_2(\lambda)P_1\right]B(P_1\xi)$$

с полным оператором $B=P_1BP_1$. После замены $\lambda=\mu^{-1}$ мы приходим к ситуации, уже разобранной в начале доказательства теоремы. Поэтому, опираясь на вторые формулы /25/ и результаты [11], получаем первые формулы /26/. Теорема доказана.

О раздельной базисности систем СВ, отвечающих двум ветвям собственных значений. Будем считать дополнительно, что для пучка $L(\lambda)$ выполнено условие, достаточное для его сильной демпфированности [2-4]:

$$4\|A\|\cdot\|B\|<1. \qquad /27/$$

Тогда $L(\lambda)$ допускает факторизацию относительно окружности $|\lambda|=r$, $r\in(r_-,r_+)$, $r_\pm=\left(1\pm\sqrt{1-4\|A\|\cdot\|B\|}\right)/(2\|A\|)$ /см., например, [12]/, причем спектральная задача /4/ имеет лишь собственные векторы /СВ/.

Основной результат этого раздела /теорема 4/ базируется на нескольких вспомогательных утверждениях.

Лемма 2. Если выполнено условие /27/, то пучок $L(\lambda)$ допускает две факторизации:

$$L(\lambda)=X^{-1}\left(I-\lambda^{-1}XB\right)\left(I-\lambda XA\right); \qquad /28/$$

$$X=I+BXAX, \qquad /29/$$

$$L(\lambda)=Y^{-1}\left(I-\lambda YA\right)\left(I-\lambda^{-1}YB\right); \qquad /30/$$

$$Y=I+AYBY. \qquad /31/$$

Операторы X и Y обратимы и имеют структуру $X=I+X_0$, $Y=I+Y_0$, X_0, $Y_0\in\mathfrak{S}_\infty$, причем каждая из норм

$\| X \|$ и $\| Y \|$ оценивается сверху величиной $r_- \| B \|^{-1}$. В представлениях /28/ и /30/ операторы $I - \lambda^{-1} XB$ и $I - \lambda YA$ обратимы соответственно при $|\lambda| > r_-$ и $|\lambda| < r_+$.

<u>Доказательство</u>. Утверждения о представлении /28/ и обратимости X устанавливаются непосредственной проверкой, если X – решение уравнения /29/; существование решения уравнения /29/ в шаре $r_- \| B \|^{-1}$ устанавливается путем разложения решения X_ε уравнения $X = I + \varepsilon BXAX$ в ряд по степеням ε и доказательства сходимости этого ряда для $\varepsilon \le 1$ в шаре $r_- \| B \|^{-1}$, если выполнено условие /27/.

Аналогичным образом доказываются утверждения относительно разложения /30/ и решений уравнения /31/. Последние утверждения леммы также непосредственно проверяются /а также следуют из общей факторизационной леммы для пучков операторов, близких к единичному; см., например, [13, 14]/. Лемма доказана.

Введем оператор-функцию $M(\lambda) = -\lambda L(\lambda) = B - \lambda I + \lambda^2 A$ и рассмотрим интеграл

$$F = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r} M^{-1}(\lambda) d\lambda, \quad r \in (r_-, r_+). \qquad /32/$$

Как было доказано ранее, при $|\lambda| = r$ оператор $M^{-1}(\lambda)$ ограничен.

<u>Определение 3</u>. Будем говорить, что оператор Z симметризуется справа оператором $F = F^*$, если $(ZF)^* = ZF$.

<u>Лемма 3</u>. Оператор F из /32/ самосопряжен, имеет структуру $F = I + T$, $T \in \mathfrak{S}_\infty$, и является симметризатором для $Z = YB$ из /30/.

<u>Доказательство</u>. В силу самосопряженности пучка $M(\lambda)$, т.е. в силу свойства $[M(\lambda)]^* = M(\lambda^*)$, имеем

$$F^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r} [M^{-1}(\lambda)]^* d\lambda^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r} M^{-1}(\lambda^*) d\lambda^* =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda| = r} M^{-1}(\lambda) d\lambda = F.$$

Согласно /30/,

$$M(\lambda) = M_+(\lambda)(Z - \lambda I), \quad M_+(\lambda) = Y^{-1}(I - \lambda YA), \qquad /33/$$

поэтому

$$ZF=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(Z-\lambda I)M_{+}^{-1}(\lambda)\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}\lambda M^{-1}(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(Z-\lambda I)(Z-\lambda I)^{-1}M_{+}^{-1}(\lambda)\,d\lambda+F_0=F_0=F_0^{*}.$$

Здесь первый интеграл равен нулю, так как согласно факторизационной лемме функция $M_{+}^{-1}(\lambda)$ голоморфна в круге $|\lambda|\leq r$; самосопряженность F_0 устанавливается так же, как и F.

Для выяснения структуры F представим его в виде /см. /33//

$$F=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(Z-\lambda I)^{-1}(I-\lambda YA)^{-1}Y\,d\lambda$$

и воспользуемся тем, что, согласно лемме 2, $\|\lambda YA\|\leq r\|Y\|\times\|A\|\leq r\|A\|r/\|B\|=r/\|B\|<1$. Разлагая $(I-\lambda YA)^{-1}$ в ряд Неймана, будем иметь

$$F=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(Z-\lambda I)^{-1}\Big[I+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k}(YA)^{k}\Big]Y\,d\lambda=$$

$$=\Big[I+\sum_{k=1}^{\infty}Z^{k}(YA)^{k}\Big]Y=Y+\Big[\sum_{k=1}^{\infty}Z^{k}(YA)^{k}\Big]Y. \qquad /34/$$

Здесь мы воспользовались тем, что весь спектр оператора $Z=YB$ заключен внутри круга $|\lambda|\leq r$, а также формулами /см. [15]/

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(Z-\lambda I)^{-1}\lambda^{k}\,d\lambda=Z^{k}\quad(k=0,1,2,\dots).$$

Так как $Y=I+AYBY$, то из /34/ имеем

$$F=I+T,\qquad T=AYBY+\Big[\sum_{k=1}^{\infty}Z^{k}(YA)^{k}\Big]Y. \qquad /35/$$

Легко видеть, что ряд в /35/ состоит из вполне непрерывных слагаемых и при выполнении условия /27/ равномерно сходится к некоторому оператору из $\mathfrak{S}_\infty$. Поэтому и $T\in\mathfrak{S}_\infty$. Лемма доказана.

<u>Лемма 4</u>. Оператор $F=I+T$ равномерно положителен в H.

<u>Доказательство</u>. Так как $4\|A\|\cdot\|B\|<1$, то для $\forall f\in H$ имеем

$$\big|\big((\lambda A+\lambda^{-1}B)f,f\big)\big|\leq\big(r\|A\|+r^{-1}\|B\|\big)\|f\|^{2}\overset{def}{=}\delta(r)\|f\|^{2}<\|f\|^{2}.$$

Поэтому

$$Re\left(L(\lambda)f,f\right)\geqslant\left[1-\delta(r)\right]\|f\|^2\left(\forall\lambda\in\Gamma=\left\{\lambda:|\lambda|=r\right\}\right).$$

Отсюда получаем

$$(Ff,f)=Re\,(Ff,f)=Re\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}(M^{-1}(\lambda)f,f)\,d\lambda\right\}=$$

$$=Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\lambda|=r}^{2\pi}(-\lambda^{-1})\left(L^{-1}(\lambda)f,f\right)d\lambda\right\}=\left|\lambda=re^{i\varphi}\right|=$$

$$=Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(L^{-1}(re^{i\varphi})f,f\right)d\varphi\right\}=\left|L^{-1}(re^{i\varphi})f=g(\varphi)\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}Re\int\limits_0^{2\pi}\left(g(\varphi),L(re^{i\varphi})g(\varphi)\right)d\varphi\geqslant\frac{1-\delta(r)}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\|g(\varphi)\|^2\,d\varphi\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1-\delta(r)}{2\pi}2\pi\rho^2\|f\|^2=\left[1-\delta(r)\right]\rho^2\|f\|^2,$$

так как $\|g(\varphi)\|\geqslant\rho\|f\|$, $\quad\rho^{-1}=\max\limits_{|\lambda|=r}\|L(\lambda)\|$.

Лемма доказана.

Теорема 3. Собственные векторы задачи

$$Z\xi=\lambda\xi,\qquad Z=YB,\quad |\lambda|\leqslant r\in(r_-,r_+),\qquad /36/$$

после проектирования на H_1, образуют ρ-базис в H_1 при $\rho>\alpha\beta/(\alpha+\beta)$.

Доказательство. Так как $Y=I+\Phi$, $\Phi\in\mathfrak{S}_\infty$, $Ker\,B=H_2=H\ominus H_1$, то задачу можно с помощью ортопроекторов P_1 и $P_2=I-P_1$ переписать в виде

$$P_1(I+\Phi)P_1B(P_1\xi)=\lambda(P_1\xi),\quad P_2\xi=\lambda P_2(I+\Phi)P_1B(P_1\xi).\qquad /37/$$

Отсюда видно, что векторы $P_1\xi$ находятся из первого уравнения, а $P_2\xi$ – из второго.

Поскольку $Y=I+\Phi$, $F=I+T$, $\Phi,T\in\mathfrak{S}_\infty$, то $Y-F\in\mathfrak{S}_\infty$. Введем обозначения

$$P_1(I+\Phi)P_1=F_1+\Phi_1,\qquad F_1=P_1FP_1,\qquad \Phi_1\in\mathfrak{S}_\infty.$$

Условие симметризации для $Z=YB$ после применения оператора P_1 слева и справа дает соотношение

$$\Phi_1BF_1=\left(\Phi_1BF_1\right)^*\overset{def}{=\!=}K=K^*\in\mathfrak{S}_\infty.$$

Поэтому первое уравнение /37/ принимает вид

$$(F_1 B + K F_1^{-1})(P_1 \xi) = \lambda (P_1 \xi). \qquad /38/$$

Здесь, очевидно, F_1, являющийся сужением оператора FP_1 на H_1, также имеет структуру $F_1 = P_1 + T_1 \gg 0$ /в H_1/, $T_1 \in \mathfrak{S}_\infty$.

Сделав в /38/ замену

$$P_1 \xi = F_1^{1/2} \eta. \qquad /39/$$

и действуя на обе части полученного уравнения оператором $F_1^{-1/2}$, придем к уравнению в H_1 с самосопряженным полным вполне непрерывным оператором

$$N\eta \overset{def}{=} \left(F_1^{1/2} B F_1^{1/2} + F_1^{-1/2} K F_1^{-1/2}\right)\eta = \lambda \eta. \qquad /40/$$

Из /40/ и /39/ следует, что собственные векторы $\{(P_1\xi)_n\}_{n=1}^{\infty}$ задачи /37/ образуют базис Рисса в H_1. Для завершения доказательства теоремы осталось выяснить, в силу /39/, что

$$F_1^{1/2} = P_1 + T_2, \qquad T_2 \in \mathfrak{S}_p, \qquad p > \alpha\beta/(\alpha+\beta).$$

Представим T_2 в виде

$$T_2 = F_1^{1/2} - P_1 = (F_1 - P_1)(F_1^{1/2} + P_1)^{-1} = P_1 T P_1 (F_1^{1/2} + P_1)^{-1}.$$

Так как $T \in \mathfrak{S}_\infty$, а остальные операторы ограничены, то и $T_2 \in \mathfrak{S}_\infty$. Для доказательства свойства включения $T_2 \in \mathfrak{S}_p$ $(p > \alpha\beta/(\alpha+\beta))$, проверим, обладает ли этим свойством T.

Воспользуемся представлением /35/ для оператора T:

$$T = AYBY + \left\{ YB\left[I + \sum_{k=1}^{\infty} (YB)^k (YA)^k \right] YA \right\} Y. \qquad /41/$$

Оценим s-числа отдельных членов в /41/:

$$s_{2n-1}(AYBY) \le s_n(AY)\, s_n(BY) \le \|Y\|^2 s_n(A)\, s_n(B) \le$$
$$\le C_1 n^{-1/\alpha} n^{-1/\beta} \le C_2 (2n-1)^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}},$$

$$s_{2n-1}(YB[\dots]YAY) \le s_n(YB)\, s_n\|(YA)\|Y\| \, \|[\dots]\| \le$$
$$\le C_3 s_n(A)\, s_n(B) \le C_4 (2n-1)^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}}$$

Далее, как и при доказательстве теоремы 1, из этих неравенств получаем $s_n(AYBY) \le C_5\, n^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}$, $s_n(YB[\dots]YAY) \le C_6\, n^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}$.

Используя снова этот же прием и формулу для оценки s-чисел суммы операторов, будем иметь $s_n(\Gamma) \le C_7\, n^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}$. Отсюда следует, что $\Gamma \in \mathfrak{S}_\rho$ при $\rho > \alpha\beta/(\alpha+\beta)$. Теорема доказана.

Вернемся теперь к факторизации /28/ пучка $L(\lambda)$. Здесь можно сделать замену $\lambda^{-1} = \mu$, и вместо /28/ мы приходим к пучку $\tilde{L}(\mu) = X^{-1}(I - \mu XB)(I - \mu^{-1} XA)$, совпадающему с /30/ при заменах $Y \to X$, $\mu \to \lambda$, $B \to A$, $A \to B$. Так как оператор A полный, то при рассмотрении задачи на собственные значения

$$Z\xi = \mu\xi, \qquad Z = XA \qquad /42/$$

уже не требуется проводить дополнительное проектирование /42/ на H_1. Поэтому изучение задачи /42/ по сравнению с /36/ упрощается, и для /42/ справедливы аналоги лемм 2-4 и теоремы 3 с заменой всюду подпространства H_1 на все пространство H.

Резюмируя сказанное, сформулируем окончательный результат.

<u>Теорема 4</u>. Если выполнены условия /3/ /или /24/ и /27/, то система СВ задачи /4/, отвечающая собственным числам из круга $|\lambda| \le r \in (r_-, r_+)$, после проектирования на H_1 образует ρ-базис в H_1 при $\rho > \alpha\beta/(\alpha+\beta)$ система СВ, отвечающая собственным числам вне круга $|\lambda| \le r$, образует ρ-базис в H при тех же ρ.

<u>Приложение к гидродинамической задаче о малых колебаниях жидкостей в сосуде</u>. В качестве приложения приведенных результатов рассмотрим задачу о нормальных колебаниях системы тяжелых вязких жидкостей [16, 17]. Аналогичная задача для одной жидкости изучена в [8-10].

Пусть жидкости плотностей $\rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_{m+1} > 0$ и вязкостей $\mu_1, \dots, \mu_{m+1} > 0$ заполняют некоторый сосуд Ω и занимают в положении равновесия области $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{m+1}$, расположенные таким образом, что Ω_{q+1} находится выше Ω_q по отношению к направлению действия ускорения силы тяжести $\vec{g}$, а границы раздела Γ_k $(k=1,2,\dots,m)$ между ними горизонтальны.

Задача о нормальных колебаниях рассматриваемой системы жидкостей приведена в [16, 17] к уравнению вида /4/, где $A > 0$, $B \ge 0$. В качестве H рассматривается пространство $J(\Omega)$, получающееся замыканием в норме $(\vec{u},\vec{v})_\Omega=\sum_{q=1}^{m+1}\rho_q\int_{\Omega_q}\vec{u}_q\vec{v}_q^*\,d\Omega_q$ множества $J(\Omega)$ гладких соленоидальных вектор-функций:

$$J(\Omega)=\Big\{\vec{u}=(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_{m+1}):\ div\,\vec{u}_q=0\quad(\text{в }\ \Omega_q),$$

$$\vec{u}_q\,\vec{n}=0\ \ (\text{на } S),\quad(\vec{u}_k-\vec{u}_{k+1})\,\vec{n}_k=0\quad(\text{на }\Gamma_k)\Big\}.$$

Здесь S - твердая стенка сосуда, $\vec{n}$ - внешняя нормаль к S, $\vec{n}_k$ - нормаль на Γ_k, направленная против ускорения силы тяжести $\vec{g}$. На описании подпространства $H_1=J_1(\Omega)$ $(\dim\,(J(\Omega)\ominus J_1(\Omega))=\infty$ мы не останавливаемся /см. [16, 17]/.

Как следует из [18] и рассмотрения примеров, для $n^+(\lambda,A)$ и $n^+(\lambda,B)$ в этой задаче имеют место формулы

$$\lim_{\lambda\to+0} n^+(\lambda,A)\,\lambda^{3/2}=\frac{1}{3\pi^2}\sum_{q=1}^{m+1}(\rho_q/\mu_q)^{3/2}\,mes\,\Omega_q\equiv C_A^+,$$

$$\lim_{\lambda\to+0} n^+(\lambda,B)\,\lambda^{2}=\frac{1}{16\pi^2}\,g^2\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\rho_k-\rho_{k+1}}{\mu_k+\mu_{k+1}}\right)^2 mes\,\Gamma_k\equiv C_B^+. \qquad /43/$$

Поэтому из теорем 1 и 4 получаем следующий результат.

Теорема 5. При произвольных значениях вязкостей $\mu_q>0$ / $q=1,2,\dots,m+1$ / система СПВ задачи о нормальных колебаниях тяжелых жидкостей образует почти двукратный p-базис в $J(\Omega)$ при $p>2$. Если вязкости настолько велики, что выполнено условие /27/, то собственным числам из полукруга $G=\{\lambda:|\lambda|\le r\in(r_-,r_+),\,Re\,\lambda\ge0\}$ отвечает система СВ, образующая после проектирования на $J_1(\Omega)$ p-базис в $J_1(\Omega)$ при $p>6/7$; собственным числам в правой полуплоскости λ вне полукруга G отвечает система СВ, являющаяся p-базисом в $J(\Omega)$ также при $p>6/7$.

Замечание 2. Для колебаний одной жидкости в открытом сосуде, когда $\rho_1>0$, $\rho_2=\dots=\rho_{m+1}=0$, получаем из теоремы 5 утверждения о p-базисности системы СПВ в задаче С.Г.Крейна [8-10], при этом соответственно упрощаются формулы /43/.

1. Пригорский В.А. О некоторых классах базисов гильбертова пространства. - Успехи мат. наук, 1965, 20, вып. 5 /125/, с. 231-236.

2. Крейн М.Г., Лангер Г.К. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. - В кн.: Труды междунар. симпоз. по применению теории функций комплексного переменного в механ. сплошной среды, т. 2. М., 1965, с. 283-322.
3. Крейн М.Г. Введение в геометрию индефинитных -пространств и теорию операторов в этих пространствах. - В кн.: Вторая летняя математическая школа. Киев: Наук. думка, 1965, с. 15-92.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. - М.: Наука, 1965. - 448 с.
5. Маркус А.С., Мацаев В.И., Руссу Г.И. О некоторых обобщениях теории сильно демпфированных пучков на случай пучков произвольного порядка. - Acta Sci. Math., Szeged, 1973, 34, p.245-271.
6. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов. - Успехи мат. наук, 1971, 24, вып. 4 /160/, с. 15-41.
7. Greenlee W.H. Double unconditional bases associated with a quadratic characteristic parameter problem. - J. of functional analysis, 1974, 15, p.306-339.
8. Крейн С.Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде. - Докл. АН СССР, 1964, 159, № 2, с. 262-265.
9. Крейн С.Г., Лаптев Г.И. К задаче о движении вязкой жидкости в открытом сосуде. - Функц. анализ и его приложения, 1968, 2, № 1, с. 40-50.
10. Аскеров Н.К., Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения. - Функц. анализ и его приложения, 1968, 2, № 2, с. 21-32.
11. Маркус А.С., Мацаев В.И. Об асимптотике спектра операторов, близких к нормальным. - Функц. анализ и его приложения, 1979, 13, № 3, с. 93-94.
12. Радзиевский Г.В. Кратная полнота корневых векторов пучка М.В.Келдыша, возмущенного аналитической в круге оператор-функцией. - Матем. сборн., 1973, 91 /133/, № 3, с.310-335.
13. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. - М.: Наука, 1971. - 352 с.
14. Гохберг И.Ц., Лайтерер Ю. Факторизация оператор-функций, близких к единичной. - Mathematishe Nachrichten, 1972, Band. 54, Heft 1-6, p. 41-74.
15. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. - М.: Мир, 1979. - 590 с.
16. Копачевский Н.Д. Нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей. - Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 586-590.
17. Копачевский Н.Д. Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей. - Препринт 33-77, 1978, Харьков, ФТИНТ АН УССР. - 60 с.
18. Metivier G. Valeurs propres d'operateurs definis par la restriction de systemes variationelles a des sous-espaces. - J. Math. pures et appl., 1978, 57, N2, p.133-156.

УДК 517.944

Ю.В.Кириченко

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СУБПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В БЕСКОНЕЧНОМ БРУСЕ

Исследованию корректной разрешимости различных краевых задач в бесконечных цилиндрических областях для систем линейных уравнений с частными производными с позиций общей теории уравнений посвящены работы [1 - 3]. В [4] нами изучены вопросы корректной разрешимости задачи Гурса для общих систем линейных уравнений с частными производными, в частности для задачи Гурса в бесконечном брусе.

Цель настоящей работы - изучение этих же вопросов для субпериодической краевой задачи в брусе: $R^m \times [0, Y_1] \times [0, Y_2]$. Так мы называем задачу /1/ - /3/, которая в случае $A_2 = E$ содержит условие периодичности по y_2. Особенностью данной работы является то, что изучены вопросы единственности и корректной разрешимости ряда задач, которые можно рассматривать как переопределенные задачи, поскольку ищутся решения, которые наряду с краевыми условиями /2/, /3/ удовлетворяют также дополнительным условиям /см. условие $\mathfrak{M}$ /.

1. Постановка задачи. Принцип Гольмгрена. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial^2 u(x, y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, y_1, y_2) + f(x, y_1, y_2), \qquad /1/$$

$$x \in R^m, \qquad 0 \le y_j \le Y_j, \qquad (j = 1, 2), \quad u \in C^n; \quad f \in C^n;$$

$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ - матрица, элементами которой служат полиномы от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ с комплексными коэффициентами.

Будем искать решение $u(x, y_1, y_2)$ системы /1/, удовлетворяющее краевым условиям

$$A_1 u(x, 0, y_2) + B_1 u(x, Y_1, y_2) = 0, \qquad /2/$$

$$A_2 u(x, y_1, 0) = u(x, y_1, Y_2). \qquad /3/$$

Здесь A_1, A_2, B_1 - известные матрицы $n \times n$, причем матрица A_2 коммутирует с матрицами A_1 и B_1 и с матрицей

$\rho(is)$ при любом $s \in C^m$. Если $A_2 = E$ /единичная матрица/, то условие /3/ есть условие периодичности решения $u(x, y_1, y_2)$ по переменной y_2. Если матрица A_2 удовлетворяет этим требованиям при любых A_1, B_1 и $\rho(is)$, то $A_2 = \mu E$, $\mu \in C$. В нашем случае класс возможных матриц A_2 зависит от выбора A_1, B_1 и $\rho(is)$. Функции, удовлетворяющие условию /3/, мы будем называть субпериодическими /по y_2/.

Заметим, что в силу коммутации A_2 и $\rho(is)$ и равенств /1/, /3/ следует, что функция $f(x, y_1, y_2)$ должна быть субпериодической, т.е. удовлетворять равенству

$$A_2 f(x, y_1, 0) = u(x, y_1, Y_2). \qquad /4/$$

Для рассмотрения вопроса о единственности решения задачи /1/ - /3/ будем считать сначала

$$f(x, y_1, y_2) = 0. \qquad /5/$$

Пусть Φ - линейное топологическое пространство функций $\Phi = \{\varphi(x)\}$ $x \in R^m$, E - нормированное пространство, E' - сопряженное к E пространство, причем $\Phi \subset E$ и Φ плотно в E. Пусть $y_1^0 \in [0, Y_1]$. Обозначим $\rho^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \rho'\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)$, где ρ' - матрица, транспонированная к ρ и все коэффициенты полиномов, входящих в ρ заменены комплексно-сопряженными числами. Кроме того, мы предполагаем, что если $u(x, y) \in E'$, то для $v \in \Phi$ справедливо равенство $(\rho u, v) = (u, \rho^* v)$. Обозначим также A_1^*, B_1^*, A_2^* - матрицы, сопряженные соответственно к A_1, B_1, A_2. Рассмотрим следующую задачу, которую будем называть сопряженной по отношению к задаче /1/ - /5/:

$$\frac{\partial^2 v_j(x, y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} = \rho^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v_j(x, y_1, y_2) \qquad j = 1, 2; \qquad /6/$$

$$v_j(x, y_1, 0) = A_2^* v_j(x, y_1, Y_2) \qquad j = 1, 2; \qquad /7/$$

$$v_1(x, 0, y_2) = A_1^* \varphi(x, y_2); \qquad v_2(x, Y_1, y_2) = B_1^* \varphi(x, y_2); \qquad /8/$$

$$v_2(x, y_1^0, y_2) - v_1(x, y_1^0, y_2) = \rho_k^*(y_2) f(x). \qquad /9/$$

Здесь $\varphi(x, y_2)$, $v_1(x, y_1, y_2)$, $v_2(x, y_1, y_2)$ искомые функции, определенные соответственно при $x \in R^m$, $y_2 \in [0, Y_2]$; $y_1 \in [y_1^0, Y_1]$ - известная функция, а

$$\rho_k(y_2) = \exp\left\{ (2k\pi i E + \ln A_2)\frac{y_2}{Y_2} \right\} \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

В дальнейшем будем обозначать $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ - любое подмножество множества целых чисел, причем при $\det(A_2 - E) = 0$ потребует также, чтобы $0 \in \mathfrak{M}$.

Условие $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что функция $u(y_2) \in C^m$ при $y_2 \in [0, Y_2]$ удовлетворяет условию $\mathfrak{M}$, если

$$\int_0^{Y_2} \rho_k^{-1}(y_2)\, u(y_2)\, dy_2 = 0 \tag{11}$$

при любом $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathfrak{M}$.

Если $\mathfrak{M} = \mathbb{Z}$, то условия /11/ нет и в этом случае любая функция удовлетворяет условию $\mathfrak{M}$.

<u>Теорема I</u>. /Принцип Гольмгрена/. Пусть при любых $y_1^0 \in [0, Y_1]$ и $k \in \mathfrak{M}$ и любой функции $f(x)$ с компонентами из Φ задача /6/-/9/ имеет решение $v_j(x, y_1, y_2)$ $j = 1, 2$, $\varphi(x, y_2)$, все компоненты которого принадлежат E вместе с производными, входящими в /6/; тогда всякое решение задачи /1/ - /5/, удовлетворяющее условию $\mathfrak{M}$ по y_2 при любых фиксированных $y_1 \in [0, Y_1]$, $x \in R^m$ компоненты которого принадлежат E' /вместе с тем же числом производных/, тождественно равно нулю.

<u>Доказательство</u>. Можно доказать, исходя из равенств /1/, /6/, следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y_2}, v_j\right) - \frac{\partial}{\partial y_2}\left(u, \frac{\partial v_j}{\partial y_1}\right) = 0; \quad j = 1, 2.$$

Проинтегрируем это равенство по прямоугольникам $[0, y_1^0] \times [0, Y_2]$ в случае $j = 1$ и $[y_1^0, Y_1] \times [0, Y_2]$ в случае $j = 2$. Складывая полученные при этом равенства, с учетом /2/, /3/, /7/ - /10/, имеем

$$\int_0^{Y_2} \left[\frac{\partial u(x, y_1, y_2)}{\partial y_2}, (\rho_k^*, (y_2))^{-1} f(x) \right] dy_2 = 0.$$

Здесь $k \in \mathfrak{M}$. Проинтегрировав последнее равенство по частям, учитывая /3/, /7/ и тот факт, что $f(x)$ - произвольная вектор-функция с компонентами из Φ, получаем

$$\frac{2k\pi i E - \ln A_2}{Y_2} \int_0^{Y_2} \rho_k^{-1}(y_2)\, u(x, y_1^0, y_2)\, dy_2 = 0;$$

$$k \in \mathfrak{M}. \qquad /12/$$

Замечание 1. Можно показать, что матрица $2k\pi i E - \ln A_2$ невырождена при $k \neq 0$. При $k = 0$ она будет невырождена, если $\det(A_2 - E) \neq 0$.

В силу равенств /11/, /12/, замечания 1 и невырожденности матрицы A_2 имеем: $u(x, y_1^0, y_2) \equiv 0$ при $y_1^0 \in [0, Y_1]$, $y_2 \in [0, Y_2]$, $x \in R^m$. Теорема 1 доказана.

2. Тип задачи. Теорема единственности. Определение 1. Будем называть $\mathfrak{M}$-определителем краевой задачи /1/ - /4/ следующую функцию:

$$\Delta(k, s) = \det\left(B_1 e^{Y_1 P_k(is)} + A_1\right) \qquad k \in \mathfrak{M}, \quad s \in C^m, \qquad /13/$$

где

$$P_k(is) = Y_2 \left(2k\pi i E + \ln A_2\right)^{-1} P(is) \qquad k \in \mathfrak{M}. \qquad /14/$$

Обратная матрица существует в силу замечания 1 и ограничений на множество $\mathfrak{M}$. Пусть Λ_k - множество нулей определителя $\Delta(k, s)$.

Определение 2. $\mathfrak{M}$-типом задачи /1/ - /4/ назовем число

$$a(\mathfrak{M}) = \inf_{k \in \mathfrak{M}} \inf_{s \in \Lambda_k} |\operatorname{Im} s|. \qquad /15/$$

Будем обозначать p_0 - приведенный порядок матрицы $P(is)$. Кроме того, следуя /1/, будем обозначать

$$M_{\alpha, \bar{A}} = \left\{ f(x) : |f(x)| < C \exp\left\{ \sum_{j=1}^{m} A_j |x_j|^{\alpha} \right\} \right\},$$

$\bar{A} = (A_1, \ldots, A_m)$. Если $\bar{A} = (A, \ldots, A)$, то обозначим $M_{\alpha, \bar{A}} = M_{\alpha, A}$.

Теорема 2. /Единственности/. Субпериодическая краевая задача /1/ - /5/ может иметь лишь тривиальное решение, удовлетворяющее условию $\mathfrak{M}$, в следующих классах функций:

1/ Как угодно быстро растущих функций, если $p_0 < 1$, $a(\mathfrak{M}) = \infty$;

2/ $\bar{M}_{\alpha, A}$ при любых $\alpha > 0$, $A > 0$, если $p_0 = 1$, $a(\mathfrak{M}) = \infty$;

3/ $M_{\frac{p_0}{p_0 - 1}, A}$ с некоторым $A > 0$, если $p_0 > 1$; $a(\mathfrak{M}) = \infty$;

4/ $\bar{M}_{1, \bar{A}}$, если $0 < a(\mathfrak{M}) < \infty$; $|\bar{A}| < a(\mathfrak{M})$;

5/ $M_{\mu} = \{ f(x): |f(x)| < C(1+|x|^{\mu}); \ \mu > 0 \}$, если $a(\mathfrak{M}) = 0$, но при любых $k \in \mathfrak{M}$, $\sigma \in R^m$, $\Delta(k,\sigma) \neq 0$.

<u>Доказательство</u>. Согласно доказанной выше теореме 1, достаточно установить разрешимость "сопряженной" задачи /7/ – /10/ в соответствующих пространствах функций. Решение задачи /7/ – /10/ можно представить в виде

$$v_1(x, y_1, y_2) = \rho_k^*(y_2)\, g_{1k}(x, y_1),$$

$$v_2(x, y_1, y_2) = \rho_k^*(y_2)\, g_{2k}(x, y_1); \ \varphi(x, y_2) = \rho_k^*(y_2)\, \psi_k(x). \qquad /16/$$

Здесь $k \in \mathfrak{M}$, а $g_{jk}(x, y_1)$ $j = 1,2$; $\psi_k(x)$ – функции, которые являются решением следующей задачи:

$$\frac{\partial g_{jk}(x, y_1)}{\partial y_1} = -P_k^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_{jk}(x, y_1) \qquad j = 1,2; \qquad k \in \mathfrak{M}; \qquad /17/$$

$$g_{1k}(x, 0) = -A_1^*\, \psi_k(x); \qquad g_{2k}(x, Y_1) = B_1^*\, \psi_k(x);$$

$$g_{2k}(x, y_1^0) - g_{1k}(x, y_1^0) = f(x); \qquad k \in \mathfrak{M}. \qquad /18/$$

Здесь $\rho_k^*(is)$ вычисляются по формуле /14/.

Разрешимость задачи /17/ – /18/ доказана в [3]. Пространства функций, которым принадлежат решения задачи /17/, /18/, а согласно /16/ и задачи /7/ – /10/, подбираются в зависимости от расположения корней определителя $\Delta(k, s)$ /см. /13//. Сопряженные к этим пространствам будут совпадать с рассмотренными в случае 1/–5/ теоремы 2 пространствами. Теорема доказана.

<u>3. Теорема неединственности. Пример.</u> В случае, когда тип задачи /1/ – /4/ на некотором множестве $\mathfrak{M}$ конечен, точность полученных результатов подтверждает следующая теорема.

<u>Теорема 3</u>. Пусть при некотором $\mathfrak{M}$ тип $a(\mathfrak{M})$: $0 < a(\mathfrak{M}) < \infty$ и при любых $k \in \mathfrak{M}, \sigma \in R^m$, тогда задача /1/ – /5/ имеет нетривиальное решение в классе функций $\tilde{M}_{1,A}$, где $A > a(\mathfrak{M})$, удовлетворяющее условию $\mathfrak{M}$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим такое решение задачи /1/ – /5/:

$$u(x, y_1, y_2) = \rho_k(y_2)\, g_k(x, y_1) \quad k \in \mathfrak{M}, \qquad /19/$$

где $\rho_k(y_2)$ вычисляется по формуле /10/, а $g_k(x, y_1)$ является решением задачи

$$\frac{\partial g_k(x,y_1)}{\partial y_1} = P_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) g_k(x,y_1), \qquad k \in \mathfrak{M}. \qquad /20/$$

$$A_1 g_k(x,0) + B_1 g_k(x, Y_1) = 0; \quad k \in \mathfrak{M}. \qquad /21/$$

Ясно, что если задача /20/, /21/ имеет нетривиальное решение, то и задача /1/ - /5/ имеет нетривиальное решение. Наличие у задачи /20/, /21/ нетривиального решения связано /см. [3]/ с расположением корней определителя, т.е. с типом задачи /1/ - /4/. Пусть $a(\mathfrak{M}) < \infty$. Тогда из /15/ вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $k \in \mathfrak{M}$, что $a(\mathfrak{M}) + \varepsilon \geqslant a_k \geqslant a(\mathfrak{M})$. Здесь a_k - тип задачи /20/, /21/ /см. [1, 3]/. Откуда, согласно [3], следует возможность построения нетривиального решения задачи /20/, /21/, а следовательно, согласно /19/ и задачи /1/ - /5/, которое удовлетворяет условиям теоремы 3. В случае $a(\mathfrak{M}) = \infty$ имеем при любых $k \in \mathfrak{M}$, $s \in C^m$, $\Delta(k,s) \neq 0$. Следовательно, если $p_0 > 1$, то, согласно [3], для некоторых конкретных A_1, B_1, A_2, $p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ задача /20/, /21/, а значит и задача /1/ - /5/ имеет нетривиальное решение в пространстве $\tilde{M}_{\frac{p_0}{p_0-1}+\varepsilon,\, A}$ с любым $\varepsilon > 0$ и некоторым $A > 0$.

<u>Пример 1</u>. Пусть в /1/ $n = 1$, $P(is) = s\, Y_1^{-1}\, Y_2^{-1}$, а $A_1 = e^{1/3}$, $A_2 = e$, $B_1 = -1$. Рассмотрим такие множества

$$\mathfrak{M}_1 = \{ k: \ k = 3l, \quad l = 0, \pm 1, \dots \},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \{ k: \ k = 3l+1, \quad l = 0, \pm 1, \dots \}.$$

Оказывается /см. ниже п. 5/, что $a(\mathfrak{M}_1) = 0$; $a(\mathfrak{M}_2) = \frac{2\pi}{3}$. Отсюда в первом случае единственность гарантируется в пространстве M_μ, а во втором - в пространстве $M_{1,\bar{A}}$, где $|\bar{A}| < \frac{2\pi}{3}$.

4. <u>Классы корректности решений субпериодической краевой задачи</u>. Вернемся теперь к рассмотрению задачи /1/ - /4/ без предположения /5/. Предположим, что функция $f(x, y_1, y_2)$ удовлетворяет условию $\mathfrak{M}$. В силу условия /4/, функцию $\varphi(x, y_1, y_2) = A_2^{-y_2/Y_2} f(x, y_1, y_2)$ можно периодически продолжить по y_2 на всю числовую ось. Предположим, что $\varphi(x, y_1, y_2)$ разлагается в ряд Фурье как функция y_2, тогда

$$f(x, y_1, y_2) = A_2^{y_2/Y_2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(x, y_1) e^{2k\pi i\, y_2/Y_2} = \sum_{k \in \mathfrak{M}} P_k f_k(x, y_1). \qquad /22/$$

Здесь ρ_k вычисляется по формуле /10/, $f_k(x, y_1)$ коэффициенты Фурье ряда для $\varphi(x, y_1, y_2)$. В силу условия /3/, решение задачи /1/ – /4/ формально можно представить в виде ряда

$$u(x,y_1,y_2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\rho_k(y_2)\,u_k(x,y_1). \qquad /23/$$

Для того чтобы ряд /23/ был решением задачи /1/ – /4/, нужно, чтобы он достаточно быстро сходился, а функции $u_k(x, y_1)$ являлись решениями задачи

$$\frac{\ln A_2+2k\pi i}{Y_2}\cdot\frac{\partial u_k(x,y_1)}{\partial y_1}=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(x,y_1)+f_k(x,y_1), \qquad /24/$$

$$A_1u_k(x,0)=B_1u_k(x,Y_1)=0; \qquad k=0,\pm 1;\ \pm 2,\dots \qquad /25/$$

Здесь $f_k(x, y_1)=0$, если $k\notin \mathfrak{M}$. В этом случае можно взять $u_k(x, y_1)\equiv 0$ и, таким образом, решение задачи /1/ – /4/ формально запишется в виде суммы

$$u(x,y_1,y_2)=\sum_{k\in\mathfrak{M}}\rho_k(y_2)\,u_k(x,y_2). \qquad /26/$$

Если $\mathfrak{M}$ бесконечно, то требуется доказать сходимость ряда /26/ и возможность его почленного дифференцирования. Рассмотрим сначала условия разрешимости задачи /24/, /25/.

<u>Лемма</u>. Если $f_k(x,y)$ $k\in\mathfrak{M}$ финитна по "x", то решение задачи /24/, /25/ имеет преобразование Фурье $\tilde{u}_k(s, y_1)$ $(k\in\mathfrak{M})$, которое при любом s : $\Delta(k,s)\neq 0$, представимо в виде

$$\tilde{u}_k(s,y_1)=\frac{1}{\Delta(k,s)}\int_0^{Y_1}Q_{1k}(s,Y_1,\eta)\tilde{f}_k(s,\eta)\,d\eta+ \qquad /27/$$
$$+\int_0^{y_1}Q_{2k}(s,y_1,\eta)\,\tilde{f}_k(s,\eta)\,d\eta; \quad k\in\mathfrak{M},$$

где $Q_{jk}(s, y, \eta)$ при $j=1, 2$; $k\in\mathfrak{M}$ матрицы, элементы которых целые функции переменной s. При этом имеет место оценка

$$\|Q_{jk}(s,y_1,\eta)\|\leq C\exp\left\{A|s|^{p_0}\right\}, \qquad /28/$$

$C>0$, $A>0$, $j=1,2$. p_0 – приведенный порядок системы /24/. Можно показать, что он не зависит от k.

<u>Доказательство</u>. Преобразование Фурье решения задачи /24/, /25/ есть решение линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое представимо в виде

$$\tilde{u}(x, y_1) = e^{P_k(is)y_1} C(s) + \int_0^{y_1} e^{P_k(is)(y_1-\eta)} \tilde{f}_k(s,\eta)\, d\eta, \qquad /29/$$

$P_k(is)$ вычисляется по формуле /14/; $C(s)$ можно найти из краевого условия /25/. Оно равно

$$C(s) = -\left(A_1 + B_1 e^{P_k(is)Y_1}\right)^{-1} \int_0^{Y_1} e^{(Y_1-\eta)P_k(is)} \tilde{f}_k(s,\eta)\, d\eta. \qquad /30/$$

Из формул /29/, /30/ следует представление /27/. Оценка /28/ доказывается из представления /29/, /30/, аналогично тому, как это сделано в /1/.

Теорема 4. Пусть функция $f(x, y_1, y_2)$ дважды непрерывно-дифференцируема по y_2 и удовлетворяет условию $\mathfrak{M}$. Пусть существуют постоянные L и λ такие, что в области

$$Q_{L,\lambda} = \left\{ s = \sigma \pm i\tau : \| \tau \| \le L(1 + \|\sigma\|)^{\lambda} \right\} \qquad /31/$$

выполняются условия. $\Delta(k,s) \neq 0$ при $k \in \mathfrak{M}$ и

$$\| Q_{1k}(s, y_1, \eta)\, \Delta^{-1}(k,s) \| + \| Q_{2k}(s, y_1, \eta) \| \le$$
$$\le A(1 + \|\sigma\|)^{\alpha} \qquad A > 0,\ \alpha > 0,\ k \in \mathfrak{M}. \qquad /32/$$

Тогда задача /1/ - /4/ корректно разрешима в пространствах M_{μ} с любым $\mu \in R^m$, а при $\lambda > 0$ в пространствах $M_{1,A}$ с $A < L$ и ее решение удовлетворяет условию $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из разложения /26/ и леммы I. Сходимость ряда /26/ обеспечивает требование достаточной гладкости функции $f(x, y_1, y_2)$. Если $\mathfrak{M}$ конечное, то гладкости по y_2 у $f(x, y_1, y_2)$ требовать не нужно.

Определение 3. Субпериодические краевые задачи, для которых выполнены условия теоремы 4 при $k \in \mathfrak{M}$ будем называть $\mathfrak{M}$ - корректными.

5. Двоякосубпериодическая задача. Рассмотрим частный случай задачи /1/ - /4/. Пусть $B_1 = -E$; A_1 - невырождена и коммутирует с A_2 и с $P(is)$ при любом $s \in C^m$. Условие /2/ при этом принимает вид

$$A_1 u(x, 0, y_2) = u(x, y_1, y_2). \qquad /33/$$

Покажем, что в этом случае результаты теорем 3, 4 можно улучшить. Здесь целесообразно рассматривать множества $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$, где $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – подмножества множества целых чисел. Роль определителя $\Delta(k,s)$ в этом случае играет функция

$$\Delta(k_1,k_2,s) = \det\left[(\ln A_1 + 2\pi i k_1)(\ln A_2 + 2\pi i k_2) - Y_1 Y_2 P(is)\right]. \qquad /34/$$

Если обозначить Λ_{k_1,k_2} – множество корней определителя /34/, то можно показать, что с множеством Λ_k нулей определителя /13/ они связаны таким образом:

$$\Lambda_{k_2} = \bigcup_{k_1 \in Z} \Lambda_{k_1,k_2}; \quad Z \text{ – множество целых чисел.} \qquad /35/$$

Формула /35/ облегчает вычисление типа задачи во многих случаях, с ее помощью вычислен тип в примере 1. Кроме того, можно показать, что разрешающая матрица /вместо матриц β_{jk} $j = 1,2$ см. лемму 1/ имеет вид

$$Q_{k_1k_2}(s)\left[(\ln A_1 + 2\pi k_1 i)(\ln A_2 + 2\pi k_2 i) - Y_1 Y_2 P(is)\right]^{-1} Y_1 Y_2. \qquad /36/$$

Отсюда следует, что в случае двоякосубпериодической задачи оценка /32/ выполняется в любой области, где $\Delta(k_1, k_2, s) \neq 0$ при $(k_1,k_2) \in \mathfrak{M}$. Если $\Delta(k_1, k_2, s) \neq 0$ при любых $(k_1, k_2) \in \mathfrak{M}$, $s \in C^m$, то оценка /32/ выполняется во всем пространстве C^m. Можно показать, что в этом случае задача /1/, /33/, /3/ будет корректно разрешима в тех же классах функций, что и задача Коши для гиперболических систем, т.е. в классе функций без ограничения роста по x, требуется только, чтобы $f(x, y_1, y_2)$ была достаточно гладкой.

Пример 2. Пусть

$$Y_1 \cdot Y_2 \cdot P(is) = \begin{pmatrix} s^2 & -s^4 - 4\pi^2(1+2\pi i)^2 \\ 1 & -s^2 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = eE, \qquad A_2 = E,$$

$$\Delta(k_1, k_2, s) = 4\pi^2\left[1 - k_1 + 2\pi i(1 - k_1 k_2)\right]\left[1 + k_2 + 2\pi i(1 + k_1 k_2)\right].$$

Если точки /-1,1/, /1,1/, /1,-1/, /-1,-1/ $\notin \mathfrak{M}$, то $\Delta(k_1, k_2, s) \neq 0$, $k_1, k_2 \in \mathfrak{M}$ и корректная разрешимость будет иметь место в классе функций без ограничений роста.

6. Начально-периодическая задача. Рассмотрим еще один частный случай задачи /1/ – /3/, когда

$$A_1 = A_2 = E; \qquad B_1 = 0. \qquad /37/$$

Можно показать, что в этом случае $\Delta(k,s) = 1$.

Пример 3. Пусть $P(is) = -is^2$. Можно показать, что начально-периодическая задача для соответствующего уравнения /1/ будет положительно корректна /определение 3/, следовательно, для данной задачи справедлива теорема 4. Покажем, что условие $\mathfrak{M}$ - корректности является для некоторых задач условием корректной разрешимости.

Теорема 5. Пусть известно, что задача /1/ - /4/, /37/ при

$$f(x, y_1, y_2) = \exp\left\{2k_1 i\pi \frac{y_2}{Y_2}\right\} y_1 f(x) \qquad k_1 \neq 0, \quad k_1 \in \mathbb{Z}. \qquad /38/$$

имеет интегрируемое при $x \in R^1$ решение для любой финитной вектор-функции $f(x)$, обладающей производными до некоторого порядка n, причем это решение непрерывно меняется при изменении начальной функции $f(x)$, /т.е. из условия

$$\lim_{l \to \infty} \frac{\partial^q f_l(x)}{\partial x^q} = \frac{\partial^q f(x)}{\partial x^q}; \qquad (q \leq n) \qquad \text{следует, что}$$

$\lim u_l(x, y_1, y_2) = u(x, y_1, y_2)$ при каждом x, y_1, y_2 /.

Тогда задача /1/ - /4/, /37/ положительно корректна, если $k_1 > 0$ и отрицательно корректна, если $k_1 < 0$.

Доказательство. Из равенства /38/ следует, что решение задачи /1/ - /4/, /37/ представимо в виде:

$$u(x, y_1, y_2) = \exp\left\{2k_1 i\pi \frac{y_2}{Y_2}\right\} v_{k_1}(x, y_1), \qquad /39/$$

где $v_{k_1}(x, y_1)$ решение задачи /24/, /25/ в предположении /37/, причем $f_k(x, y_1)$ заменяется на $f(x) \cdot y_1$. Можно показать, что полученная таким образом задача Коши будет корректной в смысле И.Г.Петровского при любом k, имеющем тот же знак, что и k_1. Отсюда и следует утверждение теоремы 5.

1. Борок В.М. Корректная разрешимость краевой задачи в бесконечном слое для линейных уравнений с постоянными коэффициентами. - Изв. АН СССР. Сер. матем., 1971, 35, № 1, с. 185-201.

2. Борок В.М., Житомирский Я.И. О единственности решения краевых задач в бесконечных цилиндрических областях. - В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, Изд-во Харьков. ун-та, 1975, вып. 23.

3. Антыпко И.И., Перельман М.А. О классах единственности решения нелокальной многоточечной задачи в бесконечном слое. - В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков, Изд-во Харьков. ун-та, 1972, вып. 16, с. 98-109.

4. Кириченко Ю.В. О многовременной задаче Гурса системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Депонировано в ВИНИТИ 5 июня 1979 г. № 1974-79 ДЕП.

УДК 517.5

М.В.Новицкий

ВПОЛНЕ L-СУПЕРГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ $\langle \lambda_n \rangle$

Пусть L - эллиптический оператор второго порядка, заданный в области $D \subset R^n$, $n \geqslant 2$. Бесконечно дифференцируемую функцию $u(x) \geqslant 0$, $x \in D$ будем называть вполне L-супергармонической, ассоциированной с последовательностью $\langle \lambda_n \rangle$, если она удовлетворяет условиям

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - L) u(x) \geqslant 0, \qquad n = 1, 2, \ldots . \qquad /1/$$

В пространстве бесконечно дифференцируемых функций такие функции образуют конус, который мы будем обозначать через $W(L, \langle \lambda_n \rangle)$. В этой работе находится интегральное представление типа Крейна - Мильмана для функций из конуса $W(L, \langle \lambda_n \rangle)$ в предположении, что последовательность $\langle \lambda_n \rangle$ удовлетворяет условию

$$\lambda_n \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \exists m \geqslant 1 \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty . \qquad /2/$$

Автором получено интегральное представление вполне L-супергармонических функций, ассоциированных с последовательностью $\lambda_n \equiv 0$ [1]. При построении интегрального представления в конусе $W(L, \langle \lambda_n \rangle)$ мы развиваем метод этой работы.

В п. 1 мы находим интегральное представление неотрицательных бесконечно дифференцируемых функций на $[0, \infty]$, удовлетворяющих неравенствам

$$f(t) \geqslant 0, \quad \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \frac{d}{dt}\right) f(t) \geqslant 0, \qquad n = 1, 2, \ldots , \qquad /3/$$

а для $\langle \lambda_n \rangle$ выполняется условие /2/. Случаю $\lambda_n \equiv 0$ отвечает теорема С.Н.Бернштейна о вполне монотонных функциях. При построении интегрального представления в конусе $W(L, \langle \lambda_n \rangle)$ удобно рассмотреть вначале некоторый абстрактный аналог понятия вполне L-супергармонической функции, ассоциированной с последовательностью $\langle \lambda_n \rangle$. Это - так называемые $\langle \lambda_n, P_i, A \rangle$ - вполне эксцессивные элементы в банаховом пространстве. В п. 2 мы даем определение таких элементов и, используя результаты п. 1, находим их интегральное представление /теоремы 2.1 и 2.2/. Как результат некоторой реализации этих построений в п. 3 дается интегральное представление для функций из конуса $W(L, \langle\lambda_n\rangle)$. При этом предполагается, что область D является ограниченной и имеет достаточно гладкую границу /например, класса $C^{1,\lambda}$, $\lambda > 0$ /. Выясняется также вопрос о виде экстремальных лучей в конусе $W(L, \langle\lambda_n\rangle)$. Оказывается, что эти лучи существенно отличаются от экстремальных лучей конуса вполне L-супергармонических функций, ассоциированных с последовательностью $\langle\lambda_n\rangle$.

Отметим, что вид интегрального представления для функций, удовлетворяющих условиям /3/, подсказан нам результатами работы [2].

<u>I. $\langle\lambda_n\rangle$ - вполне монотонные функции.</u> Бесконечно дифференцируемую функцию $f(t) \geq 0$, $t \in [0, \infty)$ будем называть $\langle\lambda_n\rangle$-вполне монотонной, если она удовлетворяет системе неравенств

$$L_n\left(\frac{d}{dt}\right)f(t) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \frac{d}{dt}\right)f(t) \geq 0, \qquad n = 1, 2, \dots, \quad t \in [0, \infty).$$

Пусть последовательность $\langle\lambda_n\rangle$ удовлетворяет условию /2/. Введем функцию $K_\infty(t)$, $t \in [0, \infty)$, определяемую равенством

$$K_\infty(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\varepsilon, \beta)} \frac{e^{t\zeta}}{\psi(\zeta)}\, d\zeta.$$

Здесь $\gamma(\varepsilon, \beta)$ - контур в плоскости ζ, пробегаемый в направлении неубывания $\arg \zeta$ и состоящий из двух лучей $\arg \zeta = \pm\beta$ $(\varepsilon \leq |\zeta| < \infty)$ и дуги $-\beta \leq \arg\zeta \leq +\beta$ окружности $|\zeta| = \varepsilon$, соединяющей концы $\varepsilon \exp(\pm i\beta)$ этих лучей, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Функция $\psi(\zeta)$ задается равенством

$$\psi(\zeta) = \zeta^d \prod_{\lambda_k \neq 0}\left(1 + \frac{\zeta}{\lambda_k}\right),$$

d - кратность нуля в последовательности $\langle\lambda_n\rangle$. Отметим, что определение функции $K_\infty(t)$ не зависит от выбора ε, β. Примем также следующее обозначение:

$$\prod_{1 \leq i \leq n,\ \lambda_i \neq 0} \lambda_i = \prod_{i=1}^{n}{}' \lambda_i .$$

<u>Теорема I.I.</u> $\langle\lambda_n\rangle$ - вполне монотонная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию /2/, допускает интегральное представление

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\rho} C_k e^{\lambda_k x}+\int_k^{\infty}\frac{K_\infty(t-x)}{K_\infty(t)}\,d\sigma(t),$$

/4/

где $1\leq\rho<\infty$, σ - конечная мера на $[0,\infty)$, $C_k\geq 0$, $k=1,2,\ldots,\rho$.

Коэффициенты C_k, $k=1,2,\ldots;\rho$ и мера σ определяются по функции f единственным образом. При этом $C_k=0$, если

$$\min_{1\leq i\leq k-1}\lambda_i<\lambda_k,\qquad k=2,3,\ldots. \qquad /5/$$

Для любой финитной на $[0,\infty)$ функции φ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_n\left(\frac{d}{dt}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}{}'\lambda_i}f,\ \varphi\right)=(\sigma,\varphi). \qquad /6/$$

Доказательству этой теоремы предшествует ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. Пусть $f(t)\in C^1[0,\infty)$, $f(t)\geq 0$ и $\left(\lambda-\frac{d}{dt}\right)f(t)\geq 0$, где $\lambda\geq 0$. Тогда

$$f(x)=C_\lambda e^{\lambda x}+\int_x^{\infty}e^{-\lambda(t-x)}\left(\lambda-\frac{d}{dt}\right)f(t)\,dt, \qquad /7/$$

а

$$C_\lambda=\lim_{x\to\infty}f(x)e^{-\lambda x}.$$

Доказательство этой леммы элементарно и поэтому опускается. Рассмотрим семейства операторов

$$T_t g(x)=g(x+t),\quad R_\lambda g(x)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}T_t g(x)\,dt,\ g\in C[0,\infty),\ t,\lambda\geq 0.$$

Тогда предыдущее равенство /7/ может быть записано в виде

$$f(x)=C_\lambda e^{\lambda x}+R_\lambda(L_1 f)(x). \qquad /8/$$

Лемма 2. Пусть $f\in C^n[0,\infty)$ и удовлетворяет системе неравенств

$$f(x)\geq 0,\qquad L_1 f(x)\geq 0,\ldots,\ L_n f(x)\geq 0.$$

Тогда

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k e^{\lambda_k x}+\int_x^{\infty}K_n(t-x)L_n f(t)\,dt, \qquad /9/$$

где функция $K_n(t)$, $t \geq 0$ определяется равенством

$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\varepsilon,\beta)} \frac{e^{t\zeta}}{\prod\limits_{k=1}^{n} (\zeta + \lambda_k)} \, d\zeta .$$

При этом

$$\lim_{x\to\infty} \left[e^{-\lambda_k x} \int\limits_0^x K_n(t-x) L_n f(t) dt \right] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \qquad /10/$$

и

$C_k = 0$, если $\min\limits_{1 \leq i \leq k-1} \lambda_i < \lambda_k$.

Доказательство. Каждая из функций $L_k f(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ согласно /7/ допускает разложение

$$L_k f(t) = a_k e^{\lambda_k t} + R_{\lambda_k} (L_{k+1} f)(t). \qquad /11/$$

Последовательно подставляя $k+1$-е равенство /11/ в k-е при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, получаем

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} R_{\lambda_i} \right) e^{\lambda_k t} + \left(\prod_{i=1}^{n} R_{\lambda_i} \right) (L_n f)(t). \qquad /12/$$

Все слагаемые в правой части /12/ неотрицательны, поэтому для любого $k = 2, 3, \ldots, n$ имеем

$$a_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} R_{\lambda_i} \right) e^{\lambda_k t} \leq f(t).$$

Если $a_k \neq 0$, то с необходимостью выполняется условие /5/. При выполнении этого условия

$$a_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} R_{\lambda_i} \right) e^{\lambda_k t} = C_k e^{\lambda_k t},$$

где $C_k \geq 0$ и удовлетворяют условию /5/. Методом математической индукции можно показать, что

$$\left(\prod_{i=1}^{n} R_{\lambda_i} \right) g(x) = \int\limits_0^\infty K_n(t) I_t g \, dt, \qquad /13/$$

если $g(x) \geq 0$ и $g \in C[0, \infty)$. Учитывая, что $I_t f(x) = f(x+t)$ из равенств /12/ и /13/ следует

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k x}+\int_x^\infty K_n(t-x)\,L_n f(t)\,dt.$$

Для доказательства /10/ отметим, что если $g(x)\geqslant 0$ и $R_\lambda g(x)<\infty$, то

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x} R_\lambda g(x)=0.$$

Полагая в этом равенстве $\lambda=\lambda_k$, $g(x)=\left(\prod_{1\le i\le n,\, i\ne k} R_{\lambda_i}\right) L_n f(x)$, получаем /10/. Лемма доказана.

Лемма 3. Функция $K_n(t)$, $n=2,3,\ldots$ удовлетворяет следующим условиям:

а/ $K_n(t)\geqslant 0$, $t\in[0,\infty)$, $K^{(k)}(0)=0$, $k=0,1,\ldots,n-1$; /14/

б/ пусть $\lambda=\min_{1\le k\le n}\lambda_k$ тогда функция $K_n(t)e^{\lambda t}t^{-\rho+1}$,

где ρ - кратность числа λ в наборе $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, является неубывающей и имеет место неравенство

$$\frac{K_n(t-x)}{K_n(t)}\le e^{\lambda x}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{\rho-1},\qquad t\geqslant x>0. \qquad /15/$$

Доказательство. Из рекуррентной формулы

$$K_{n+1}(u)=\int_0^u K_n(t)e^{-\lambda_{n+1}(u-t)}\,dt$$

и уcловия $K_1(t)=e^{-\lambda_1 t}$ следует /14/. Так как

$$g(t)=\left(K_n(t)e^{\lambda t}\right)^{(\rho)}\geqslant 0,$$

то

$$K_n(t)=\int_0^t (t-s)\,g(s)\,ds.$$

Поэтому при $\rho>1$

$$\frac{d}{dt}\left(K_n(t)e^{\lambda t}t^{-\rho+1}\right)=(\rho-1)t^{-\rho}\int_0^t (t-s)^{\rho-2} s\,g(s)\,ds\geqslant 0.$$

Следовательно, функция $K_n(t)e^{-\lambda t}t^{-\rho+1}$ при $\rho>1$ является неубывающей. Аналогично рассматривается случай $\rho=1$. Записывая, что функция $K_n(t)e^{-\lambda t}t^{-\rho+1}$ в точке $t-x$ не превосходит своего значения в точке t, получаем неравенство /15/.

Лемма 4. Пусть $\rho = 1$. Тогда для любого $\alpha > 0$ существуют число $c > 0$ и номер $N(\alpha)$ такие, что

$$\frac{K_n(t-x)}{e^{\lambda x} K_n(t)} \geqslant c, \qquad /16/$$

если $t - x \geqslant \alpha$, $x > 0$, $n \geqslant N(\alpha)$.

Доказательство. Рассмотрим в области $D = \{t, x : t - x \geqslant \alpha, x \geqslant 0\}$ функцию

$$f_n(x,t) = \frac{K_n(t-x)}{e^{\lambda x} K_n(t)}.$$

Достаточно показать, что

$$\inf_D f_n(t, x) \geqslant c > 0,$$

где c не зависит от $n \geqslant N(\alpha)$. D состоит из объединения лучей $t - x = \delta$, $x \geqslant 0$, $\delta \geqslant \alpha$. На каждом таком луче функция f_n имеет вид

$$f_n(x,t) = \frac{K_n(\delta)\, e^{\lambda\delta}}{K_n(t)\, e^{\lambda t}}.$$

Поэтому

$$\inf_D f_n(x,t) \geqslant \frac{\inf\limits_{\delta \geqslant \alpha} K_n(\delta) e^{\lambda\delta}}{\sup\limits_{t \geqslant \delta} K_n(t) e^{\lambda t}}.$$

Учитывая вид функции $K_n(t)$ и то, что функция $K_n(t)\, e^{\lambda t}$ неубывающая, получаем

$$\inf_D f_n(x,t) \geqslant \frac{K_n(\alpha)\, e^{\lambda\alpha}}{\lim\limits_{t \to \infty} e^{\lambda t} K_n(t)}.$$

Обозначим правую часть этого неравенства через c_n. Учитывая, что

$$\zeta^d \prod_{1 \leqslant i \leqslant n,\ \lambda_i \neq 0} \left(1 + \frac{\zeta}{\lambda_i}\right) \to \psi(\zeta)$$

равномерно на каждом компакте в комплексной плоскости, получаем, что существует

$$c = \lim_{n \to \infty} c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\varepsilon,\beta)} \frac{e^{\zeta\alpha}}{\psi(\zeta)}\, d\zeta \Big/ \operatorname*{Res}_{\zeta = \lambda} \frac{e^{\zeta\alpha}}{\psi(\zeta)} > 0.$$

Это и доказывает неравенство /16/.

Доказательство теоремы I. Согласно лемме 2,

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k x}+\int_x^{\infty} K_n(t-x)\, L_n f(t)\, dt.$$

В силу условия /2/ существует конечное число членов последовательности $\langle \lambda_n \rangle$, удовлетворяющих условию /5/. Пусть λ_p – последний член из этого набора. Тогда для $n>p$ функция

$$g(x)=f(x)-\sum_{k=1}^{p} c_k e^{\lambda_k x}=\int_x^{\infty} K_n(t-x)\, L_n f(t) dt$$

от n не зависит. Образуем последовательность мер $d\sigma_n(t)=K_n(t)\, L_n f(t)\, dt$. Очевидно, что $\sigma_n([0,\infty))=g(0)$ и

$$g(x)=\int_x^{\infty}\frac{K_n(t-x)}{K_n(t)}\, d\sigma_n(t). \qquad /17/$$

Используя процесс диагонализации по последовательности отрезков $[0,k]$, $k=1,2,\ldots$ выберем для последовательности $\{d\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ предельную меру $d\sigma$. Для предельного перехода в /17/ рассмотрим два случая:

а) $p=1$; б/ $p>1$. Для $p=1$ покажем, что

i) $\dfrac{K_n(t-x)}{K_n(t)}\le c(x)<\infty$ для любого $t\geqslant x>0$;

ii) $\dfrac{K_n(t-x)}{K_n(t)}\longrightarrow\dfrac{K_\infty(t-x)}{K_\infty(t)}$

равномерно по t на каждом компакте в $[0,\infty)$ и фиксированном $x\in[0,\infty)$;

iii) $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)$, что для $\forall n>N(\varepsilon)$

$$\sigma_n([N,\infty))\le\varepsilon.$$

Проверим условия $i)-iii)$. Согласно лемме 3, $i)$ выполняется с $c(x)=\exp(\lambda x)$. Для доказательства $ii)$ достаточно заметить, что

$$\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}{}' \lambda_i} K_n(t) \longrightarrow K_\infty(t)$$

равномерно на каждом компакте в $[0, \infty)$. Согласно лемме 4,

$$K_n(t-x) \geqslant ce^{\lambda x} K_n(t),$$

где c не зависит от n. Следовательно,

$$g(x) = \int\limits_{x+\alpha}^{\infty} ce^{\lambda x} K_n(t) L_n f(t)\, dt$$

и значит

$$\int\limits_{x+\alpha}^{\infty} K_n(t) L_n f(n) dt \leqslant \frac{g(x)}{e^{\lambda x}}.$$

Поэтому

$$\sigma_n([x+\alpha, \infty)) \leqslant \frac{g(x)}{e^{\lambda x}}.$$

По лемме 2 (соотношение /10/) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\, e^{-\lambda x} = 0$. Это влечет выполнение условия $iii)$. Сделав предельный переход в /17/, получим равенство /4/. Для случая $p>1$, согласно /16/, имеем

$$\frac{K_n(t-x)}{K_n(t)} \leqslant e^{\lambda x}\left(1-\frac{x}{t}\right)^{p-1}.$$

Правая часть этого неравенства при фиксированном x стремится к нулю равномерно по n. Это вместе с условием $ii)$ гарантирует возможность предельного перехода в /17/.

Единственность меры σ. Для доказательства равенства /6/ покажем, что для любой финитной функции φ выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{\infty} \frac{L_n\left(\frac{d}{dx}\right)}{\prod\limits_{i=1}^{n}{}'\lambda_i} K_\infty(x-t)\varphi(x)\, dx = \varphi(t). \qquad /18/$$

Введем функцию

$$\hat{K}_\infty(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(\varepsilon,\beta)} \frac{e^{t\zeta}}{\zeta\varphi(\zeta)}\, d\zeta.$$

Тогда

$$\int_0^\infty L_n\left(\frac{d}{dx}\right)K_\infty(x-t)\varphi(x)dx=\int_t^\infty L_n\left(\frac{d}{dx}\right)\hat{K}_\infty(x-t)\left(-\frac{d\varphi}{dx}\right)dx.$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}\hat{K}_n(x-t)=\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)}\frac{e^{\zeta(x-t)}}{\zeta\prod_{i=n+1}^{\infty}\left(1+\frac{\zeta}{\lambda_i}\right)}d\zeta=1.$$

для любого $x>t>0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}\lambda_i}\int_0^\infty L_n\left(\frac{d}{dx}\right)K_\infty(x-t)\varphi(x)dx=\int_t^\infty\left(-\frac{d}{dx}\varphi(x)\right)dx=\varphi(t).$$

Это доказывает формулу /5/. Единственность меры σ следует из /5/. Теорема 1.1. доказана.

<u>2. $\langle\lambda_n, P_i, A\rangle$ - вполне эксцессивные элементы.</u> Пусть B - сепарабельное банахово пространство; B^* - его сопряженное; K - телесный конус в B; α_0^* - фиксированный внутренний элемент конуса K; K^* - сопряженный конус, задающий в пространстве B^* отношение порядка $>$. Условимся обозначать через $\omega - *$ - сходимость в B^*. Предположим, что в B^* заданы замкнутый относительно ω -сходимости оператор A и последовательность ограниченных операторов P_i, $i = 1, 2, \ldots$ таких, что

$$P_i\geqslant 0,\qquad I-P_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\ldots$$

Рассмотрим семейство операторов

$$L_n(A,P_i)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-A)P_i. \qquad /19/$$

<u>Определение</u>. Элемент $u\geqslant 0$ будем называть $\langle\lambda_n, P_i, A\rangle$ - вполне эксцессивным, если $u\in\prod_{n=1}^{\infty}D(L_n)$ и выполняются условия

$$L_n(A,P_i)u\geqslant 0,\qquad n=1,2,\ldots\ . \qquad /20/$$

Основной результат этого раздела - теорема 2.2 об интегральном представлении $\langle\lambda_n, P_i, A\rangle$ - вполне эксцессивных элементов. Докажем ряд вспомогательных утверждений.

<u>Лемма 2.1</u>. Пусть $\lambda_n\geqslant 0$ и при $\lambda>0$ определена резольвента R_λ оператора A, удовлетворяющая условию

$$R_\lambda K^* \subseteq K^* .$$

Зададим оператор R_0 формулой $R_0 = \omega \lim_{\lambda \to 0} R_\lambda$.
Тогда любой $\langle \lambda_n, \; P_i, \; A \rangle$ - вполне эксцессивный элемент представим в виде

$$u = (I - P_1) u + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} R_{\lambda_i} \right) (I - P_{k+1}) L_k u + u_\infty , \qquad /21/$$

где элемент $u_\infty \geq 0$ принадлежит $\bigcap_{n=1}^{\infty} D(A^n)$ и удовлетворяет неравенствам

$$L_n(A) u_\infty = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - A) u_\infty \geq 0, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Доказательство этой леммы проводится по схеме доказательства аналогичной леммы работы /3/ и поэтому опускается.

<u>Теорема 2.1</u>. Пусть A - инфинитезимальный оператор ω - непрерывной в нуле полугруппы U_t, $t > 0$, инвариантной относительно конуса K^*. Тогда, если последовательность $\langle \lambda_n \rangle$ удовлетворяет условию

$$\lambda_i \geq 0, \quad \exists m \geq 1 \quad \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty ,$$

то любой элемент $u \geq 0$, удовлетворяющий неравенствам

$$L_n(A) u = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - A) u \geq 0, \qquad /22/$$

представим в виде

$$u = \sum_{k=1}^{p} c_k \varphi_{\lambda_k} + \int_0^{\infty} K_\infty(t) T_t \, g \, dt . \qquad /23/$$

Здесь $\varphi_{\lambda_k} \geq 0$, $A \varphi_{\lambda_k} = \lambda_k \varphi_{\lambda_k}$, $c_k \geq 0$, $g \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ элементы $\varphi_{\lambda_k} \neq 0$, нормированные условием $\varphi_{\lambda_k}(\varphi_0) = 1$ и элемент g определяется по элементу u единственным образом.

Обратно, если элемент $g \geq 0$ такой, что правая часть /23/ определяет элемент $u \in B^*$, а $\{c_k\}_{k=1}^{p}$ удовлетворяет условию /5/, то $L_n(A) u \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

<u>Доказательство</u>. Сопоставим элементу u семейство функций $(U_t u, \varphi)$, $\varphi \in B$. Поскольку $\frac{d}{dt} U_t u = U_t A u$, то

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - A)(U_t u, \varphi) = (U_t(\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - A) u, \varphi)).$$

Следовательно, функция $(U_t u, \varphi)$ при $\varphi \in K$ удовлетворяет системе неравенств

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - \frac{d}{dt})(U_t u, \varphi) \geqslant 0, \quad n=1,2,\ldots,$$

и значит согласно теореме 1.1 представима в виде

$$(U_t u, \varphi) = \sum_{k=1}^{p} c_k(\varphi) e^{\lambda_k t} + \int_0^\infty \frac{K_\infty(s-t)}{K_\infty(s)} d\sigma(s, \varphi). \qquad /24/$$

Здесь $\sigma(\cdot, \varphi)$ – борелевская мера на $[0, \infty)$, а p однозначно определяется последовательностью $\langle \lambda_n \rangle$ и не зависит от φ. Поскольку $K - K = B$, то функция $(U_t u, \varphi)$ при произвольном $\varphi \in B$ однозначно представима в виде /24/ с некоторой знакопеременной мерой $\sigma(\cdot, \varphi)$. Аналогично тому, как это делается в [3], можно показать, что

$$d\sigma(s, \varphi) = \Phi_s(\varphi)\, d\sigma(s) \qquad \text{и} \qquad c_k(\varphi) = c_k(\varphi_0)\, \Phi_{\lambda_k}(\varphi), \qquad /25/$$

где $\Phi_{\lambda_k} \geqslant 0$, $\Phi_s \geqslant 0$, $s \geqslant 0$, σ – конечная мера на $[0, \infty)$, $\Phi_s(\varphi_0) = 1$ почти всюду по мере σ, $\Phi_{\lambda_k}(\varphi_0) = 1$, если $\Phi_{\lambda_k} \neq 0$, $1 \leqslant k \leqslant p$. Полагая в /24/ $t = 0$ и учитывая /25/, получаем

$$u = \sum_{i=1}^{p} c_i \Phi_{\lambda_i} + \int_0^\infty \Phi_s\, d\sigma(s).$$

Разложение /24/ будет доказано, если мы проверим следующие соотношения:

$$i) \quad U_t \Phi_{\lambda_k} = e^{\lambda_k t} \Phi_{\lambda_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p; \qquad /26/$$

$$ii) \quad d\sigma(s) = K_\infty(s)(U_s \Phi_0, \varphi_0)\,ds, \quad \Phi_s = \frac{U_s \Phi_0}{(U_s \Phi_0, \varphi_0)}, \quad s \geqslant 0. \qquad /27/$$

Согласно /24/,

$$(U_{t+s} u, \varphi) = \sum_{i=1}^{p} c_i(\varphi_0) \Phi_{\lambda_k}(\varphi) e^{\lambda_k (t+s)} + \int_t^\infty \frac{K_\infty(v-t)}{K_\infty(v+s)} (\Phi_{v+s}, \varphi)\, d\sigma(v+s). \qquad /28/$$

Имеет место равенство

$$\left(U_s\left(\int_t^\infty \frac{K_\infty(v-t)}{K_\infty(v)}\,d\sigma(v),\varphi\right)=\left(\int_t^\infty \frac{K_\infty(v-t)}{K_\infty(v)}\,U_s\,\Phi_v\,d\sigma(v),\varphi\right).\qquad /29/$$

Это равенство легко проверить, если $U_t = T_t^*$, где T_t – некоторая полгруппа в B. В общем случае для проверки используется свойство ω-непрерывности полугруппы U_t при $t=0$. Следовательно,

$$\left(U_{t+s}\,u,\varphi\right)=\sum_{k=1}^{\rho} c_k(\varphi_0)\,U_s\,\Phi_{\lambda_k}(\varphi)\,e^{\lambda_k t}+\int_t^\infty \frac{K_\infty(v-t)}{K_\infty(v)}\,U_s\,\Phi_v(\varphi)\,d\sigma(v).\qquad /30/$$

Сопоставляя /28/ и /30/, а также используя единственность представления /4/, получаем

$$i)\quad U_s\,\Phi_{\lambda_k}(\varphi)=e^{\lambda_k s}\,\Phi_{\lambda_k}(\varphi),\qquad k=1,2,\ldots,\rho;$$

$$ii)\quad \frac{\Phi_{v+s}(\varphi)\,d\sigma(v+s)}{K_\infty(v+s)}=\frac{(U_s\,\Phi_v,\varphi)\,d\sigma(v)}{K_\infty(v)}.$$

Поэтому

$$\frac{d\sigma(v+s)}{d\sigma(v)}=\frac{(U_s\,\Phi_v,\varphi)\,K_\infty(v+s)}{\Phi_{v+s}(\varphi)\;K_\infty(v)}.$$

Левая часть этого равенства не зависит от φ. Значит, почти для всех v, по мере $d\sigma$, при фиксированном s имеем равенство

$$\frac{(U_s\,\Phi_v,\varphi)\,K_\infty(v+s)}{\Phi_{v+s}(\varphi)\;K_\infty(v)}=\frac{(U_s\,\Phi_v,\varphi_0)\,K_\infty(v+s)}{\Phi_{v+s}(\varphi_0)\;K_\infty(v)}.\qquad /31/$$

Так как $\Phi_v(\varphi_0)=1$, σ – почти всюду, то

$$(U_s\,\Phi_v,\varphi)=(U_s\,\Phi_v,\varphi_0)\,\Phi_{v+s}(\varphi).\qquad /32/$$

Из условия нормировки $\Phi_s(\varphi_0)=1$ следует, что $\|\Phi_s\|\leq$ $\leq c(\varphi_0)$ и может быть выбрана слабо сходящаяся подпоследовательность Φ_{s_k}, $s_k\downarrow 0$ к некоторому элементу Φ_0, т.е. $\Phi_0=\omega\lim\limits_{k\to\infty}\Phi_{s_k}$. Полагая в равенстве /32/ $v=s_k$, перейдем к пределу. Получим

$$U_s\,\Phi_0=(U_s\,\Phi_0,\varphi)\,\Phi_s.$$

Следовательно,

$$\varphi_s = \frac{U_s \Phi_0}{(U_s \Phi_0,\ \varphi_0)}$$

и равенство /31/ можно переписать в следующем виде:

$$\frac{(U_{v+s}\Phi_0, \varphi)\, d\sigma(v+s)}{K_\infty(v+s)\,(U_{v+s}\Phi_0, \varphi_0)} = \frac{(U_{v+s}\Phi_0, \varphi)\, d\sigma(v)}{K_\infty(v)\,(U_v\Phi_0, \varphi_0)}.$$

Поэтому

$$\frac{d\sigma(v+s)}{K_\infty(v+s)(U_{v+s}\Phi_0,\varphi_0)} = \frac{d\sigma(v)}{K_\infty(v)(U_v\Phi_0,\varphi_0)}.$$

Правая часть этого равенства задает меру $d\rho(v)$, которая инвариантна относительно сдвигов вправо. Поэтому $d\rho(v) = dv$ и значит $d\sigma(v) = K_\infty(v)(U_s\Phi_0,\varphi_0)\, dv$, что и доказывает /27/. Единственность элемента Φ_0 следует из равенства $d\sigma(s,\varphi) = (U_s\Phi_0,\varphi)\, K_\infty(s)\, ds$. Действительно, мера $d\sigma(s,\varphi)$ определяется по элементу u однозначно, поэтому для двух различных элементов $\Phi_0^{(1)}$ и $\Phi_0^{(2)}$ имеем

$$U_s\Phi_0^{(1)} = U_s\Phi_0^{(2)}.$$

Полагая $s \to 0$, получаем $\Phi_0^{(1)} = \Phi_0^{(2)}$. Элемент u, задаваемый формулой /20/ удовлетворяет неравенствам /22/, поскольку функция $K_\infty(t)$ удовлетворяет условиям

$$K_\infty^{(n)}(0) = 0, \qquad \prod_{j=1}^{n}\left(\lambda_j + \frac{d}{dt}\right) K_\infty(t) \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Тогда

$$(L_n(A)\Big(\int_0^\infty K_\infty(t) T_t g\, dt, \varphi) = \int_0^\infty K_\infty(t) L_n\left(\frac{d}{dt}\right)(T_t u, \varphi)\, dt =$$
$$= \int_0^\infty L_n\left(-\frac{d}{dt}\right) K_\infty(t)(T_t u, \varphi)\, dt \geqslant 0.$$

Теорема 2.1 доказана.

Из леммы 2.1 и теоремы 2.1 следует

Теорема 2.2. Пусть элемент $u \geqslant 0$ удовлетворяет системе неравенств

$$L_n(A, \lambda_j)\, u \geqslant 0,$$

где A – инфинитезимальный оператор неотрицательной ω-непрерывной в нуле полугруппы сжатий U_t, а последовательность $\langle \lambda_j \rangle$ удовлетворяет условиям

$$\lambda_i \geqslant 0, \qquad \exists m \geqslant 1 \qquad \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty .$$

Тогда u представим в виде

$$u = (I - P_1)u + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\prod_{i=1}^{k} R_{\lambda_i} \Big) (I - P_{k+1}) L_k u + v_0 + \\ + \int_0^{\infty} K_\infty (t)\, I_t\, g\, dt. \qquad /33/$$

Здесь $v_0 \geqslant 0$, $A v_0 = 0$, $g \geqslant 0$. Элемент $v_0 = 0$, если $\lambda_1 \neq 0$. Элементы g и v_0 определяются по элементу единственным образом.

<u>Доказательство</u> разложения /33/ следует из леммы 2.1 и теоремы 2.1.

<u>Замечания и дополнения к теоремам 2.1 и 2.2</u>.

1. Пусть $P_i \equiv P$ проектор в B^*, удовлетворяющий условию $P \geqslant 0$, $I - P \geqslant 0$. Тогда каждое слагаемое из /33/ является $\langle \lambda_n, P, A \rangle$ - вполне эксцессивным элементом. Разложение /33/ представляет собой разложение в конусе $\langle \lambda_n, P, A \rangle$ - вполне эксцессивных элементов на более "элементарные" слагаемые.

2. Имеет место формула

$$\Big(\prod_{i=1}^{n} R_{\lambda_i} \Big) \Big(I - P_{n+1} \Big) L_n u = \int_0^{\infty} K_n (t)\, U_t (I - P_{n+1}) L_n u\, dt .$$

3. Пусть элемент $u \in K^*$ удовлетворяет неравенствам

$$L_n (A^{\frac{1}{\rho}}) u = \prod_{i=1}^{n} \Big(\lambda_i - A^{\frac{1}{\rho}} \Big) u \geqslant 0,$$

где $A^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho \geqslant 1$ - дробная степень оператора A. Тогда элемент u представим в виде

$$u = \sum_{k=1}^{\rho} c_i\, \Phi_{\lambda_i, \rho} + \int_0^{\infty} K_{\infty,\rho} (t)\, U_t\, g\, dt .$$

Здесь U_t - полугруппа, порождаемая оператором A, элементы $\Phi_{\lambda_k, \rho}$ удовлетворяют уравнению $A^{\frac{1}{\rho}} \Phi_{\lambda_k, \rho} = \lambda_k \Phi_{\lambda_k \rho}$. Функция $K_{\infty,\rho}(t)$ определяется равенством

$$K_{\infty,\rho}(t) = \frac{\rho}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon,\rho)} \frac{e^{t\zeta\rho}\, \zeta^{\rho-1}}{\psi(\zeta)}\, d\zeta, \quad t \in [0, \infty).$$

3. Вполне L-супергармонические функции, ассоциированные с последовательностью $\langle \lambda_n \rangle$. Пусть в ограниченной области $D \subset R^m$ $(m \geq 2)$ с границей класса $C^{1,\lambda}$, $\lambda > 0$ задан эллиптический оператор второго порядка

$$Lu = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \, \partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u, \quad u \in C^2(D),$$

удовлетворяющий условиям $c(x) \leq 0$, $x \in D$ и

$$c_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x) \xi_i \xi_k \leq c_2 |\xi|^2, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n), \quad x \in D.$$

Предполагается, что $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, а коэффициенты оператора L принадлежат $C^\infty(D)$. Введем некоторые обозначения: G_λ – оператор Грина, отвечающий оператору $L - \lambda I$ и нулевым граничным условиям; $p(t, x, y)$ – фундаментальное решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$, $u|_{\partial D} = 0$; $\psi_0 \geq 0$ – фиксированная финитная функция в области D, $\psi_0 \not\equiv 0$.

Теорема 3.1. Пусть $u \in W(L, \langle \lambda_n \rangle)$, а последовательность $\langle \lambda_n \rangle$ удовлетворяет условию /2/. Тогда $u(x)$ представима в виде

$$u(x) = v_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} \right) v_{n+1}(x) + \int_{\bar{D}} v_y(x) \, d\sigma(y). \qquad /34/$$

Здесь функция $v_n(x) \geq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет уравнению

$$(\lambda_n - L) v_n(x) = 0,$$

функции $v_y(x)$ допускают представление

$$v_y(x) = \int_0^\infty K_\infty(t) \frac{p(t, x, y)}{G^* \psi_0(y)} \, dt, \quad y \in \bar{D},$$

σ – конечная мера на $\bar{D}$. Функции v_n, $n = 1, 2, \ldots$ и мера σ определяются по функции $u(x)$ единственным образом.

Обратно, если функция $u(x)$ задаваемая равенством /34/ принадлежит $C^\infty(D)$, то $u \in W(L, \langle \lambda_n \rangle)$.

Замечание. Функции $\left(\prod_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} \right) v_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ могут быть представлены в виде

$$\left(\prod_{i=1}^{n} G_{\lambda_i} \right) v_{n+1}(x) = \int_{\partial D} v_{y,n}(x) \, d\mu_n(x).$$

Здесь мера μ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ сосредоточена на ∂D, а функция $v_{y,n}$ имеет вид .

$$v_{y,n}(x)=\int_0^{\infty} K_n(t)\,\frac{p(t,x,y)}{G^*\psi_0(y)}\,dt,\quad y\in\partial D,\quad n=1,2,\ldots$$

<u>Следствие теоремы 3.1</u>. Множество всех экстремальных лучей в конусе $W(L,<\lambda_n>)$ порождается функциями $v_{n,y}$, $n=1,2,\ldots,y\in\partial D$ и $v_y(x)$, $y\in\bar{D}$.

<u>Доказательство теоремы 3.1</u>. Определим основные элементы схемы п. 2. Пусть $B=C(D)$, K – конус неотрицательных непрерывных функций на $\bar{D}$. Определим полугруппу U_t. Согласно [4], неотрицательная $L-\lambda I$ – супергармоническая функция $v(x)$ представима в виде

$$v(x)=\int_{\bar{D}}\tilde{K}_\lambda(x,y)\,d\nu(y), \tag{35}$$

где мера ν однозначно определяется по функции $v(x)$, а ядро $\tilde{K}_\lambda$ имеет вид

$$\tilde{K}_\lambda(x,y)=\frac{G_\lambda(x,y)}{\int_{\bar{D}}G_\lambda(x,y)\psi_0(x)\,dx}.$$

Поскольку граница области достаточно гладкая, то в представлении /35/ ядро $\tilde{K}_\lambda$ можно заменить на ядро

$$K_\lambda(x,y)=\frac{G_\lambda(x,y)}{\int_D G_0(x,y)\psi_0(x)\,dx}$$

и представление /35/ заменить представлением

$$v(x)=\int_{\bar{D}}K_\lambda(x,y)\,d\mu(y). \tag{36}$$

Обозначим через Φ_λ отображение, сопоставляющее мере $\mu\in C^*(\bar{D})$, по формуле /36/, неотрицательную $L-\lambda I$ – супергармоническую функцию. Образуем семейство операторов

$$T_t f(x)=\int_{\bar{D}}p(t,x,y)f(y)\,dy.$$

Оператор T_t оставляет инвариантным конус неотрицательных L =супергармонических функций $v(x)$ /5/, причем выполняется неравенство

$$T_t\,v(x)\le v(x),\qquad t\to 0. \tag{37}$$

На конусе K^* всех конечных положительных мер на $\bar{D}$ определим полугруппу U_t равенством

$$U_t \mu = \Phi_0^{-1} T_t \Phi_0 \mu$$

и продолжим эту полугруппу затем по аддитивности на все пространство B^*. Используя формулу /37/ несложно показать, что U_t – полугруппа сжатий, ω – непрерывная при $t=0$, $U_t \geqslant 0$, $t \geqslant 0$. Проекторы P_i зададим формулой

$$P_i \mu \equiv P\mu = \mu / D.$$

Очевидно, $(I-P)\mu = \mu / \partial D$ и значит $P \geqslant 0$, $I-P \geqslant 0$. Пусть A – слабый инфинитезимальный оператор полугруппы U_t. Введем на $\bar{D}$ семейство мер $\nu_{k+1} = \Phi^{-1}_{\lambda_{k+1}} (\ell_k u)$, $k=0,1,2,\ldots$ Проверим, что мера ν_1 является вполне эксцессивным элементом для последовательности λ_2, λ_3, ..., проекторов $P_i = P$ и оператора A. Достаточно показать, что имеет место формула

$$\left[\prod_{k=1}^{n} (\lambda_{k+1} - A) P \right] \nu_1 = \nu_{n+1}, \qquad n=1,2,\ldots \qquad /38/$$

Покажем $(\lambda_2 - A) P \nu_1 = \nu_2$. Рассмотрим в $C(\bar{D})$ семейство функций вида

$$K_\lambda \varphi = \frac{G_\lambda^* \varphi}{G_0^* \varphi_0}, \quad \lambda > 0,$$

где φ – пробегает множество всех финитных в области D функций. Положим

$$U_{t,\lambda} = e^{-\lambda t} U_t, \qquad T_{t,\lambda} = e^{-\lambda t} T_t, \quad \lambda > 0.$$

Имеют место формулы

$$(\mu, K_\lambda \varphi) = (\Phi_\lambda \mu, \varphi), \ (U_{t,\lambda} \mu, K_\lambda \varphi) = (\mu, T_t^* \varphi).$$

Первое равенство следует из определения отображения Φ_λ. При проверке второго равенства существенным образом используется возможность замены ядра $\tilde{K}_\lambda$ на ядро K_λ в представлении /35/.

Далее

$$((U_{t,2} - I) P\nu_1, K_2 \varphi) = (U_{t,2} P\nu_1, K_2 \varphi) - (P\nu_1, K_2 \varphi) =$$

$$= (P\nu_1, K_2 (T^*_{t,2} \varphi)) - (P\nu_1, K_2 \varphi) = (\Phi_{\lambda_2} (P\nu_1), T^*_{1,2} \varphi) - (\Phi_{\lambda_2} (P\nu_1), \varphi).$$

Разделив эти равенства на t и учитывая, что

$$\Phi_{\lambda_2} \nu_1 = L_1 u \quad \text{и} \quad (\lambda_2 - L)\Phi_{\lambda_2}\left[(I-P)\nu_1\right] = 0,$$

получим

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{U_{t,2}-I}{t} P\nu_1, K_2\varphi\right) = \lim_{t\to 0}\left(\Phi_{\lambda_2}(P\nu_1), \frac{T_{t,2}\varphi-\varphi}{t}\right) =$$

$$= \left(\Phi_{\lambda_2}(P\nu_1), (-\lambda_2 + L^*)\varphi\right) = \left(\Phi_{\lambda_2}(P\nu_1) + \Phi_{\lambda_2}(I-P)\nu_1, (L^* - \lambda_2 I)\varphi\right) =$$

$$= \left(\Phi_{\lambda_2}\nu_1, (L^* - \lambda_2 I)\varphi\right) = \left(L_1 u, (\lambda_2 - L^*)\varphi\right) = \left(L_2 u, \varphi\right) = (\mu_2, K_2\varphi).$$

Следовательно, для $f = K_2\varphi$

$$\left((\lambda_2 - A)P\nu_1, f\right) = (\nu_2, f). \tag{39}$$

Равенство /39/ имеет место и для произвольной $f \in C(\bar{D})$ поскольку: а/ семейство $K_2\varphi$ – плотное в $C(\bar{D})$;
б/ $\frac{1}{t}\left\|(U_{t,2} - I) P\nu_1\right\| \le C$ при $t \downarrow 0$, где C – некоторая положительная постоянная. Аналогично доказываются равенства $(\lambda_{n+1} - A) P\nu_n = \nu_{n+1}$, откуда и следует /38/.

Согласно теореме 2.2, мера ν_1 допускает разложение

$$\nu_1 = (I-P)\nu_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{n} R_{\lambda_{i+1}}\right)(I-P)\nu_{n+1} + \rho_0 + \int_0^{\infty} \hat{K}_{\infty}(t)\, U_t\, \sigma\, dt,$$

где

$$\hat{K}_{\infty}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)} \frac{e^{t\xi}}{\psi(\xi)}\, \frac{\lambda_1 + \xi}{\lambda_1}\, d\xi, \tag{40}$$

мера ρ_0 удовлетворяет уравнениям $A\rho_0 = 0$, $P\rho_0 = \rho_0$. Рассмотрим значение меры ν_1 на функции $K_1\varphi$. Тогда

$$\int_D u(x)\varphi(x)\,dx = (\nu_1, K_1\varphi) = \left((I-P)\nu_1, K_1\varphi\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\prod_{i=1}^{n} R_{\lambda_{i+1}}\right)(I-P)\nu_{n+1}, K_1\varphi\right) + (\rho_0, K_1\varphi) + \int_0^{\infty}\hat{K}_{\infty}(t)(U_t\sigma, K_1\varphi)\,dt. \tag{41}$$

Рассмотрим слагаемое вида $\left(\left(\prod_{i=1}^{n} R_{\lambda_{i+1}}\right)(I-P)\nu_{n+1}, K_1\varphi\right)$.

Обозначим через $\hat{K}_n$ функцию, задаваемую формулой /40/, если вместо $\psi(\xi)$ поставить $\prod_{j=1}^{n}(\lambda_j + \xi)$. Полагая $(I-P)\nu_{n+1} = \mu_{n+1}$, получаем

$$\left(\left(\prod_{i=1}^{n} R_{\lambda_i} \right) \mu_{n+1}, K_1 \varphi \right) = \int_0^\infty \hat{K}_n(t) \left(U_t \mu_{n+1}, K_1 \varphi \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty K_n(t) \left(\frac{\lambda_1 + \frac{d}{dt}}{\lambda_1} U_t \mu_{n+1}, K_1 \varphi \right) =$$

$$= \int_0^\infty K_n(t) \int_{\partial D} \frac{T_t \varphi(x)}{G^* \varphi_0(x)} d\mu_{n+1}(x)\, dt = \int_D \varphi(x) \int_{\partial D} v_{y,n}(x)\, d\mu_{n+1}(y)\, dx .$$

Точно так же проверяется равенство

$$\int_0^\infty \hat{K}_\infty(t) \left(U_t \sigma, K_1 \varphi \right) dt = \left(\int_{\bar{D}} v_y(x)\, d\sigma(y),\ \varphi(x) \right).$$

Если $\lambda_1 = 0$, то в разложении /41/ есть слагаемое вида $(\rho_0, K_0 \varphi)$. Поскольку $A\rho_0 = 0$, $P\rho_0 = \rho_0$, то $v(x) = \Phi_0 \rho_0$ удовлетворяет уравнению $Lv(x) = 0$ и граничному условию $v/_{\partial D} = 0$. Следовательно, $v(x) \equiv 0$.

Таким образом, равенство /41/ есть равенство /40/, умноженное на φ и проинтегрированное по области D. Ввиду произвольности φ, получаем равенство /34/. Теорема 3.1 доказана.

1. Новицкий М.В. Общее интегральное представление вполне L-супергармонических функций. - Докл. АН СССР, 1977, 236, № 3, с. 538-540.

2. Джрбашян М.М., Саакян Б.А. Классы формул и разложения типа Тэйлора-Маклорена, ассоциированные с дифференциальными операторами дробного порядка. - Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, 39, № 1, с. 69-122.

3. Новицкий М.В. Интегральное представление вполне эксцессивных элементов. - Докл. АН СССР, 1975, 225, № 3, с. 511-514.

4. Ho S. Mortin boundary for linear elliptic differential operators of second order in a manifold. - J.Math. Soc. Japan, 1964, 16, N 4, p.307-334.

5. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. - М.: Физматгиз, 1963.- 856 с.

УДК 519.44

С.И.Островская

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ОБЛАДАЮЩИХ ВПОЛНЕ УНИТАРНЫМ ЭЛЕМЕНТОМ

В статье используются следующие обозначения:
$|M|$ - число элементов конечного множества M.

Пусть G - конечная группа и $x \in G$ - ее элемент. Тогда $G^{*} = G \setminus \{1\}$;

$\pi(G)$ - множество всех простых делителей $|G|$;

$z(G)$ - центр группы G;

$Cl(G)$ - множество классов сопряженных элементов группы G /" G -классов"/;

$$K(G) = |Cl(G)|;$$

$F(G)$ - подгруппа Фиттинга группы G;

$Sc(G)$ - цоколь группы G;

$Syl_p(G)$ - множество силовых p=подгрупп группы G;

$Syl(G)$ - множество силовских подгрупп группы G;

$Irr(G)$ - множество всех неприводимых комплексных характеров группы G;

$Lin(G)$ - множество всех комплексных линейных характеров группы G;

$\langle\langle x \rangle\rangle$ - "нормальная оболочка" элемента x; $\langle\langle x \rangle\rangle = \bigcap_{x \in N, N \triangleleft G} N$;

$|x|$ - порядок элемента x;

x^G - G - класс элемента x;

$$h_x = |x^G|;$$

f_χ - степень $\chi(1)$ характера χ группы G;

$Ker\, \chi = \{ x \mid \chi(x) = f_\chi \}$ - ядро характера χ;

χ_N - ограничение χ на нормальную подгруппу N;

если ψ - характер $N \triangleleft G$, то $\psi^g(x) = \psi(gxg^{-1})$; $(x \in N)$;

I_ψ - группа инерции характера $\psi \in Irr(N)$;

Φ_{p^α} - дважды транзитивная группа Фробениуса с ядром порядка p^α / p - простое число, α - целое $\geqslant 1$ / и с циклическим дополнением порядка $p^2 - 1$ /т.е. группа, изоморфная подстановочной группе Фробениуса с указанными свойствами/;

$\mathbb{Z}$ - кольцо целых чисел;

J - кольцо всех целых алгебраических чисел.

Элемент $u \in G$ назовем <u>унитарным</u> относительно характера $\chi \in Irr(G)$, если $|\chi(u)| = 1$. /Можно показать, что это условие равносильно тому, что $\chi(u)$ – корень из I./

Элемент $u \in G$ назовем вполне унитарным или TU-элементом, если $(\forall \chi \in Irr(G))$, $|\chi(u)| = 1$. Группы, содержащие TU-элемент, будем называть TU-группами. Множество всех TU-элементов группы G обозначим через $U(G)$.

Примеры TU-групп: 1/ все абелевы группы; 2/ все группы $\Phi_{p\alpha}$.

Настоящая работа посвящена изучению свойств TU-групп. Основной ее результат дает полное описание метабелевых* TU-групп /теоремы 3.4 и 3.8/, к метабелеву случаю, как показано в работе, сводится описание сверхразрешимых TU-групп.

I. Общие свойства TU-групп

<u>/1.1/ Предложение.</u> Пусть G – TU-группа, $u \in U(G)$; $N \triangleleft G$ и $x \mapsto \bar{x}$ естественный гомоморфизм G на $\bar{G} = G/N$. Тогда $\bar{G}$ – TU-группа и $\bar{u} \in U(\bar{G})$.

<u>Доказательство</u>. Отображение $x \mapsto \bar{x}$ естественным образом порождает биекцию $\chi \to \theta_\chi$ множества $\{\chi \in Irr(G) / Ker\chi \supseteq N\}$ на множество $Irr(\bar{G})$: $\theta_\chi(\bar{x}) = \chi(x)$, $(x \in G)$. В частности, $|\theta_\chi(\bar{u})| = |\chi(u)| = 1$, откуда и вытекает утверждение.

<u>/1.2/ Следствие.</u> Если $u \in N \triangleleft G$, то G/N – абелева группа, т.е. $N \supseteq G'$. В частности, $\langle\langle u \rangle\rangle \supseteq G'$.

<u>/1.3/ Предложение.</u> Если G – TU-группа и $u \in U(G)$, то $|C_G(u)| = K(G)$.

<u>Доказательство</u>. Утверждение вытекает из соотношения:

$$|C_G(u)| = \sum_{\chi \in Irr(G)} |\chi(u)|^2 = |Irr(G)| = K(G).$$

<u>/1.4/ Предложение.</u> Пусть G_1 и G_2 – TU-группы; $u_1 \in U(G_1)$; $u_2 \in U(G_2)$. Тогда $G = G_1 \times G_2$ – TU-группа и $u = u_1 u_2 \in U(G)$.

<u>Доказательство</u>. Утверждение вытекает из того факта, что каждый характер $\chi \in Irr(G_1 \times G_2)$ является внешним тензорным произведением $\chi_1 \# \chi_2$ характеров $\chi_i \in Irr(G_i)$ $(i=1,2)$ /см. [1, с. 292]/.

---

* Метабелевыми здесь называются разрешимые группы со ступенью разрешимости 2.

/1.5/ Предложение. Если $u \in U(G)$, $u \in N \lhd G$, то для любого $\chi \in Irr(G)$ характер χ_N неразветвлен.

Доказательство. Пусть $\chi \in Irr(G)$. В силу теоремы Клиффорда $\chi_N = e_\chi(\varphi_1 + \dots + \varphi_t)$, где e_χ - натуральное число /"индекс ветвления" χ_N/, $\varphi_i \in Irr(N)$, $(i = 1, \dots, t)$. Поэтому $\chi(u) = e_\chi(\varphi_1(u) + \dots + \varphi_t(u))$. Так как $\chi(u)$ обратимо в кольце J, то e_χ также обратимо в нем, откуда вытекает, что $e_\chi = 1$.

/1.6/ Предложение. Пусть G - TU-группа, $u \in U(G)$, $\chi \in Irr(G)$. Тогда f_χ / h_u.

Доказательство. Так как $h_u \chi(u)/f_\chi \in J$ и $\chi(u)$ - корень из 1, то f_χ / h_u в кольце J. Поэтому f_χ / h_u в $\mathbb{Z}$.

/1.7/ Следствие. Если $u \in U(G)$, то $f_\chi K(G) / |G|$.

/1.8/ Предложение. Если G - TU-группа, $u \in U(G)$ и $u \in F(G)$, то $F(G)$ - абелева группа.

Доказательство. Допустим, что $u \in P \lhd G$, $|P| = p^n$, $(p \in \pi(G))$. В силу /1.5/ $\chi_p(x) = \varphi_1(x) + \dots + \varphi_t(x)$, $\varphi_1 = \varphi$. Если ε - первообразный корень из 1 степени p^n, $\lambda = 1 - \varepsilon$, то, как легко видеть, для любого $x \in P$ имеет место сравнение в кольце J: $\chi(x) \equiv f_\chi (mod\ \lambda)$. Так как $f_\chi = e f_\varphi$, то

$$\chi(u) \equiv f_\chi (mod\ \lambda) \Rightarrow \chi(u) \equiv t f_\varphi (mod\ \lambda) \Rightarrow f_\varphi \not\equiv 0 (mod\ \lambda) \Rightarrow f_\varphi = 1.$$

Таким образом, $(\forall \varphi \in Irr P)$, $f_\varphi = 1$, т.е. P - абелева.

Переходя к общему случаю, допустим, что $u \in F(G)$. Если $F(G) = P_1 \times \dots \times P_k$, где $P_i \in syl(F(G))$, то $P_i \lhd G (i = 1, \dots, k)$ и $F(G) = P_i \times Q_i$, где $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$. Пусть $\bar{G} = G/Q_i$ и $\bar{P}_i$ - образ P_i при естественном гомоморфизме G на $\bar{G}$. Так как $\bar{u} \in \bar{P}_i$ и в силу /1.1/ $\bar{u} \in U(\bar{G})$, то по доказанному $\bar{P}_i$, а потому и P_i - абелева, откуда и вытекает абелевость $F(G)$.

/1.9/ Следствие. Нильпотентная TU-группа абелева.

/1.10/ Предложение. Пусть $x \in G$, $|C_G(x)| = K(G)$ и $(\forall \chi \in Irr(G))\ \chi(x) \neq 0$. Тогда $x \in U(G)$.

Доказательство. Так как $\alpha = \prod_{\chi \in Irr(G)} \chi(x)$ инвариантно относительно всех автоморфизмов расширения $Q(\varepsilon)/_Q/\varepsilon$ – первообразный корень из I степени $|G|/$, и так как $\alpha \in J$, то $\alpha \in Z$. Поскольку $\alpha \neq 0$, отсюда следует, что $|\alpha| \geq 1$. Применяя неравенство для средних геометрического и арифметического, получаем

$$|\alpha|^2 \leq \prod_\chi |\chi(x)|^2 \leq \left(\frac{\sum_\chi |\chi(x)|^2}{K(G)} \right)^{K(G)} = 1 ,$$

откуда вытекает, что $|\alpha| = 1$. Таким образом, в неравенстве между средним геометрическим и средним арифметическим имеет место знак равенства. Следовательно, $(\forall \chi \in Irr(G)) |\chi(x)| = 1$, а это и означает, что $x \in U(G)$.

2. Метабелевы TU-группы.

/2.1/ Предложение. TU-группа G с TU-элементом u является метабелевой тогда и только тогда, когда G неабелева и $u \in F(G)$.

Доказательство. 1^0. Если $u \in F(G)$, то в силу /1.8/ $F(G)$ – абелева. Так как ввиду /1.2/ $G' \subseteq \langle\langle u \rangle\rangle \subseteq F(G)$, то G' – абелев, т.е. G – метабелева.

2^0. Пусть G – метабелева TU-группа, $u \in U(G)$, M – максимальная абелева подгруппа, содержащая G'. Легко видеть, что $u \in F(G)$. Так как χ индуцируется из I_ψ и $I_\psi \lhd G$, то вне I_ψ характер χ равен 0. Поэтому $u \in I_\psi$. Таким образом, $(\forall \psi \in Irr(M))(\forall x \in M)$ $\psi(uxu^{-1}) = \psi(x)$. Ввиду абелевости M отсюда вытекает, что $(\forall x \in M)\, uxu^{-1} = x$. Следовательно, $u \in C_G(M) = M \subseteq F(G)$.

/2.2/ Предложение. Пусть G – метабелева TU-группа, обладающая точным неприводимым характером χ, $u \in U(G)$. Тогда:

(i) χ индуцируется из $F(G)$;

(ii) $f_\chi = (G : F(G))$;

(iii) $C_G(u) = F(G)$.

Доказательство. В силу /2.1/ и /1.8/ $u \in F(G)$ и $F(G)$ – абелева. Если $\chi \in Irr(G)$, $Ker\, \chi = \{1\}$, то в силу /1.5/ $\chi_{F(G)} = \psi_1 + \ldots + \psi_{f_\chi}$, где $\psi_i \in Lin(F(G))$, $i = 1, \ldots, f_\chi$, $\psi_1 = \psi$. Поскольку $I_\psi \supseteq F(G) \supseteq$

$\supseteq G'$, то $I_\varphi \triangleleft G$. Так как $\chi = \theta^G$, где $\theta \in Irr(I_\varphi)$, $\theta_{F(G)} = \varphi$, то $\theta(1) = 1$. Ввиду $I_\varphi \triangleleft G$, отсюда следует, что все неприводимые компоненты характера χ_{I_φ} линейны. Так как $Ker\,\chi = \{1\}$, отсюда вытекает, что I_φ абелева, т.е. $I_\varphi \subseteq F(G)$ и, следовательно, $I_\varphi = F(G)$. Поэтому χ индуцируется из $F(G)$.

(ii) Из доказательства (i) ясно, что $f_\chi = (G : I_\varphi) = (G : F(G))$.

(iii) Очевидно, $F(G) \subseteq C_G(u)$. Из /1.7/ вытекает, что $f_\chi \mid C_G(u) \mid / \mid G \mid$, т.е. $|C_G(u)| \leq |F(G)|$, откуда $C_G(u) = F(G)$.

/2.3/ Следствие. Если метабелева TU-группа G обладает точным неприводимым характером, то $K(G) = |F(G)|$.

/2.4/ Предложение. Если G - TU-группа, являющаяся группой Фробениуса, то $G \cong \Phi_{p^\alpha}$.

Доказательство. Пусть G - группа Фробениуса с ядром N и дополнением H; $u \in U(G)$. Тогда $G = N \leftthreetimes H$ и $N = F(G)$. Поскольку группа G обладает неприводимым характером χ, индуцирующимся из N, то $u \in N$. В силу /2.1/ G - метабелева, причем N и H - абелевы. Так как H -подгруппа без неподвижных точек, то H - циклична. Легко видеть, что для $x \in N$, $x^G = x^H$. Поскольку H действует на N регулярно, то для $x \in N^\#$, $|x^H| = |H|$. Поэтому число G-классов, содержащихся в N, равно $\frac{|N| - 1}{|H|} + 1$. Если $x \in G \setminus N$, то $(\exists t \in G)$, $x \in (H^t)^\#$. Отсюда вытекает, что $x \in G \setminus N \Rightarrow |C_G(x)| = |H|$. Следовательно, $x^G = (G : H) = |N|$. Поэтому $G \setminus N$ состоит из $\frac{|G \setminus N|}{|N|} = |H| - 1$ G-классов.

Таким образом, $K(G) = \frac{|N|-1}{|H|} + 1 + |H| - 1 = \frac{|N|-1}{|H|} + |H|$.
Так как $u \in N^\#$ и N - абелева, то $C_G(u) = N$.
В силу /1.3/ $|C_G(u)| = |N| = K(G)$, т.е. $|N| = \frac{|N|-1}{|H|} + |H|$, откуда вытекает, что $|H| = |N| - 1$.
Следовательно, G - дважды транзитивная группа Фробениуса.

3. Описание метабелевых TU-групп.

В дальнейшем нормальные подгруппы группы G будут рассматриваться как G-группы, т.е. как группы с областью операторов G /элементы группы G действуют на нормальных подгруппах сопряжениями/. G-группами тогда будут являться и фактор-группы, образованные нормальными подгруппами группы G.

Цоколь $Sc(G)$ группы G, как вполне приводимая G-группа, разлагается в прямое произведение однородных компонент, каждая из которых является композитом всех минимальных нормальных подгрупп группы G, G-изоморфных одной из них /2/.

<u>/3.1/ Предложение</u>. Пусть $G = N \leftthreetimes H$, где N и H – абелевы и $(|N|, |H|) = 1$. Если $h \in H$, то отображение $\sigma_h : x \to x^{-1}x^h = [x, h]$ подгруппы N в себя обладает следующими свойствами:

(i) σ_h – G-эндоморфизм G-группы N;

(ii) $Jm\,\sigma_h,\ Ker\,\sigma_h \vartriangleleft G$;

(iii) $N = Jm\,\sigma_h \times Ker\,\sigma_h$.

<u>Доказательство.</u> (i) Очевидно: $\sigma_h(x^g) = \sigma_h(x)^g (x \in N, g \in G)$.
(ii) Непосредственно вытекает из (i).
(iii) Так как $Jm\,\sigma_h \cong N / Ker\,\sigma_h$, то $|N| = |Jm\,\sigma_h|\,|Ker\,\sigma_h|$. Достаточно поэтому показать, что $Jm\,\sigma_h \cap Ker\,\sigma_h = \{1\}$. Пусть $x \in Jm\,\sigma_h \cap Ker\,\sigma_h$, $|h| = \alpha$. Если $x \in Jm\,\sigma_h$, то $x \cdot x^h \ldots h^{h^{\alpha-1}} = 1$. Поэтому, если $x \in Ker\,\sigma_h$ /т.е. $x^h = x$/, то $x^\alpha = 1$. Так как $(\alpha, |N|) = 1$, то $x^\alpha = 1$. Следовательно, $N = Jm\,\sigma_h \times Ker\,\sigma_h$.

Будем называть группу G однородной, если ее цоколь однороден.

<u>/3.2/ Предложение</u>. Если G – однородная метабелева TU-группа, то $G \cong \Phi_{p\alpha}$.

<u>Доказательство</u>. Так как $Sc(G)$ однороден, то $Sc(G)$-элементарная абелева p-группа, откуда вытекает, что $F(G)$-p-группа. Поэтому $F(G) \subseteq P \in Syl_p(G)$. В силу /2.1/ и /1.2/ $G' \subseteq F(G) \subseteq P$, откуда $P \vartriangleleft G$ и $P \subseteq F(G)$, т.е. $P = F(G)$. В силу теоремы Шура - Цассенхауза $G = P \leftthreetimes H$, где $H < G$ ($H \neq \{1\}$ – абелева/. Воспользуемся разложением из /3.1/: $P = Jm\,\sigma_h \times Ker\,\sigma_h$

и докажем, что $Z(G) = \{1\}$. Если $Z(G) \neq \{1\}$, то $Z(G) \supseteq F$, где F - минимальная нормальная подгруппа группы G. В силу однородности G $Sc(G) \subseteq Z(G) \subseteq Ker\ \sigma_h$. Следовательно, $(\forall h \in H)$ $Jm\ \sigma_h \cap Sc(G) = \{1\}$, откуда $(\forall h \in H)$ $Jm\ \sigma_h = \{1\}$. Таким образом, G - абелева - противоречие. Итак, $Z(G) = \{1\}$. Если F - минимальная нормальная подгруппа группы G, то /так как σ_h - G - эндоморфизм P / $\sigma_h(F) = \{1\}$ либо $\sigma_h(F) = F$. В первом случае $F \subseteq Ker\ \sigma_h$, во втором - $F \subseteq Jm\ \sigma_h$. Ввиду однородности цоколя, в первом случае $Sc(G) \subseteq Ker\ \sigma_h$, во втором - $Sc(G) \subseteq Jm\ \sigma_h$. Если $Sc(G) \subseteq Ker\ \sigma_h$, то $Jm\ \sigma_h = \{1\}$ и, следовательно, $h \in Z(G)$, откуда $h = 1$. Поэтому, если $h \neq 1$, то $Sc(G) \subseteq Jm\ \sigma_h$, т.е. $Ker\ \sigma_h = \{1\}$. Таким образом, H действует на P регулярно. Это означает, что G - группа Фробениуса с ядром P. В силу /2.4/ $G \cong \varphi_{p^\alpha}$.

/3.3/ Следствие. Цоколь однородной метабелевой TU-группы является минимальной нормальной подгруппой.

Пусть G - конечная группа, $N \trianglelefteq G$. Через Q_N обозначим любую максимальную нормальную подгруппу, удовлетворяющую условию: $N \cap Q_N = \{1\}$. Если $N \subseteq Sc(G)$ и $\bar{G} = G / Q_N$, то, очевидно, $Sc(\bar{G}) = \bar{N}$, причем отображение $x \to \bar{x}$ является G-изоморфизмом N на $\bar{N}$.

/3.4/ Теорема. Пусть G - метабелева TU-группа без центра, $F_1, \ldots, F_n$ - все ее минимальные нормальные подгруппы. Тогда $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, где $G_i \cong \varphi_{p_i^{\alpha_i}}$ с ядром F_i.

Доказательство. Пусть K - некоторая однородная компонента $Sc(G)$ и $\mathcal{G} = G / Q_K$. Тогда $Sc(\mathcal{G})$ G-изоморфен K и, следовательно, $\mathcal{G}$ - однородная метабелева TU-группа. /Если $\mathcal{G}$ абелева, то $K \subseteq Z(G)$ - противоречие./ В силу /3.1/ $\mathcal{G}$ - дважды транзитивная группа Фробениуса с ядром $Sc(\mathcal{G})$. Следовательно, //3.2// $Sc(\mathcal{G})$ - минимальная нормальная подгруппа группы $\mathcal{G}$. Так как имеет место G-изоморфизм $Sc(\mathcal{G})$ и K, то K - минимальная нормальная подгруппа группы G. Итак, однородные компоненты цоколя группы G являются минимальными

нормальными подгруппами, т.е. $Sc(G) = F_1 \times \ldots \times F_n$.
Отсюда вытекает, что $Sc(G) = \langle\langle f \rangle\rangle$, где $f = f_1 \ldots f_n (f_i \in F_i^{\#})$.
В силу известной теоремы Гашюца /[3]/, группа G обладает точным неприводимым характером χ.

Пусть $\mathfrak{M} = \{F_i\}_{i=1}^n$, $F \in \mathfrak{M}$. Рассмотрение подгруппы $C_G(F)/Q_F$ –группы $\mathcal{G}$ позволяет показать, что $C_G(F) = F \times Q_F$. Докажем, что $Sc(G) = F(G) = G'$. Пусть $N \triangleleft G$, $1 \neq N \subseteq F(G)$. Тогда $(\exists F \in \mathfrak{M})$, $F \subseteq N$. Из /2.1/ и /1.8/ вытекает, что $N = F \times N_1$, где $N_1 = N \cap Q_F \triangleleft G$. Поэтому, если N неразложим в прямое произведение нормальных подгрупп группы G, то $N \in \mathfrak{M}$. Это показывает, что $F(G) \subseteq Sc(G)$. Так как $Sc(G) \subseteq F(G)$, то $Sc(G) = F(G)$. Так как $Z(G) = \{1\}$, то $(\forall F \in \mathfrak{M})[G, F] = F$, т.е. $F \subseteq G'$. Поэтому $Sc(G) \subseteq G'$ и так как $G' \subseteq F(G) = Sc(G) \subseteq G'$, то $G' = Sc(G)$.

Заметим, что $G' = \langle\langle u \rangle\rangle$, где $u \in U(G)$. Действительно, в силу /2.1/ и /1.2/ $G' \subseteq \langle\langle u \rangle\rangle \subseteq F(G) = G'$.

Будем доказывать утверждение теоремы индукцией по n. При $n = 1$ это доказано в /3.2/. Пусть $n \geqslant 2$ и для любого числа минимальных нормальных подгрупп, меньшего, чем n, утверждение доказано. Докажем его справедливость в случае n минимальных нормальных подгрупп.

Пусть $M = \{1, \ldots, n\}$, $A \subseteq M$. Положим $F_A = \prod_{i \in A} F_i$, если $A \neq \emptyset$ и $F_\emptyset = \{1\}$. Если $B = M \setminus A$, то Q_A в дальнейшем будет обозначать подгруппу Q_{F_A}, выбранную так, чтобы имело место $Q_A \supseteq F_B$.

При $A \subset M$, $A \neq \emptyset$ группа $\mathcal{G}_A = G/Q_A$ – метабелева TU-группа без центра /см. выше/, причем $Sc(\mathcal{G}_A) \cong F_A$ / G-изоморфизм/. Так как $|A| \leqslant n-1$, то в силу предположения индукции $\mathcal{G}_A = \prod_{i \in A} \mathcal{G}_i$; $\mathcal{G}_i \cong \Phi_{p_i^{\alpha_i}}$.
В частности, $(\forall i \in M)$ $\mathcal{G}_i = G/Q_i \cong \Phi_{p_i^{\alpha_i}}$.

Пусть $\varphi_A : G \to \mathcal{G}_A$ – естественный гомоморфизм. Построим гомоморфизм φ группы G во внешнее прямое произведение $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \ldots \times \mathcal{G}_n$, полагая $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Легко видеть, что $Ker\,\varphi = \bigcap_{i \in M} Ker\,\varphi_i = \{1\}$, т.е. φ –

инъективный гомоморфизм. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $|G| = |\mathcal{Y}|$.

Введем в рассмотрение множества $R_A = \prod_{i \in A} F_i^{\#} \ (A \neq \emptyset)$, $R_{\emptyset} = \{1\}$. Докажем, что при $A \neq M$ R_A является G-классом. Действительно, множество $\varphi_A(R_A)$, как легко видеть, является $\mathcal{Y}_A$-классом. Поэтому, если $x, y \in R_A$, то $\varphi_A(y) = \varphi_A(t^{-1})\varphi_A(x)\varphi_A(t) = \varphi_A(x^t)$, т.е. $y^{-1}x^t \in Ker\ \varphi_A = Q_A$. Однако $y^{-1}x^t \in F_A$, следовательно, $y = x^t$. Итак, при $A \neq M$ R_A – G-класс. Если $A \neq M$, то $u \notin R_A$, так как в противном случае $\langle\langle u \rangle\rangle \neq G'$. Поэтому $u \in R_M$.

Докажем, что $R_M \subseteq U(G)$. Если $x \in R_M$, то $x = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$, $(x_i \in F_i^{\#})$ и $C_G(x) = \prod_{i=1}^{n} C_G(x_i) = \prod_{i=1}^{n} C_G(F_i) = C_G(G') = G' = C_G(u)$. Следовательно, в силу /1.3/ $(\forall x \in R_M)\ |C_G(x)| = K(G)$. Покажем, что $(\forall \theta \in Irr(G))\ \theta(x) \neq 0$. Действительно, $x = x_1 x_2$, где $x_1 \in R_1$, $x_2 \in R_{\{2 \ldots n\}}$. Если ε – первообразный корень из I степени $p_1^{\alpha_1} = |F_1|$, $\lambda = 1 - \varepsilon$, то, как легко видеть, $\theta(x) \equiv \theta(x_2) (mod\ \lambda)$ в кольце J. В частности, полагая $u = u_1 u_2$, получаем $\theta(u_1) \equiv \theta(u_2) (mod\ \lambda)$. Поскольку $R_{\{2 \ldots n\}}$ является G-классом, то $\theta(x_2) = \theta(u_2)$ и, следовательно, $\theta(x) \equiv \theta(u) (mod\ \lambda)$. Так как $\theta(u)$ – корень из I, а λ – необратимо в J, то $\theta(x) \neq 0$. В силу /1.10/ $x \in U(G)$. Таким образом, $R_M = U(G)$. Пусть теперь χ – точный неприводимый характер группы G. Покажем индукцией по $|A|$, что если $A \neq M$ и $x_A \in R_A$, то

$$\chi(x_A) = (-1)^{|A|} \frac{f_\chi}{|R_A|} .$$

Это очевидно, если $|A| = 0$, т.е. $A = \emptyset$. Предположим, что $|A| \neq 0$ и воспользуемся равенством $\sum_{x \in F_A} \chi(x) = 0$. Так как имеет место разбиение $F_A = \bigcup_{L \subseteq A} R_L$, то, обозначив, через x_L любой представитель R_L, получим $\sum_{x \in F_A} \chi(x) =$

$$= \sum_{L\subset A} |R_L|\,\chi(x_L) + |R_A|\,\chi(x_A) = \sum_{L\subset A} (-1)^{|L|} f_\chi +$$

$$+ |R_A|\,\chi(x_A) = -(-1)^{|A|} f_\chi + |R_A|\,\chi(x_A) = 0 .$$

Следовательно,

$$\chi(x_A) = (-1)^{|A|} \frac{f_\chi}{|R_A|} .$$

Найдем степень f_χ характера χ. В силу /2.2/ $f_\chi = (G : G')$. Так как χ вне G' равен 0 /применяем /2.2/ и учитываем, что $F(G) = G'$/, то $\sum_{x\in G} |\chi(x)|^2 = \sum_{x\in G'} |\chi(x)|^2 = |G| = |G'|\cdot(G : G')$. Поскольку $G' = \bigcup_{A\subseteq M} R_A$ и $R_M \subseteq U(G)$, то

$$\sum_{x\in G'} |\chi(x)|^2 = \sum_{A\subset M} \frac{f_\chi^2}{|R_A|} + |R_M| =$$

$$= \sum_{A\subseteq M} f_\chi^2 \left(\frac{1}{|R_A|}\right) - \frac{f_\chi^2}{|R_M|} + |R_M| =$$

$= f_\chi \sum_{A\subseteq M} |R_A|$. Замечая, что $\sum_{A\subseteq M} |R_A| = \sum_{A\subseteq M} \frac{|R_M|}{|R_A|}$, получаем $f_\chi^2 \frac{1}{|R_M|} \left(\sum_{A\subseteq M} |R_A| - 1\right) + |R| =$
$= f_\chi \sum_{A\subseteq M} |R_A|$. Поэтому $f_\chi^2 - f_\chi \frac{|R_M|\left(\sum_{A\subseteq M} |R_A|\right)}{\sum_{A\subseteq M} |R_A| - 1} + \frac{|R_M|^2}{\sum |R_A| - 1} = 0$, откуда $f_\chi = |R|$, либо $f_\chi = \frac{|R_M|}{\sum_{A\subseteq M} |R_A| - 1} < 1$. Следовательно, $f_\chi = (G : G') = |R|$. Но это означает, очевидно, что $|G| = |\mathcal{Y}_1 \times \ldots \times \mathcal{Y}_n| = |\mathcal{Y}|$, т.е., что φ - изоморфизм G на $\mathfrak{A}$.

<u>/3.5/ Предложение</u>. Если G - метабелева TU-группа, то $G/Z(G)$ является группой без центра.

<u>Доказательство</u>. Утверждение равносильно тому, что второй гиперцентр $Z_2(G)$ совпадает с $Z(G)$.

Пусть $G' = P_1 \times \ldots \times P_n$, где $P_i \in Syl(G')$. Будем доказывать утверждение индукцией по n. Если $n = 1$, то $|G'| = p^\lambda$ и $G' \leq P \in Syl_p(G)$. Поэтому $P \lhd G$

и в силу теоремы Шура - Цассенхауза $G = P \leftthreetimes H$, $H < G$. Так как $P \subseteq F(G)$, то в силу /2.1/ и /1.8/ P - абелева. Очевидно, $F(G) = PZ(G) = P \times L$, где $L = Z(G) \cap H$. Так как $Z_2(G) \subseteq F(G)$ и $Z(G) \leq L_2(G)$, то $Z_2(G) = (Z_2(G) \cap P) \times L$. Покажем, что $Z_2(G) \cap \leq Z(G)$. Пусть $x \in Z_2(G) \cap P$, т.е. $[x, G] \leq Z(G)$. В силу /3.1/ $(\forall h \in H)\ P = Jm\,\sigma_h \times Ker\,\sigma_h$. Полагая $x = vw$ ($v \in Jm\,\sigma_h$, $w \in Ker\,\sigma_h$), получаем $(\forall g \in G)[x,g] = [vw,g] = [v,g][w,g] \in Z(G) \leq Ker\,\sigma_h$.

Поэтому $[v,g] \in Jm\,\sigma_h \cap Ker\,\sigma_h = \{1\}$,

т.е. $v \in Z(G) \leq Ker\,\sigma_h$, откуда $v = 1$. Следовательно, $x \in \cap Ker\,\sigma_h = Z(G)$. Итак, в случае $n = 1$, $Z_2(G) = Z(G)$.

Предположим, что наше утверждение доказано, если число сомножителей в G' не превосходит $n-1$. Докажем его справедливость для случая n сомножителей: $G' = P_1 \times \ldots \times P_n = P_1 \times Q_1$, где $Q_1 = P_2 \times \ldots \times P_n$.

Пусть $K = G/Q_1$, $L = G/P_1$; $\pi : G \to K$, $\rho : G \to L$ - естественные гомоморфизмы. Поскольку $K' \cong P_1$, $L' \cong Q_1$, к этим группам применимо предположение индукции: $Z_2(K) = Z(K)$; $Z_2(L) = Z(L)$. Пусть теперь $x \in Z_2(G)$. Тогда $[x, G] \leq Z(G)$, откуда $[\rho(x), \rho(G)] \leq \rho(Z(G))$, т.е. $[\rho(x), L] \leq Z(L)$, следовательно, $\rho(x) \in Z_2(L) = Z(L)$. Поэтому $\rho[x, G] = \{1\}$, т.е. $[x, G] \leq Ker\,\rho = P_1$. Аналогично покажем, что $[x, G] \leq Ker\,\pi = Q_1$. Поэтому $[x, G] \leq P_1 \cap Q_1 = \{1\}$, т.е. $x \in Z(G)$. Тем самым доказано, что $Z_2(G) = Z(G)$.

/3.6/ Предложение. Центральное расширение G группы $\Phi_{p\alpha}$ является метабелевой группой тогда и только тогда, когда полный прообраз ядра Фробениуса в G - абелев.

Доказательство. Пусть $G/Z(G) = \mathcal{G} \cong \Phi_{p\alpha}$. Тогда полный прообраз ядра Фробениуса F группы $\mathcal{G}$ имеет вид

$F = G'Z(G)$, откуда и вытекает утверждение.

/3.7/ Предложение. Центральное метабелево расширение G группы $\Phi_{p\alpha}$ всегда является TU-группой.

Доказательство. Пусть $Z = Z(G)$, $G/Z = \mathcal{G} = \Phi_{p\alpha}$; $\mathcal{G} = \mathcal{F} \lambda \mathcal{Z}$, F – полный прообраз $\mathcal{F}$ в G, H – полный прообраз $\mathcal{Z}$ в G/F и H – абелевы/. Легко видеть, что для всех $x \in F \setminus Z$, $C_G(x) = F$, следовательно, $|x^G| = (G:F) = p^\alpha - 1$, т.е. $F \setminus Z$ разбивается на $|Z|$ классов одинаковой длины.

Рассмотрим теперь множество $G \setminus F$. Пусть $G = \bigcup_{i=1}^{n} Ht_i$ – разложение G по подгруппе H /так как $(G:H) = (\mathcal{G}:\mathcal{Z})$, то $n = p^\alpha$ /. Докажем, что имеет место разбиение $G \setminus F = \bigcup_{i=1}^{n} (H^{t_i} / Z)$. Действительно, если $x \in G \setminus F$, то $\bar{x} \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$, но тогда $\bar{x} \in (\mathcal{Z}^{\bar{t}_i})^{*}$, следовательно $x \in H^{t_i} \setminus Z$. Однако, если $t \in N_G(H)$, то $\bar{t} \in N_{\mathcal{G}}(\mathcal{Z}) = \mathcal{Z}$, откуда $t \in H$, т.е. $N_G(H) = H$. Поэтому все подгруппы H^{t_i} – попарно различны и $H^{t_i} \cap H^{t_j} = Z$ при $i \neq j$. Следовательно, $(H^{t_i} \setminus Z) \cap (H^{t_j} \setminus Z) = \varnothing$ /при $i \neq j$ /, т.е. имеет место разбиение множества $G \setminus F = \bigcup_{i=1}^{n} (H^{t_i} \setminus Z)$. Переходя к фактор-группе по $Z(G)$, покажем далее, что если $x \in H^{t_i} \setminus Z$, то $C_G(x) = H^{t_i}$. Следовательно, для всех $x \in G \setminus F$, $|C_G(x)| = |H|$, т.е. $|x^G| = (G:H) = p^\alpha$. Поэтому $G \setminus F$ разбивается на $|Z|(p^\alpha - 2)$ G-классов длины p^α. Отсюда вытекает, что $K(G) = |Z| + |Z| + |Z|(p^\alpha - 2) = |Z| p^\alpha = |F|$. Но тогда $(\forall x \in F \setminus Z)\ |C_G(x)| = K(G)$. Если теперь $\chi \in Irr(G)$, $x \in F \setminus Z$, то $|G| = \sum'_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \sum'_{g \in Z} |\chi(g)|^2 + \sum'_{g \in F \setminus Z} |\chi(g)|^2 + \sum'_{g \in F \setminus F} |\chi(g)|^2$. Очевидно, $\sum_{g \in Z} |\chi(g)|^2 = f_\chi^2 |Z|$. Заметим, что если $x, y \in F \setminus Z$, то $(\exists t \in G)$ и $(\exists z \in Z)$ такие, что $y = z x^t$. Поэтому $|\chi(x)| = |\chi(y)|$. Следовательно, $\sum'_{g \in F \setminus Z} |\chi(g)|^2 = |\chi(x)|^2 |z| (p^\alpha - 1)$.

Наконец, $\sum_{g \in G \setminus F} |\chi(g)|^2 = \sum_{i=1}^{p^\alpha} \sum_{g \in H^{t_i} \setminus Z} |\chi(g)|^2 =$

$$= p^\alpha \sum_{g \in H \setminus Z} |\chi(g)|^2 = p^\alpha \Big\{ \sum_{g \in H} |\chi(g)|^2 - f_\chi^2 |Z| \Big\}.$$

Пользуясь тем, что $\sum'_{g \in H} |\chi(g)|^2 = \mu |H|$ / μ – натуральное число/, получим $\sum'_{g \in G \setminus F} |\chi(g)|^2 = \mu |G| - f_\chi^2 |F|$.

Итак, $|G| = f_\chi^2 |z| + |\chi(x)|^2 |Z| (p^\alpha - 1) + \mu |G| - f_\chi^2 |F|$,

откуда следует $p^\alpha (\mu - 1) = f_\chi^2 - |\chi(x)|^2$. Отсюда вытекает, что если $\chi(x) = 0$, то $f_\chi \equiv 0 (mod\, p)$. Так как F – абелева, то в силу теоремы Ито /[17/ $f_\chi \mid (G : F)$, т.е. $f_\chi \mid p^{\alpha}-1$. Противоречие показывает, что $\chi(x) \neq 0$. Пользуясь /1.10/, заключаем, что $x \in U(G)$. Следовательно, $G-TU$-группа.

/3.8/ Теорема. Класс метабелевых TU-групп исчерпывается прямыми произведениями с объединенными центрами метабелевых центральных расширений групп Φ_{p^α}.

Доказательство. 1^0.Пусть $G = G_1 \dots G_n$ – прямое произведение с объединенными центрами метабелевых групп G_i, причем $G_i / Z(G_i) \cong \Phi_{p_i^{\alpha_i}}$. В силу /3.7/ все G_i – TU-группы. Пусть $\mathcal{G} = G_1 \times \dots \times G_n$ – декартово произведение G_i. В силу /1.4/ $\mathcal{G}$ – TU-группа. Строим отображение $\varphi : \mathcal{G} \to G$; $\varphi(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n$. Так как φ – сюръективный гомоморфизм, то $G \cong \mathcal{G} / Ker\, \varphi$. В силу /1.1/ G – TU-группа. Метабелевость G очевидна.

2^0. Пусть G – метабелева TU-группа, $\mathcal{Y} = G/Z(G)$, $x \mapsto \bar{x}$ – естественный гомоморфизм группы G на $\mathcal{Y}$.

Пусть $C_1 \dots C_k$ $(k = K(G))$ – G -классы. Тогда, очевидно, $\bar{C}_i = \bar{C}_j$ равносильно $C_j = zC_i$, где $z \in Z(G)$.

Рассмотрим представление $z \mapsto \begin{pmatrix} C_1 \dots C_k \\ zC_1 \dots zC_k \end{pmatrix}$, $Z(G)$ подстановками G-классов. Ясно, что $\bar{C}_i = \bar{C}_j$, тогда и только тогда, когда C_i и C_j входят в одну и ту же орбиту /"Z-орбиту"/ этого представления. Поэтому $K(\mathcal{Y})$ равно числу Z-орбит.

Покажем, что $K(G) = |Z|\, K(\mathcal{Y})$. Пусть $u \in U(G)$. Тогда /предложение /1.3// $K(G) = |C_G(u)|$. Найдем $C_G(u)$. Если F – полный прообраз $\mathcal{Y}'$, то $F = G'Z$, т.е. F – абелева. Поскольку $\bar{u} \in \mathcal{Y}'$, то $u \in F$, следовательно, $F \subseteq C_G(u)$. Однако $\overline{C_G(u)} \subseteq C_{\mathcal{Y}}(\bar{u}) = \mathcal{Y}'$, т.е. $C_G(u) \subseteq F$.

Таким образом, $C_G(u) = F$ и $K(G) = F$. Так как $|F| = |\mathcal{Y}'|\,|Z|$, а $|\mathcal{Y}'| = |C_{\mathcal{Y}}(\bar{u})| = K(\mathcal{Y})$, то $K(G) = K(\mathcal{Y})|Z|$. Отсюда вытекает, что все Z-орбиты имеют длину $|Z|$, т.е. стабилизаторы всех G-классов тривиальны. Это означает, что $(\forall i)$ $zC_i = C_i$ равносильно $z = 1$, откуда следует, что $[x, y] \in Z$ влечет $[x, y] = 1$.

Пусть теперь $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \ldots \times \mathcal{G}_n$, где $\mathcal{G}_j = \Phi_{\rho_j^{\alpha_i}}$, G_j – полный прообраз $\mathcal{G}_j$ в G. Тогда, очевидно, $G = G_1 \cdot \ldots \cdot G_n$. Покажем, что это произведение является прямым произведением с объединенными центрами.

Ясно, что $Z \leq G_i \cap G_j$. Если $i \neq j$, то $\bar{G}_i \cap \bar{G}_j = \mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j = \{ \bar{1} \}$, т.е. $G_i \cap G_j \leq Z$. Таким образом, при $i \neq j$ $G_i \cap G_j = Z$. Пусть $x_i \in G_i, x_j \in G_j$. Тогда $[x_i, x_j] \in G_i \cap G_j$ и, следовательно, $[x_i, x_j] \in Z$. В силу доказанного выше, это означает, что $[x_i, x_j] = 1$, т.е. подгруппы G_i и G_j поэлементно коммутируют.

Теорема /3.8/ дает полное описание метабелевых TU-групп.

/3.9/ Замечание. Можно показать, что для всех метабелевых TU-групп $G = G' \leftthreetimes H$ и $F(G) = G' \times Z(G)$

/3.10/ Замечание. Изложенная выше методика не применима для произвольной разрешимой TU-группы /т.е. при $\alpha \notin F(G)$//. Тем не менее показано, что все сверхразрешимые TU-группы – метабелевы, что сводит их описание к рассмотренному в работе случаю.

1. Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969. – 668 с.
2. Жмудь Э.М. Об изоморфных линейных представлениях конечных групп. – Мат. сб., 1956, 38 /80/, № 4, с. 417-430.
3. Gaschütz W. Endliche Gruppen mit treuen absolut irreduziblen Darstellungen.-Math. Nachr., 1954, 12, N3/4, p.253-255.
4. Burnside W. On an arithmetical theorem connected with roots of unity and its applications to group characteristics.- Proc. Lond. Math. Soc., 1904, 2, N1, p.112-116.
5. Gallagher P.X. Zeros of characters of finite groups. - J. Algebra, 1966, 4, N1, p.42-45.

УДК 519.210

В.П.Потапов

К ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ КРУГОВ ВЕЙЛЯ

Настоящая статья посвящена изложению фундаментальной теоремы С.А.Орлова об инвариантности рангов матричных радиусов предельных кругов Вейля [1]. Естественная нормировка аналитических j-сжимающих матриц-функций к модулю [2] позволила, сохранив основные черты рассуждений С.А.Орлова, значительно сократить и упростить доказательство.

Всюду в дальнейшем рассматриваются некоторые семейства квадратных матриц $a(t) = a_t$, зависящих от дискретного или непрерывного параметра t $(t_0 \leq t < +\infty)$ и изучается их поведение при $t \to \infty$.

<u>Лемма о проекторах</u>. I. Лемма I. Пусть неотрицательная матрица $\rho(t)$ монотонно возрастает, а матрица $y(t)$, связанная с $\rho(t)$ соотношением

$$I = y(t)\rho(t)y^*(t) \qquad /1/$$

при $t \to \infty$, сходится к матрице y.

При выполнении этих условий существуют пределы

$$\lim_{t\to\infty} [\rho(t)]^{-\frac{1}{2}} = R, \quad \lim_{t\to\infty} y\rho(s)y^* = P \qquad /2/$$

и P является проектором того же ранга, что и R.

<u>Доказательство</u>. Существование первого предела вытекает из теоремы Левнера /3/. Далее, при $s < t$

$$y(t)\rho(s)y^*(t) \leq y(t)\rho(t)y^*(t) = I,$$

что после перехода к пределу при $t \to \infty$ приводит к неравенству

$$y\rho(s)y^* \leq I.$$

Так как левая часть монотонно возрастает и ограничена, то существует и

$$\lim_{s\to\infty} y\rho(s)y^* = P \leq I. \qquad /3/$$

Для доказательства того, что P - проектор заметим, что из /1/ вытекает равенство

$$y(s) = u(s)\rho(s)^{-\frac{1}{2}},$$

где $u(s)$ - унитарная матрица. Выбирая $u(s_\nu) \to u$, найдем

$$y = \lim_{s\to\infty} y(s) = \lim_{\nu\to\infty} y(s_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} u(s_\nu)\rho(s_\nu)^{-\frac{1}{2}} = uR$$

Обозначая

$$u^* P u = Q, \quad \rho(s)^{-\frac{1}{2}} = R(s) = R_s$$

мы, вместо /3/, получаем соотношение

$$\lim_{s\to\infty} RR^{-2}(s)R = Q \leq I.$$

Приведем матрицу R унитарным преобразованием к диагональному виду

$$vRv^* = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (D > 0,\ \dim D = \operatorname{rang} R = r)$$

и положим

$$vR_S^2v^* = \begin{pmatrix} a_S & b_S \\ b_S^* & c_S \end{pmatrix}, \quad vQv^* = Q_1 .$$

Очевидно,

$$a_S \to D^2, \quad b_S, \ c_S \to 0 .$$

Воспользовавшись известным выражением для обратной матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1}+a^{-1}b\,(c-b^*a^{-1}b)^{-1}b^*a^{-1}, & -a^{-1}b(c-b^*a^{-1}b)^{-1} \\ -(c-b^*a^{-1}b)^{-1}b^*a^{-1} & (c-b^*a^{-1}b)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

получим

$$Q_1 = \lim_{S\to\infty} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_S^{-1}+a_S^{-1}b_S(c_S-b_S^*a_S^{-1}b_S)^{-1}b_S^*a_S^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lim_{S\to\infty} \begin{pmatrix} Da_S^{-1}D+\ldots & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Предел первого слагаемого равен I_r, предел второго - неотрицателен, но так как $Q_1 \leq I$, этот второй предел равен нулю и

$$Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = uv^* \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} vu^*,$$

что и требовалось доказать.

<u>Л е м м а   П</u>. Пусть неотрицательная матрица

$$S(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) & q(t) \\ q^*(t) & P_2(t) \end{pmatrix}$$

монотонно возрастает и матрицы

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & 0 \\ 0 & y_2(t) \end{pmatrix}, \qquad T(t) = \begin{pmatrix} I & B(t) \\ B^*(t) & I \end{pmatrix},$$

связанные с $S(t)$ соотношением

$$T(t) = Y(t)S(t)Y^*(t)$$

при $t \to \infty$, сходятся соответственно к

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} I & B \\ B^* & I \end{pmatrix}$$

с неособенным блоком B.

При выполнении этих условий проекторы

$$P_1 = \lim_{S\to\infty} y_1 P_1(s) y_1^*, \quad P_2 = \lim_{S\to\infty} y_2 P_2(s) y_2^*$$

имеют одинаковый ранг: $r(P_1) = r(P_2)$.

<u>Доказательство</u>. Повторяя рассуждения I, последовательно получаем

$$T(t) \geq Y_t S_S Y_t^*, \quad T \geq Y S_S Y^*, \quad T \geq \lim_{S\to\infty} Y S_S Y^*,$$

или

$$\begin{pmatrix} I & B \\ B^* & I \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} P_1 & b \\ b^* & P_2 \end{pmatrix} \geq 0 .$$

Обозначив порядок блоков через m, ранги проекторов P_1 и P_2 через r_1 и r_2, мы, из неотрицательности второй матрицы, получим

$$r(b) \le r_1$$

и из неотрицательности их разности –

$$r(B-b) \le m - r_1$$

Однако из неособенности блока B вытекает противоположное неравенство

$$r(B-b) \ge r(B) - r(b) \ge m - r_1$$

и, следовательно, $r(B-b) = m - r_1$. На тех же основаниях справедливо и равенство $r(B-b) = m - r_2$.

Таким образом, $m - r_1 = m - r_2$, что и доказывает лемму.

<u>Основные величины. Теорема</u>. Пусть сначала W – произвольная обратимая J-сжимающая матрица:

$$J - WJW^* \ge 0.$$

Наряду с ней будем рассматривать и J-растягивающую матрицу

$$W_1 = JW^{-1}J.$$

Важную роль играет соотношение между ними

$$R^2 - R_1^2 = J, \text{ где } R = (J - WJW^*)^{-\frac{1}{2}}, \ R_1 = (W_1^*JW_1 - J)^{-\frac{1}{2}}, \qquad /5/$$

проверяющееся непосредственным вычислением

$$R_1^2 + J = (W_1^*JW_1 - J)^{-1} + J = [I + J(W_1^*JW_1 - J)](W_1^*JW_1 - J)^{-1} =$$

$$= JW_1^*JW_1(W_1^*JW_1 - J)^{-1} = [(W_1^*JW_1 - J)W_1^{-1}JW_1^{*-1}]^{-1} =$$

$$= (J - JW_1^{-1}JW_1^{*-1}J)^{-1} = (J - WJW^*)^{-1} = R^2.$$

Пусть далее $\{W_S\}$ – семейство J-сжимающих обратимых матриц таких, что J-формы

$$J - W_S J W_S^* > 0$$

монотонно возрастают. Тогда R_S^2 монотонно убывает и, в силу /5/, также ведет себя и R_{1S}^2. По теореме Левнера монотонно убывают и матрицы R_S, R_{1S}, стремясь к конечным неотрицательным пределам R и R_1, для которых по-прежнему будет выполняться равенство /5/: $R^2 - R_1^2 = J$.

Из него в частности вытекает, что матрица

$$R^2 + R_1^2 \ge 0.$$

будет неособенной. В противном случае существовал бы вектор $g \neq 0$ такой, что

$$g(R^2 + R_1^2)g^* = 0.$$

Но тогда из неотрицательности слагаемых вытекает, что

$$gR^2 g^* = 0, \quad gR_1^2 g^* = 0,$$

откуда $gR = 0$, $gR_1 = 0$, и значит

$$gJ = 0,$$

что невозможно.

Пусть, наконец, $\{ W_s(\lambda) \}$ – семейство обратимых J-сжимающих мероморфных в правой полуплоскости $Re\,\lambda > 0$ матриц-функций таких, что J-формы

$$J - W(\lambda) J W^*(\lambda) > 0$$

строго положительны и монотонно возрастают с ростом параметра s. Теорема С.А.Орлова заключается в том, что дефекты как матрицы-функции

$$R(\lambda) = \lim_{s \to \infty} R_s(\lambda) = \lim_{s \to \infty} (J - W_s(\lambda) J W_s^*(\lambda))^{-\frac{1}{2}},$$

так и матрицы-функции

$$R_1(\lambda) = \lim_{s \to \infty} R_{1s}(\lambda) = \lim_{s \to \infty} (W_{1s}^*(\lambda) J W_{1s}(\lambda) - J)^{-\frac{1}{2}}$$

не зависят от выбора λ во всех точках голоморфности семейства $\{ W_s(\lambda) \}$ /соответственно $\{ W_{1s}(\lambda) \}$/.

<u>Доказательство</u>. Заметим, что так как $R_s(\lambda)$, $R_{1s}(\lambda)$ не изменяется от умножения $W_s(\lambda)$ справа на постоянную J-унитарную матрицу W_s^{-1}, то можно заранее считать, что матрицы-функции $W_s(\lambda)$ в некоторой фиксированной точке λ_0 голоморфности семейств $\{ W_s(\lambda) \}$, $\{ W_{1s}(\lambda) \}$ нормированы к модулю $M_s = W_s(\lambda_0)$. В дальнейшем будут использованы следующие свойства модуля 2 :

1/ $MJ = JM^*$;

2/ $J - M^2 J \geqslant J - MJ \geqslant 0$;

3/ если $J - M_s^2 J$ монотонно возрастает, то также ведет себя и $J - M_s J$.

Рассмотрим преобразование

$$\omega = J(I - W)^{-1}(I + W). \qquad /6/$$

Оно, очевидно, имеет смысл для любого J-сжатия W и переводит J-нерастягивающие матрицы в позитивные $(\omega + \omega^* \geqslant 0)$. Последнее вытекает при W_1, $W_2 = W$ из легко проверяемого тождества

$$\frac{\omega_1 + \omega_2^*}{2} = z_1 (J - W_1 J W_2^*) z_2^*, \qquad /7/$$

где
$$z_i = J\left(I - w_i\right)^{-1} = \frac{\omega_i + J}{2} \qquad (i=1,2).$$

Положив в /6/ $w = w_s(\lambda)$, мы придем к семейству позитивных в правой полуплоскости матриц-функций $w_s(\lambda)$ со строго положительной вещественной частью. Исследуем поведение его в точке λ_0 .Обозначим
$$\Omega_s = \omega_s(\lambda_0) = J(I - M_s)^{-1}(I + M_s).$$
Прежде всего, из свойства 1 модуля вытекает, что Ω_s - эрмитова матрица:
$$\Omega_s^* = (I + M_s^*)(I - M_s^*)^{-1}J = J(I + M_s)(I - M_s)^{-1} = J(I - M_s)^{-1}(I + M_s) = \Omega_s$$
и, следовательно,
$$\Omega_s = \frac{\Omega_s + \Omega_s^*}{2} > 0.$$
Далее, из свойства 3 следует, что
$$\Omega_s = J(I - M_s)^{-1}(I + M_s) = 2(J - M_s J)^{-1} - J$$
монотонно убывает.

Наконец, так как по свойству 2
$$\Omega_s = 2(J - M_s J)^{-1} - J \geqslant 2(J - M_s^2 J)^{-1} - J = (J - M_s J M_s^*)^{-1}(2I - I + M_s^2) =$$
$$= (J - M_s J M_s^*)^{-1} + (M_s^{*-1} J M_s^{-1} - J)^{-1} = R_s^2(\lambda_0) + R_{1s}^2(\lambda_0) \geqslant$$
$$\geqslant R^2(\lambda_0) + R_1^2(\lambda_0) > 0,$$
то Ω_s ограничена снизу.

Итак, Ω_s , монотонно убывая, стремится к неособенному положительному пределу
$$\Omega = \lim_{s \to \infty} \Omega_s = \frac{\Omega + \Omega^*}{2} > 0.$$
Это позволяет выделить последовательность $\omega_{s_k}(\lambda)$, сходящуюся равномерно на каждом замкнутом множестве из открытой правой полуплоскости к конечной позитивной матрице-функции $\Omega(\lambda)$ со строго положительной вещественной частью в точке $\Omega(\lambda)$, а значит и в любой точке $\lambda\ (Re\,\lambda > 0)$.

В дальнейшем будем считать, что s и t пробегают последовательность s_k .

Для матрицы-функции $\omega_t(\lambda)$ запишем неравенство Шварца [4] в двух произвольных точках μ и ν голоморфности семейства $\{w_t(\lambda)\}$:

$$\Phi_t \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_t(\mu)+\omega_t^*(\mu)}{\mu+\bar\mu} & \dfrac{\omega_t(\mu)+\omega_t^*(\nu)}{\mu+\bar\nu} \\ \dfrac{\omega_t(\nu)+\omega_t^*(\mu)}{\nu+\bar\mu} & \dfrac{\omega_t(\nu)+\omega_t^*(\nu)}{\nu+\bar\nu} \end{pmatrix} \geq 0. \qquad /8/$$

В силу равенства /7/, справедливо соотношение

$$\Phi_t = \begin{pmatrix} z_t(\mu) & 0 \\ 0 & z_t(\nu) \end{pmatrix} S_t \begin{pmatrix} z_t^*(\mu) & 0 \\ 0 & z_t^*(\nu) \end{pmatrix} \geq 0, \qquad /9/$$

где S_t – матрица неравенства Шварца для $w_t(\lambda)$:

$$S_t \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{J-w_t(\mu)Jw_t^*(\mu)}{\mu+\bar\mu} & \dfrac{J-w_t(\mu)Jw_t^*(\nu)}{\mu+\bar\nu} \\ \dfrac{J-w_t(\nu)Jw_t^*(\mu)}{\nu+\bar\mu} & \dfrac{J-w_t(\nu)Jw_t^*(\nu)}{\nu+\bar\nu} \end{pmatrix} \geq 0.$$

Нетрудно убедиться в том, что S_t монотонно возрастает. В самом деле, при $s < t$ из неравенства

$$J - w_1(\lambda) J w_s^*(\lambda) \leq J - w_t(\lambda) J w_t^*(\lambda)$$

вытекает, что

$$u(\lambda) = w_s^{-1}(\lambda) w_t(\lambda)$$

является J-нерастягивающей и так как

$$J - w_t(\lambda_1) J w_t^*(\lambda_2) = J - w_s(\lambda_1) J w_s^*(\lambda_2) + w_s(\lambda_1)\left[J - u(\lambda_1) J u^*(\lambda_2)\right] w_1^*(\lambda_2),$$

то

$$S(w_t) = S(w_s) + \begin{pmatrix} w_s(\mu) & 0 \\ 0 & w_s(\nu) \end{pmatrix} S(u) \begin{pmatrix} w_s^*(\mu) & 0 \\ 0 & w_s^*(\nu) \end{pmatrix} \geq S(w_s).$$

Умножим обе части неравенства /9/ слева и справа на матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_t(\mu)+\omega_t^*(\mu)}{\mu+\bar\mu} & 0 \\ 0 & \dfrac{\omega_t(\nu)+\omega_t^*(\nu)}{\nu+\bar\nu} \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}}$$

и введем следующие обозначения:

$$T_t = Q_t \Phi_t Q_t, \quad y_1(t) = \left[\frac{\omega_t(\mu)+\omega_t^*(\mu)}{\mu+\bar\mu}\right]^{-1/2} z_t(\mu); \quad y_2(t) = \left[\frac{\omega_t(\nu)+\omega_t^*(\nu)}{\nu+\bar\nu}\right]^{-1/2} z_t(\nu).$$

Тогда, для того чтобы оказаться в условиях леммы II, остается проверить, что матрица

$$\beta = \lim_{t\to\infty} \beta_t = \lim_{t\to\infty} \left\{ \left[\frac{\omega_t(\mu)+\omega_t^*(\mu)}{\mu+\bar\mu} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\omega_t(\mu)+\omega_t^*(\nu)}{\mu+\bar\nu} \left[\frac{\omega_t(\nu)+\omega_t^*(\nu)}{\nu+\bar\nu} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

является несобственной. Но это следует из того, что вещественная часть матрицы

$$\lim_{t\to\infty} \left[\omega_t(\mu) + \omega_t^*(\nu) \right]$$

строго положительна.

Для $R(\lambda)$ утверждение теоремы доказано, для $R_1(\lambda)$ – доказывается аналогично.

Следствие. Ранги предельных радиусов круга Вейля $\rho_d(\lambda)$, $\rho_g(\lambda)$ не зависят от выбора точки λ.

Совокупность всех решений классической задачи, поставленной в правой полуплоскости $Re\,\lambda > 0$ для позитивных матриц-функций $W(\lambda)$, определяется неравенствами [4]:

$$\left[W_t(\lambda), I \right] W_t(\lambda) \begin{bmatrix} W_t^*(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad \left[W_t(\lambda), I \right] J \begin{bmatrix} W_t^*(\lambda) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица Вейля

$$W_t(\lambda) = \begin{pmatrix} -r_t & \lambda_t^* \\ s_t & -t_t \end{pmatrix}$$

строится по данным задачи. В фиксированной точке $\lambda\ (Re\,\lambda > 0)$ значения решений W_t заполняют круг Вейля

$$W_t = s_t(\lambda)\, r_t^{-1}(\lambda) + \rho_{g_t}^{\frac{1}{2}}(\lambda)\, u\, \rho_{d_t}^{\frac{1}{2}}(\lambda), \quad uu^* \leqslant I,$$

где радиусы

$$\rho_{d_t} = r_t^{-1}, \qquad \rho_{g_t} = s_t\, r_t^{-1} s_t^* - t_t$$

положительны и монотонно убывают с ростом параметра t. Сейчас

$$R_t^2 = \left(J - W_t \right)^{-1} = \begin{pmatrix} r_t & I - s_t^* \\ I - s_t & t_t \end{pmatrix}^{-1}$$

и воспользовавшись формулой /4/ для обратной матрицы, мы получим

$$R_t^2 = \begin{pmatrix} \rho_{d_t} + N_t M_t N_t^* & -N_t M_t \\ -M_t N_t^* & M_t \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$M_t = (s_t\, r_t^{-1} + r_t^{-1} s_t^* - \rho_{g_t} - \rho_{d_t})^{-1}, \qquad N_t = r_t^{-1}(I - s_t^*)$$

стремятся к конечным пределам M и N, причем первый является неособенной матрицей. Предельный переход дает

$$R^2 = \begin{pmatrix} \rho_d + NMN^* & -NM \\ -MN^* & M \end{pmatrix}.$$

Предположим теперь, что R^2 аннулируется на векторе $f=[x,y]\neq 0$:

$$x\rho_d+(xN-y)MN^*=0, \quad (-xN+y)M=0.$$

Тогда $y=xN$, $x\rho_d=0$, причем $x\neq 0$. Наоборот, если $x\rho_d=0$, то вектор $f=[x, xN]$ аннулирует R^2.

Таким образом,

$$\operatorname{def}\rho_d=\operatorname{def}R^2.$$

Аналогично доказывается и равенство

$$\operatorname{def}\rho_g=\operatorname{def}R_1^2.$$

Так как дефекты в правых частях не зависят от выбора λ, то этим же свойством обладают и левые части.

1. Орлов С.А. Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра и теоремы об инвариантности рангов предельных матричных кругов. - Изв. АН СССР, 1976, **40**, № 3, с. 593-644.
2. Потапов В.П. Мультипликативная структура J=нерастягивающих матриц-функций. - Тр. моск. мат. об-ва, 1955, **4**, с. 125-236.
3. Löwner K. Ueber monotone Matrixfunktionen. - Math. Zeitschr, 1933. - 38 p.
4. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Индефинитная метричка в проблеме Неванлинны - Пико. - Докл. АН АрмССР, 1974, **59**, с. 17-32.

УДК 539.182

А.М.Ратнер

КОНСТРУКТИВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА НА ПРИМЕРЕ АТОМА ГЕЛИЯ

Один из наиболее распространенных методов квантовой механики - вариационный метод, основанный на том, что волновая функция φ основного состояния системы, описываемой гамильтонианом H, является экстремалью функционала $\bar{H}=(\varphi, H\varphi)$. За исключением редких случаев, когда из вариационного принципа вытекают обозримые точные соотношения, он реализуется с помощью пробной функции подходящего вида, зависящей от вариационных параметров $p_1, \ldots, p_l$. При этом задача сводится к минимизации функции l переменных $\bar{H}(p_1,\ldots,p_l)$, которая для сколько-нибудь сложных систем может быть проведена только численно.

В настоящее время известно довольно много различных итерационных методов минимизации функции нескольких переменных (обзор их дан в [1]). Однако большая часть этих методов (метод Флетчера - Ривса [2], метод переменной метрики [3], обобщенный ме..д Ньютона, включая наиболее эффективные модифицированные их варианты [1]), в общем случае мало пригодна для решения вариационной задачи, поскольку ограничивает класс минимизируемых функций выпуклыми функциями. Но даже для выпуклой функции такие методы быстро сходятся лишь при условии, что она близка к положительно определенной квадратичной форме. Если начальные координаты точки выбраны вдали от минимума функции, то это условие не выполняется. При этом итерационный процесс в начальной стадии может сходиться очень медленно и не давать даже грубого представления о положении и глубине искомого минимума. Это особенно неудобно в сложных случаях, когда вычисление $\bar{H}$ требует большой затраты машинного времени. К тому же перечисленные методы /за исключением метода Флетчера - Ривса/ используют вторые частные производные минимизируемой функции. Для сложных систем они могут быть получены только численным дифференцированием, требующим большой затраты машинного времени и ненадежным вследствие ограниченной точности вычисления величины $\bar{H}$ /обычно ее получают численным интегрированием/.

Для реализации вариационного принципа применительно к сколько-нибудь сложным системам фактически пригодны лишь метод Коши и метод поиска [1]: первый использует последовательные смещения точки в направлении, противоположном градиенту функции, а второй - независимые смещения по координатным осям в сторону убывания функции. Применимость этих методов не ограничена каким-либо специальным классом функций. Они не используют вторых производных и, как правило, довольно эффективны на начальной стадии итерационного процесса.

Недостатком указанных методов является медленная их сходимость, особенно в тех случаях, когда $\bar{H}$ изменяется в одном направлении гораздо быстрее, чем в остальных /рис. 1/. В такой

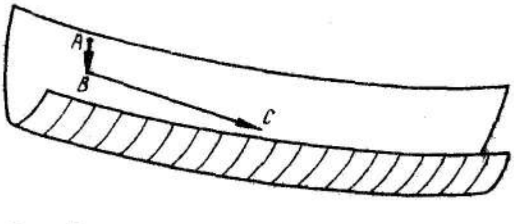


Рис. I.

ситуации величина однократного смещения точки вдоль "оврага" определяется его шириной, так что для прохождения "оврага" в продольном направлении требуется большое число итераций. При числе вариационных параметров, превышающем пять-шесть, такая "овражная ситуация", обычно возникающая на конечной стадии итерационного процесса, сильно замедляет его сходимость. Поскольку итерационный процесс практически невозможно довести до конца, то положение найденного минимума в l-мерном пространстве значительно зависит от выбора начальной точки.

В настоящей работе метод Коши и метод поиска объединены в один алгоритм таким образом, что сходимость итерационного процесса существенно ускоряется по сравнению с каждым из этих методов. В объединенном алгоритме каждая итерация выполняется в два этапа. Сначала точка смещается в направлении, противоположном градиенту /стрелка АВ на рис. 1/. Затем все координатные оси проектируются на подпространство, почти ортогональное градиенту, и точка смещается в этом подпространстве независимо вдоль каждой оси в сторону минимума /в направлении ВС/. В почти ортогональном подпространстве точка движется преимущественно вдоль "оврага", а интервалы смещений при этом выбираются по возможности большими. Благодаря этому точка быстро приближается к минимуму даже в "овражной ситуации", в которой метод Коши и метод поиска становятся неэффективными.

Объединенный алгоритм минимизации был проверен на ряде примеров /включающих искусственно созданную "овражную ситуацию"/ и во всех случаях оказался гораздо эффективнее "составляющих" методов. На основании рассмотренных примеров можно сделать вывод, что объединенный алгоритм позволяет надежно осуществлять минимизацию с точностью /по энергии/ 0,001%, заведомо достаточной для решения обычных физических задач, не требующих спектроскопической точности.

Проиллюстрируем сказанное на примере атома гелия.

1. Основное состояние атома гелия. Предлагаемый объединенный метод минимизации усредненного значения гамильтониана $\bar{H}$ применим к любым классам функций $\bar{H}(\beta_1,\dots,\beta_l)$, т.е. к любым квантовомеханическим системам, обеспечивая точность, достаточную для обычного физического исследования. В то же время для некоторых специальных случаев существуют более точные методы решения

вариационной задачи. Такие частные случаи могут быть использованы для проверки предлагаемого общего метода.

В виде примера рассмотрим основное состояние атома гелия, рассчитанное ранее с весьма высокой точностью методом Хилерааса, разработанным специально для электронной конфигурации s^2 [4].

Гамильтониан атома гелия имеет известный вид

$$H = T + U + I; \qquad /1/$$

$$T = -\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2), \quad U = -Z\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \quad I = \frac{1}{r_{12}} \qquad /2/$$

/ r_i - расстояние i -го электрона от ядра; r_{12} - расстояние между электронами; $Z = 2$ - заряд ядра/. Здесь и далее все формулы и числовые данные приведены в атомных единицах.

Выберем пробную волновую функцию в достаточно сложном виде, не похожем на пробную функцию Хилерааса:

$$\psi = e^{\Phi}(\rho_7 + t^2), \quad \Phi = \rho_1 s + \frac{\rho_2 s^2}{2} + \frac{\rho_3 u}{\rho_6 + s} + \frac{\rho_4 u^2}{2} + \rho_5 us; \qquad /3/$$

$$s = r_1 + r_2, \quad t = r_1 - r_2, \quad u = r_{12}. \qquad /4/$$

Пробная функция /3/ содержит семь вариационных параметров, из которых наиболее важны параметр $\rho_1 < 0$, задающий скорость убывания ψ при удалении электронов от ядра, и параметры ρ_3 , ρ_6 , ρ_7 , определяющие их корреляцию между собой. Параметр ρ_6 введен так, чтобы в рамках одной и той же пробной функции /3/, т.е. с использованием одной и той же машинной программы, можно было получить две разные волновые функции - варианты А и В. Вариант А получим, полагая $\rho_6 = +0$, тогда корреляция электронов в основном будет зависеть от угла θ между их радиус-векторами, проведенными из ядра. Действительно, при $r_1 = r_2$ третье слагаемое в показателе, описывающее корреляцию, принимает вид $\rho_3 \sin(\theta/2)$. Варианту В соответствует $\rho_6 = +\infty$ при отличном от нуля отношении ρ_3/ρ_6 . В этом случае корреляции электронов усиливается при удалении их от ядра /что не лишено смысла, поскольку при этом кинетическая энергия убывает быстрее потенциальной/.

Вычисление $\bar{H}$ может быть выполнено непосредственно в координатах /4/ [4]. Окончательно находим:

$$\bar{H} = \bar{T} + \bar{U} + \bar{I}; \qquad /5/$$

$$\bar{T}=\frac{1}{A}\int_0^\infty ds\int_0^s \{uw(\Phi_u^2+\Phi_s^2)+2sW\Phi_u\Phi_s+ \qquad /6/$$

$$+4\exp(2\Phi)[u(s^2 j_2-j_4)+\Phi_u(s^2-u^2)(\rho_7 j_2+j_4)]\}\,du;$$

$$\bar{U}=-\frac{4Z}{A}\int_0^\infty s\,ds\int_0^s u(\rho_7^2 u+2\rho_7 j_2+j_4)\exp(2\varphi)\,du; \qquad /7/$$

$$\bar{I}=\frac{1}{A}\int_0^\infty ds\int_0^s w\,du, \qquad A=\int_0^\infty ds\int_0^s wu\,du. \qquad /8/$$

Здесь

$$W=e^{2\Phi}\left(\frac{2}{3}\rho_7^2 u^3+\frac{4}{15}\rho_7 u^5+\frac{2}{35}u^7\right); \qquad /9/$$

$$w=e^{2\Phi}[\rho_7^2(s^2u-j_2)+2\rho_7(j_2s^2-j_4)+j_4s^2-j_6]; \qquad /10/$$

$$\Phi_u=\frac{\rho_3}{\rho_6+s}+\rho_4u+\rho_5s, \quad \Phi_s=\rho_1+\rho_2s-\frac{\rho_3u}{(\rho_6+s)^2}+\rho_5u; \qquad /11/$$

$$j_k=u^{k+1}/(k+1). \qquad /12/$$

Полученное выражение для $\bar{H}$ сохранит силу, если Φ будет произвольной функцией переменных s, u; изменятся лишь выражения /11/ для ее производных.

Минимизируем функцию $\bar{H}(\rho_1, \dots, \rho_7)$, заданную формулами /5/-/12/. Для того чтобы сопоставить по эффективности объединенный метод с методом Коши и методом поиска, проведем минимизацию тремя методами /приведенный в приложении алгоритм может переходить в любой из них/. Развитие итерационного процесса зависит от выбора начальной точки. При достаточно разнообразном наборе начальных условий точность минимизации /по энергии/* как функция номера итерации изобразится полосой /рис. 2/. Более узкая нижняя полоса соответствует объединенному алгоритму /при оптимальной степени ортогональности 0,6/, а более широкая - относится одновременно к методу Коши и методу поиска, обладающим примерно одинаковой скоростью сходимости. Видно, что после нескольких итераций объединенный метод обеспечивает более высокую /примерно на

---

* Точность минимизации определяется как $(\bar{H}_n-\bar{H}_\infty)/\bar{H}_\infty$, где n - номер итерации, причем $\bar{H}_\infty$ вычисляется объединенным методом с абсолютной ошибкой не более 10^{-5} /значения $\bar{H}_\infty$, вычисленные при нескольких разных начальных условиях, совпали между собой/.

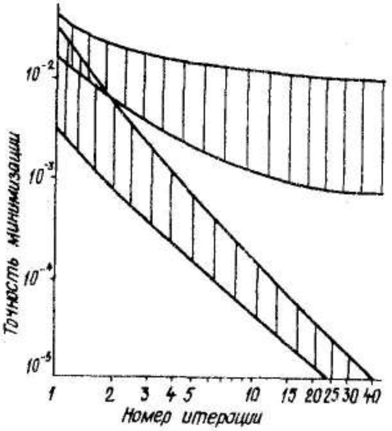


Рис.2.

два порядка/ точность минимизации, чем "составляющие" методы.

Результаты машинного расчета приведены далее.

2. Разные аппроксимации волновой функции и их сопоставление. Для оценки точности волновой функции, полученной вариационным методом, следует сопоставить различные ее аппроксимации. Однако такое сопоставление имеет смысл лишь при условии

$$\Delta_m \ll \Delta_\psi , \qquad /13/$$

где Δ_m - ошибка минимального значения $\bar{H}$, связанная с неточно выполненной минимизацией заданной функции $\bar{H}(p_1, \ldots, p_l)$, а Δ_ψ - ошибка вариационного метода, связанная с выбором пробной функции при точно выполненной минимизации. При условии /13/ различие двух аппроксимаций обусловлено разным смыслом пробных функций; если же $\Delta_m \gtrsim \Delta_\psi$, то аппроксимации различаются из-за незаконченного процесса минимизации, и сопоставление их не представляет интереса.

В нашем примере ошибка минимизации, выполненной объединенным методом / $\Delta_m \sim 10^{-3}$ % / мала по сравнению с $\Delta_\psi = 0{,}024$ % /пробной функции /3/ соответствует $\bar{H}_{min} = -2{,}9028$, а точное значение энергии составляет -2,9036/. Таким образом, при использовании объединенного алгоритма неравенство /13/ хорошо выполняется, однако, оно совсем не выполняется для метода Коши или метода поиска, поскольку $\Delta_m \gtrsim 0{,}1$ %.

Итак, использование объединенного алгоритма позволяет сопоставлять различающиеся по смыслу аппроксимации волновой функции. Две такие аппроксимации - варианты А и Б, рассмотренные в предыдущем разделе - могут быть получены в рамках одной и той же пробной функции /3/. Для этого достаточно зафиксировать параметр $\rho_б$ равным нулю или бесконечности /алгоритм, приведенный в приложении, позволяет фиксировать любые параметры/. Однако мы получим две лучшие аппроксимации, варьируя все семь параметров, если окажется, что начальным условиям* $\rho_б = +0$ и $\rho_б = +\infty$ соответствуют разные локальные минимумы. В результате машинного расчета оказалось, что при указанных начальных условиях действительно достигаются два разных минимума $\bar{H}$, весьма близкие по энергии, но заметно различающиеся по положению /таблица/. В обоих случаях теорема вириала выполняется с хорошей точностью.

О погрешности полученных аппроксимаций волновой функции можно судить по различию соответствующих квантовомеханических средних, приведенных в таблице. Это различие составляет сотые или десятые доли процента /различие между значениями $\overline{r_1^2}$, составляющее 0,5%, наиболее велико/. Отсюда следует, что характерная погрешность волновой функции /3/ при наборах параметров, приведенных в таблице, не превышает 0,5%. Справедливость такой оценки подтверждается сопоставлением с результатами Хилерааса [5] / $\overline{r_{12}^{-1}} = 0,946$; $\bar{r}_{12} = 1,420$/ и значением $\overline{r^2} = 1,20$, полученным по экспериментальным данным о диамагнитной восприимчивости гелия.

<u>Алгоритм минимизации $\bar{H}$ по вариационным параметрам</u>. Алгоритм объединяет метод Коши /движение точки в направлении $-grad\bar{H}$/ и метод поиска - независимое движение по координатным осям. Для ускорения сходимости эти оси проектируются на подпространство, почти ортогональное градиенту; Б-й направляющий орт новых осей имеет проекции

$$Ф[Б,Л]=(\delta_{БЛ}-Ю\cdot Г[Б]Г[Л])(1+Ю(Ю-2)Г[Б]^2)^{-1/2} \quad . \qquad /14/$$

Здесь Г[Л] - проекции градиента, Ю - степень ортогональности /при Ю=1 орт /14/ ортогонален градиенту, при Ю = 0 новые оси совпадают со старыми/. Дополняя ЛО ортов вида /14/ нулевым направ-

---

* Начальные значения остальных параметров не влияют на результат.

Аппроксимация	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$П_6$	$П_7$
А	-I,7737	-0,03850	0,5086	-0,I298	0,09500	0,9802	II,585
В	-I,8854	0,02I0	39,680	-0,I290	0,03496	I28,57	II,690
Аппроксимация	$\bar{H}$	$\frac{\bar{U}+\bar{I}}{\bar{T}}$	$\overline{r_1^{-1}}$	$\overline{r_1}$	$\overline{r_1^{2}}$	$\overline{r_{12}^{-1}}$	$\overline{r_{12}}$
А	-2,90280	-2,0002I	I,688I	0,93035	I,2028	0,94757	I,4238
В	-2,90284	-I,9999I	I,6885	0,92977	I,I97I	0,94794	I,4222
Расхождение,	0,00I4	0,0I5	0,02	0,06	0,48	0,04	0,II

лением $-grad\ \bar{H}$, включаем в каждую итерацию последовательные движения точки в сторону минимума по осям Б = 0, I, ..., ЛО.

Для удобства сопоставлений алгоритм снабжен номером АЛГ и при АЛГ = -I переходит в метод Коши, а при АЛГ = I - в метод поиска; при АЛГ = 0 реализуется объединенный алгоритм.

Оптимальное значение Ю обычно близко к 0,6, но при сильно выраженной "овражной ситуации" /см. рис. I/, в частности, при очень большом числе параметров, может быть выбрано более близким к единице.

Если $\bar{H}$ имеет локальные минимумы, выбор между ними может зависеть от начальной точки ПО. Скорость же сходимости алгоритма практически не зависит от начальной точки ПО и начальных интервалов поиска Д, которые максимально расширяются в процессе итераций. Для того чтобы зафиксировать на протяжении всего итерационного процесса один или несколько параметров П[Л], достаточно положить соответствующие начальные значения Д[Л] равными нулю.

Приведем текст алгоритма, для удобства пояснений разбивая его на блоки /их номера в программу не включаются/.

```
    I. begin real    Ю, ГГ, Э, Э0, Ж, З, ЗЗ, З2, АЛГ; in-
teger Б, Л, ЛО, Ш, Ь, ЛI, Л2; real ...; integer...; read  /Ю,
ЛО, АЛГ/; read  / ... /; ГГ:=30;
    begin array    Г, П, ПО [I:ЛО], Д[0:ЛО], Ф[0:ЛО, I:ЛО];
switch  Я:=ЯI, Я2, Я3, Я4; read  /ПО, Д/; Ш:=0;
    ЛI:= if   АЛГ > 0 then   I  else   0; Л2:= if АЛГ < 0 then
0 else ЛО; for   Л:=I step   I until   ЛО do П[Л]:= ПО[Л];
Ь:=I; do П; ЯI: Э0:= Э;
    2. ШАГ: if   АЛГ > 0 then  begin for   Б:=I step  I
until  ЛО do for   Л:=I step   I until   ЛО do Ф[Б, Л] := if
Л=Б then  I else   0; go to   Ц7; end;
    3. ЦI: Л:=I; Ц4: Ж:= Д[Л] /ГГ; if  Ж=0 then begin  Г[Л]:=0;
go to   Ц9; end;
    П[Л] := ПО[Л] + Ж; Ь:=4; go to     Ц; Я4: Г[Л]:=/Э-Э0/ /Ж;
П[Л]:=ПО[Л]; Ц9: Л:=Л+I; if  Л ≤ ЛО then go to   Ц4;
    Ж:=0; for   Л:=I step   I until   ЛО do   Ж:=Ж + Г[Л] ↑ 2;
Ж:=sqrt  /Ж/; for   Л:=I step  I until   ЛО do Г[Л]:=Г[Л]/Ж;
    4. for   Л:=I step   I until   ЛО do begin    Ф[0,Л]:=Г[Л];
for  Б:=I step I until  ЛО do  begin Ж:= if Б = Л then I else 0;
Ф[Б,Л]:=/Ж-Ю × Г[Б] × Г[Л]/ / sqrt  /I+Ю×/Ю-2/ x Г[Б] ↑ 2/;end ;end;
```

```
5. Ц7: Б:=ДI; if Б=0 then begin З:=-I; go to Ц8; end;
Ц2: Ж:= Д[Б]/ТТ; if Ж=0 then go to Ц0;
for Д:=I step I until Д0 do П[Д]:=П0[Д]+Ф[Б,Д] x Ж;
Ь:=2; go to Ц;
Я2: if Э=Э0 then begin ЗЗ:=0; go to Ц10; end ;
З:= if Э < Э0 then I else -I; Ц8: ЗЗ:=0; Ц3: for Д:=I
step I until Д0 do П[Д]:= П0[Д] +З × Ф[Б,Д] × Д[Б];
Ь:=3; go to Ц;
Я3: if Э > Э0   ЗЗ ≤ 0 then begin if Д[Б] < Д[0]
then begin ЗЗ:=0; go to Ц10; end;
ЗЗ:=-I; Д[Б]:=Д[Б] /2; go to Ц3; end;
if Э < Э0Д∧ЗЗ ≯ 0 then begin ЗЗ:=I; З2:=Э; Д[Б]:=2×Д[Б];
if Ш=0 ∨ АЛГ < 0 then Э0:=Э; go to Ц3; end;
Ц10: if ЗЗ=0 then Э:=Э0 else Э0:=if ЗЗ > 0 then З2
else Э;
for Д:=I step I until Д0 do begin if ЗЗ > 0 then
П[Д]:=П0[Д]+З × Ф[Б,Д] × Д[Б]/2; if ЗЗ=0 then П[Д]:=П0[Д];
П0[Д]:=П[Д]; end;
Ц0: Б:=Б+I; if Б ≤ Д2 then go to Ц2;
6. print /Ш, Э, П0, Д/; Ш:=Ш+I;
for Д:=ДI step I until Д0 do Д[Д]:=if Д ≤ Д2 then
I.5 × Д[Д] else Д[0];
go to ШАГ;
7. Ц: Э:=Н̄/П[I],...,П[Д0]/;
go to Я[Ь];
end; stop end
```

Поясним содержание блоков алгоритма.

1. Описываются и вводятся величины: Д0 – число переменных, АЛГ – номер алгоритма, Ю – степень ортогональности, Ш – номер выполняемой итерации, П[Д] – независимые переменные, П0[Д] – их начальные значения, Д[Д] и Д[Д]/ТТ – интервалы их изменения при поиске минимума и дифференцирования $\bar{H}$, Б – номер оси, по которой смещается точка /ДI ≤ Б ≤ Д2; при АЛГ = -I ДI = Д2 = 0, при АЛГ = I ДI = I, Д2 = Д0, при АЛГ = 0 ДI = 0, Д2 = Д0/. Вместо многоточий следует перечислить обозначения, используемые в блоке 7 при вычислении $\bar{H}$.

2. Начало итерации. При АЛГ = I, по определению, Ф[Б,Д] = $= \delta_{БД}$.

3. Вычисляется орт Г[Д] в направлении градиента $\bar{H}$.

4. Орты спроектированных осей вычисляются по формуле /П.1/.

5. Точка последовательно смещается по осям в сторону минимума на интервал, сформированный к концу предыдущей итерации. Если значение функции в смещенной точке Э ≡ Й больше исходного значения Э0, интервал дробится, пока не станет Э < Э0. Если же после первого смещения Э < Э0, интервал удваивается до тех пор, пока остается Э < Э0. Такое максимальное расширение интервала поиска заметно ускоряет сходимость алгоритма. /При АЛГ = 0, в соответствии с алгоритмом Коши, расширение прекращается в момент достижения минимума/. Несколько громоздкий вид блока 5 связан с введением логического переключателя, предотвращающего ненужное чередование расширений и дроблений.

6. После каждой итерации печатаются координаты точки и интервалы смещений. Последние дополнительно расширяются /в 1,5 раза/ для ускорения сходимости.

7. Вычисляется $\bar{H}$ как функция параметров П/1/,..., П/10/. При этом, во избежание перекрытия обозначений с другими блоками, следует пользоваться любыми буквами, кроме встречающихся только в русском алфавите /Б, Г, Д.../. Результат обозначается буквой Э.

1. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. - М.: Мир, 1978. - 205 с.

2. Fletcher R., Reevs C.M. Minimisation og function by conjugated gradients method. - Computer J., 1964, 7, N 1, p. 149-154.

3. Fletcher R., Powell M.J.D. Minimisation by method of rapidly converging descent. - Computer J., 1963, 6, N 1, p. 163 - 168.

4. Гомбаш П. Проблема многих частиц в квантовой механике. - М.: Изд-во иностр. лит., 1953. - 206 с.

5. Марч Н., Янг У., Сампантхар С. Проблема многих тел в квантовой механике. - М.: Мир, 1969. - 360 с.

УДК 517.55

А.Л.Ронкин

О КВАЗИПОЛИНОМАХ

Квазиполиномом от переменного t /где t - вещественно или комплексно/ называется конечная сумма вида $\sum P_k(t)e^{\lambda_k t}$, где $P_k(t)$- полиномы, λ_k - комплексные числа. Квазиполиномы часто встречаются в различных областях математического анализа.

Квазиполиномом от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ называется конечная сумма вида

$$\sum_k P_k(y_1, \ldots, y_n) \exp(b_k^1 y_1 + \ldots + b_k^n y_n).$$

Здесь $P_k(y_1, \ldots, y_n)$ – полиномы, λ_k – комплексные числа. В зависимости от того, комплексны или вещественны y_i, говорят о квазиполиномах в $\mathbb{C}^n$ или в $\mathbb{R}^n$. Очевидно, что квазиполином от n переменных является квазиполиномом от каждой переменной при фиксированных остальных.

Пример функции $\exp(x_1 x_2)$ показывает, что функция, которая по каждой переменной является квазиполиномом, может не быть квазиполиномом по совокупности переменных.

Естественно, возникает вопрос каков общий вид функций, являющихся квазиполиномами по каждой переменной при фиксированных значениях остальных переменных, а также при каких дополнительных условиях указанные функции будут квазиполиномами по совокупности переменных? Эта задача решается нами без каких-либо априорных ограничений на рассматриваемые функции и характера зависимости от фиксированных переменных коэффициентов и показателей соответствующих квазиполиномов.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Если функция $f(y_1, \ldots, y_n): \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} (\mathbb{C}^n \to \mathbb{C})$ по каждой переменной y_i при любых фиксированных значениях остальных переменных является квазиполиномом, то она имеет вид

$$f(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{\ell} P_k(y_1, \ldots, y_n) \exp \lambda_k(y_1, \ldots, y_n), \qquad /A/$$

где $P_k(y_1, \ldots, y_n)$ – полиномы, $\lambda_k(y_1, \ldots, y_n)$ – полиномы линейные по каждой переменной.

Эта теорема показывает, что приведенный выше пример функции $\exp(x_1 x_2)$ является для рассматриваемой ситуации в некотором смысле типичным.

Доказательству теоремы 1 посвящены п. 1 и 2, при этом в п. 1 излагаются некоторые вспомогательные утверждения, из которых отметим здесь теорему 2, дающую критерий принадлежности функции одного переменного классу квазиполиномов. Собственно доказательство теоремы 1 содержится в п. 2.

Теорема 1 представляет удобный аппарат исследования, позволяя сводить решение ряда задач для квазиполиномов от нескольких переменных к соответствующим утверждениям для случая одного переменного. На этом пути нами получены для случая многих переменных аналоги известных теорем Ритта [1] и Шилдса [2] о делении квазиполиномов, а также теоремы Сельберга [3] об извлечении корня из квазиполинома. При этом наряду с квазиполиномами от нескольких переменных рассматриваются и более общие классы функций. Изложению этих результатов посвящен п. 4. Заметим, что недавно для квазиполиномов, многомерные аналоги теоремы Ритта были получены другими методами в работах Аванесяна и Гию [4], Беренштейна и Достала [5].

В п. 3 рассматриваются некоторые спецификации теоремы I. Во-первых, относительно функции f, фигурирующей в теореме I, предполагается заранее, что она допускает продолжение в $\mathbb{C}^n$ как целая функция. Показано, что в этом случае для справедливости утверждения теоремы I достаточно потребовать, чтобы функция $f(y_1^0, \ldots, y_{i-1}^0, y_i, y_{i+1}^0, \ldots, y_n^0)$ была квазиполиномом y_i $(i=1,\ldots,n)$ не при всех фиксированных значениях переменных $y_1^0, \ldots, y_{i-1}^0$, $y_{i+1}^0, \ldots, y_n^0$, а лишь при надлежащих некоторым множествам. Во-вторых, устанавливается вид функций $f(y_1, \ldots, y_n)$, которые при фиксированных значениях p переменных, как функции остальных $n-p$ переменных, имеют вид /A/.

I. Вспомогательные утверждения. Введем ряд обозначений и докажем некоторые утверждения, используемые затем при доказательстве основной теоремы.

Обозначим через $S_p^{0,l}(\mathbb{R})(S_p^{0,l}(\mathbb{C}))$ класс функций от вещественных /комплексных/ переменных $y_1, \ldots, y_p$, представимых в виде

$$\sum_i P_i(y_1, \ldots, y_n) \exp Q_i(y_1, \ldots, y_n),$$

где P_j и Q_j – полиномы, причем полиномы Q_j – имеют первую степень по каждой переменной, а по совокупности переменных имеют степень не выше l. Через $S_n^{p,l}(\mathbb{R})(S_n^{p,l}(\mathbb{C}))$ обозначим класс тех функций от n вещественных /комплексных/ переменных, которые при любом фиксированном наборе любых p из n переменных, как функции оставшихся $n-p$ переменных, принадлежат классу $S_{n-p}^{0,l}$. Заметим, что $S_1^{0,1}(\mathbb{C})$ – класс квазиполиномов одной комплексной переменной, $S_n^{0,1}(\mathbb{R})$ – класс квазиполиномов от n вещественных переменных. Очевидно также, что

$$S_n^{\rho,l} \subset S_n^{\rho+1,l}, \quad S_n^{\rho,l} \subset S_n^{\rho,l+1}.$$

С помощью введенных обозначений теорема I теперь может быть сформулирована следующим образом:

$$f \in S_n^{n-1,1}(R)(S_n^{n-1,1}(C)) \Rightarrow f \in S_n^{0,n}(R)(S_n^{0,n}(C)).$$

Для сокращения записи далее будем пользоваться следующими обозначениями:

$$z=(z_1,\dots,z_n)\in C^n;\quad \hat{z}_j=(z_1,\dots,z_{j-1},z_{j+1},\dots,z_n)\in C^{n-1};$$
$$(z_j;\hat{z}_j)=(z_1,\dots,z_j,\dots,z_n)=z;\quad x=(x_1,\dots,x_n);\quad y=(y_1,\dots,y_n).$$

При этом всегда в дальнейшем предполагается, что

$$z\in C^n,\quad x\in R^n,\quad \zeta\in C,\quad t\in R.$$

Введем еще одно понятие, относящееся к квазиполиномам и существенно используемое в дальнейшем. Условимся квазиполином f одного переменного u /комплексного или вещественного/ называть квазиполиномом степени N, если

$$f(u)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=0}^{k_j} c_{j,m}\, u^m e^{\lambda_j u},$$

где $c_{j,k_j}\neq 0,\quad \lambda_j\neq\lambda_i$ при $i\neq j$, и при этом

$$\sum_{j=1}^{l}(k_j+1)=N.$$

<u>Теорема</u> 2. Для того чтобы целая функция $f(\zeta)$ была квазиполиномом степени N, необходимо и достаточно, чтобы*

---

* Можно доказать, что теорема 2 остается в силе при замене фигурирующих в ней определителей определителями вида

$$\begin{vmatrix} f(\zeta) & f(\zeta+w) & \dots & f(\zeta+Nw) \\ f(\zeta+w) & f(\zeta+2w) & \dots & f(\zeta+(N+1)w) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(\zeta+Nw) & f(\zeta+(N+1)w) & \dots & f(\zeta+2Nw) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} f(\zeta) & f'(\zeta) & \dots & f^{(N)}(\zeta) \\ f'(\zeta) & f''(\zeta) & \dots & f^{(N+1)}(\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(N)}(\zeta) & f^{(N+1)}(\zeta) & \dots & f^{(2N)}(\zeta) \end{vmatrix} \equiv 0,$$

а

$$\begin{vmatrix} f(\zeta) & f'(\zeta) & \dots & f^{(N-1)}(\zeta) \\ f'(\zeta) & f''(\zeta) & \dots & f^{(N)}(\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(N-1)}(\zeta) & f^{(N)}(\zeta) & \dots & f^{(2N-2)}(\zeta) \end{vmatrix} \not\equiv 0.$$

<u>Доказательство</u>. Обозначим

$$V_N(\zeta; f) = \begin{vmatrix} f(\zeta) & f'(\zeta) & \dots & f^{(N)}(\zeta) \\ f'(\zeta) & f''(\zeta) & \dots & f^{(N+1)}(\zeta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(N)}(\zeta) & f^{(N+1)}(\zeta) & \dots & f^{(2N)}(\zeta) \end{vmatrix} \qquad /1/$$

и предложим, что $V_N(\zeta; f) \equiv 0$. Тогда, как известно /см., например, [6, с. 108]/, строки определителя /1/ линейно зависимы, т.е. при некоторых постоянных c_i

$$\sum_{i=0}^{N} c_i f^{(i)}(\zeta) \equiv 0. \qquad /2/$$

Отсюда немедленно следует, что функция $f(\zeta)$ - решение дифференциального уравнения /2/ - является квазиполиномом степени не более чем N .

Если же функция f является квазиполиномом степени не выше N , а именно

$$f(\zeta) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{m=0}^{k_j} d_{j,m} \zeta^m e^{\lambda_j \zeta},$$

где $\lambda_i \neq \lambda_j$, при $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{l} (k_i + 1) = N$, то она удовлетворяет дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=0}^{N} c_j f^{(j)}(\zeta)=0.$$

При этом числа c_j равны соответствующим коэффициентам полинома $\prod_{i=1}^{l}(\gamma-\lambda_i)^{k_j+1}$. Продифференцировав равенство /3/ α раз, получим

$$\sum_{j=0}^{N} c_j f^{(j+\alpha)}(\zeta)=0.$$

Откуда следует, что столбцы детерминанта /I/ линейно зависимы, и значит $V_N(\zeta;f)\equiv 0.$

Таким образом, для того чтобы целая функция $f(\zeta)$ была квазиполиномом не более чем N-й степени, необходимо и достаточно, чтобы $V_N(\zeta;f)\equiv 0.$ Отсюда, как очевидное следствие, получаем утверждение доказываемой теоремы.

Лемма I.I. Если

$$f(\zeta)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=0}^{k_j} c_{i,m}\zeta^m e^{\lambda_j\zeta},$$

где $c_{i,k_i}\neq 0,\ i=1,\dots,l,\ \sum_{i=1}^{l}(k_i+1)=N,\ \lambda_i\neq\lambda_j$ при $i\neq j$, то

$$V_{N-1}(\zeta;f)=V_{N-1}(0;f)\exp[(\sum_{j=1}^{l}(k_j-1)\lambda_j)\zeta].$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что всякий квазиполином степени N является решением дифференциального уравнения типа /3/ и из теоремы Лиувилля - Остроградского.

Лемма I.2. Пусть в некотором поликруге $V^n\subset\mathbb{C}^n$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{m=0}^{k_i} c_{i,m}(\hat z_1)z_1^m e^{\lambda_i(\hat z_1)z_1},$$

где $c_{i,m}(\hat z_1),\ \lambda_i(\hat z_1)$ - аналитические функции переменных $z_2,\dots,z_n$. Тогда для каждого i либо $\sum_{m=0}^{k_i} c_{i,m}(\hat z_1)z_1^m\equiv 0$, либо найдется такой индекс $j\,(j\neq i)$, что $\lambda_i(\hat z_1)\equiv\lambda_j(\hat z_1)$.

Доказательство этой леммы мы опускаем ввиду его очевидности.

Лемма I.3. Пусть $f(z_N;\hat z_1)$ - аналитическая функция в поликруге $W=W_1\times\dots\times W_n$. Пусть далее $V_N(z_1;f(z;\hat z_1))\equiv 0.$

Тогда на некотором открытом подмножестве $W' \subset W$ имеет место представление

$$f(z)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=0}^{k_j} c_{j,m}(\hat{z}_1)\, z_1^m e^{\lambda_j(\hat{z}_1)z_1},$$

где $c_{i,m}(\hat{z}_1)$, $\lambda_j(\hat{z}_1)$ – аналитические функции, причем

$$\lambda_i(\hat{z}_1)\not\equiv\lambda_j(\hat{z}_1), \quad c_{i,k_i}(\hat{z}_1)\not\equiv 0 \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{l}(k_i+1)\le N.$$

Доказательство. Не уменьшая общности будем считать, что $V_{N-1}(z_1; f(z_1;\hat{z}_1))\not\equiv 0$. Тогда, как было замечено при доказательстве теоремы 2, функция $f(z_1;\hat{z}_1)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{l=0}^{N} d_l \frac{\partial^l f}{(\partial z_1)^l}=0$$

с коэффициентами d_l, независящими от z_1 и при этом $d_i=\frac{A_i}{A_N}$, где A_i – алгебраические дополнения элементов первой строки матрицы

$$\begin{pmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^N f}{(\partial z_1)^N}\\ \frac{\partial f}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 f}{(\partial z_1)^2} & \cdots & \frac{\partial^{N+1} f}{(\partial z_1)^{N+1}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^N f}{(\partial z_1)^N} & \frac{\partial^{N+1} f}{(\partial z_1)^{N+1}} & \cdots & \frac{\partial^{2N} f}{(\partial z_1)^{2N}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, функции $d_i=d_i(\hat{z}_1)$ аналитичны на некотором открытом подмножестве множества $W_2\times\ldots\times W_n$. При каждом фиксированном $\hat{z}_1$ функция $f(z_1;\hat{z}_1)$ является квазиполиномом вида

$$f(z_1;\hat{z}_1)=\sum_{i=0}^{l}\sum_{m=0}^{k_i} c_{i,m}\, z_1^m e^{\lambda_i z_1},$$

где показатели λ_i являются различными корнями кратности k_i+1 характеристического полинома $\Theta(\lambda)=\sum_{i=0}^{N} d_i(\hat{z}_1)\lambda^i$. Разложим полином $\Theta(\lambda)$ на неприводимые множители

$$\Theta(\lambda)=\Theta_1^{r_1}(\lambda)\times\ldots\times\Theta_p^{r_p}(\lambda).$$

Коэффициенты полиномов $\Theta_i(\lambda)$ – аналитические функции от $\hat{z}_1$. Рассмотрим полином $\Theta^*(\lambda)=\Theta_1(\lambda)\times\ldots\times\Theta_p(\lambda)$. Дискриминант этого полинома не равен тождественно нулю и, следовательно, его нулевое множество W^* является аналитическим множеством размерности $n-2$. Таким образом, дискриминантное множество W^* полинома $\Theta^*(\lambda)$ имеет аналитическую коразмерность 2. В окрестности каждой точки $\hat{z}_1$, лежащей вне W^*, уравнение $\Theta_i(\lambda)=0$ имеет h_i $(h_i=deg\,\Theta_i(\lambda))$ однозначных аналитических решений.

Таким образом, уравнение $\Theta(\lambda)=0$ имеет на множестве $W^*=W_2\times\ldots\times W_n\setminus W^*$ ровно l различных аналитических решений $\lambda_j(\hat{z}_1)$. Заметим, что $\lambda_j(\hat{z}_1)=\lambda_i(\hat{z}_1)$ на ${}^*W$, если $j\neq i$ /дискриминант полинома $\Theta^*(\lambda)$ отличен от нуля на ${}^*W$ /. Отсюда следует, что на $W_1\times{}^*W$ выполняется равенство

$$f(z_1;\hat{z}_1)=\sum_{i=1}^{l}\sum_{m=0}^{k_i}c_{i,m}(\hat{z}_1)z_1^m e^{\lambda_i(\hat{z}_1)z_1}. \qquad /4/$$

Коэффициент $c_{1,k_1}(\hat{z}_1)$ является аналитической функцией на ${}^*W$, так как аналитической является функция

$$\Phi(\hat{z}_1)=k_1!\,c_{1,k_1}(\hat{z}_1)\times\prod_{j=2}^{l}\left(\lambda_1(\hat{z}_1)-\lambda_j(\hat{z}_1)\right)^{k_j+1},$$

вычисляемая, как нетрудно видеть из /4/, по формуле

$$\Phi(\hat{z}_1)=\frac{\partial^{k_1}}{(\partial z_1)^{k_1}}\left(e^{(\lambda_2(\hat{z}_1)-\lambda_1(\hat{z}_1))z_1}\frac{\partial^{k_2+1}}{(\partial z_1)^{k_2+1}}\left(e^{(\lambda_3(\hat{z}_1)-\lambda_2(\hat{z}_1))z_1}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ldots\times\frac{\partial^{k_l+1}}{(\partial z_1)^{k_l+1}}\left(e^{-\lambda_l(\hat{z}_1)z_1}f(z_1;\hat{z}_1)\ldots\right)\right)\right).$$

Рассматривая подобным образом представление на $W_1\times{}^*W$ функции $f(z_1;\hat{z}_1)-c_{1;k_1}(z_1)z_1^{k_1}e^{\lambda_1(z_1)z_1}$, прийдем к выводу, что функция $c_{1,k_1-1}(\hat{z}_1)$ аналитична на $^*w$. Аналогично получаем, что все функции $c_{1,m}(\hat{z}_1)$ аналитичны на $^*w$. Лемма доказана.

<u>Лемма I.4</u>. Если числа $c_{i,j}$, $i,j=1,\dots,k$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{j=1}^{k} c_{i,j}=1, \quad c_{i,j}\geqslant 0, \quad c_{i,i}=0,$$

то любое решение $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ системы уравнений

$$\lambda_j=\sum_{j=1}^{k} c_{j,i}\lambda_i \qquad j=1,2,\dots,k \qquad /5/$$

имеет не менее двух равных компонент.

Доказательство этой леммы проведем индукцией по числу уравнений. Если $k=2$, то рассматриваемая система имеет вид

$$\lambda_1=\lambda_2,$$

$$\lambda_2=\lambda_1.$$

В этом случае утверждение леммы очевидно.

Предположим теперь, что утверждение леммы справедливо для $k=n-1$ и рассмотрим систему

$$\lambda_1=\sum_{j=1}^{n} c_{1,j}\lambda_j,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\lambda_n=\sum_{j=1}^{n} c_{n,j}\lambda_j.$$

Подставим в i-е уравнение $/ i\geqslant 2/$ этой системы вместо λ_1 сумму $\sum_{j=1}^{n} c_{1,j}\lambda_j$. Получим тогда уравнение

$$\lambda_i=\sum_{j=2}^{n} \tilde{c}_{i,j}\lambda_j, \qquad /6/$$

коэффициенты которого, как легко видеть, удовлетворяют условиям

$$\tilde{c}_{i,j}\geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{i,j}=1.$$

Заметим, что $\tilde{c}_{i,i}=c_{1,i}$.

Возможны следующие случаи.

I. $\tilde{c}_{1,1} = 1$. Тогда уравнение /6/ преобразуем к виду

$$\lambda_1 = \sum_{j=2}^{n} c^*_{1,j} \lambda_j ,$$

где $c^*_{1,1} = 0$, а $c^*_{1,j} = \dfrac{\tilde{c}_{1,j}}{1 - \tilde{c}_{1,1}}$. Очевидно, что $\tilde{c}_{1,j} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=2}^{n} c^*_{1,j} = 1$. Поэтому система /5/ эквивалентна системе

$$\lambda_1 = \sum_{j=1}^{n} c_{1,j} \lambda_j ,$$

$$\lambda_2 = \sum_{j=2}^{n} c^*_{2,j} \lambda_j ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_n = \sum_{j=2}^{n} c^*_{n,j} \lambda_j .$$

Последние $n-1$ уравнений этой системы образуют систему /относительно $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ /, удовлетворяющую условию леммы, и согласно предположению индукции существуют такие индексы p, q ($p \neq q$, $2 \leq p \leq n$, $2 \leq q \leq n$), что $\lambda_p = \lambda_q$.

2. $\tilde{c}_{1,1} = 1$. В этом случае в системе /5/ первое уравнение имеет вид $\lambda_1 = \lambda_1$. Лемма доказана.

В определении классов $S_n^{n-1,1}(\mathbb{R})$ и $S_n^{n-1,1}(\mathbb{C})$ не содержится никаких априорных суждений о свойствах фигурирующих там функций относительно совокупности всех переменных. Однако можно показать, что функции из этих классов непрерывны по совокупности переменных и более того имеет место

<u>Предложение</u> I. I. Если $f(z) \in S_n^{n-1,1}(\mathbb{C})$, то $f(z)$ – целая функция.

2. Если $f(x) \in S_n^{n-1,1}(\mathbb{R})$, то существует такая целая функция $F_f(z)$, что $F_f(x) = f(x)$.

Утверждение /I/ следует из теоремы Гартогса, а утверждение /2/ – из теоремы Сичака /7/ /см. также /8//, о сепаратно аналитических функциях.

Рассмотрим функцию $f(x) \in S_n^{n-1,1}(\mathbb{R})$. При каждом фиксированном $\hat{x}_i$ функция $\varphi_{\hat{x}_i}(x_i) = f(x)$ как функция переменного x_i является квазиполиномом некоторой степени $k(\hat{x}_i)$ и, согласно теореме 2, $V_{k(\hat{x}_i)}(x_i\,;\, f(x)) = 0$ для любого x_i. Обозначим через $A_{k,i}$ множество тех $\hat{x}_i$, для которых $V_k(x_i; f(x)) \equiv 0$. Очевидно, что $\bigcup\limits_k A_{k,i} = \mathbb{R}^{n-1}$ и так как функция $f(x)$ допускает голоморфное продолжение в $\mathbb{C}^n$, то каждое из множеств $A_{k,i}$ замкнуто. По теореме Бэра о категориях найдется такое $k(i)$, что $A_{k(i),i}$ плотно в некотором шаре $B\subset \mathbb{R}^{n-1}$, а поскольку $A_{k(i),i}$ – замкнуто, то имеет место включение $B\subset A_{k(i),i}$. Таким образом, $V_{k(i)}\times$ $\times(x_i;\ f_f(x))\equiv 0$, когда $\hat{x}_i\in B$, $x_i\in\mathbb{R}$, откуда немедленно следует, что тождественно равна нулю функция $V_{k(i)}(z_i;\ F_f(z))$. И стало быть, по теореме 2, $F_f(z)\in S_n^{n-1,1}(\mathbb{C})$. Тем самым доказано следующее

<u>Предложение 2</u>. Если функция $f(x)$ принадлежит классу $S_n^{n-1,1}(\mathbb{R})$, то она допускает голоморфное в $\mathbb{C}^n$ продолжение $F_f(z)$, принадлежащее классу $S_n^{n-1,1}(\mathbb{C})$ такое, что при некоторых постоянных $k(1),\dots,k(n)$ $V_{k(i)}(z_i;\ F_f(z))\equiv 0$.

Из этого предложения, в частности, вытекает, что справедливость теоремы I для функций класса $S_n^{n-1,1}(\mathbb{C})$ влечет за собою справедливость этой теоремы для функций класса $S_n^{n-1,1}(\mathbb{R})$. Поэтому в дальнейшем теорема I будет доказываться для функций класса $S_n^{n-1,1}(\mathbb{C})$, причем в обозначениях класса будет опущен символ $\mathbb{C}^n$.

В заключение этого параграфа отметим, что из предложения 2 и леммы I.3 как следствие получается

<u>Предложение 3.</u> Если $f\in S_n^{n-1,1}$, то при заданном i в некотором поликруге $W=W_1\times\dots\times W_n$ справедливо представление

$$f(z)=\sum_{k=1}^{l(i)}\sum_{m=0}^{r(k,i)} c_{k,m,i}(\hat{z}_i)\,z_i^m e^{\lambda_{k,i}(\hat{z}_i)z_i},$$

где функции $c_{k,m,i}(\hat{z}_i)$, $\lambda_{k,i}(\hat{z}_i)$ голоморфны в области $W_1\times\dots\times W_{i-1}\times W_{i+1}\times\dots\times W_n$.

2. <u>Доказательство теоремы I</u>. Оно будет проведено поэтапно переходом от наиболее простых функций класса $S_n^{n-1,1}$ к более сложным с завершающим рассмотрением произвольных функций класса $S_n^{n-1,1}$.

<u>Лемма 2.I</u>. Пусть функция $f(z_1,\ z_2)$ аналитична в области $W_1\times W_2\subset\mathbb{C}^2$ и допускает в ней два представления

$$f(z_1,z_2)=b(z_2)e^{\mu(z_2)z_1}; \qquad /7/$$

$$f(z_1, z_2) = \left(\sum_{j=0}^{l} c_j(z_1)\, z_2^j\right) e^{a(z_1) z_2}, \qquad /8/$$

где функции $b(z_2)$, $\mu(z_2)$, аналитичны в области W_2, а функции $c_0(z_1), \dots, c_l(z_1)$, $a(z_1)$ – аналитичны в области W_1. Тогда $a(z_1)$ – линейная функция.

<u>Доказательство</u>. Для упрощения записи введем обозначения

$$\rho = \rho(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{l} c_j(z_1)\, z_2^j,$$

$$A = A(z_1, z_2) = a(z_1)\, z_2 .$$

Тогда равенство /2/ записывается следующим образом:

$$f(z_1, z_2) = \rho(z_1, z_2)\, e^{A(z_1, z_2)}. \qquad /9/$$

Так как функция $f(z_1, z_2)$ при фиксированном $z_2 \in W_2$ является квазиполиномом первой степени, то, согласно теореме 2, при $(z_1, z_2) \in W_1 \times W_2$ имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} f & f'_{z_1} \\ f'_{z_1} & f''_{z_1 z_1} \end{vmatrix} = 0. \qquad /10/$$

Из представления /3/ следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial z_1} + \rho \frac{\partial A}{\partial z_1}\right) e^A,$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial z_1)^2} = \left[\frac{\partial^2 \rho}{(\partial z_1)^2} + 2\frac{\partial \rho}{\partial z_1}\frac{\partial A}{\partial z_1} + \rho\frac{\partial^2 A}{(\partial z_1)^2} + \rho\left(\frac{\partial A}{\partial z_1}\right)^2\right] e^A.$$

Подставив выражения для f, $\frac{\partial f}{\partial z_1}$, $\frac{\partial^2 f}{(\partial z_1)^2}$ в равенство /4/, получим

$$\begin{vmatrix} \rho e^A & \left(\frac{\partial \rho}{\partial z_1} + \rho \frac{\partial A}{\partial z_1}\right) e^A \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial z_1} + \rho \frac{\partial A}{\partial z_1}\right) e^A & \left[\frac{\partial^2 \rho}{(\partial z_1)^2} + 2\frac{\partial \rho}{\partial z_1}\frac{\partial A}{\partial z_1} + \rho\frac{\partial^2 A}{(\partial z_1)^2} + \rho\left(\frac{\partial A}{\partial z_1}\right)^2\right] e^A \end{vmatrix} = 0. \qquad /11/$$

Далее выполним в определителе /5/ следующие преобразования: разделим каждый элемент на функцию e^A, затем вычтем из второго столбца получившегося определителя первый умноженный на $\frac{\partial A}{\partial z_1}$

и, наконец, из второй строки вычтем первую, умноженную на $\frac{\partial A}{\partial z_1}$. При этом получим равенство

$$\begin{vmatrix} \rho & \frac{\partial \rho}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \rho}{\partial z_1} & \frac{\partial^2 \rho}{(\partial z_1)^2} + \rho \frac{\partial^2 A}{(\partial z_1)^2} \end{vmatrix} = 0,$$

а поскольку $\rho(z_1, z_2) = \sum_{j=0}^{l} c_j(z_1) z_2^j$, то

$$\left(\sum_{j=0}^{l} c_j(z_1) z_2^j\right)\left(\sum_{j=0}^{l} c_j''(z_1) z_2^j\right) + \left(\sum_{j=0}^{l} c_j(z_1) z_2^j\right)^2 \lambda''(z_1) z_2 - \left(\sum_{j=0}^{l} c_j'(z_1) z_2^j\right)^2 = 0. \qquad /12/$$

При фиксированном z_1, в правой части равенства /6/ стоит полином от z_2, старший коэффициент которого равен $c_l^2(z_1)\lambda''(z_1)$. Для выполнения равенства /6/ необходимо, чтобы коэффициенты полинома, стоящего в правой части этого равенства, были равны нулю. В частности, должно иметь место тождество

$$c_l^2(z_1)\lambda''(z_1) \equiv 0.$$

Не уменьшая общности можно считать, что $c_l(z_1) \not\equiv 0$. Поэтому $\lambda''(z_1) \equiv 0$. Следовательно, $\lambda(z_1)$ – линейная функция. Лемма доказана.

Л е м м а 2.2. Пусть функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в области $W_1 \times W_2 \subset \mathbb{C}^2$ и допускает в этой области два представления

$$f(z_1, z_2) = b(z_2) e^{\mu(z_2) z_1},$$

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{m=0}^{k_j} c_{j,m}(z_1) z_2^m e^{\lambda_j(z_1) z_2}, \qquad /13/$$

где функции $b(z_2)$, $\mu(z_2)$, $c_{j,m}(z_1)$, $\lambda_j(z_1)$ аналитичны в соответствующих областях. Причем $\lambda_i(z_1) \not\equiv \lambda_j(z_1)$, если $i \neq j$. Тогда функция $\mu(z_2)$ – линейна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не уменьшая общности можем считать, что $c_{j,k_j}(z_1^0) \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, l$. Тогда при фиксированном z_1^0 функция $f(z_1^0, z_2)$ является квазиполиномом от z_2 степени $x = \sum_{j=1}^{l} (k_j + 1)$. Согласно лемме I.I,

$$V_{Z-1}(z_2;f)=a(z_1)e^{\left[\sum_{j=1}^{l}(k_j+1)\lambda_j(z_1)\right]z_2} \qquad /14/$$

Очевидно, что $a(z_1)$ - аналитическая в w_1 функция. Из представления /7/ следует, что

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial z_2)^k}=\left(\sum_{j=0}^{k} d_{j,k}(z_2)\,z_1^j\right)e^{\mu(z_2)z_1},$$

где $d_{j,k}(z_2)$ - некоторые аналитические функции.

Делая соответствующую подстановку в $V_{Z-1}(z_2;f)$, получаем

$$V_{Z-1}(z_2;f)=\left(\sum_{j=0}^{(Z-1)^2} d_j^*(z_2)\,z_1^j\right)e^{Z\mu(z_2)z_1}, \qquad /15/$$

где $d_j^*(z_2)$ - аналитические функции. Далее, учитывая равенства /9/ и /10/, заключаем, согласно лемме 1.2, что $z\mu(z_2)$ - линейная функция, и, следовательно, $\mu(z_2)$ - линейная функция. Лемма доказана.

<u>Лемма 2.3</u>. Пусть функция $f(z_1, z_2)$ аналитична в области $w_1 \times w_2 \subset \mathbb{C}^2$ и допускает в этой области два представления

$$f(z_1, z_2)=\left(\sum_{j=0}^{r} b_j(z_2)\,z_1^j\right)e^{\mu(z_2)z_1},$$

$$f(z_1, z_2)=\sum_{j=1}^{l}\sum_{m=0}^{k_j} c_{j,m}(z_1)\,z_2^m\,e^{\lambda_j(z_1)z_2}, \qquad /16/$$

где функции $b_j(z_2)$, $\mu(z_2)$, $c_{j,m}(z_1)$, $\lambda_j(z_1)$ - аналитичны в соответствующих областях w_1 и w_2. Причем $\lambda_j(z_1) \neq \lambda_i(z_1)$, если $i \neq j$. Тогда функция $\mu(z_2)$ - линейна.

<u>Доказательство</u>. Не уменьшая общности считаем, что $b_r(z_2) \neq 0$. Поэтому при каждом фиксированном $z_2^0 \in w_2$ функция $f(z_1, z_2)$ является квазиполиномом степени $r+1$ от z_1. В этом случае, согласно лемме 1.1, функция $V_r(z_1; f(z_1, z_2))$ имеет вид

$$V_r(z_1; f(z_1, z_2))=b^*(z_2)e^{(r+1)\mu(z_2)z_1}, \qquad /17/$$

где, как нетрудно видеть, $\delta^*(z_2)$ – аналитическая функция.

Однако из представления /II/ следует, что

$$V_r(z_1; f(z_1, z_2)) = \sum_{j=1}^{p} \sum_{m=0}^{q_j} c^*_{j,m}(z_1) z_2^m e^{\lambda_j^*(z_1) z_2} . \qquad /18/$$

где $c^*_{j,m}(z_1)$, $\lambda^*_j(z_1)$ – некоторые аналитические функции. Учитывая представления /I2/ и /I3/, согласно лемме 2.2, заключаем, что функция $(r+1)\mu(z_2)$ – линейна и значит $\mu(z_2)$ – линейная функция. Лемма доказана.

<u>Лемма 2.4</u>. Пусть функция $f(z_1, z_2)$ допускает в области $W_1 \times W_2 \subset \mathbb{C}^2$ два представления

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{k_j} b_{j,m}(z_2) z_1^m e^{\mu_j(z_2) z_1} ,$$

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{m=0}^{n_j} c_{j,m}(z_1) z_2^m e^{\lambda_j(z_1) z_2} , \qquad /B/$$

где функции $b_{j,m}(z_2)$, $\mu_j(z_2)$, $c_{j,m}(z_1)$, $\lambda_j(z_1)$ – аналитические. Причем $\mu_j(z_2) \neq \mu_i(z_2)$, $\lambda_j(z_1) \neq \lambda_i(z_1)$, если $j \neq i$. Тогда функции $\lambda_j(z_1)$, $\mu_j(z_2)$ – линейны.

<u>Доказательство</u>. Не уменьшая общности можем считать, что $b_{j,k_j}(z_2) \neq 0$, $c_{j,n_j}(z_1) \neq 0$ при $z_1 \in W_1$ и $z_2 \in W_2$. Значит при фиксированном z_2^0 функция $f(z_1, z_2^0)$ является квазиполиномом по z_1 степени $N = \sum_{j=1} (k_j + 1)$. По теореме 2

$$V_N(z_1; f(z_1, z_2)) \equiv 0. \qquad /19/$$

Обозначим через $f_i(z_1, z_2)$ сумму

$$\left(\sum_{m=0}^{n_i} c_{i,m}(z_1) z_2^m \right) e^{\lambda_i(z_2) z_1} .$$

Тогда

$$\frac{\partial^z f}{(\partial z_1)^z} = \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial^z f_i}{(\partial z_1)^z} \qquad /20'/$$

$z = 0, 1, \ldots, N$ и

$$\frac{\partial^z f_i}{(\partial z_1)^z} = \left(\sum_{k=0}^{n_i+z} r_{i,k}(z_1) z_2^k \right) e^{\lambda_i(z_1) z_2} , \qquad /20''/$$

где $r_{i,k}(z_1)$ – аналитические функции. Учитывая представления /20′/ и /20″/, преобразуем равенство $V_N(z_1; f(z_1, z_2)) \equiv 0$ к виду

$$\sum_{d,k} g_{d,k}(z_1) z_2^k e^{\gamma_d(z_1) z_2} \equiv 0,$$

в котором функции $g_{d,k}(z_1)$ – аналитические, а $\gamma_d(z_1)$ имеют вид

$$\gamma_d(z_1) = \sum_{j=1}^{l} \rho_{j,d} \lambda_j(z_1),$$

где $\rho_{j,d}$ – целые неотрицательные числа и $\rho_{1,d} + \ldots + \rho_{l,d} = N+1$.

Заметим, что при любом $i = 1, 2, \ldots, l$ среди показателей $\gamma_d(z_1)$ есть показатель $\gamma_{d(i)}(z_1) = (N+1)\lambda_i(z_1)$. По лемме I.2 для каждого показателя $(N+1)\lambda_i(z_1)$ либо найдется равный среди набора остальных показателей $\gamma_d(z_1)$, либо

$$\sum_k g_{d(i),k}(z_1) z_2^k e^{(N+1)\lambda_i(z_1) z_2} \equiv 0.$$

Подставим /20′/ в определитель $V_N(z_1; f(z_1, z_2))$ и представим его в виде суммы соответствующих определителей. Заметим, что каждый из этих определителей есть произведение некоторой экспоненты от z_2 на полином от z_1. При этом экспоненту $e^{(N+1)\lambda_i(z_1) z_2}$ содержит лишь один определитель $V_N(z_1; f_i)$ и, следовательно,

$$\left(\sum_k g_{d(i),k}(z_1) z_2^k\right) e^{(N+1)\lambda_i(z_1) z_2} = V_N(z_1; f_i(z_1, z_2)).$$

Поэтому, если $\left(\sum_k g_{d(i),k}(z_1) z_2^k\right) e^{(N+1)\lambda_i(z_1) z_2}$, то по лемме I.3 в некотором поликруге имеет место представление

$$f_i(z_1, z_2) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{m=0}^{r_j} a_{j,m}(z_2) z_1^m e^{\beta_j(z_2) z_1}, \qquad /21/$$

где функции $a_{j,m}(z_2)$, $\beta_j(z_2)$ – аналитические. Учитывая /20″/ и /21/, получаем, согласно лемме 2.3, что $\lambda_i(z_1)$ –

линейная функция. Если же $(N+1)\ \lambda_j(x_1) \equiv \gamma_k(x_1)$, то

$$\lambda_j(x_1) = \sum_{j=1}^{l} \rho_{i,j}\, \lambda_j(x_1),$$

где числа $\rho_{k,j}$ таковы, что $\rho_{k,j} \geqslant 0$, $\rho_{j,i} = 0$, $\sum\limits_{i=1}^{l} \rho_{j,i} = 1$.
Таким образом, после соответствующей перенумерации функций, получим систему

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 = \sum_{j=1}^{l} \rho_{1,j}\, \lambda_j,\\
&\dots\dots\dots\\
&\lambda_k = \sum_{j=1}^{l} \rho_{k,j}\, \lambda_j,\\
&\dots\dots\dots\\
&\lambda_{k+1} = a_{k+1} x_1 + b_{k+1},\\
&\dots\dots\dots\\
&\lambda_l = a_l x_1 + b_l,
\end{aligned} \qquad /22/$$

где $k \leqslant l$ и коэффициенты $\rho_{i,j}$ таковы, что

$$\sum_{j=1}^{l} \rho_{i,j} = 1, \quad \rho_{i,i} = 0, \quad \rho_{i,j} \geqslant 0. \qquad /22'/$$

Покажем, что в этой системе, на самом деле, всегда $k < l$.
Допустим, что это не так, когда система /22/ имеет вид

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{l} \rho_{i,j}\, \lambda_j, \qquad i = 1, 2, \dots, l$$

с $\rho_{i,j}$ удовлетворяющими условиям /22'/.

По лемме I.4, учитывая аналитичность функций $\lambda_j(x_1)$, получаем, что $\lambda_p(x_1) \equiv \lambda_q(x_1)$, $p \neq q$, а это противоречит условию леммы. Тем самым доказано, что $k < l$. Преобразуем систему /22/ следующим образом: подставим выражение для λ_1 из первого уравнения в остальные и полученную систему приведем снова к виду /22/. Повторим этот процесс $k-1$ раз. Заметим, что ни на одном шаге, ни в одном уравнении мы не получим тождества $\lambda_i = \lambda_i$, так как каждый раз подставляемое λ_j является суммой не менее чем двух слагаемых /в противном случае $\lambda_j = \lambda_p$, что противоречит условию леммы/. Таким образом, система /22/ приводит к виду

$$\lambda_1 = \sum_{i=2}^{l} \rho^*_{1,i} \lambda_i ,$$

$$\lambda_2 = \sum_{i=3}^{l} \rho^*_{2,i} \lambda_i ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_k = \sum_{i=k+1}^{l} \rho^*_{k,i} \lambda_i ,$$

$$\lambda_{k+1} = a_{k+1} x_1 + b_{k+1} ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\lambda_l = a_l x_1 + b_l .$$

Отсюда следует, что все функции $\lambda_j(x_1)$ – линейные. Аналогично доказывается линейность функций $\mu_k(x_2)$. Лемма доказана.

Следующая лемма уточняет вид функций $f(x_1, x_2)$, о которых идет речь в лемме 2.4.

Л е м м а 2.5. Пусть аналитическая на $W_1 \times W_2 \subset \mathbb{C}^2$ функция $f(x_1, x_2)$ допускает два представления

$$f(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m=0}^{k_j} b_{j,m}(x_2) x_1^m e^{\mu_j(x_2) x_1} ,$$

$$f(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^{l} \sum_{m=0}^{n_j} c_{j,m}(x_1) x_2^m e^{\lambda_j(x_1) x_2} ,$$

где функции $b_{j,m}(x_2)$, $\mu_j(x_2)$, $c_{j,m}(x_1)$, $\lambda_j(x_1)$ – аналитические, причем $\lambda_j(x_1) \neq \lambda_i(x_1)$, $\mu_j(x_2) \neq \mu_i(x_1)$, когда $i \neq j$. Тогда функции $b_{j,m}(x_2)$, $c_{j,m}(x_1)$ – квазиполиномы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2.4, функции $\lambda_j(x_1)$, $\mu_j(x_1)$ – линейные. Применяя операции вида $\partial_j u = e^{\lambda_j} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(e^{-\lambda_j x_2} u \right)$ легко получаем равенство

$$k_1!\, c_{1,k_1}(x_1) \prod_{j=2}^{l} \left(\lambda_1(x_1) - \lambda_j(x_1) \right)^{k_j+1} =$$

$$= \frac{\partial^{k_1}}{(\partial x_2)^{k_1}} \left(e^{[\lambda_2(x_2) - \lambda_1(x_1)] x_2} \left(\frac{\partial^{k_2+1}}{(\partial x_2)^{k_2+1}} e^{[\lambda_3(x_1) - \lambda_2(x_1)] x_2} \right.\right. \times$$

$$\times\left(\ldots\left(e^{-\lambda_2(x_1)x_2} f(x_1,x_2)\right)\ldots\right),$$

из которого следует, что функция $c_{1,k_1}(x_1)$ имеет вид $\frac{Q_1(x_1)}{P_1(x_1)}$, где $Q_1(x_1)$ – квазиполином, а $P_1(x_1)$ – полином.

Рассматривая функцию

$$f_1(x_1,x_2)=P_1(x_1)\left(f(x_1,x_2)-c_{1,k_1}(x_1)x_2^{k_1}e^{\lambda_1(x_1)x_2}\right),$$

также как и для функции $c_{1,k_1}(x_1)$, получаем $c_{1,k_1-1}(x_1)=\frac{Q_2(x_1)}{P_2(x_1)}$, где $Q_2(x_1)$ – квазиполином, а $P_2(x_1)$ – полином.

Повторяя те же рассуждения, получаем для любого m равенство

$$c_{1,m}(x_1)=\frac{Q_{1,m}(x_1)}{P_{1,m}(x_1)},$$

в котором $Q_{1,m}(x_1)$ – квазиполином, а $P_{1,m}(x_1)$ – полином. Аналогично для любых i, k имеем

$$c_{i,k}(x_1)=\frac{Q_{i,k}(x_1)}{P_{i,k}(x_1)},$$

где $Q_{i,k}(x_1)$ – квазиполином, $P_{i,k}(x_1)$ – полином.

Не уменьшая общности можно считать, что все полиномы $P_{i,k}(x_1)$ одинаковы и, следовательно,

$$c_{i,m}(x_1)=\sum_{l}\frac{g_{l,i,m}(x_1)}{P(x_1)}e^{\beta_{l,i,m}x_1}, \qquad /23/$$

где $P(x_1)$, $g_{l,i,m}(x_1)$ – полиномы. Для функции $f(x_1,x_2)$ на $W_1\times W_2$ имеем

$$f(x_1,x_2)=\sum_{l,i,m}\frac{g_{l,i,m}(x_1)x_2^m}{P(x_1)}e^{(a_ix_1+b_i)x_2+\beta_{l,i,m}x_1} \qquad /24/$$

($\lambda_i=a_ix_1+b_i$). Точно также на $W_1\times W_2$ имеет место представление

$$f(x_1,x_2)=\sum_{l,i,m}\frac{z_{l,i,m}(x_2)x_1^m}{Q(x_2)}e^{(\alpha_ix_2+\rho_i)x_1+\gamma_{l,i,m}x_2}, \qquad /25/$$

где $r_{l,i,m}(z_2)$ – полиномы. Сравнивая /19/ и /20/ и учитывая очевидную независимость системы функции

$$e^{az_1z_2+bz_1+cz_2}$$

над кольцом рациональных функций, получаем, что для любых индексов l, i, m найдутся такие индексы p, d, k, что

$$\frac{z_2^m g_{l,i,m}(z_1)}{P(z_1)} = \frac{z_1^k r_{p,d,k}(z_2)}{Q(z_2)}.$$

Отсюда с очевидностью следует, что функция

$$g^*_{l,i,m}(z_1) \stackrel{def}{=} \frac{g_{l,i,m}(z_1)}{P(z_1)}. \qquad /26/$$

есть полином. Из /23/ и /26/ вытекает, что $c_{i,m}(z_1)$ – квазиполином. Лемма доказана.

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы I.

Согласно предложениям I и 3 функция класса $S_n^{n-1,1}$ является целой и допускает в некотором поликруге представления

$$f(z_j, \hat{z}_j) = \sum_{l,m} \rho^j_{l,m}(\hat{z}_j) z_j^m e^{\mu^j_l(\hat{z}_j) z_j} \qquad /27/$$

/ $j = 1, 2, \ldots, n$ /, где функции $\rho^j_{l,m}(\hat{z}_j)$, $\mu^j_l(\hat{z}_j)$ – аналитические.

Проведем индукцию по числу переменных.

I. Если $n = 2$, то, согласно леммам 2.4 и 2.5, из наличия представлений /27/ следует, что на $W_1 \times W_2$

$$f(z_1, z_2) = \sum_{l,m} \rho^2_{l,m}(z_2) z_1^m e^{\mu^2_l(z_2) z_1},$$

где $\rho^2_{l,m}(z_2)$ – квазиполиномы, а $\mu^2_l(z_2)$ – линейные функции, т.е. для $n = 2$ утверждение теоремы верно.

2. Пусть теперь утверждение теоремы I выполняется для функций от $n - 1$ переменной.

3. Рассмотрим два представления

$$f(z) = \sum_{l,m} \rho^1_{l,m}(\hat{z}_1) z_1^m e^{\mu^1_l(\hat{z}_1) z_1}, \qquad /28/$$

$$f(z) = \sum_{l,m} \rho^j_{l,m}(\hat{z}_j) z_j^m e^{\mu^j_l(\hat{z}_j) z_j}. \qquad /29/$$

Зафиксируем в равенствах /28/ и /29/ переменные $z_2^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_{j+1}^0, \ldots, z_n^0$. Таким образом, для функции $f(z_1, z_2^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, \ldots, z_n^0)$ имеем на $w_1 \times w_j$ два представления типа /B/. Согласно леммам 2.4 и 2.5, функция $\rho_{l,m}^1(z_2^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, \ldots, z_n^0)$ имеем на $w_1 \times w_j$ два представления типа /B/. Согласно леммам 2.4 и 2.5, функция $\rho_{l,m}^1(z_2^0, \ldots, z_{j-1}^0, z_j, z_{j+1}^0, \ldots, z_n^0)$ – квазиполином от z_j, а функция $\mu_l^1(z_2^0, \ldots, z_j, \ldots, z_n^0)$ – линейна по z_j. Значит функция $\rho_{l,m}^1(z_2, \ldots, z_n)$ принадлежит классу $S_{n-1}^{n-2,1}$. Тогда по предположению индукции $\rho_{l,m}^1(\hat{z}_1) \in S_{n-1}^{0,n-1}$, т.е.

$$\rho_{l,m}^1(\hat{z}_1) = \sum_k Q_{k,l,m}(\hat{z}_1) e^{\lambda_{k,l,m}(\hat{z}_1)},$$

где $Q_{k,l,m}(\hat{z}_1)$ – полиномы, а $\lambda_{k,l,m}(\hat{z}_1)$ – линейные полиномы по каждой переменной. Так как функция $\mu_l^1(z_1)$ линейна по каждой переменной $z_2, \ldots, z_n$, то очевидно, что $\mu_l^1(\hat{z}_1)$ – полином, линейный по каждой переменной. Следовательно, функция $f(z)$ представимая на $w_1 \times \ldots \times w_n$ суммой $\sum_{l,m} \rho_{l,m}^1(\hat{z}_1) \times z_1^m e^{\mu_l^1(\hat{z}_1) z_1}$ имеет вид

$$f(z) = \sum_k Q_k^*(z) e^{\lambda^*(z)}, \qquad /30/$$

где Q_k^*, λ_k^* – полиномы, причем полиномы λ_k^* линейны по каждой переменной $z_1, \ldots, z_n$. Ввиду того, что обе части равенства /24/ целые функции, то представление /24/ имеет место во всем пространстве $\mathbb{C}^n$. Теорема доказана.

3. <u>Некоторые следствия из основной теоремы и ее модификации</u>. Вначале отметим некоторые очевидные следствия из теоремы I.

<u>Следствие I</u>. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $S_n^{p,m}$. Тогда она принадлежит также классу $S_n^{0,n}$.

<u>Следствие 2</u>. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $S_n^{p,m}$ и функция $f(z)$ имеет не более чем минимальный тип при порядке 2. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квазиполином.

<u>Следствие 3</u>. Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит классу $S_n^{p,m}$ и функция $f(t + h_1, \ldots, t + h_n)$ принадлежит классу $S_1^{0,1}$ для любых $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квазиполином.

Из теоремы I вытекает, что принадлежность функции $f(x)$ классу $S_n^{\rho,m}$ влечет за собой принадлежность этой функции классу $S_n^{0,n}$. Однако, если априори известно, что функция $f(x)$ – целая, то для принадлежности к классу $S_n^{0,n}$ от функции $f(x)$ достаточно потребовать меньше, чем принадлежность функции f одному из классов $S_n^{\rho,m}$. А именно, имеет место следующая теорема.

<u>Теорема 3</u>. Пусть функция $f(x_1,\dots,x_n): \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, – целая, E_j – множества в $\mathbb{C}^{n-1}$, причем каждое E_j не является подмножеством счетного объединения аналитических множеств отличных от $\mathbb{C}^{n-1}$ и пусть при любых $(x_1^0,\dots, x_{j-1}^0, x_{j+1}^0,\dots,x_n^0)\in E_j$ функция $f(x_1^0,\dots, x_j,\dots, x_n^0)$ является квазиполиномом от x_j. Тогда функция $f(x_1,\dots,x_n)$ принадлежит классу $S_n^{0,n}$.

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим функцию $V_k(x_1; f(x_1; \hat{x}_1))$. Очевидно, что эта функция целая. Разложим функцию $V_k(x_1; f(x))$ в ряд по переменной x_1

$$V_k(x_1; f(x_1, \hat{x}_1)) = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{l,k}(\hat{x}_1)x_1^l.$$

Обозначим через A_k множество точек $\hat{x}_1$, для которых $V_k(x_1; f(x_1, \hat{x}_1)) \equiv 0$ по x_1. Множество A_k – аналитическое, так как оно является пересечением нулевых множеств аналитических функций $\varphi_{l,k}(\hat{x}_1)$. Аналогично вводятся множества A_j, $j = 1, 2, \dots$. По теореме 2 объединение всех множеств A_j содержит множество E_1. Тогда, согласно условию теоремы, одно из множеств A_j совпадает с $\mathbb{C}^{n-1}$. Таким образом, $V_j(x_1, f(x_1, \hat{x}_1)) \equiv 0$. По теореме 2 функция $f(x_1, \hat{x}_1)$ является квазиполиномом от x_1, при любом фиксированном $\hat{x}_j$, т.е. $f(x) \in S_n^{n-1,1}$. Согласно теореме I, функция $f(x)$ принадлежит классу $S_n^{0,n}$. Теорема 3 доказана.

Можно усилить этот результат, сформулировав некоторые утверждения относительно степеней полиномов $A_p(x)$, стоящих в показателях экспонент в представлении функции $f(x)$.

<u>Теорема 4</u>. Пусть функция $f(x): \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, – целая. Пусть далее, $E(i_1,\dots,i_p)$ – такой набор множеств в $\mathbb{C}^p$, что каждое из них не является подмножеством никакого счетного объединения аналитических множеств, отличных от $\mathbb{C}^p$. /Здесь $(i_1,\dots,i_p)$ – все возможные выборки p индексов из $\{1, 2, \dots, n\}$./ Тогда, если при любых фиксированных $x_{i_1}^0,\dots,x_{i_p}^0$ та-

ких, что $(z^0_{i_1}, \dots, z^0_{i_p}) \in E(i_1, \dots, i_p)$ функция $f(z)$, как функция остальных $n-p$ переменных принадлежит классу $S^{0,m}_{n-p}$, то $f(z) \in S^{0,d}_n$ где $d=n$, если $m+p=n$ и $d=m$, если $m+p<n$.

Доказательство. Покажем, что функция $f(z)$, удовлетворяющая условиям теоремы 4, удовлетворяет также условиям теоремы 3. Определим множества E_i следующим образом. При $i>p$ положим

$$E_i = \{ (z_1, \dots, z_p, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) : (z_1, \dots, z_p) \in$$

$$\in E(1, \dots, p), (z_{p+1}, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-p-1} \}.$$

При $i \leq p$

$$E_i = \{ (z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{p+1}, z_{p+2}, \dots, z_n) : (z_1, \dots, z_{i-1},$$

$$z_{i+1}, \dots, z_{p+1}) \in E(1, \dots, i-1, i+1, \dots, p+1), (z_{p+2}, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-p-1} \}.$$

Ввиду свойств множеств $E(i_1, \dots, i_p)$ множества E_j, $j=1, \dots, n$ не являются подмножеством никакого счетного объединения аналитических множеств, отличных от $\mathbb{C}^{n-1}$. Кроме того, при $(z^0_1, \dots, z^0_{i-1}, z^0_{i+1}, \dots, z^0_n) \in E_i$, функция $f(z^0_1, \dots, z^0_{i-1}, z_i, z^0_{i+1}, \dots, z^0_n)$ является квазиполиномом от z_i. По теореме 3, функция $f(z)$ принадлежит классу $S^{0,n}_n$. Таким образом, доказано утверждение теоремы для случая $m+p=n$. Пусть теперь $m+p<n$. Как мы знаем, $f(z) \in S^{0,n}_n$, т.е. имеет место представление

$$f(z) = \sum_{j=1}^{N} P_j(z) e^{\lambda_j(z)}, \qquad /31/$$

где $P_j(z)$, $\lambda_j(z)$ – полиномы, причем полиномы $\lambda_j(z)$ линейны по каждой переменной. Предположим, что степень хотя бы одного из полиномов $\lambda_j(z)$ больше, чем m. Пусть для определенности этот полином содержит моном $z_1 \times \dots \times z_{m+1} \times \dots \times z_k$. Представим каждый полином $\lambda_j(z)$ в виде

$$\lambda_j(z) = \lambda'_j(z) + z_1 \times \dots \times z_{m+1} \times Q_j(z), \qquad /32/$$

где $Q_j(z)$ – полиномы от переменных $z_{m+2} \times \dots \times z_n$, а полиномы $\lambda'_j(z)$ состоят из мономов, которые не содержат произведения $z_1 \times z_2 \times \dots \times z_m$. Так как один из полиномов $\lambda_j(z)$ содержит моном $x_1 \times \ldots \times x_{m+1} \times \ldots \times x_k$, то не все полиномы $Q_j(x)$ тождественно равны нулю. Подставим в /31/ вместо $\lambda_j(x)$ его представление из /32/ и получим

$$f(x)=\sum_{j=1}^{N} P_j(x) e^{\lambda_j'(x)} e^{x_1 \times \ldots \times x_{m+1} \times Q_j(x)} .$$

Сгруппировав члены с равными $Q_j(x)$, получим для $f(x)$ представление

$$f(x)=\sum_k \varphi_k(x) e^{x_1 \times \ldots \times x_{m+1} \times Q_k(x)} .$$

Здесь $\varphi_k(x)$ – функции класса $S_n^{0,n}$, причем показатели в соответствующих экспонентах состоят из мономов, которые не содержат произведения $x_1 \times \ldots \times x_{m+1}$. При фиксированных $(x^0_{n-p}, \ldots, x^0_n)$, принадлежащих $E(n-p,\ldots,n)$, функция $f(x_1,\ldots, x_{n-p-1}, x_{n-p},\ldots, x^0_n)$ согласно условию теоремы, принадлежит классу $S^{0,m}_{n-p}$. Таким образом, функция

$$f(x_1,\ldots, x_{n-p-1}, x^0_{n-p},\ldots, x^0_n)=\sum_k \varphi_k(x_1,\ldots, x_{n-p-1}), \qquad /33/$$

$$(x^0_{n-p},\ldots, x^0_n) \exp\left[x_1 \times \ldots \times x_{m+1} \times Q_k(x_{m+2},\ldots, x_{n-p-1}, x^0_{n-p},\ldots, x^0_n)\right],$$

как функция переменных $x_1,\ldots, x_{n-p-1}$, имеет порядок не более чем m по совокупности переменных. Это возможно только при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

I/ $Q_k(x_{m+2},\ldots, x_{n-p-1}, x^0_{n-p},\ldots, x^0_n) \equiv 0$ по переменным $x_{m+2},\ldots, x_{n-p-1}$;

2/ $\varphi_k(x_1,\ldots, x_{n-p-1}, x^0_{n-p},\ldots, x^0_n) \equiv 0$, по переменным $x_1,\ldots, x_{n-p-1}$ для тех k, при которых $Q_k(x_{m+2},\ldots, x_{n-p-1}, x^0_{n-p},\ldots, x^0_n) \not\equiv 0$;

3/ $Q_k(x_{m+2},\ldots, x_{n-p-1}, x^0_{n-p},\ldots, x^0_n) \equiv Q_l(x_{m+2},\ldots, x^0_{n-p},\ldots, x^0_n)$ по переменным $x_{m+2},\ldots, x_{n-p-1}$, для тех k, при которых $Q_k(x_{m+2},\ldots, x_{n-p-1}, x^0_{n-p},\ldots, x^0_n) \equiv 0$. Значит функция $F(x)$, равная

$$\prod_{k\neq l} (Q_k(x)-Q_l(x)) \prod_k Q_k(x)\varphi_k(x),$$

равна нулю на множестве $\mathbb{C}^{n-p-1} \times E(n-p, \dots, n)$. Заметим, что функция $F(x)$ тождественно не равна нулю. Поэтому множество $E(n-p, \dots, n)$ является подмножеством аналитического множества, отличного от $\mathbb{C}^p$, что противоречит условиям теоремы.

Таким образом, не существует в представлении /31/ функции $F(x)$ полинома $\lambda_p(x)$, степень которого была бы больше m. Теорема 4 доказана.

4. <u>Применение основной теоремы</u>. Следствие I теоремы I позволяет сводить некоторые задачи для квазиполиномов от нескольких переменных соответствующим задачам для квазиполиномов от нескольких переменных соответствующим задачам для квазиполиномов от одной переменной.

Сельберг [3] показал, что если функция $F(x)=\sqrt[l]{\varphi(x)}$, где $\varphi(x)$ – квазиполином от одной переменной, есть целая функция, то $F(x)$ – квазиполином. С помощью теоремы I этот результат непосредственно переносится на случай многих переменных.

<u>Т е о р е м а 5</u>. Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $S_n^{0,p}$ и функция $F(x)=\sqrt[l]{\varphi(x)}$ – целая. Тогда функция $F(x)$ принадлежит классу $S_n^{0,p}$.

<u>Д о к а з а т е л ь с т в о</u>. Имеем $F(x_1^0, \dots, x_j, \dots, x_n^0) = \sqrt[l]{\varphi(x_1^0, \dots, x_{j_0}, \dots, x_n^0)}$. Согласно условию теоремы, функция $F(x_1^0, \dots, x_j, \dots, x_n^0)$ – целая, а $\varphi(x_1^0, \dots, x_j, \dots, x_n^0)$ – квазиполином от x_j. Значит, по теореме Сельберга, $F(x_1^0, \dots, x_j, \dots, x_n^0)$ – квазиполином от x_j и это верно при любом x_j, $j=1, 2, \dots, n$, т.е. $F(x) \in S_n^{n-1,1}$.

По теореме I функция $F(x)$ принадлежит классу $S_n^{0,n}$. Пусть d – наименьшее из чисел k, таких, что $F(x) \in S_n^{0,k}$. Тогда $d \le p$, так как в противном случае функция $\varphi(x) = [F(x)]^l$ не принадлежала бы классу $S_n^{0,p}$. Значит $F(x) \in S_n^{0,p}$. Теорема доказана.

Другим примером применения теоремы I может служить задача о делении квазиполиномов. В 1929 г. Ритт [1] доказал, что если частное двух квазиполиномов с постоянными коэффициентами есть целая функция, то оно само /частное/ есть квазиполином. В 1963 г. Шилдс [2] ослабил предположение теоремы, потребовав лишь, чтобы число полюсов частного в круге $|x| < t$ было $O(t)$. В 1971 г. А.Я.Гордон и Б.Я.Левин [9] существенно усилили и обобщили теорему Шилдса. Теорема Ритта была перенесена на случай многих переменных Аванесеном и Гию [4]. Позднее Беренштейн и Достал [5] доказали, что если отношение двух квазиполиномов с полиномиальными коэффициентами от нескольких переменных есть целая функция, то это отношение представимо в виде $H(z)\,/\,P(z)$, где $H(z)$ - квазиполином, $P(z)$ - полином. При помощи теоремы 2 можно получить теорему, близкую по характеру упомянутой выше теореме Шилдса. Для ее формулировки введем характеристику "числа" полюсов мероморфной функции. Обозначим через $n_f(t)$ $(2n-2)$-мерный объем нулевого множества целой функции $f(z)$ в шаре $|z|<t$. Эта функция является многомерным аналогом считающей нули функции $n(t)$ для функций одного переменного. Как известно, мероморфная в $\mathbb{C}^n$ функция $F(z)$ представима в виде

$$F(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \qquad /34/$$

где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ - целые функции, нулевые множества которых пересекаются по множеству коразмерности не менее чем 2. Обозначим через $n_F^-(t)$ характеристику "числа" полюсов мероморфной функции $F(z)$. Положим /учитывая представление /34// по определению $n_F^-(t)=n_\psi(t)$.

<u>Теорема 6</u>. Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют вид

$$f(z)=\sum_j d_j\, e^{\lambda_j(z)},$$

$$g(z)=\sum_k c_k\, e^{\mu_k(z)},$$

где d_j, c_k - комплексные числа, $\lambda_j(z)$, $\mu_k(z)$ - полиномы, линейные по каждой переменной, степени не выше ρ. И пусть мероморфная функция $F(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$ такова, что $n_F^-(t)=O(t^{2n-1})$. Тогда функция $F(z)$ принадлежит классу $S_n^{0,\rho}$.

При доказательстве теоремы 6 будет использована следующая

<u>Лемма 4.I</u>. Пусть функция $f(z)$ - целая и функция $n_f(t)$ есть $O(t^{2n-1})$. Тогда для всех $\hat{z}_j^0$ таких, что $f(z_j,\hat{z}_j^0)\not\equiv 0$ по переменной z_j, число нулей функции $f(z_j;\hat{z}_j^0)$ в круге $|z_j|<t$ есть $O(t)$.

Доказательство леммы близко к доказательству теоремы 4.2.8 в [I0] и мы его опускаем.

<u>Доказательство теоремы 6</u>. Обозначим через A_j множество тех точек $\hat{z}_j^0$, для которых $g(z_j;\hat{z}_j^0)\equiv 0$. По лемме 4.I,

при $z_j^{10} \in A_j$, число полюсов в круге $|z_j| < t$ у функции $f(z_j, z_j^{10})$ есть $O(t)$. По теореме Шилдса получаем, что $F(z_j, z_j^{10})$ – квазиполином от z_j при фиксированном $z_j^{10} \notin A_j$. По теореме 3 функция $F(z)$ принадлежит классу $S_n^{0,n}$. Пусть k – минимальное из тех чисел d, для которых $F(z) \in S_n^{0,d}$. Ввиду равенства $g(z)\,F(z) = f(z)$ и того, что $g, f \in S_n^{0,p}$, получаем, что $k \le p$. Теорема 6 доказана.

I. Ritt G.F. On the zeros of exponential polynomials. – Trans. Amer. Math. Soc., 1929, 29, p. 680-686.

2. Shields A. On quotients of exponential polynomials. – Comm. Pure Appl. Math., 1963, 16, p. 27-31.

3. Selberg H. Uber einige transzendete Gleichungen. – Avh. Noske Vid. Akad. Oslo, 1931, I, N 10, S. 1-8.

4. Avanissian V., Gay R. Sur les fonctions entieres arithmetiques de type et le quotient d'exponentielle-polynomes de plusieres. – variables. – Bull. Soc. math. France, 1975, 103, p.341-384.

5. Berenstein C.A., Dostal M.A. The Ritt theorem in several variables. – Arkiv förmat., 1974, 12, N 2, p. 267-280.

6. Гурса Э. Курс математического анализа: В 2-х т. – М. : Гос. изд.-во техн. тех. лит-ры. Т. 2. 1933. 287 с.

7. Siciak I. Separetly analitic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of $\mathbb{C}^n$. – Ann. Polon. Math., 1969, 22, p. 145-171.

8. Ахиезер Н.И., Ронкин Л.И. О сепаратно аналитических функциях многих переменных и теоремах об "острие клина". – Успехи мат. наук, 1973, 28, № 3, с. 27-42.

9. Гордон А.Я., Левин Б.Я. О делении квазиполиномов. – Функц. анализ, 1971, 9, вып. I, с. 22-29.

10. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных. – М. : Наука, 1971. – 430 с.

УДК 517.9

В.Р.Смилянский

МНОЖИТЕЛИ СТОКСА И КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ

В статье сохранены обозначения, введенные в работах [1, 2], которые, так же как определения и термины работ [1, 2], как правило, не поясняются. В статье также используются результаты работ [3, 4].

I. Коэффициенты связи и множители Стокса. Пусть заданы система и уравнение вида

$$\frac{dw}{dz} = z^r A(z)\, w; \quad A(z) = \sum_{\nu=0}^{r+1} A_\nu z^{-\nu}; \qquad /1/$$

$$\sum_{m=0}^{n} z^{(n-m)r} a_m(z) \frac{d^m y}{dz^m} = 0; \qquad a_n(z) \equiv 1; \quad a_m(z) = \sum_{\nu=0}^{(n-m)(r+1)} a_{m\nu} z^{-\nu}. \qquad /2/$$

В этом случае точка $x=0$ является регулярной особой точкой и фундаментальная матрица /ф.м./ может быть представлена в виде $S(x)x^{\Delta}$, где матрица $S(x)$ голоморфна при $x=0$ и никакие два характеристических корня постоянной матрицы Δ не отличаются на положительное целое. Если никакие два характеристические корня $A_{(r+1)}$ не отличаются на положительное целое, то $\Delta = A_{(r+1)}$; $S(0)=E$ / E – единичная матрица/. Для уравнения /2/ матрица $S(x)$ – однострочечная. Существует ф.м. $\Psi(x)=U(x)x^{J}$, где матрица $U(x)$ голоморфна при $x=0$, а J есть жорданова форма матрицы Δ /см. [5]/.

Напомним, что формальная матрица /ф.м./ $\Phi_\nu(x)$ имеет асимптотическое разложение /0.2/ из работы [1] /"асимптотически базисна"/ в секторе S_ν [I, с. 485]. Пусть $\Psi(x) = \Phi_\nu(x)\,T_\nu$ $(\nu = 1,2,\dots)$, где постоянную неособую матрицу T_ν будем называть матрицей связи, а ее элементы $[T_\nu]_{jk}$ – коэффициентами связи. /В некоторых работах именно $[T_\nu]_{jk}$ называют множителями Стокса./ Существует связь между матрицами T_ν и множителями Стокса /МС/.

<u>Предложение I.I</u>. Пусть задана T_1 и пусть $\Phi_1(x)=\Phi_\nu(x)V_\nu$ $(\nu = 2,3,\dots)$, где V_ν – постоянная неособая матрица. Тогда $T_\nu = V_\nu T_1$.

<u>Доказательство</u> следует из равенств $\Psi(x)=\Phi_1(x)T_1=\Phi_\nu(x)V_\nu T_1$.

В качестве V_ν могут быть взяты и матрицы, рассмотренные в теоремах 2.I, 3.I из работ [I] и I.5 из [3].

<u>Следствия</u>. I. Пусть $V_\nu = \Gamma_\nu$ [I, с. 487], тогда $T_\nu = \Gamma_\nu T_1$ $/\nu = 2, 3, \dots/$, т.е. матрицы связи T_ν в полной окрестности $x=\infty$ могут быть выражены через T_1 и МС в этой окрестности.

2. Пусть $\Phi_1\left(xe^{i\sigma\alpha_0}\right)=\Phi_1(x)Y$ /см. [I, § 2] и теорему I.2 в [3]/. Тогда $Y = T_1 e^{i\sigma\alpha_0 J}T_1^{-1}$, т.е. Y может быть выражена через T_1. /Формула следует из равенств $\Psi(xe^{i\sigma\alpha_0}) = \Psi(x)e^{i\sigma\alpha_0 J} = \Phi_1\left(xe^{i\sigma\alpha_0}\right)T_1 = \Phi_1(x)YT_1 = \Psi(x)T_1^{-1}YT_1$. Пусть $\Phi_1(x)$ – исключительная матрица /см. [2, с. I209] и [3, теорему I.2]/. Тогда $\Gamma_{\ell+1} = e^{-i\sigma\alpha_0 R}T_1 e^{i\sigma\alpha_0 J}T_1^{-1}$.

3. Пусть $\Phi_1(x)$ – исключительная матрица и пусть $\Phi_1(xe^{i\alpha_0}) = \Phi_1(x)Y$ /т.е. $\sigma = 1$/. Тогда /см. [3, следствие 2 теоремы I.7]/ $\ell = 2L$, $\Gamma_{2L+1} = e^{-i\alpha_0 R}T_1 e^{i\alpha_0 J}T_1^{-1}$ и значит по известной матрице T_1 могут быть определены все матрицы Γ_ν $(\nu=1,2,\dots)$. Пусть дополнительно $r=0$. Тогда это система первого ранга, $\sigma\alpha_0 = 2\pi$ и $\Gamma_{N+1} = \Gamma_{2L+1}$.

4. Пусть $\Phi_1(x)$ – исключительная матрица и пусть $\Phi_1(xe^{i\varphi}) = \Phi_1(x)Y$ /см. [3, теорему I.3]/. Тогда $\Gamma_{k+1} = e^{-i\varphi R}\Gamma_1 e^{i\varphi J}\Gamma_1^{-1}$ /см. [4, 2.14]/.

5. Из формулы $Y = \Gamma_1 e^{i6\alpha_0 J}\Gamma_1^{-1}$ может быть получена информация о Γ_1. Пусть Y известна, пусть, например, J – диагональна и пусть $G^{-1}YG = e^{i3\alpha_0 J}$, где постоянная неособая матрица G, как известно, всегда может быть найдена. Тогда $G = \Gamma_1 D$, где D некоторая постоянная неособая диагональная матрица.

Пусть $\Psi'(x) = \Psi(x)V$, где V – любая постоянная неособая матрица. Тогда $\Psi'(x) = \Phi_\nu(x)\Gamma_\nu V$. Матрицы $\Gamma'_\nu = \Gamma_\nu V$ также будем называть матрицами связи. Очевидно, что $Y = \Gamma_1 e^{i2\pi J}\Gamma_1^{-1} = \Gamma'_1 V^{-1} e^{i2\pi J} V (\Gamma'_1)^{-1}$. Заметим также, что везде ранее, как и в [1, с. 483] все $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ предполагаются различными.

2. Уравнение с линейными коэффициентами /"уравнение Лапласа"/. Пусть задано уравнение /2/ с $r=0$ и $a_m(x) = a_{m0} + x^{-1}a_{m1}$, т.е.

$$x\frac{d^n y}{dx^n} + \left(xa_{n-1,0} + a_{n-1,1}\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + (xa_{0,0} + a_{0,1})y = 0, \qquad /3/$$

для которого все λ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ различны и ни один из Γ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ не равен целому числу. Формальные решения уравнения /3/ имеют вид

$$\hat{\varphi}_k(x) = x^{\Gamma_k} e^{\lambda_k x}\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{k\nu} x^{-\nu} \quad (k=1,2,\ldots,n). \qquad /4/$$

Решения уравнения /3/ в форме контурных интегралов Лапласа есть

$$y_k(x) = e^{\lambda_k x}\int_{\Sigma_k} e^{x(\xi-\lambda_k)}(\xi-\lambda_1)^{-\Gamma_1-1}\ldots(\xi-\lambda_n)^{-\Gamma_n-1}d\xi \qquad /5/$$

$$(k=1,2,\ldots,n),$$

где контур Σ_k выбран подходящим образом. Проведем в плоскости ξ из точки λ_k полубесконечный луч так, чтобы он не встречал на своем пути других особых точек λ_j $(j \neq k)$. Пусть контур Σ_k представляет собой петлю, идущую из бесконечности вдоль этого луча, обходящую точку $\xi = \lambda_k$ в положительном направлении /против часовой стрелки/ и возвращающуюся к бесконечности вдоль этого же луча. Как известно, если на указанном луче выполнено условие $Re\, z(\xi-\lambda_k)<0$, то /5/ является решением уравнения /3/, причем решением, имеющим асимптотическое разложение /4/. Обозначим аргумент левой стороны луча /если смотреть из точки λ_k /, т.е. линии, по которой контур интегрирования идет из бесконечности к точке λ_k, через ω. На левой стороне луча контура Σ_k задаем $arg\,(\xi-\lambda_k)=\omega$. Условие на луче $Re\, z(\xi-\lambda_k)<0$ везде ниже будем записывать в виде

$$\frac{\pi}{2}<arg\, z+\omega<\frac{3}{2}\pi. \qquad /6/$$

Если ω задано, то /6/ однозначно определяет область $arg\; z$, где уравнение /5/ асимптотически базисно. В определенных пределах $(\omega_{k,min}<\omega<\omega_{k,max})$ луч контура Σ_k можно поворачивать так, чтобы он не пересекал других особых точек λ_j. Если при этом на луче постоянно выполнено условие /6/, то такие решения являются аналитическими продолжениями исходного. Если под /5/ понимать именно такое решение, то область асимптотической базисности /5/ больше, чем $\pi(\pi/2-\omega_{k,max}<arg\, z<$ $<3\pi/2-\omega_{k,min})$. Пусть лучи всех контуров Σ_k $(k=1,2,\ldots,n)$ параллельны и не пересекают других особых точек λ_j $(j\neq k)$. Тогда /5/ $(k=1,2,\ldots,n)$ дает фундаментальную систему решений, асимптотически базисную в общем секторе, большем, чем π, т.е. асимптотически базисную в стандартном секторе /С.С./ /см. [3, с. 98]/. Пусть $\Phi_1(z)$ – однострочечная ф.м., составленная из решений /5/ /с параллельными лучами контуров Σ_k /. В дальнейшем будет использоваться исключительная матрица, т.е. ф.м. $\Phi_1(z)$, асимптотически базисная в С.С. $l_2-\varphi\le arg\, z<l_2$, причем нумерация λ_k везде ниже выбрана из условия $Re\,\lambda_k z<Re\,\lambda_{k+1}z$ в секторе $l_1<arg\, z<l_2$. Для дальнейшего существенно иметь геометрический способ нумерации λ_k. Предлагаемый ниже способ пригоден для решений в виде контурных интегралов Лапласа для системы /I/ и уравнения /2/ первого ранга $(r=0)$ общего вида.

Теорема 2.I. Пусть аргумент параллельных лучей контуров Σ_k, соответствующих исключительной матрице $\Phi_1(z)$, может изменяться в пределах $\omega_{min}<\omega<\omega_{max}$. Всегда можно указать такое малое положительное δ, что $arg\, z=3\pi/2-\omega_{min}-\delta$ находится в секторе $l_1<arg\, z<l_2$. Предполагая δ таковым, проведем в ξ-плоскости из начала координат луч под углом

$\omega_{min} + \delta$ к действительной оси. Проведем перпендикулярно этому лучу ось /проектирования/. Направление оси проектирования задаем поворотом луча на $\pi/2$ против часовой стрелки.

Пусть λ_k изображаются в ξ-плоскости в виде векторов с началом в начале координат. Проектируем векторы λ_k на ось проектирования. Нумеруем λ_k из условия: проекция $\lambda_k <$ проекции λ_{k+1}. Это обеспечивает выполнения условия $Re\,\lambda_k x < Re\,\lambda_{k+1} x$ в секторе $l_1 < arg\ x < l_2$.

<u>Доказательство</u>. Если $arg\ x = 0$, то очевидно, что условие $Re\,\lambda_k x < Re\,\lambda_{k+1} x$ выполнено, если ось проектирования совпадает с действительной осью ξ-плоскости. Пусть $arg\ x \neq 0$. Поворачиваем ось проектирования относительно действительной на оси на $(-arg\ x)$. Тогда условие $Re\,\lambda_k x < Re\,\lambda_{k+1} x$ выполнено, если проекции векторов λ_k на ось проектирования удовлетворяют условию проекция $\lambda_k <$ проекция λ_{k+1}. Действительно, умножение векторов λ_k на x равносильно умножению их на $|x|$ /что в данном случае несущественно/ и повороту их на $arg\,x$. После поворота векторов λ_k на $arg\ x$ требование $Re\,\lambda_k x < Re\,\lambda_{k+1} x$ равносильно требованию проекция $\lambda_k <$ проекции λ_{k+1} на действительную ось. Но можно оставить векторы на месте и повернуть саму ось на $(-arg\ x)$.

Область асимптотической базисности ф.м. $\Phi_1(x)$ есть $\pi/2 - \omega_{max} < arg\,x < 3\pi/2 - \omega_{min}$. Так как по условию сектор $l_1 < arg\,x < l_2$ – это область наибольших значений $arg\ x$ в заданном С.С. для исключительной матрицы $\Phi_1(x)$, то всегда можно указать такое достаточно малое $\delta' > \delta$, что $arg\ x = 3\pi/2 - \omega_{min} - \delta'$ находится в секторе $l_1 < arg\,x < l_2$. Поворачиваем ось проектирования относительно действительной на угол $(-arg\ x) = \omega_{min} + \delta - 3\pi/2$. Тогда угол между лучем и осью проектирования /отсчитываемый от оси проектирования/ равен $(\omega_{min} + \delta) - (\omega_{min} + \delta - 3\pi/2) = 3\pi/2$. Следовательно, для того чтобы совместить луч с осью проектирования, нужно повернуть его против часовой стрелки на $\pi/2$. Теорема доказана. Как видно из доказательства, направление оси проектирования может в известных пределах изменяться. Однако удобнее всего выбрать его так, как указано в теореме.

В дальнейшем нам понадобиться найти соотношения обхода, т.е. матрицу Y в выражении $\Phi_1(xe^{i2\pi}) = \Phi_1(x)Y$. В процессе этого аналитического продолжения $arg\,(\xi - \lambda_k)$ $(k = 1,2,\dots,n)$ меняется, вообще говоря, на величину, большую 2π. Поэтому везде ниже многозначные функции $(\xi - \lambda_k)^{-\Gamma_k - 1}$ рассматриваются на римановой поверхности, причем левая сторона луча /для контура Σ_k / рассматривается как место склейки левого берега разреза нижнего листа $(\xi - \lambda_k)$ с правым берегом верхнего.

Коэффициент C_{k0} в /4/ для решения /5/ имеет вид

$$\delta_k = C_{k0} = e^{-i\pi\Gamma_k}\left(e^{-i2\pi\Gamma_k} - 1\right)\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n} (\lambda_k - \lambda_\nu)^{-\Gamma_\nu - 1}\Gamma(-\Gamma_k), \qquad /7/$$

где $\Gamma(-\Gamma_k)$-гамма-функция. Уравнение /7/ получается с использованием формулы /5/ на с. 29 в /6/, если предварительно в /5/ сделать замену $t = e^{-i\pi}\tau$.

Следствие теоремы 2.I. Пусть λ_ν пронумерованы так, как указано в теореме 2.I. /Это будет предполагаться и везде ниже./ Тогда в /7/

$$(\lambda_k - \lambda_j) = (\lambda_j - \lambda_k)e^{i\pi}, \qquad j < k. \qquad /8/$$

Доказательство. Луч для построения оси проектирования можно провести из любой точки λ_ν . С ним можно совместить /в частности/ и луч контура Σ_ν . Пусть это сделано. /Так это принято и на рис. I./ Пусть $j < k$ и пусть вектор $(\lambda_k - \lambda_j)$ составляет с лучем острый положительный угол η , отсчитываемый от луча /см., например, вектор $/\lambda_2 - \lambda_1/$ на рис. I/. Пусть ξ лежит на левой стороне луча, проведенного из λ_j . Тогда $\arg(\xi - \lambda_j) = \omega$. Для того чтобы совместить конец вектора $(\xi - \lambda_j)$ с точкой λ_k , нужно вектор $(\xi - \lambda_j)$ повернуть на угол η против часовой стрелки. Следовательно, $\arg(\lambda_k - \lambda_j) = \omega + \eta$. Пусть вектор $(\xi - \lambda_k)$ лежит на левой стороне луча, выходящего из λ_k . Для совмещения с точкой λ_j его нужно повернуть на угол $(\pi - \eta)$ по часовой стрелке. Следовательно, $\arg(\lambda_j - \lambda_k) = \omega - (\pi - \eta) = \arg(\lambda_k - \lambda_j) - \pi$. Отсюда следует /8/. Аналогично, когда острый угол с лучем составляет вектор $(\lambda_j - \lambda_k)$. Следствие доказано.

Пусть θ_k – точка посредине отрезка, соединяющего λ_k и λ_{k+1} . Обозначим через m_k замкнутый контур, выходящий из точки θ_k и обходящий точку λ_k против часовой стрелки. Введем $(n-1)$ контуров интегрирования $\Omega_k = m_{k+1} m_k m_{k+1}^{-1} m_k^{-1}$ $(k = 1,\dots, n-1)$, где m_k^{-1} означает обход по контуру m_k в

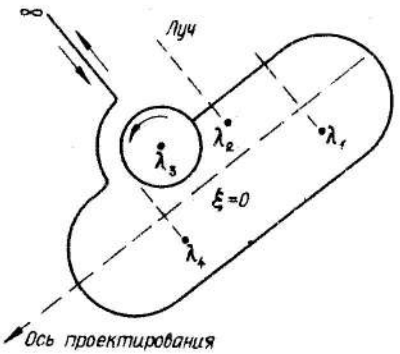


Рис. I.

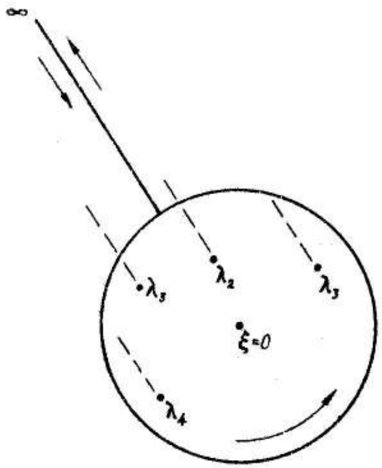


Рис. 2.

отрицательном направлении – по часовой стрелке. ВВедем также контур Ω_n . Он представляет собой петлю, идущую из бесконечности вдоль луча /направленного также как и лучи контуров Σ_k /, обходящую против часовой стрелки точку $\xi = 0$ по окружности, например, такой, что все точки λ_k ($k = 1,2,\ldots, n$) лежат внутри ее, и возвращающуюся к бесконечности вдоль этого же луча /см. рис.2/. Начальные аргументы попрежнему заданы в виде $arg\,(\xi - \lambda_k) = \omega$ $(k = 1,2,\ldots, n)$ на левой стороне луча контуров Σ_k . Для двойной петли Ω_k $(k = 1,2,\ldots, n-1)$ их можно эквивалентно задать в точке $O_k : arg\,(\xi - \lambda_j)_{O_k} = \omega + \theta_j$, где θ_j – угол, по модулю меньший π , на который нужно повернуть /против или по часовой стрелке/ расположенный на левом берегу луча контура Σ_j вектор $/\xi - \lambda_j/$, чтобы совместить его с точкой O_k . Для Ω_n можно эквивалентно считать, что $arg\,(\xi - \lambda_j) = \omega$ $(j = 1,2,\ldots, n)$ на левой стороне луча контура Ω_n в бесконечности. Введем следующие n решений уравнения /5/

$$x_k(x) = \int_{\Omega} e^{x\xi} (\xi - \lambda_1)^{-\Gamma_1 - 1} \ldots (\xi - \lambda_n)^{-\Gamma_n - 1} d\xi \quad (k = 1,2,\ldots, n) \qquad /9/$$

и следующие n коэффициентов

$$\alpha_k = \int_{\Omega_k} (\xi - \lambda_1)^{-\Gamma_1 - 1} \ldots (\xi - \lambda_n)^{-\Gamma_n - 1} d\xi \quad (k = 1,2,\ldots, n-1),$$

$$\alpha_n = e^{-i\pi\rho}\left(e^{-i2\pi\rho}-1\right)\Gamma(-\rho); \quad \rho=\sum_1^n r_\nu + n-1, \qquad /10/$$

где дополнительно предполагается, что $\sum_1^n r_\nu \neq$ целому числу. Пусть $\psi_k'(z)=\alpha_k^{-1} x_k(z)$. Обозначим через $\psi'(z)$ однострочечную матрицу $\{\psi_1'(z),\dots,\psi_n'(z)\}$.

<u>Теорема 2.2</u>. Пусть $Z_1(z)$ – исключительная матрица для уравнения /3/, построенная описанным выше способом из решений $\delta_k^{-1} y_k(z)$, где $y_k(z)$ согласно /5/, а δ_k – согласно /7/. Для выбранной таким способом $Z_1(\delta)$ коэффициенты $C_{k0}=1$ $(k=1,2,\dots,n)$ в уравнении /4/. Пусть заданы пределы $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$ изменения аргумента параллельных лучей контуров Σ_k в /5/. Пусть $Re\,\lambda_k z < Re\,\lambda_{k+1} z$ в секторе $l_1 < \arg z < l_2$. Тогда элементы $[F_1]_{km}$ матрицы F_1 и элементы $[F_2]_{mk}$ матрицы F_2 /см. в [3] теорему I.7 и ее следствия/ имеют вид

$$[F_1]_{km} = \gamma_m t_{km}; \qquad [F_2]_{mk} = t_{mk}\gamma_k e^{i2\pi\sum_k^{m-1} r_\nu}; \qquad /11/$$

$$\gamma_\nu = \left(1-e^{-i2\pi r_\nu}\right); \qquad m=k+1,\ k+2,\dots,n, \quad k=1,2,\dots,n;$$

$$t_{km} = e^{i2\pi r_m}\,\Gamma(1+r_m)\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq m}}^{n}(\lambda_m-\lambda_\nu)^{r_\nu+1} \Big/ e^{i2\pi r_k}\,\Gamma(1+r_k)\prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq k}}^{n}(\lambda_k-\lambda_\nu)^{r_\nu+1},$$

где $(\lambda_k-\lambda_j) = (\lambda_j-\lambda_k)e^{i\pi}$, если $j<k$.

Пусть дополнительно $\sum_1^n r_\nu \neq$ целому числу. В окрестности $z=0$

$$\psi_\nu'(z) = 1+\beta_\nu z+\dots \qquad \nu=1,2,\dots,n-1;$$

$$\psi_n'(z) = z^{\rho}\left(1+\beta_n z+\dots\right). \qquad /12/$$

Во всем рассматриваемом С.С. $\psi'(z)=Z_1(z)\,\Gamma_1'$. Матрица связи Γ_1' имеет вид

$$\Gamma_1' = diag\left\{\delta_1,\dots,\delta_n\right\}\Gamma_0\, diag\left\{\alpha_1^{-1},\dots,\alpha_n^{-1}\right\}, \qquad /13/$$

где δ_k $(k=1,2,\dots,n)$ согласно /7/, а α_k $(k=1,2,\dots,n)$ согласно /10/. Отличные от нуля элементы $[\Gamma_0]_{\nu k}$ матрицы Γ_0 имеет вид

$$[T_0]_{kk} = -\gamma_{k+1}; \quad [T_0]_{k+1,k} = \gamma_k \quad (k=1,2,\dots,n-1);$$

$$[T_0]_{kn} = e^{-i2\pi \sum_{k+1}^{n} r_\nu} \qquad (k=1,2,\dots,n), \qquad /14/$$

где формально полагаем $\sum_{n+1}^{n} r_\nu \equiv 0$.

Подчеркнем, что МС и коэффициенты связи в теореме 2.2 получены для любого исходного С.С. $l_2 - \varphi < \arg x < l_2$, в котором задана исключительная матрица $Z_1(x)$ и нумерация λ_k проведена из условия $Re\,\lambda_k x < Re\,\lambda_{k+1} x$ в секторе $l_1 < \arg x < l_2$. Сам С.С. задается выбор $(\omega_{min} < \omega < \omega_{max})$ лучей контуров Σ_k.

Однострочечная матрица $\Psi(x)$ для уравнения /3/ может быть найдена методом Фробениуса. Отсюда могут быть определены V и соответственно $T_1 = T_1' V^{-1}$. Из /12/ следует, что V_0 есть квазидиагональная матрица $V = diag\{V_0, 1\}$, где порядок матрицы V_0 есть $(n-1)$.

<u>Следствие</u>. Так как $F_1 \equiv \Gamma_{L+1} = D_L D_{L-1} \dots D_1$ и $F_2 = D_{2L} D_{2L-1} \dots D_{L+1}$, то задаваясь определенным порядком следования линий l_ν /порядком изменения смысла неравенств $Re\,\lambda_j x < Re\,\lambda_k x$ на l_ν с увеличением $\arg x$ /см. [I, /0,5/ и с. 485]/ можно найти нетривиальные элементы матриц D_k, т.е. МС. Если, например, $k_\nu = n$ /см. [I, с. 487] /, то элементы $[F_1]_{km}$ и $[F_2]_{mk}$ непосредственно и есть МС.

Для дальнейшего удобно обозначить линию l_k в x-плоскости, на которой $Re\,x(\lambda_j - \lambda_\nu)$ меняет знак с положительного на отрицательный /при увеличении $\arg x$ /, через $l_{\nu j}$.

Найдем, например, МС в случае третьего порядка / $n = 3$/. Здесь возможны два варианта порядка следования простых / $k_\nu = 2$ - см. [I, с. 487] / линий $l_{\nu j}$; /A/ $l_{12}, l_{13}, l_{23}, l_{21}, l_{31}, l_{32}$; /B/ $l_{23}, l_{13}, l_{12}, l_{32}, l_{31}, l_{21}$. Кроме того, здесь $F_1 = D_3 D_2 D_1$, $F_2 = D_6 D_5 D_4$. Для простых линий l_ν каждая матрица D_k содержит только один ненулевой недиагональный элемент d_{mj} /он же и МС/. Для варианта /A/ для $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$ это соответственно $d_{12}, d_{13}, d_{23}, d_{21}, d_{31}, d_{32}$; для варианта /B/ это $d_{23}, d_{13}, d_{12}, d_{32}, d_{31}, d_{21}$. Для варианта /A/:

$$f_1=\begin{pmatrix} 1, & d_{12}, & d_{13} \\ 0, & 1, & d_{23} \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad f_2=\begin{pmatrix} 1 & , 0, & 0 \\ d_{21}, & 1, & 0 \\ d_{31}+d_{32}d_{21}, & d_{32}, & 1 \end{pmatrix} \qquad /15/$$

Сравнивая определитель /15/ с равенством /11/, элементарно получаем

$$d_{12}=\gamma_2\tau_{12}, \quad d_{13}=\gamma_3\tau_{13}, \quad d_{23}=\gamma_3\tau_{23},$$

$$d_{21}=\gamma_1\tau_{21}e^{i2\pi\varsigma_1}, \quad d_{31}=\gamma_1\tau_{31}e^{i2\pi\varsigma_1}, \quad d_{32}=\gamma_2\tau_{32}e^{i2\pi\varsigma_2} \qquad /16/$$

Аналогично для варианта /В/ находим

$$d_{12}=\gamma_2\tau_{12}, \quad d_{13}=\gamma_3\tau_{13}e^{-i2\pi\varsigma_2}, \quad d_{23}=\gamma_3\tau_{23},$$

$$d_{21}=\gamma_1\tau_{21}e^{i2\pi\varsigma_1}, \quad d_{31}=\gamma_1\tau_{31}e^{i2\pi(\varsigma_1+\varsigma_2)}, \quad d_{32}=\gamma_2\tau_{32}e^{i2\pi\varsigma_2} \qquad /17/$$

Наконец, для кратных линий $l_{\nu j}$ $(k_\nu=3)$ имеем

$$d_{12}=\gamma_2\tau_{12}, \quad d_{13}=\gamma_3\tau_{13}, \quad d_{23}=\gamma_3\tau_{23},$$

$$/18/$$

$$d_{21}=\gamma_1\tau_{21}e^{i2\pi\varsigma_1}, \quad d_{31}=\gamma_1\tau_{31}e^{i2\pi(\varsigma_1+\varsigma_2)}, \quad d_{32}=\gamma_2\tau_{32}e^{i2\pi\varsigma_2}.$$

Для второго порядка $(n=2)$ $f_1=D_1$, $f_2=D_2$ с ненулевыми недиагональными элементами соответственно d_{12}, d_{21}. После простых преобразований /с использованием формулы /6/ на с. 18 в [6]/, получаем

$$d_{12}=\frac{i2\pi e^{i\pi(\varsigma_2-\varsigma_1)}(\lambda_1-\lambda_2)^{\varsigma_1-\varsigma_2}}{\Gamma(1+\varsigma_1)\Gamma(-\varsigma_2)}; \qquad d_{21}=\frac{i2\pi e^{i2\pi(\varsigma_1-\varsigma_2)}(\lambda_1-\lambda_2)^{\varsigma_2-\varsigma_1}}{\Gamma(-\varsigma_1)\Gamma(1+\varsigma_2)}. \qquad /19/$$

Пусть задано уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(a_{10}+x^{-1}a_{11}\right)\frac{dy}{dx}+\left(a_{00}+x^{-1}a_{01}+x^{-2}a_{02}\right)y=0 \qquad /20/$$

с $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Пусть ρ_1, ρ_2 – показатели в регулярной особой точке $x = 0$ уравнения /20/. Замена $y(x)=x^{\rho_1}u(x)$ приводит к уравнению с линейными коэффициентами, имеющему $\lambda_{1,2}$ те же, что и в /20/ и $\Gamma'_{1,2}=\Gamma_{1,2}-\rho_1$ /где $\Gamma_{1,2}$ относятся к уравнению /20//. Подставляя $\lambda_{1,2}$ и $\Gamma'_{1,2}$ в /19/, получаем МС для уравнения /20/. Аналогично для /20/ можно найти матрицу T_1.

<u>Доказательство</u> теоремы 2.2. Пусть лучи контуров Σ_k перпендикулярны оси проектирования. Найдем матрицу Y в соотношении $\Phi_1(xe^{i2\pi})=\Phi_1(x)Y$, где $\Phi_1(x)$ составлена из решений уравнения /5/. Для аналитического продолжения $y_k(x)$ будем считать, что при увеличении $\arg x$ на 2π концы контура Σ_k в бесконечности поворачиваются соответственно на (-2π) так, что условие $Re\, x(\xi-\lambda_k)<0$ в процессе поворота постоянно выполняется. Так как при деформации пути интегрирования нельзя пересекать другие особые точки $\lambda_j\ (j\neq k)$, то в результате получится контур Σ'_k указанного на рис. I типа /n = 4, k = 3/. Интеграл типа /5/ по контуру Σ'_k и есть $y_k(xe^{i2\pi})$. Деформируем контур Σ'_k так, чтобы представить его в виде совокупности контуров типа Σ_ν и Σ_ν^{-1} /где под Σ_ν^{-1} понимается контур Σ_ν, проходимый в обратном направлении/. В результате имеем $\Sigma'_k=\Sigma_n\ldots\Sigma_1\Sigma_k\Sigma_1^{-1}\ldots\Sigma_n^{-1}$. /На рис. I $\Sigma'_3=\Sigma_4\ldots\Sigma_1\Sigma_3\Sigma_1^{-1}\ldots\Sigma_4^{-1}$. / Подчеркнем, что порядок следования контуров Σ_k однозначно определяется проекциями векторов λ_k на ось проектирования, т.е. однозначно определяется способом нумерации по теореме 2.1. При повороте в ξ-плоскости концов контура Σ_k на (-2π) аргументы всех оснований $(\xi-\lambda_k)$ изменяются на (-2π). С учетом этого интеграл по участку Σ_n контура Σ'_k есть $e^{i2\pi\sum_1^n\Gamma_\nu}y_n(x)$, интеграл по участку Σ_{n-1} контура Σ'_k есть $e^{i2\pi\sum_1^{n-1}\Gamma_\nu}y_{n-1}(x)$ и т.д. Последовательно проводя это рассуждение на всех участках Σ'_k, получаем

$$y_k(xe^{i2\pi})=(1-e^{-i2\pi\Gamma_k})\left[e^{i2\pi\Gamma_1}y_1(x)+e^{i2\pi(\Gamma_1+\Gamma_2)}y_2(x)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+e^{i2\pi\sum_1^n\Gamma_\nu}y_n(x)\right]+y_k(x). \qquad /21/$$

Значит элемент $[Y]_{mk}$ матрицы Y есть

$$[Y]_{mk} = \gamma_k e^{i2\pi \sum_{1}^{m} r_\nu} + \delta_{mk} \qquad /22/$$

/где δ_{mk} - символ Кронекера/, а элемент $\left[e^{-i2\pi R} Y\right]_{mk}$ матрицы $e^{-i2\pi R} Y$ есть

$$\left[e^{-i2\pi R} Y\right]_{mk} = \gamma_k e^{-i2\pi r_m} e^{i2\pi \sum_{1}^{m} r_\nu} + \delta_{mk} e^{-i2\pi r_m}. \qquad /23/$$

Матрица Y формально получена для определенного направления лучей контуров Σ_k. Но фактически она получена как раз для исключительной матрицы $\Phi_1(z)$, так как $\Phi_1(z)$ получается аналитическим продолжением при повороте лучей в пределах $\omega_{min} < \omega < \omega_{max}$. Для рассматриваемой ф.м. $\Phi_1(z)$ имеем $r_{N+1} = F_2 F_1 = e^{-i2\pi R} Y (N = n(n-1))$ /см. в [3] теорему I.7 и ее следствия/. Покажем, что для ф.м. $\Phi_1(z)$

$$[F_1]_{km} = \gamma_m, \quad [F_2]_{mk} = \gamma_k e^{i2\pi \sum_{k}^{m-1} r_\nu}, \qquad /24/$$

$$m = k+1, \quad k+2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Так как по предположению $[F_1]_{kk} = 1$, $[F_2]_{kk} = 1$ $(k = 1, 2, \dots, n)$, то ненулевые недиагональные элементы матриц F_1 и F_2 должны удовлетворять следующим рекурентным формулам /см. [7], с. 81, формулы /2.14//

$$[F_2]_{mk} = [e^{-i2\pi R} Y]_{mk} - \sum_{j=1}^{k-1} [F_2]_{mj} [F_1]_{jk};$$

$$[F_1]_{km} = [e^{-i2\pi R} Y]_{km} - \sum_{j=1}^{k-1} [F_2]_{kj} [F_1]_{jm}; \qquad /25/$$

$$m = k+1, \ k+2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Докажем справедливость /24/ с помощью индукции. Для этого подставим /23/ и /24/ в /25/. Тогда

$$[F_2]_{mk} = \gamma_k \left[e^{i2\pi \sum_1^{m-1} r_\nu} - \sum_{j=1}^{k-1} \gamma_j e^{i2\pi \sum_j^{m-1} r_\nu} \right] =$$

$$= \gamma_k \left[-\sum_{j=2}^{k-1} e^{i2\pi \sum_j^{m-1} r_\nu} + \sum_{j=2}^{k} e^{i2\pi \sum_j^{m-1} r_\nu} \right] = \gamma_k e^{i2\pi \sum_k^{m-1} r_\nu} .$$

Соответственно

$$[F_1]_{km} = \gamma_m \left[-\sum_{j=2}^{k-1} e^{i2\pi \sum_j^{k-1} r_\nu} + \sum_{j=1}^{k-2} e^{i2\pi \sum_{j+1}^{k-1} r_\nu} + 1 \right] = \gamma_m .$$

Введем диагональную матрицу $D = diag\,\{ c_{10}^{-1}, \ldots, c_{n0}^{-1} \}$, где c_{k0} $(k = 1, 2, \ldots, n)$ взято из уравнения /7/. По условию $Z_1(z) = \Phi_1(z)\, D$. Легко видеть, что если r_ν, D_ν, F_ν заданы для $\Phi_1(z)$, то для $Z_1(z)$ они переходят соответственно в $D^{-1} r_\nu D$, $D^{-1} D_\nu D$, $D^{-1} F_\nu D$. Используя это, получаем равенства /II/.

Разлагая $e^{z\xi}$ в ряд по $(z\xi)$ в /9/ для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ и почленно интегрируя, получаем $x_k(z) = \alpha_k\,(1 + \beta_k z + \ldots)$. Для $x_n(z)$ произведем замену $z\xi = \tau$. Это дает

$$x_n(z) = z^{\beta} \int_{\Omega_n'} e^{\tau} (\tau - z\lambda_1)^{-r_1 - 1} \ldots (\tau - z\lambda_n)^{-r_n - 1} d\tau, \qquad /26/$$

где контур интегрирования в τ-плоскости подобен контуру Ω_n в ξ-плоскости. Полагая, что выполняется $|\tau| > |z\lambda_k|$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ разлагаем каждый сомножитель $(\tau - z\lambda_k)^{-r_k - 1}$ в ряд по $z\lambda_k / \tau$ и результат почленно интегрируем. Это дает $x_n(z) = \alpha_n z^{\beta}(1 + \beta_n z + \ldots)$ /с использованием /5/ на с. 29 в [6], где предварительно сделана замена $t = e^{-i\pi}\tau$). Отсюда следует равенства /I2/. Пусть $X(z)$ и $\Phi_1(z)$ – однострочечные матрицы, составленные соответственно из $x_k(z)$ и $y_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Покажем, что в рассматриваемом С.С. $X(z) = \Phi_1(z)\, T_0$, т.е., что T_0 – матрица связи для $X(z)$ и $\Phi_1(z)$. Деформируя контур Ω_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ так, что точка O_k уходит в бесконечность вдоль луча, параллельного лучам контуров Σ_k, получаем

$$x_k(x)=\gamma_k\, y_{k+1}(x)-\gamma_{k+1}\, y_k(x), \qquad k=1,2,\dots,n-1, \tag{27}$$

т.е. получаем первые $(n-1)$ столбцов матрицы T_0 /см. /I4//. Деформируя контур Ω_n, легко получить $\Omega_n=\Sigma_n\Sigma_{n-1}\dots\Sigma_1$. Из этого находим

$$x_n(x)=y_n(x)+y_{n-1}(x)\,e^{-i2\pi r_n}+y_{n-2}(x)\,e^{-i2\pi(r_n+r_{n-1})}+\dots+y_1(x)\,e^{-i2\pi\sum_2^n r_\nu}. \tag{28}$$

Это дает n-й столбец матрицы T_0 /см. /I4//. Далее

$\Psi'(x)=X(x)\,diag\{\alpha_1^{-1},\dots,\alpha_n^{-1}\}=\Phi_1(x)\,T_0\,diag\{\alpha_1^{-1},\dots,\alpha_n^{-1}\}=$ $=Z_1(x)\,diag\{\delta_1,\dots,\delta_n\}\,T_0\,diag\{\alpha_1^{-1},\dots,\alpha_n^{-1}\}$. Отсюда следует матрица /I3/.

Так как $Z_1(xe^{i2\pi})=Z_1(x)\,D^{-1}YD$, то $D^{-1}YD=$ $=T_1'V^{-1}e^{i2\pi J}V\,(T_1')^{-1}$. Так как $J=diag\{0,1,\dots,(n-2),\rho\}$, то $e^{i2\pi J}=diag\{1,\dots,1,e^{i2\pi(r_1+\dots+r_n)}\}$ и, следовательно, $V^{-1}e^{i2\pi J}V=diag\{V_0^{-1},1\}\,e^{i2\pi J}\,diag\{V_0,1\}=e^{i2\pi J}$. Поэтому $D^{-1}YD=T_1'\,e^{i2\pi J}\,(T_1')^{-1}$. Подставляя в последнее выражение равенство /I3/, находим $Y=T_0\,e^{i2\pi J}\,T_0^{-1}$.

Покажем, что нумерация столбцов матрицы T_0 соответствует независимо полученной матрице Y, т.е., что $YT_0=T_0e^{i2\pi J}$. Пользуясь /I4/ и /22/, находим, что отличные от нуля элементы первых $(n-1)$-столбцов YT_0 есть

$$[YT_0]_{kk}=-\gamma_{k+1}; \qquad [YT_0]_{k+1,k}=\gamma_k, \qquad k=1,2,\dots,n-1.$$

Аналогично n-й столбец матрицы YT_0 есть

$$[YT_0]_{mn}=e^{i2\pi\sum_1^m r_\nu}\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-i2\pi\sum_{k+1}^{n} r_\nu}-e^{-i2\pi\sum_k^n r_\nu}\right)+e^{-i2\pi\sum_{m+1}^{n} r_\nu}.$$

Так как $\sum_{k=1}^{n}\left(e^{-i2\pi\sum_{k+1}^{n} r_\nu}-e^{-i2\pi\sum_k^n r_\nu}\right)=1-e^{-i2\pi\sum_1^n r_\nu}$, то окончательно $[YT_0]_{mn}=e^{-i2\pi\sum_1^m r_\nu}$ $(m=1,2,\dots,n)$. Так как $e^{i2\pi J}=diag\{1,\dots,1,e^{i2\pi(r_1+\dots+r_n)}\}$, то легко проверить, что матрица $T_0e^{i2\pi J}$ совпадает с найденной выше YT_0. Теорема доказана.

Методом деформации контуров Σ_k матрица Y найдена для уравнения типа /3/, в случае второго порядка /с $\lambda_{1,2} = \pm i$ / в [8]. Методом деформации контуров Ω_k связь между $x_k(x)$ и $y_\gamma(x)$ найдена для второго порядка /с $\lambda_{1,2} = \pm i$ / в [8] и для третьего порядка /при специальном расположении λ_1, λ_2, λ_3 в ξ-плоскости/ в [9]. В [8, 9] также указано, что подходящей линейной заменой уравнения с произвольными, но различными (λ_1, λ_2) и $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ могут быть сведены к рассмотренным.

МС и T_1 для уравнения /20/ можно также получить, используя функции Уиттекера, так как линейной заменой / [6, с. 239, 240] / уравнение /20/ сводится к уравнению Уиттекера

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{x}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2}\right)y = 0. \qquad /29/$$

Найдем /для примера и для сравнения/ T_1 для уравнения /29/ с помощью теоремы 2.2. Замена $y(x) = z^{1/2+\mu}\, u(x)$ приводит /29/ к уравнению с линейными коэффициентами и с $\lambda_1 = 1/2$, $\lambda_2 = -1/2$,

$$\arg(\lambda_1 - \lambda_2) = \arg 1 = 0, \quad r_1 = -x - \mu - 1/2, \quad r_2 = x - \mu - 1/2, \quad \rho = -2\mu.$$

При этом предполагается, что выбрано $\omega_{min} = 0$, $\omega_{max} = \pi$ и значит $Z_1(x)$ асимптотически базисна в С.С. $-\pi/2 < \arg x < 3\pi/2$. Соответственно $Re\, \lambda_1 x < Re\, \lambda_2 x$ в секторе $\pi/2 < \arg x < 3\pi/2$. В этом случае

$$\alpha_1 = \int^{(-\frac{1}{2}+,\, \frac{1}{2}+,\, -\frac{1}{2}-,\, \frac{1}{2}-)} (\xi - \tfrac{1}{2})^{x+\mu-\frac{1}{2}} (\xi + \tfrac{1}{2})^{-x+\mu-\frac{1}{2}}\, d\xi$$

/обозначение см. [6, с. 29] /, где в точке O_1: $\arg(\xi + 1/2)_{O_1} = 0$, $\arg(\xi - 1/2) = \pi$. Замена $\xi = t - 1/2$ приводит к выражению

$$\alpha_1 = \int^{(0+,\, 1+,\, 0-,\, 1-)} t^{-x+\mu-\frac{1}{2}} (t-1)^{x+\mu-\frac{1}{2}}\, dt = -\int^{(1+,\, 0+,\, 1-,\, 0-)} t^{-x+\mu-\frac{1}{2}} (t-1)^{x+\mu-\frac{1}{2}}\, dt = -A,$$

где в точке O_1' /на отрезке между $t = 0$ и $t = 1$ / $\arg t_{O_1'} = 0$, $\arg(t-1)_{O_1'} = \pi$. Выразим интеграл А через

$$B_1 = \int^{(1+,\, 0+,\, 1-,\, 0-)} t^{-x+\mu-\frac{1}{2}} (1-t)^{x+\mu-\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \left(1 - e^{i2\pi(-x+\mu+\frac{1}{2})}\right)\left(1 - e^{i2\pi(x+\mu+\frac{1}{2})}\right) B\left(-x+\mu+\tfrac{1}{2},\ x+\mu+\tfrac{1}{2}\right),$$

где $\arg t_{0_1'}=0$, $\arg(1-t)_{0_1'}=0$, $B(\chi+\mu+1/2,\chi+\mu+1/2)$ – бетта-функция /см. [6, с. 29] /. Контура интегрирования интегралов A и B_1 одинаковы. Аргумент основания t на этих контурах одинаков. Если основание $(1-t)$ в интеграле B_1 умножить на $e^{i\pi}$, то $\arg(1-t)e^{i\pi}=\arg(t-1)$ для интеграла A в точке $0_1'$ и в любой другой точке контура интегрирования. Следовательно, $A=e^{i\pi(\chi+\mu-1/2)}B_1$. Пользуясь соотношением $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ /[6, с. 24] / и подставляя все в /7/, /8/, /10/, /13/, /14/, находим

$$T_1=\frac{2\pi\mu}{\sin 2\pi\mu}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\chi\right)\Gamma(1-2\mu)}, & \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\chi\right)\Gamma(1+2\mu)}\\ -\dfrac{e^{-i\pi\left(\frac{1}{2}-\mu+\chi\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu+\chi\right)\Gamma(1-2\mu)}, & \dfrac{e^{-i\pi\left(\frac{1}{2}+\mu+\chi\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu+\chi\right)\Gamma(1+2\mu)}\end{pmatrix}. \qquad /30/$$

Этот же результат может быть получен с помощью функций Уиттекера.

Замечание. Если для уравнения /3/ какой-либо из $r_\nu\geq 0$, целый, то соответствующее выражение /4/ является истинным решением в виде полинома от x^{-1} с первым ненулевым коэффициентом C_{r_ν} /см. [10] /. В этом случае в теореме 2.2 нужно принять $\delta_\nu=1$ и соответственно в τ_{km}, τ_{mk} положить равными единице все зависящие от индекса ν сомножители.

1. Смилянский В.Р. О множителях Стокса для различных систем линейных дифференциальных уравнений. I. – Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 3, с. 483-496.

2. Смилянский В.Р. О множителях Стокса для различных систем линейных дифференциальных уравнений. II. – Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 7, с. 1207-1210.

3. Смилянский В.Р. Некоторые свойства множителей Стокса. I. – В кн.: Исследования по теории операторов и их приложениям. Киев: Наук. думка, 1979, с. 97-107.

4. Смилянский В.Р. Некоторые свойства множителей Стокса. II. – В кн.: Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. Киев: Наук. думка, 1981, с. 107-117.

5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.

6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1965.– 296 с.

7. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. – М.: Наука, 1965. – 348 с.

8. Horn J. Verwdung asymptotischer Darstellungen zur Untersuchung der Integrale einer speciellen linearen Differentialgleichung. I. - Math. Ann., 1897, 49, p.453-472.
9. Horn J. Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen. - Math. Ann., 1897, 50, p.525-556.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Физматгиз, 1961. - 121 с.

УДК 548.571; 681.3

Е.С.Сыркин, С.Б.Феодосьев

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ СМЕЩЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ ИДЕАЛЬНЫХ И ПРИМЕСНЫХ АТОМОВ В АНИЗОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Среднеквадратичные смещения и скорости атомов кристаллической решетки - один из важнейших характеристик колебательных свойств кристалла. Так, в эффекте Мессбауэра среднеквадратичные смещения определяют вероятность эффекта, а среднеквадратичные скорости - сдвиг положения максимума этой вероятности /так называемое красное смещение/ [1]. Среднеквадратичное смещение входит в показатель экспоненты фактора Дебая - Уоллера [2], который определяет сечение рассеяния нейтронов решеткой и понижение, вследствие теплового движения атомов, интенсивности рентгеновского излучения, испытавшего брэгговское рассеяние.

Большинство природных кристаллов анизотропны по своим упругим свойствам. Анизотропия межатомного взаимодействия существенно влияет на фононный спектр таких веществ и сказывается на многих их колебательных характеристиках. К числу измеряемых в кристалле величин, в поведении которых анизотропия проявляется наиболее отчетливо, относятся среднеквадратичные смещения и скорости атомов в различных кристаллографических направлениях. Это обусловливает интерес к изучению данных характеристик анизотропных кристаллов. Следует отметить, что даже для сравнительно простых моделей решеток, изотропных по упругим свойствам, вычисление среднеквадратичных скоростей и смещений традиционными методами [2, 4] сопряжено с немалыми трудностями из-за необходимости определять закон дисперсии и векторы поляризации в каждом нормальном колебании. Это вынуждает многих авторов либо использовать для получения результатов эйнштейновское или дебаевское приближение [2], либо ограничиваться исследованием асимптотического поведения температурных зависимостей рассматриваемых величин [5].

С еще большими трудностями связано вычисление среднеквадратичных смещений и скоростей примесных атомов, знание которых необходимо для интерпретации эффекта Моссбауэра на примесных ядрах [3, 4], рассеяния нейтронов на локальных колебаниях [6] и др. В анизотропных кристаллах это вызывает дополнительный интерес из-за расщепления локальных [7] или квазилокальных колебаний и неодновременности их возникновения для разных направлений движения примеси.

В настоящей работе использован метод якобиевых матриц, разработанный В.И.Пересадой [8-11]. Этот метод позволяет вычислять различные термодинамические характеристики произвольной системы атомов без нахождения законов дисперсии и векторов поляризации. В технике якобиевых матриц нами рассчитаны среднеквадратичные смещения $\langle x_h^2 \rangle_T$ и среднеквадратичные скорости $\langle v_h^2 \rangle_T$ вдоль разных неэквивалентных кристаллографических направлений h. Расчет проводился для конкретной модели решетки в широком интервале температур. Исследовано поведение фононных спектров, среднеквадратичных скоростей и смещений атомов основной решетки при изменении анизотропии кристалла. Изучено также влияние на эти характеристики атомов примеси.

Среднеквадратичные смещения атома произвольной системы в направлении h определяются следующим образом [8]:

$$\langle x_h^2 \rangle_T = \frac{\hbar}{2m_R} \int_0^{\lambda_{max}} \frac{\rho_h(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} cth \frac{\hbar\sqrt{\lambda}}{2kT} d\lambda , \qquad /1/$$

а среднеквадратичные скорости

$$\langle v_h^2 \rangle_T = \frac{\hbar}{2m_R} \int_0^{\lambda_{max}} \sqrt{\lambda}\, \rho_h(\lambda) cth \frac{\hbar\sqrt{\lambda}}{2kT} d\lambda . \qquad /2/$$

В обеих формулах m_R - масса атома с радиус-вектором R ; λ - квадраты частот нормальных колебаний; λ_{max} - их максимальное значение; T - температура, k - постоянная Больцмана, $\hbar$ - постоянных Планка; $\rho_h(\lambda)$ - спектральная плотность, порожденная единичным смещением в направлении h атома с радиус-вектором R .

Спектральные плотности, порожденные всеми линейно независимыми векторами h , содержат всю необходимую информацию о колебаниях данного атома в рассматриваемой системе. Разработана

[8-11] эффективная процедура вычисления аналитической аппроксимации функций $\rho_h(\lambda)$ и с ее помощью интегралов типа /1/, /2/. Эта процедура, в общих чертах, сводится к следующему.

Пусть силовое взаимодействие между атомами в системе описывается матрицей силовых постоянных $\Phi^{\sigma\sigma'}_{RR'}$. Обозначим через h_0 единичное смещение R-го атома в направлении h и введем матрицу $L^{\sigma\sigma'}_{RR'} = \frac{\Phi^{\sigma\sigma'}_{RR'}}{\sqrt{m_R m_{R'}}}$. С помощью вектора h_0 и оператора L образуем так называемое циклическое подпространство пространства смещений H. Это подпространство, которое мы обозначим H_h, построено на последовательности векторов

$$h_0,\ Lh_0,\ L^2h_0 \qquad /3/$$

и, как несложно убедиться, является инвариантным относительно оператора L.

Подпространство H_h ортогонально ко всем возможным колебательным состояниям системы /8/, при которых рассматриваемый атом не совершает колебаний вдоль направления h. Поэтому спектральная плотность $\rho_h(\lambda)$*, а следовательно, и величины $\langle x_h^2\rangle_T$ и $\langle v_h^2\rangle_T$ определяются исключительно колебаниями из подпространства H_h. Оператор L индуцирует в подпространстве H_h оператор L_h, который в базисе, полученном путем последовательной ортонормализации векторов /3/ имеет вид матрицы Якоби.

$$L_h = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ L_{01} & L_{11} & L_{12} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & L_{12} & L_{22} & L_{23} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & L_{23} & L_{33} & L_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \qquad /4/$$

Если известны первые 2к элементов якобиевой матрицы /4/, то для спектральной плотности $\rho_h(\lambda)$ с хорошей степенью точности можно записать [8, 9]:

$$\rho_h(\lambda) = \rho_h^{(k)}(\lambda) = \frac{8}{\pi\lambda_{max}}\ \frac{\sqrt{\lambda(\lambda_{max}-\lambda)}}{R_{2k-1}(\lambda)}, \qquad /5/$$

---

* Функция $\rho_h(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(h, E_\lambda h)$, где $(h, E_\lambda h)$ матричный элемент разложения единицы E_λ оператора L [10].

где $\rho_h(\lambda)$ - спектральная плотность оператора, в матрице которого первые 2к элементов - найденные точно первые 2к элементов матрицы /4/, а остальные элементы заменены своими асимптотическими значениями / $L_{n,n} = \frac{1}{2}\lambda_{max}$, $L_{n,n\pm1} = \frac{1}{4}\lambda_{max}$ /. Полиномы R_{2k-1} могут быть легко найдены с помощью конечного числа элементов матрицы /4/ [8, 9]. Привлечение спектральной плотности $\rho_h^k(\lambda)$ позволяет без труда вычислить интегралы /1/ и /2/ с бóльшей точностью.

Выберем в качестве модели тетрагональную обьемно-центрированную решетку с центральным взаимодействием между атомами как в базисной, так и в соседних плоскостях. Легко убедиться, что эта решетка удовлетворяет условиям упругой устойчивости и вращательной инвариантности [2]. Матрица силовых постоянных имеет следующий вид:

для атомов из одного слоя

$$\varphi_{ik}(a,0,0) = -\alpha\delta_{ix}\delta_{kx}, \qquad /6/$$

для атомов из соседних слоев

$$\varphi_{ik}\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a\varepsilon}{2}\right) = -\gamma\alpha\begin{pmatrix}1 & 1 & \varepsilon\\ 1 & 1 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2\end{pmatrix}, \qquad /7/$$

из условия трансляционной инвариантности

$$\varphi_{ik}(0,0,0) = \alpha\{(2+8\gamma)(\delta_{ix}+\delta_{iy}) + 8\gamma\varepsilon^2\delta_{iz}\}\delta_{ik}. \qquad /8/$$

В формулах /6/-/8/: a - межатомное расстояние в базисной плоскости XOY, параметр ε характеризует растяжение решетки вдоль оси четвертого порядка /ось OZ /, α - силовая постоянная для атомов из одного слоя, $\gamma\alpha$ - то же для атомов из соседних слоев. В данной модели легко описывается анизотропия межатомного взаимодействия.

В качестве порождающих векторов h_i выберем смещения атома /000/ в направлениях вдоль базисной плоскости [100] и в перпендикулярном к ней направлении [001]. Образованные этими порождающими векторами циклические подпространства преобразуются по различным неприводимым представлениям точечной группы симметрии данного кристалла D_{4h} - двумерному E_u и одномерному A_{2u} [12] соответственно. При помощи описанной выше методики можно получить элементы якобиевых матриц операторов L_1 и L_2, индуцированных соответственно в неприводимых подпространствах E_u и A_{2u} и отвечающие им спектральные плотности $\rho_1(\lambda)$

и $\rho_2(\lambda)$. Приведем точные значения первых четырех матричных элементов в обоих инвариантных подпространствах.

В подпространстве E_u /порожденном смещением атома /000/ в направлении [100] /

$$
\begin{aligned}
L_{00} &= 2 + 8\gamma; \\
L_{01} &= \sqrt{2 + 8\gamma^2(2 + \varepsilon^2)}; \\
L_{11} &= 2 + 8\gamma + 32\gamma^3 \frac{\varepsilon(\varepsilon^2 - 1)}{1 + 4\gamma^2(2 + \varepsilon^2)}; \\
L_{12} &= \Big\{1 + 4\gamma^2(\varepsilon^2 + 12) - 64\gamma^3 \frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2 - 1)}{1 + 4\gamma^2(2 + \varepsilon^2)} + 4\gamma^4 \frac{67\varepsilon^6 - 106\varepsilon^4 - 12\varepsilon^2 - 56}{1 + 4\gamma^2(2 + \varepsilon^2)} - \\
&\quad - 1024\gamma^6 \left[\frac{\varepsilon^2(\varepsilon^2 - 1)}{1 + 4\gamma^2(2 + \varepsilon^2)}\right]^2\Big\}^{1/2}.
\end{aligned}
\qquad /9а/
$$

В подпространстве, порожденном смещением атома [000] в направлении [001],

$$
\begin{aligned}
L_{00} &= 8\gamma\varepsilon^2; \\
L_{01} &= 2\gamma^{\varepsilon}\sqrt{2(2 + \varepsilon^2)}; \\
L_{11} &= \frac{6 + 8\gamma(2 + \varepsilon^4)}{2 + \varepsilon^2}; \\
L_{12} &= \frac{2}{2 + \varepsilon^2}\sqrt{1 + 5\varepsilon^2 - 24\gamma\varepsilon^2(\varepsilon^2 - 1) + \gamma^2\left(4 + 52\varepsilon^2 - 62\varepsilon^4 + 38\varepsilon^6 + \frac{19\varepsilon}{4^{\varepsilon}}\right)}.
\end{aligned}
\qquad /9б/
$$

Максимальная частота колебаний решетки

$$
\lambda_{max} = \begin{cases} 16\gamma\varepsilon^2; & \text{при} \quad \gamma \geqslant \dfrac{1}{4(\varepsilon^2 - 1)}, \\ 4 + 16\gamma; & \text{при} \quad \gamma \leqslant \dfrac{1}{4(\varepsilon^2 - 1)}. \end{cases} \qquad /10/
$$

Дальнейшее вычисление элементов якобиевых матриц целесообразно проводить численно с применением ЭВМ. /Алгоритм и программа для ЭВМ М-222 изложены в [13.]/. Значения элементов якобиевых матриц /размерности 5 x 5/ идеальных анизотропных решеток для различных значений параметра анизотропии γ содержатся в табл. I / ε = 2/.

По известным элементам якобиевых матриц можно найти аналитические аппроксимации спектральных плотностей в обоих инвариантных подпространствах: $\rho_1(\lambda)$ – подпространстве E_u и $\rho_2(\lambda)$ – в подпространстве A_{2u}. Интегралы /1/ и /2/, вычисленные со спектральными плотностями $\rho_2(\lambda)$, определяют соответственно среднеквадратичные смещения и скорости атомов в направлении, перпендикулярном базисным плоскостям, а со спектральной плотностью $\rho_1(\lambda)$ – вдоль этих плоскостей.

Т а б л и ц а I. Элементы Якобиевых матриц

γ	I,2	I	0,8
λ_{max}	76,8	64	5I,2
Подпространство E_u (порожденное смещением атома с			
L_{00}/λ_{max}	0,I5I0464	0,I5625	0,I640625
L_{01}/λ_{max}	0,I0980815	0,II04854	0,III72I48
L_{11}/λ_{max}	0,3940II22	0,39625	0,39878I3I
L_{12}/λ_{max}	0,22095925	0,2I899	0,2I63I86
L_{22}/λ_{max}	0,36580435	0,3674077	0,36962875
L_{23}/λ_{max}	0,I65I47[illegible]9	0,I6633II4	0,I684I36
L_{33}/λ_{max}	0,4642069	0,4569688	0,4453394
L_{34}/λ_{max}	0,25932329	0,2598I53	0,25980373
L_{44}/λ_{max}	0,43335645	0,43807II	0,44646378
L_{45}/λ_{max}	0,22043I88	0,2I94948I	0,2I8I6792
Подпространство A_{2u} (порожденное смещением атома с			
L_{00}/λ_{max}	0,5	0,5	0,5
L_{01}/λ_{max}	0,2I650635	0,2I650635	0,2I650635
L_{11}/λ_{max}	0,38802083	0,390625	0,39453I25
L_{12}/λ_{max}	0,2677399I	0,265625	0,2625337I
L_{22}/λ_{max}	0,5477I954	0,550209	0,55349525
L_{23}/λ_{max}	0,22993702	0,229630I	0,229558I6
L_{33}/λ_{max}	0,50656387	0,5060887	0,5045002I
L_{34}/λ_{max}	0,250754I8	0,25I4722	0,25284969
L_{44}/λ_{max}	0,502I4364	0,5003608	0,4975I68I
L_{45}/λ_{max}	0,24933I22	0,2497844	0,2503649

0,6	0,5	0,2	0,I	0,03
38,4	32	I2,8	6,64	4,48

R = /0, 0, 0/ в направлении /I00/)

0,I7708333	0,I875	0,28I25	0,4375	0,5
0,II434634	0,II69267	0,I546796	0,2460627	0,3I90637
0,40I02472	0,40I7856	0,4036989	0,485887	0,5022653
0,2I25I474	0,2099I63	0,I928407	0,2053558	0,228I9II
0,3728I05I	0,3749I32	0,380746	0,43I205	0,499I7803
0,I7240706	0,I75767	0,I934306	0,2I57035	0,234730I2
0,42635235	0,4I340296	0,39522553	0,44I94302	0,48929039
0,2569843	0,25223I4	0,20723956	0,23II2697	0,24I0406
0,46253029	0,47495458	0,4403346I	0,45989705	0,4856252I
0,2I700I06	0,2I7749I6	0,237I9I77	0,2304785	0,2442832

R = (0, 0, 0) в направлении /00I/)

0,5	0,5	0,5	0,5	0,2I42857
0,2I650635	0,2I650635	0,2I650635	0,2I650635	0,0927884
0,40I04I66	0,40625	0,453I25	0,53I25	0,3839285
0,25802302	0,253876I	0,230I706	0,2379929	0,287603
0,5577352	0,5599747	0,533650I	0,4360632	0,60764482
0,23045643	0,2320455	0,2627595	0,238442	0,2443708
0,4998933	0,494976I5	0,48084357	0,5305748	0,4055865
0,2555I99	0,25752I03	0,2475I522	0,263632I7	0,22366357
0,4934677	0,49I74I99	0,5055I748	0,49794227	0,5388I085
0,2505860I	0,2499005I	0,24598I5I	0,24322304	0,243459II

На рис. I представлены спектральные плотности в обоих инвариантных подпространствах, на рис. 2 и рис. 3 – соответственно температурные зависимости безразмерных величин $\frac{2m\sqrt{\lambda_{max}}}{\hbar}\langle x_h^2\rangle_T$ и $\frac{2m}{\sqrt{\lambda_{max}}\,\hbar}\langle v_h^2\rangle_T$. Проследим за эволюцией всех этих величин с изменением анизотропии кристалла. При $\gamma = 1{,}2$ связь между атомами в базисной плоскости значительно слабее, чем между атомами из соседних плоскостей. Это обуславливает малость первого матричного элемента якобиевой матрицы в подпространстве E_u и сдвиг соответствующей спектральной плотности в область низких частот. Среднеквадратичное смещение атомов вдоль базисной плоскости существенно выше, чем в перпендикулярном направлении, а среднеквадратичная скорость ниже. Кривые среднеквадратичных смещения и скорости вдоль базисной плоскости имеют большой линейный участок, так как из-за сосредоточения почти всей спектральной плотности в области низких частот возбуждение практически всех колебаний /переход к классическому пределу/ наступает уже при сравнительно низких температурах.

С уменьшением параметра γ кристалл становится менее анизотропным. Спектральные плотности в подпространстве E_u постепенно смещаются в область более высоких частот. Спектральные плотности в подпространстве A_{2u} пока мало чувствительны к изменениям γ (для $\varepsilon=2$ при $\gamma \geq \frac{1}{12}$ величины $\frac{L_{00}}{\lambda_{max}}$ и $\frac{L_{01}}{\lambda_{max}}$ в A_{2u} не зависят от этого параметра/. Кривые температурных зависимостей среднеквадратичных скоростей и смещений для обоих направлений сближаются. При $\gamma \simeq 0.1$ силы связи между атомами вдоль и перпендикулярно базисной плоскости примерно одинаковы. Соответственно практически совпадают среднеквадратичные смещения и скорости в различных направлениях. Спектральные плотности в обоих инвариантных подпространствах не претерпевают существенных смещений в сторону нижней или верхней границы фононного спектра. Различие в поведении спектральных плотностей обусловлено сохранившейся анизотропией с геометрией решетки.

Дальнейшее уменьшение γ приводит к тому, что связь между атомами в базисной плоскости становится сильнее, чем между атомами из разных плоскостей. При $\gamma = 0{,}03$ спектральная плотность $\rho_2(\lambda)$ смещена в область низких частот. /В подпро-

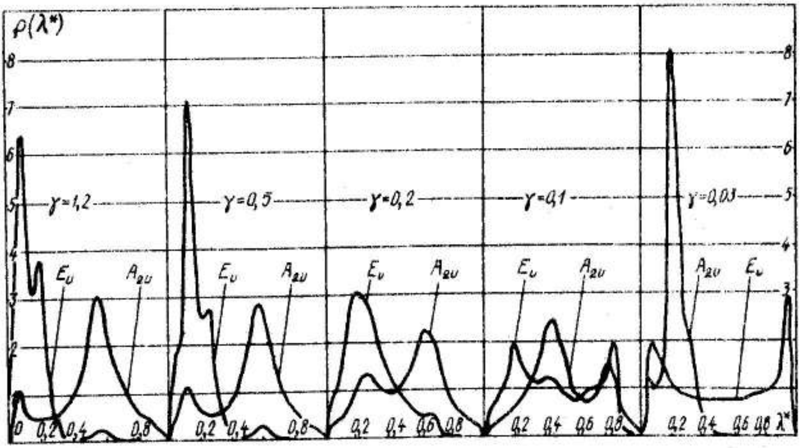


Рис. I. Эволюция спектральных плотностей идеальных анизотропных решеток в различных инвариантных подпространствах E_u и A_2 и при изменении анизотропии кристалла.

Рис. 2. Среднеквадратичные смещения атомов идеальной анизотропной решетки / E_u – вдоль базисной плоскости, A_{2u} – вдоль оси четвертого порядка, $\theta = \frac{\hbar\sqrt{\lambda_{max}}}{k}$ /.

пространстве A_{2u} элементы якобиевой матрицы $\frac{L_{00}}{\lambda_{max}}$ и $\frac{L_{01}}{\lambda_{max}} \sim$ $\sim \gamma$ см. формулы /9б/ и /10//.

В направлении вдоль оси четвертого порядка среднеквадратичное смещение атомов выше, а среднеквадратичная скорость ниже,

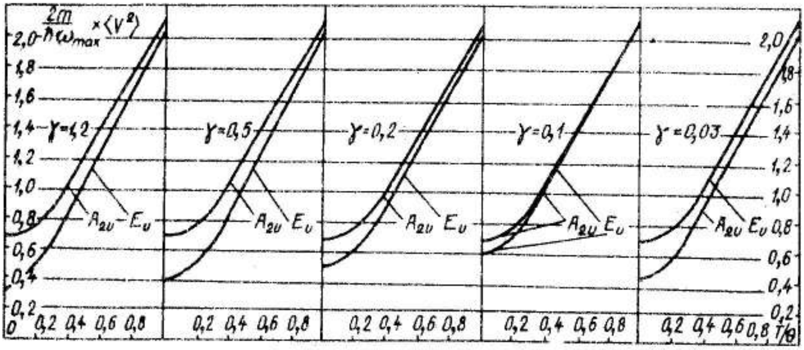


Рис. 3. Среднеквадратичные скорости атомов идеальной анизотропной решетки.

чем в базисной плоскости. Рассматриваемые величины в направлении вдоль оси четвертого порядка выходят на классический предел при более низких температурах. В табл. 2 и табл. 3 приведены значения отношений $\frac{\langle x^2_{[100]}\rangle_T}{\langle x^2_{[100]}\rangle_T}$ и $\frac{\langle v^2_{[100]}\rangle_T}{\langle v^2_{[001]}\rangle_T}$ при разных температурах и значениях параметра анизотропии γ .

Пусть в кристалле содержится точечный дефект - примесь замещения. Наличие такого дефекта приводит к изменению оператора L , который приобретает некоторое приращение Λ . В координатном представлении оператор возмущения Λ , как показано в /11/, имеет вид

$$\Lambda^{\sigma\sigma'}_{00}=\frac{m\beta-m'+m}{m'}L^{\sigma\sigma'}_{00};$$
$$\Lambda^{\sigma\sigma'}_{0h}=\left(\frac{1+\beta}{\sqrt{1+\frac{m'-m}{m'}}}-1\right)L^{\sigma\sigma'}_{h}; \qquad /11/$$
$$\Lambda^{\sigma\sigma'}_{hh'}=-\beta L^{\sigma\sigma'}_{h},$$

где β - относительное изменение силовых постоянных; m - масса основного атома решетки; m' - масса примеси. Не ограничивая общности, считаем, что примесной атом помещен в начало координат.

Построим аналогично /3/ с помощью оператора $(L+\Lambda)$ инвариантные подпространства. Операторы, индуцированные в этих подпространствах операторам $L+\Lambda$, также могут быть представле-

Таблица 2. Отношение $\dfrac{\langle x^2_{[100]} \rangle_T}{\langle x^2_{[100]} \rangle_T}$.

T/θ	γ							
	I,2	I	0,8	0,6	0,5	0,2	0,I	0,03
0	I,8298	I,7908	I,7369	I,66I8	I,6I22	I,3634	I,I536	0,8I999
0,0I	I,8325	I,7922	I,7379	I,66I6	I,6I22	I,3622	I,I537	0,8206
0,02	I,8398	I,7978	I,7409	I,66I8	I,6III	I,3663	I,I54I	0,8226
0,05	I,89I2	I,8385	I,7698	I,6753	I,6I70	I,3805	I,I586	0,8358
0,I	2,0702	I,9487	I,896I	I,7646	I,6869	I,4357	I,I858	0,8687
0,I5	2,28II	2,I382	2,0638	I,8975	I,8004	I,5I49	I,2267	0,8887
0,2	2,4580	2,350I	2,2II4	2,0I94	I,9073	I,5904	I,265I	0,8948
0,3	2,6842	2,5608	2,406I	2,I839	2,0540	I,6973	I,3I85	0,8947
0,4	2,8024	2,6733	2,5I00	2,2729	2,I342	I,7574	I,3484	0,89I2
0,5	2,8679	2,7359	2,5680	2,3229	2,I795	I,79I9	I,3657	0,8894
0,6	2,9070	2,7733	2,6029	2,353I	2,2069	I,8I30	I,376I	0,8882
0,7	2,93I9	2,7972	2,6552	2,3724	2,2244	I,8266	I,3828	0,8873
I	2,9690	2,8329	2,6584	2,40I3	2,2507	I,8470	I,3930	0,8860

Таблица 3. Отношение $\dfrac{\langle v^2_{[100]} \rangle_T}{\langle v^2_{[001]} \rangle_T}$.

T/θ	γ							
	I,2	I	0,8	0,6	0,5	0,2	0,I	0,03
0	0,5389	0,5495	0,5646	0,5885	0,6065	0,7425	0,9I67	I,458
0,0I	0,5389	0,5495	0,5646	0,5885	0,6065	0,7425	0,9I67	I,458
0,02	0,5389	0,5495	0,5647	0,5885	0,6065	0,7425	0,9I67	I,458
0,05	0,54I3	0,55I6	0,5665	0,5900	0,6078	0,7432	0,9I7I	I,459
0,I	0,5720	0,5806	0,593I	0,6I34	0,629I	0,7543	0,9222	I,438
0,I5	0,63I2	0,6378	0,6477	0,6639	0,6765	0,7822	0,933I	I,376
0,2	0,6955	0,7008	0,7085	0,72II	0,73II	0,8I68	0,9449	I,302
0,3	0,7992	0,8024	0,8072	0,8I5I	0,82I5	0,8768	0,9638	I,I88
0,4	0,8645	0,8666	0,8697	0,8750	0,879I	0,9I6I	0,9756	I,I2I
0,5	0,9045	0,9059	0,908I	0,9II8	0,9I47	0,9406	0,9829	I,083
0,6	0,9298	0,9309	0,9325	0,935I	0,9372	0,9563	0,9874	I,060
0,7	0,9466	0,9474	0,9486	0,9506	0,9522	0,9667	0,9904	I,043
I	0,97I9	0,9723	0,9729	0,9740	0,9748	0,9824	0,9950	I,023

ны в виде якобиевых матриц. Для случая изотопической примеси $/\beta = 1/$, который мы только и будем в дальнейшем рассматривать, якобиевы матрицы выглядят следующим образом:

$$(L+\Lambda)_h = \begin{pmatrix} \frac{m}{m'} L_{00} & \sqrt{\frac{m}{m'}} L_{01} & 0 & \dots \\ \sqrt{\frac{m}{m'}} L_{01} & L_{11} & L_{12} & 0 \dots \\ 0 & L_{12} & L_{22} & L_{23} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} . \qquad /12/$$

Таким образом, если известна якобиева матрица идеальной решетки /4/, получить якобиевы матрицы решетки с дефектами /12/ не составляет труда. Отыскав соответствующие спектральные плотности $\tilde{\rho}_h(\lambda)$ и вычислив интегралы /1/ и /2/, получим среднеквадратичные смещения и скорости примесных атомов.

На рис. 4-6 показана эволюция спектральных плотностей, среднеквадратичных смещений и скоростей тяжелых примесных атомов $/m' > m/$ при изменении их массы /параметр γ фиксирован и равен 1,2/. На рис. 7-9 - аналогичные изменения тех же характеристик для случая легкой примеси.

Колебания тяжелой примеси сосредоточены главным образом в области низких частот. Спектральные плотности /рис. 4/ приобретают на низких частотах резкие максимумы - происходит образование квазилокальных колебаний. Естественно, что в направлении слабой связи /в нашем случае вдоль базисной плоскости/ квазилокальные колебания образуются при меньшем отношении масс $\frac{m'}{m}$. Максимумы на спектральных плотностях $\rho_1(\lambda)$ /подпространство E_u / левее выше и уже, чем на спектральных плотностях $\rho_2(\lambda)$ /подпространство A_{2u} /. Так как практически все колебания тяжелой примеси низкочастотны, их почти полное возбуждение происходит при весьма низких температурах, что приводит к классической /линейной/ температурной зависимости $\langle x_h^2 \rangle_T$ и $\langle v_h^2 \rangle_T$ в широком интервале температур. При более низких температурах начинает проявляться классический закон равнораспределения, вследствие чего кривые температурных зависимостей $\langle v_h^2 \rangle_T$ для различных направлений сближаются с увеличением массы примеси /рис. 6/. С изменением массы среднеквадратичные смещения и скорости при низких и высоких температурах изменяются следующим образом:

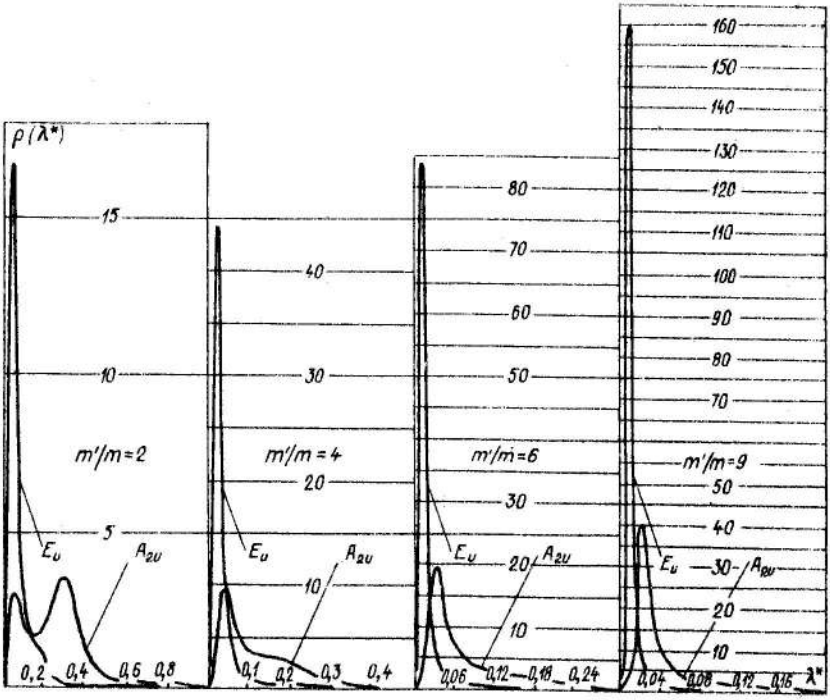


Рис. 4. Эволюция спектральных плотностей, порожденных смещением атомов тяжелой примеси с изменением массы этой примеси. Параметр анизотропии $\gamma = 1,2$.

$$\langle x_h^2 \rangle_T \sim \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m}{m'}} & \text{при} \quad T \ll \theta ; \\ const & \text{при} \quad T \sim \theta ; \end{cases} \qquad /13/$$

$$\langle v_h^2 \rangle_T \sim \begin{cases} \left(\dfrac{m}{m'}\right)^{3/2} & \text{при} \quad T \ll \theta ; \\ \dfrac{m}{m'} & \text{при} \quad T \sim \theta . \end{cases} \qquad /14/$$

Колебания легких примесных атомов, в отличие от тяжелых, происходят главным образом высокими частотами. Частота колебаний легкой примеси может превышать верхнюю границу фононного спектра λ_{max}. Колебания с такими частотами $(\lambda > \lambda_{max})$ называются локальными /2/. В трехмерном кристалле всегда существует некоторый

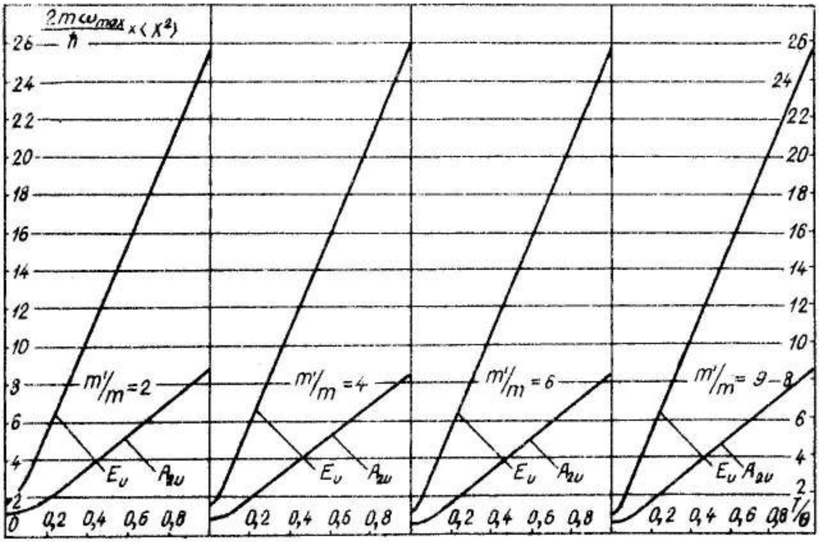


Рис. 5. Среднеквадратичные смещения тяжелых примесных атомов.

порог для образования таких колебаний, т.е. для образования локального колебания необходимо, чтобы масса примеси m' была меньше некоторой пороговой массы m^*. Для различных направлений колебания примеси в анизотропном кристалле величина m^* различна: больше вдоль направления слабой связи /при $\gamma = 1,2$ – вдоль базисной плоскости/, меньше – вдоль оси четвертого порядка, где межатомное взаимодействие сильнее /рис. 7/.

При наличии в системе локальных колебаний, формулы /I/ и /2/ для нахождения среднеквадратичных скоростей и смещений трансформируются в

$$\langle x_h^2 \rangle_T = \frac{\hbar}{2m'} \left\{ \int_0^{\lambda_{max}} \frac{\tilde{\rho}_h(\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{cth} \frac{\hbar\sqrt{\lambda}}{2kT} d\lambda + \frac{\mu_{лок}}{\sqrt{\lambda_{лок}}} \operatorname{cth} \frac{\hbar\sqrt{\lambda_{лок}}}{2kT} \right\}; \qquad /15/$$

$$\langle v_h^2 \rangle_T = \frac{\hbar}{2m'} \left\{ \int_0^{\lambda_{max}} \sqrt{\lambda}\, \tilde{\rho}_h(\lambda) \operatorname{cth} \frac{\hbar\sqrt{\lambda}}{2kT} d\lambda + \mu_{лок} \sqrt{\lambda_{лок}} \operatorname{cth} \frac{\hbar\sqrt{\lambda_{лок}}}{2kT} \right\}, \qquad /16/$$

где $\lambda_{лок}$ – квадрат частоты локального колебания; $\mu_{лок}$ – вес этого колебания, который определяется как

$$\mu_{лок} = 1 - \int_0^{\lambda_{max}} \tilde{\rho}(\lambda)\, d\lambda. \qquad /17/$$

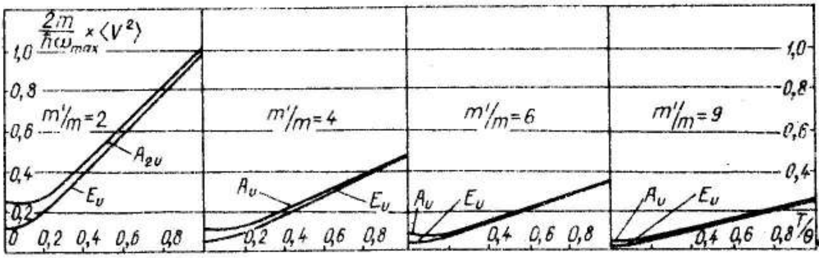


Рис. 6. Среднеквадратичные скорости тяжелых примесных атомов.

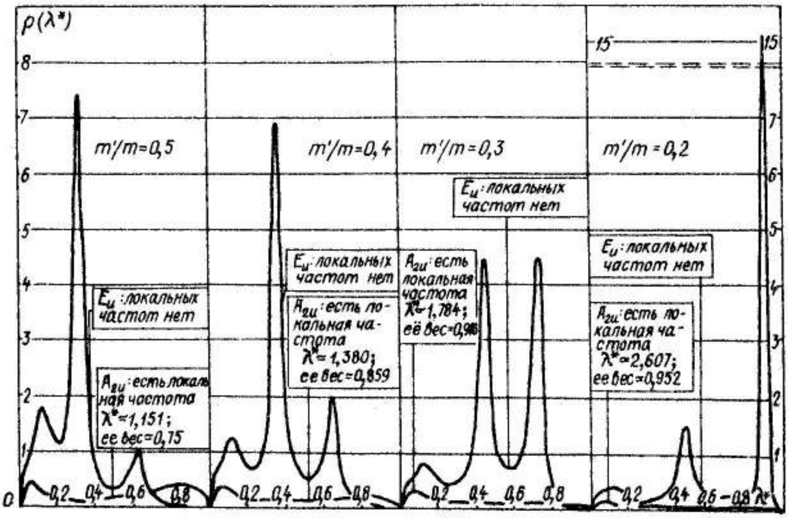


Рис. 7. Эволюция спектральных плотностей, порожденных смещением атомов легкой примеси. Параметр анизотропии γ = I,2. Наглядно виден процесс образования локального колебания.

На рис. 8 и 9 приведены соответственно среднеквадратичные смещения и скорости легких примесных атомов. Длины на температурных зависимостях линейных участков уменьшаются с понижением массы примеси, так как основная часть колебаний имеет высокие частоты и возбуждается при высоких температурах. Кривые $\langle r_h^2 \rangle_T$ для разных кристаллографических направлений разнесены далеко и сближаются медленно.

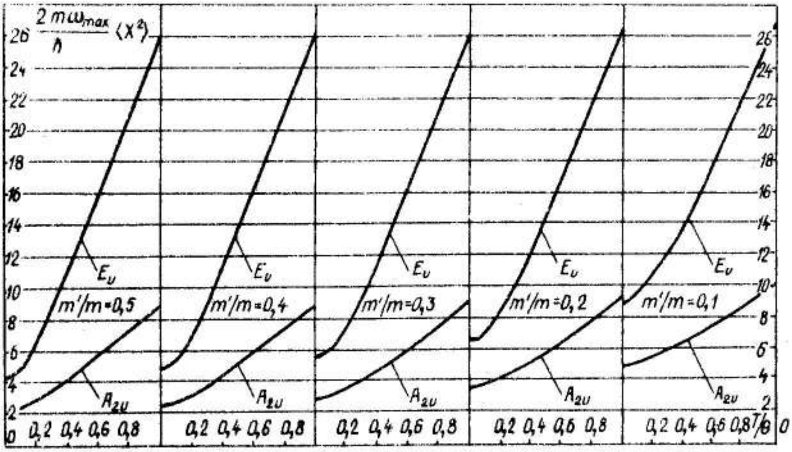


Рис. 8. Среднеквадратичные смещения легких примесных атомов.

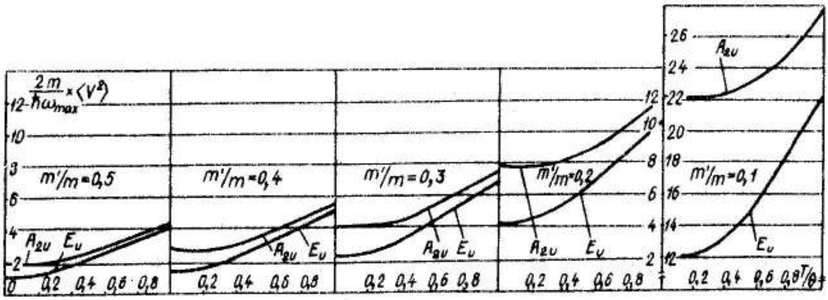


Рис. 9. Среднеквадратичные скорости легких примесных атомов.

Вернемся к рассмотрению колебания тяжелой примеси. При возникновении в системе квазилокальных колебаний даже небольшие концентрации примесных атомов могут существенно изменить многие фононные свойства решетки [3]. В анизотропных кристаллах образуются различные квазилокальные моды, что обогащает низкочастотную область фононного спектра и должно проявиться в поведении различных колебательных характеристик решетки при низких температурах. Несмотря на очевидность данного обстоятельства, до последнего времени не удавалось ни теоретически ни экспериментально показать влияние разделения квазилокальных мод на какую-либо наблюдаемую вели-

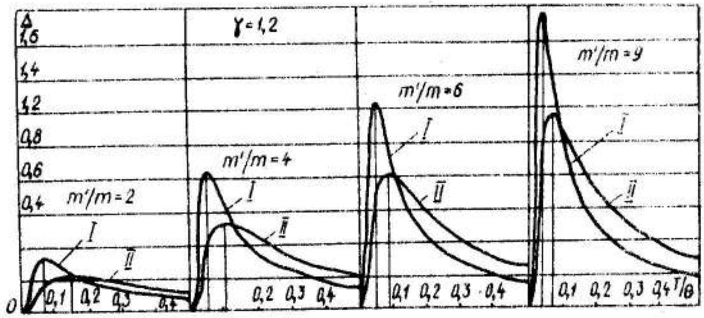


Рис. 10. Температурные зависимости величин Δ_i /T/ при различных отношениях $\frac{m'}{m}$ / γ = 1,2/.

чину. Обнаружить такой эффект по скалярной, усредненной по всем направлениям колебаний примеси характеристике решетке оказалось чрезвычайно трудно /см. например, [14]/, так как для таких величин эффект, по-видимому, крайне мал. Более отчетливого проявления расщепления квазилокальных мод следует ожидать для величин тензорных, вклад в различные компоненты которых дают колебания примеси вдоль разных кристаллографических направлений.

Одной из таких тензорных величин является относительное изменение зависящее от температуры части среднеквадратичного смещения

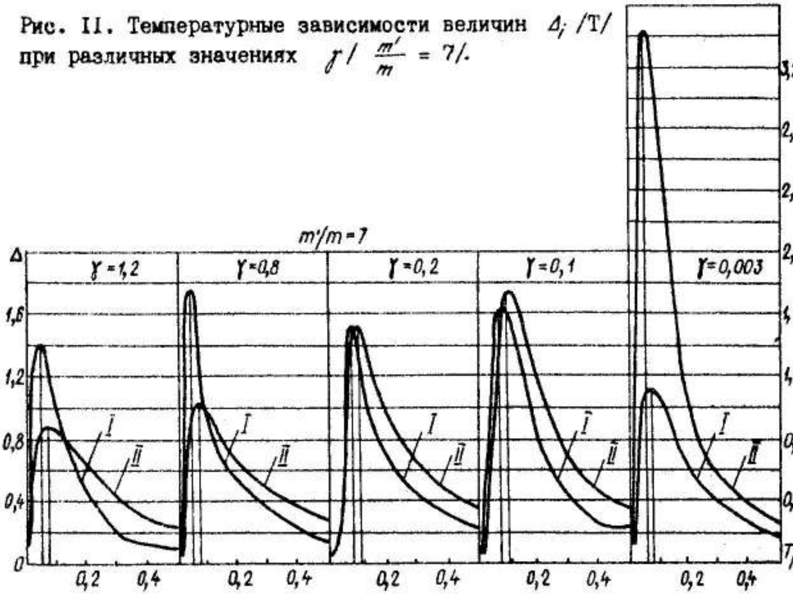
$$\Delta_i(T) = \frac{\langle \tilde{x}_i^2 \rangle_T - \langle \tilde{x}_i^2 \rangle_0 + \langle x_i^2 \rangle_0 - \langle x_i^2 \rangle_0}{\langle x_i^2 \rangle_T - \langle x_i^2 \rangle_0}, \qquad /18/$$

где $\langle \tilde{x}_i^2 \rangle_T$ - среднеквадратичное смещение примесного атома при температуре T, $\langle x_i^2 \rangle_T$ - основного атома решетки. Зависящая от температуры часть среднеквадратичного смещения выделена нами из-за того, что нулевые колебания, вклад которых в величину $\langle x_i^2 \rangle_T$ при низких температурах значителен, мешают обнаружению эффектов, обусловленных квазилокальными колебаниями.

На рис. 10 показана эволюция величин Δ_i /T/ при изменении соотношения $\frac{m'}{m}$ /при фиксированном γ = 1.2/. Деформация фононного спектра и формирование квазилокальных мод приводят к образованию максимумов на величинах Δ_i /T/. С увеличением отношения масс эти максимумы возрастают по величине и становятся все более острыми. Кроме того, с ростом параметра $\frac{m'}{m}$ частота квазилокальных колебаний уменьшается, что приводит к перемещению максимумов на кривых Δ_i /T/ в область более низких температур. Вследствие анизотропии кристалла ход кривых для различных кристаллографических направлений различен, максимумы на этих кривых также отличаются по величине и местоположению.

На рис. II показано, как с изменением характеризующего анизотропию кристалла параметра γ /при постоянном значении $\frac{m'}{m} = 7$/ изменяется взаимное расположение кривых Δ_i /T/ для разных направлений и максимумов на них. При $\gamma = 1{,}2$ связь между атомами в одной базисной плоскости значительно слабее, чем между атомами из соседних плоскостей, вследствие чего квазилок‹а›льные моды, связан-

Рис. II. Температурные зависимости величин Δ_i /T/ при различных значениях γ / $\frac{m'}{m} = 7$/.



ные с колебаниями примеси вдоль базисной плоскости будут иметь меньшую частоту и обусловленный ими максимум на кривой I будет расположен левее максимума на кривой II / $T_I \approx 0{,}045\,\theta$, $T_{II} \approx 0{,}077\,\theta$ /.

С уменьшением параметра γ снижается анизотропия кристалла, что приводит к сокращению температурного промежутка между максимумами на кривых I и II /при $\gamma = 0,8$, $T_I \approx 0,05\,\theta$, $T_{II} \approx 0,08\,\theta$; при $\gamma = 0,2$ $T_I \approx 0,07\,\theta$, $T_{II} = 0,09\,\theta$ /. При $\gamma = 0,03$ атомы, расположенные в одной базисной плоскости, связаны между собой сильнее, чем атомы из разных плоскостей, поэтому максимум на кривой I проявляется при более высокой температуре, чем на кривой II / $T_I \approx 0,06\,\theta$, $T_{II} \approx 0,05\,\theta$ /.

I. Мессбауэр Р.Л. Резонансное поглощение γ-квантов в твердых телах без отдачи. – Успехи физ. наук, 1960, 72, вып. 4, с. 658-671.

2. Марадудин А., Монтролл Э., Вейсс Дж. Динамическая теория кристаллической решетки в гармоническом приближении. – М. : Мир, 1965. – 294 с.

3. Каган Ю., Иоселевский Я. Эффект Мессбауэра для примесного ядра в кристалле. – Журн. эксперим. и теорет. физики, 1962, 42, вып. I, с. 259-272.

4. Каган Ю., Иоселевский Я. Эффект Мессбауэра для примесного ядра в кристалле. – Журн. эксперим. и теорет. физики, 1963, 44, вып. I, с. 284-302.

5. Ramanand A., Romji Rao R. Debye-Waller factor and the Zinderman parameter of some hexagonal close packed metals. – Canadian Journ. of Phys., 1980, 58, N 3, p. 384-387.

6. Марадудин А. Дефекты и колебательный спектр кристаллов. М. : Мир, 1968. – 432 с.

7. Сыркин Е.С., Феодосьев С.Б. Фононный спектр и локальные колебания в слоистых кристаллах. – Физика низких температур, 1979, 5, № 9, с. 1069-1073.

8. Пересада В.И. Новый вычислительный метод в теории кристаллической решетки. – В кн.: Физика конденсированного состояния, Харьков, изд. ФТИНТ АН УССР, 1968, с. 172-210.

9. Пересада В.И., Афанасьев В.Н. Об аналитическом представлении функции распределения частот колебаний идеальной кристаллической решетки. – Журн. эксперим. и теорет. физики, 1970, 58, вып. I, с. 135-144.

10. Peresada V.I. Syrkin E.S. On the calculation of RMS atom displacement in a crystal lattue. – Surf. Sci., 1976, 54, N 2, p. 293-302.

11. Пересада В.И., Толстолужский В.П. Низкотемпературная теплоемкость ГЦК-решетки, содержащей примеси замещения. – Физика низких температур, 1977, 3, № 6, с. 788-800.

12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. – М. : Физматгиз, 1963. – 702 с.

13. Сыркин Е.С., Толстолужский В.П. Вычисление фононного спектра ГЦК-кристалла с изменяющимся межплоскостным взаимодействием. – В кн.: Вычислительная математика, программирование и обработка эксперимента. Киев : Наук. думка, 1979, с. 10-26.

14. Землянов Н.А., Черноплеков М.Г. Исследование квазилокального уровня в спектре колебаний решетки с тяжелыми примесными атомами. – Журн. эксперим. и теорет. физики, 1965, 49, вып. 2, с. 449-452.

УДК 517.4

А.Л.Фиготин

ОБ ОТСУТСТВИИ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СПЕКТРА У СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ. I

В данной работе будут рассматриваться случайные матрицы Якоби A, действующие в $l_2(\mathbb{Z})$ и задаваемые равенством

$$(Ax)_n = a_{n+1}x_{n+1} + b_n x_n + a_n x_{n-1},$$

где a_n, b_n - действительные сл.в*, а $\{(a_n, b_n)\}$ $(n \in \mathbb{Z})$ - метрически транзитивный процесс [I]. Если $Pr\{a_0 = 0\} = 0$, то в соответствии с [2] сл.о* A с в. I** существенно самосопряжен. Рассмотрим решение следующего разностного уравнения второго порядка:

$$a_{n+1}x_{n+1} + b_n x_n + a_n x_{n-1} = \lambda x_n \ (n > 0, \ \lambda \in \mathbb{R}),$$
$$x_0 = \hat{x}_0, \quad x_{-1} = \hat{x}_{-1} \ (\hat{x}_0^2 + \hat{x}_{-1}^2 > 0). \qquad /I/$$

Будем говорить, что решение $\{x_n\}$ $(n \geq 0)$ экспоненциально растет, если существует положительное число $\gamma(\lambda)$ такое, что $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\ln \times \times (x_n^2 + x_{n-1}^2) = \gamma(\lambda)$. Как показано в [3 - 5], отсутствие абсолютно непрерывной составляющей спектра у сл. о. A тесно связано с экспоненциальным ростом решений соответствующего разностного уравнения второго порядка. Приведем следующий критерий отсутствия абсолютно непрерывной составляющей спектра у сл. о. A, сформулированный в [3]: если a_n, b_n $(n \in \mathbb{Z})$ - действительные случайные величины и для любого действительного λ решение уравнения /I/ экспоненциально растет с в. I, то абсолютно непрерывная составляющая спектра у сл. о. A с в. I отсутствует. Отметим, что приведенный выше критерий в [3] сформулирован для случая $a_n = 1 (n \in \mathbb{Z})$, но, как легко видеть из приведенного в [3] доказательства, этот критерий справедлив в более общем случае, рассматриваемом в настоящей работе.

Таким образом, доказательство отсутствия абсолютно непрерывной составляющей спектра сл. о. A сводится к установлению экспоненциального роста решения соответствующего разностного уравнения второго порядка с в. I.

---

* Сл. в, сл. о. - случайная величина, оператор

** С в. I - с вероятностью I.

Экспоненциальный рост решений разностного уравнения второго порядка со случайными независимыми коэффициентами. Теорема I. Путь последовательности действительных случайных величин $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ $(n\in \mathbb{Z})$ удовлетворяют следующим условиям:

I) a_n, b_n $(n\in \mathbb{Z})$ – независимые случайные величины, причем a_n $(n\in \mathbb{Z})$ и b_n $(n\in \mathbb{Z})$ соответственно равнораспределены;

2) $M\{|a_0|\}$, $M\{|a_0|^{-1}\}$, $M\{|b_0|\}<\infty$.

Тогда существует неотрицательное число $\gamma(\lambda)$ такое, что с в. I решение $\{x_n\}_0^\infty$ уравнения /I/ удовлетворяет равенству

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln(x_n^2+x_{n-1}^2)=\gamma(\lambda). \qquad /2/$$

Если b_0 случайно, то для любого действительного λ : $\gamma(\lambda)>0$. Если же распределение b_0 сосредоточено в точке λ_0, а a_0 случайно, то для любого $\lambda\neq\lambda_0$ $\gamma(\lambda)>0$, а $\gamma(\lambda_0)=0$.

Доказательство теоремы I существенно использует результат Фюрстенберга [6], формулировка которого такова. Пусть $\{X_n\}_0^\infty$ – последовательность случайных, независимых и равнораспределенных матриц из $SL(m,\mathbb{R})$. Обозначим через J множество существенных значений случайной матрицы X_0, т.е.

$$J=\{X\in SL(m,\mathbb{R})\mid \forall\varepsilon>0: Pr\{\|X-X_0\|<\varepsilon\}>0\},$$

а через G – минимальную замкнутую подгруппу $SL(m,\mathbb{R})$, содержащую J.

Теорема Фюрстенберга, [6]. Если G – некомпактная группа, которая не имеет приводимых подгрупп конечного индекса, и $M\{\|X_0\|\}<\infty$, то для любого $x\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$ с в. I

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\|X_{n-1}X_{n-2}\cdots X_0x\|= =\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\|X_{n-1}X_{n-2}\cdots X_0\|>0.$$

Рассмотрим последовательность $\{u_n\}_0^\infty$ векторов из $\mathbb{R}^2$, построенную по последовательности $\{x_n\}_0^\infty$, удовлетворяющей уравнению /I/, следующим образом:

$$u_n=\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{pmatrix}\ (n>0).$$

Тогда $\|u_n\|=\sqrt{x_n^2+x_{n-1}^2}$. Из уравнения /I/ для $\{x_n\}_0^\infty$ легко получить, что последовательность $\{u_n\}_0^\infty$ удовлетворяет

ж $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание.

приведенному ниже рекуррентному соотношению

$$u_{n+1} = q_{n+1} u_n, \; q_{n+1} = \begin{pmatrix} -(b_n - \lambda) a_{n+1}^{-1} & -a_n a_{n+1}^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; u_0 = \begin{pmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_{-1} \end{pmatrix}.$$

Из последних равенств немедленно следует

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} q_k u_0 \quad (n > 0). \qquad /3/$$

Для матрицы q_k, очевидно, справедливо представление

$$q_k = t_k g_k' \quad (k \geq 1),$$
$$g_k' = \begin{pmatrix} b_{k-1} - \lambda & a_{k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t_k = \begin{pmatrix} -a_k^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad /4/$$

Из /3/ и /4/ следует

$$\prod_{k=1}^{n} q_k = t_n \left(\prod_{k=1}^{n} g_k' t_{k-1} \right) t_0^{-1}.$$

Если ввести матрицы $g_k = g_k' t_{k-1} \; (k \geq 1)$, то последнее равенство даст

$$\prod_{k=1}^{n} q_k = t_n \left(\prod_{k=1}^{n} g_k \right) t_0^{-1}, \qquad /5/$$

где

$$g_k = \begin{pmatrix} -(b_{k-1} - \lambda) a_{k-1}^{-1} & a_{k-1} \\ -a_{k-1}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad /6/$$

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма I. Предел /2/ существует тогда и только тогда, когда с в. I существует предел

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \| \prod_{k=1}^{n} g_k t_0^{-1} u_0 \|,$$

причем с в. I

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2} = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \| \prod_{k=1}^{n} g_k t_0^{-1} u_0 \|. \qquad /7/$$

Заметим, что по определению u_n, а также ввиду соотношений /3/ и /5/, справедливы оценки

$$\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2} = \| t_n \prod_{k=1}^{n} g_k t_0^{-1} u_0 \| \leq \max \{1, |a_n|^{-1}\} \| \prod_{k=1}^{n} g_k t_0^{-1} u_0 \|;$$

$$\sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2} \geq \min \{1, |a_n|^{-1}\} \| \prod_{k=1}^{n} g_k t_0^{-1} u_0 \|.$$

Из последних неравенств следуют неравенства

$$\ln \sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2} \leq | \ln |a_n|| + \ln \| \prod_{k=1}^{n} g_k t_0^{-1} u_0 \|;$$
$$\ln \sqrt{x_n^2 + x_{n-1}^2} \geq -| \ln |a_n|| + \ln \| \prod_{k=1}^{n} g_k t_0^{-1} u_0 \|. \qquad /8/$$

Но $n^{-1} |\ln |a_n||$ с в. I стремится к нулю, это легко следует из эргодической теоремы [I], условия которой, очевидно, выполнены.

Последнее замечание вместе с неравенствами /8/ дадут равенство /7/, что завершает доказательство леммы.

Лемма 2. Если G - компактная подгруппа $SL(2;\mathbb{R})$, то G изоморфна подгруппе $SO(2,\mathbb{R})$ и, следовательно, приводима.

Поскольку G - компактная группа матриц из $SL(2,\mathbb{R})$, то [7] G эквивалентна подгруппе $SO(2,\mathbb{R})$ и, следовательно, приводима.

Лемма 3. Пусть G - неприводимая подгруппа $SL(2,\mathbb{R})$, содержащая приводимую подгруппу конечного индекса. Тогда в $\mathbb{C}^2$ существует базис, в котором каждый элемент группы G имеет один из двух видов:

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\mu^{-1} \\ \mu & 0 \end{pmatrix} \quad (\xi, \mu \in \mathbb{C}).$$

Обозначим фигурирующую в условии леммы приводимую подгруппу конечного индекса через H. Рассмотрим базис в $\mathbb{C}^2$, приводящий H, в котором, очевидно, все элементы H имеют вид

$$\begin{pmatrix} \mu & a \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \quad (\mu \neq 0).$$

Будем рассматривать представление группы G в этом базисе и обозначим представления G и H в нем соответственно через G' и H'. Обозначим через $\mathfrak{A}(\mu)$ множество таких a, что матрица вида

$$\begin{pmatrix} \mu & a \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \quad (\mu \neq 0,\ \mu,\ a \in \mathbb{C}) \qquad /8/$$

принадлежит H', а через Λ - множество таких μ, что хотя бы при одном a матрица вида /8/ принадлежит H'. Не ограничивая общности, можно считать, что H' содержит все матрицы G' вида /8/, так как в противном случае возможно от подгруппы H' перейти к более широкой подгруппе элементов вида /8/, которая также будет приводимой подгруппой G' конечного индекса. Введем в рассмотрение подгруппу $\hat{H}'$ группы H', состоящую из элементов группы H' вида

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b \in \mathbb{C}), \qquad /9/$$

причем множество чисел b таких, что матрица вида /9/ принадлежит H', обозначим через $\mathcal{B}$, где $\mathcal{B}$, очевидно, аддитивная подгруппа $\mathbb{C}$. Для любого фиксированного $\mu \in \Lambda$ все элементы H' вида /8/ можно получить из одного элемента такого вида, умножая его слева на элементы группы $\hat{H}'$, так как для любых h и g из H' с одинаковыми диагональными элементами $hg^{-1} \in \hat{H}'$.

Докажем, что $\mathcal{B} = \{ 0 \}$. Допустим противное. Тогда $\mathcal{B}$ содержит бесконечно много элементов из $\mathbb{C}$. Поскольку H' – подгруппа G' конечного индекса, то существует конечный набор матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \xi & \gamma \end{pmatrix} \quad (\xi \neq 0) \qquad /10/$$

из G' такой, что любую матрицу с ненулевым нижним левым элементом из G' можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \mu & a \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \xi & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu\alpha + a\xi & \mu\beta + a\gamma \\ \mu^{-1}\xi & \mu^{-1}\gamma \end{pmatrix} \quad (\mu \in \mathcal{U}(\mu)).$$

Отсюда следует, что отношение элементов второй строки для таких матриц может принимать значение лишь из конечного набора чисел. Рассмотрим матрицу вида /10/ из G', существование которой гарантируется неприводимостью группы G', и связанное с ней множество матриц G' вида

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \xi & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + b\xi & \beta + b\gamma \\ \xi & \gamma \end{pmatrix} \quad (b \in \mathcal{B}).$$

Вторая строка квадрата каждой такой матрицы равна

$$\xi(\alpha + b\xi) + \gamma\xi, \quad \xi(\beta + b\gamma) + \gamma^2.$$

Отношение полученных выражений, являясь дробно-рациональной функцией b, будет принимать конечное и, следовательно, одно значение при всех $b \in \mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & \xi\alpha + \gamma\xi \\ \xi\gamma & \xi\beta + \gamma^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Но последнее равенство, очевидно, ввиду $\xi \neq 0$, эквивалентно равенству

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \xi & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

что невозможно, так как последний детерминант равен 1. Следовательно, $\mathcal{B} = \{0\}$. Таким образом, $\mathcal{U}(\mu)$ содержит в точности одно число из $\mathbb{C}$, которое будем обозначать $a(\mu)$. Последнее, очевидно, влечет следующее равенство, справедливое при любых $\mu, \lambda \in \Lambda$

$$\begin{pmatrix} \lambda & a(\lambda) \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu & a(\mu) \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & a(\mu) \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & a(\lambda) \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix},$$

т.е. $\lambda a(\mu) + a(\lambda)\mu^{-1} = \mu a(\lambda) + a(\mu)\lambda^{-1}$ или $a(\mu) = c(\mu - \mu^{-1})$, где c – константа. Легко видеть, что Λ – множество, содержащее бесконечно много элементов. Действительно, в противном случае, принимая во внимание конечность индекса подгруппы H' относительно G', мы получили бы, что G', а следовательно, и G – конечная группа. Но тогда в соответствии с леммой 2 была бы приводима, что противоречит условию леммы 3. Выше было доказано, что отношение элементов второй строки матриц из G' с ненулевым нижним левым элементом может принимать значения лишь из конечного набора чисел.

Рассмотрим матрицы из G' вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \xi & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu & a(\mu) \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \ (\xi \neq 0),$$

где первая матрицы в данном произведении фиксирована. Вторая строка данного произведения равна $\xi\mu, \xi a(\mu) + \gamma\mu^{-1}$. Соотношение данных выражений равно $c(\mu^2-1) + \gamma\xi^{-1}\mu^{-2}$. Последнее выражение принимает конечное число значений для бесконечного множества значений μ тогда и тогда, когда $c \equiv a(\mu) \equiv 0$ и $\gamma = 0$. Следовательно, элементы группы H' с необходимостью имеют вид

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \ (\mu \in \Lambda),$$

а всякая матрица из G' вида /I0/ с необходимостью имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\xi^{-1} \\ \xi & 0 \end{pmatrix} \ (\xi \neq 0). \qquad /II/$$

Рассмотрим квадрат последней матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\xi^{-1} \\ \xi & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2-1 & -\alpha\xi \\ \alpha\xi & -1 \end{pmatrix}.$$

Снова пользуясь для этой матрицы тем, что всякая матрица из G' с ненулевым нижним левым элементом имеет вид /II/, приходим к выводу $\alpha\xi = \alpha = 0$. Последнее замечание завершает доказательство леммы.

Перейдем к доказательству теоремы. Для этого в силу леммы I достаточно установить существование и положительность с в. I предела в первой части равенства /7/. Справедливость последнего утверждения будет установлена, если удастся показать, что последовательность матриц $\{g_k\} (k \geqslant 1)$ удовлетворяет предположениям теоремы Фюрстенберга. Независимость матриц g_k $(k \geqslant 1)$ и их равнораспределенность, очевидно, следует из равенства /6/ и условия I теоремы I. Неравенство $M\{\|g_1\|\} < \infty$ немедленно следует из условий I и 2 теоремы. Таким образом, осталось показать, что группа G, порожденная случайной матрицей g_1, некомпактна и не имеет приводимых подгрупп конечного индекса.

Установим, что G неприводима и, в силу леммы 2, некомпактна. Допустим противное, тогда существует ненулевой вектор $v \in \mathbb{C}^2$

такой, что для любого $g \in G$ векторы gv и v линейно зависимы, т.е. $det\{gv, v\} = 0$ или $-(b_0 - \lambda)v_1v_2 + a_0^2v_2^2 + v_1^2 = 0$, где v_1, v_2 – координаты вектора v. Последнее тождество, очевидно, противоречит условиям теоремы I.I. Следовательно, группа G неприводима и некомпактна.

Докажем теперь, что G не содержит подгрупп конечного индекса. Допустим противное. Тогда из леммы I.3 получим, что множество матриц $G_2 = \{g^2 : g \in G\}$ состоит из коммутирующих между собой матриц. G_2, очевидно, включает в себя матрицы вида

$$\begin{pmatrix} ca^{-1} & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} c^2a^{-2}-1 & c \\ -ca^{-2} & -1 \end{pmatrix},$$

где c и a независимо пробегают существенные значения соответственно случайных величин $-(b_0 - \lambda)$ и a_0. Из коммутативности G_2 следует, что матрица

$$\begin{pmatrix} (c_1^2a_1^{-2}-1)(c_2a_2^{-2}-1) - c_1c_2a_2^2 & c_2(c_1^2a_1^{-2}-1) - c_1 \\ -c_1a_1^{-2}(c_2^2a_2^{-2}-1) + c_2a_2^{-2} & -c_2c_1a_1^{-2}+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1a_1^{-2}-1 & c_1 \\ -c_1a_1^{-2} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_2a_2^{-2}-1 & c_2 \\ -c_2a_2^{-2} & -1 \end{pmatrix}$$

инвариантна относительно транспозиции индексов I,2. Если c принимает хотя бы два ненулевых значения c_1 и c_2, то недиагональные элементы рассматриваемой матрицы не будут инвариантны при транспозиции индексов I,2. Не будет указанной инвариантности в случае ненулевого c и двух различных значений a_1 и a_2, что легко установить, рассмотрев диагональные данной матрицы. Отсюда следует, что в перечисленных ниже случаях группа G не содержит приводимых подгрупп конечного индекса:

I) Сл. в. $b_0 - \lambda$ имеет хотя бы два ненулевых существенных значения;

2) a_0 случайно, сл. в $b_0 - \lambda$ имеет хотя бы одно ненулевое существенное значение.

Рассмотрим теперь случай, когда сл. в $-(b_0 - \lambda)$ имеет точно два существенных значения $-c$ и 0, а a_0 – точно одно $a \neq 0$. В этом случае множество существенных значений матрицы g_1 состоит из двух матриц

$$d_1 = \begin{pmatrix} ca^{-1} & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad d_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0, \quad a \neq 0).$$

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае группа не содержит приводимых подгрупп конечного индекса. Действительно, допустим противное. Тогда в соответствии с леммой I.3 в базисе, диагонализующем матрицу d_2, матрица d_1 должна преобразоваться к виду с нулями на диагонали.

Собственные векторы матрицы d_2 равны

$$e_1 = \begin{pmatrix} a \\ i \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} a \\ -i \end{pmatrix} .$$

Следовательно, векторы матрицы $d_1 e_1$ и e_2 должны быть линейно зависимыми, т.е. $det\{d_1 e_1, e_2\} = 0$. Последнее равенство равносильно равенству $ci + 2a = 0$, что противоречит $c \neq 0$, $a \neq 0$. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае G не имеет приводимых подгрупп конечного индекса.

Таким образом, в силу теоремы Фюрстенберга, если b_0 случайно, то для любого действительного λ $\gamma(\lambda) > 0$. Если распределение сл. в. b_0 сосредоточено в точке λ_0, а a_0 случайно, то для $\lambda \neq \lambda_0$ $\gamma(\lambda) > 0$. То, что в последнем случае $\gamma(\lambda_0) = 0$, легко устанавливается из равенства /I/ с помощью эргодической теоремы [I]. Теорема I.I доказана.

Ввиду замечаний, сделанных в начале настоящей работы, имеет место следующее

Следствие I. Абсолютно непрерывная составляющая спектра случайных матриц A, элементы которой удовлетворяют условиям теоремы I, с в. I отсутствует.

Сформулированное следствие нуждается в следующем небольшом пояснении. Критерий, приведенный в начале данной работы, требует, чтобы решения разностного уравнения /I/ экспоненциально росли с в. I для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Теорема I утверждает, что при определенных условиях экспоненциальный рост имеет место при всех λ, за исключением, быть может, одного. Доказательство отсутствия абсолютно непрерывной составляющей спектра у случайных матриц Якоби, приведенное в [3], дословно переносится на случай, когда экспоненциальный рост решений уравнения /I/ имеет место с в. I для всех λ, за исключением, быть может, одного.

I. Дуб Д. Вероятностные процессы. - М.: Изд-во иностр. лит., 1956. - 605 с.

2. Пастур Л.А., Фиготин А.Л. Эргодические свойства распределения собственных значений некоторых классов случайных самосопряженных операторов. - В кн.: Дифференциальные уравнения и некоторые методы функционального анализа. Киев: Наук. думка, 1978, с. II7-I33.

3. Пастур Л.А. О спектре случайных Якобиевых матриц и уравнения Шредингера со случайным потенциалом на всей оси. Препринт, ФТИНТ АН УССР, Харьков, 1974. - 18 с.
4. Ishii K. Localization of eigenstates and transport phenomena in the one-dimensional disordered systems.-Progr. Phys. Suppl., 1973, N 53, p. 77-116.
5. Casher A., Lebowitz I. Heat flow in regular and disordered harmonic chain. - J. Math. Phys., 1970, 12, p. 1701-1710.
6. Fustenberg H. Noncommuting random products. - Trans. Amer. Math. Soc., 1963, 108, N 3, p.377-428.
7. Наймарк М.А. Теория представлений групп. - М.: Наука, 1976. - 560 с.

УДК 517.4

А.Л.Фиготин

ОБ ОТСУТСТВИИ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ СПЕКТРА У СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ ЯКОБИ. II

В [1] отмечалось, что доказательство отсутствия абсолютно непрерывной составляющей (аб. н.с.) спектра у случайных матриц Якоби сводится к установлению экспоненциального роста решений следующего уравнения:

$$a_{n+1}x_{n+1} + b_n x_n + a_n x_{n-1} = \lambda x_n \ (n>0, \quad \lambda \in \mathbb{R}), \qquad /1/$$
$$x_0 = \hat{x}_0, \quad x_{-1} = \hat{x}_{-1} \ (\hat{x}_0^2 + \hat{x}_{-1}^2 > 0),$$

где a_n, b_n - элементы соответствующей матрицы Якоби. В [1] доказано отсутствие аб.н.с. спектра у случайных матриц Якоби с независимыми элементами. Настоящая работа посвящена доказательству аналогичного утверждения для матриц Якоби, элементы которых образуют стационарный марковский процесс.

Экспоненциальный рост решений разностного уравнения второго порядка, коэффициенты которого образуют стационарный марковский процесс. В данной части рассматриваются случайные матрицы Якоби элементы которых $\{(b_k, a_k)\}_{-\infty}^{+\infty}$ образуют стационарный марковский процесс в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющий сформулированным ниже условиям. Введем $A_k = a_k^2$ $(k \in \mathbb{Z})$. Тогда процесс $\{(b_k, A_k)\}_{-\infty}^{+\infty}$, очевидно, тоже будет стационарным. Будем предполагать, что процесс $\{(b_k, A_k)\}_{-\infty}^{+\infty}$ марковский с переходной мерой $P\{b, A | db', dA'\}$ и вероятностной мерой распределения (b_k, A_k) $p\{db, dA\}$, которые удовлетворяют следующим условиям:

I) $$p\{b, A \mid db', dA'\} = p\{b, A \mid b', A'\} p\{db', dA'\},$$
$$p\{db, dA\} = p\{b, A\} \chi(b)\, db\, Q(dA),$$

где $\chi(b)$ - неотрицательная, не превосходящая единицы, финитная функция, а $Q(dA)$ - вероятностная мера, сосредоточенная на интервале $[\alpha, \beta]$ $(0 < \alpha \leq \beta < \infty)$;

2) $p\{b, A\}$, $p\{b, A \mid b', A'\}$ равномерно по всем своим аргументам ограничены сверху и снизу соответственно константами K и K^{-1} $(1 < K < \infty)$;

3) $p\{b, A \mid b', A'\} \equiv p\{b', A' \mid b, A\}$.

Теорема I. Пусть $\{x_n\}_0^\infty$ - решение разностного уравнения /I/. Тогда с в. I* существует и положителен предел

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln(x_n^2 + x_{n-1}^2) > 0. \qquad /2/$$

Покажем, что если существует предел

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n} \ln \left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^2, \qquad /3/$$

то существует и предел /2/, причем оба они равны между собой. Действительно, пусть предел /3/ существует. Ввиду тождества

$$n^{-1} \ln(x_n^2 + x_{n-1}^2) = n^{-1} \sum_{k=0}^{n} \ln \left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^2 + n^{-1} \ln x_0^2 + n^{-1} \ln \left[1 + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^2\right] \qquad /4/.$$

требуется показать, что $\lim\limits_{n \to \infty} n^{-1} \ln \left[1 + \left(\frac{x_{n-1}}{x_n}\right)^2\right] = 0$.

Обозначим

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} n^{-1} \ln \left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^2.$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^2 = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \left[n s_n - (n-1) s_{n-1}\right] = 0.$$

Отсюда, очевидно, следует

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \ln \left[1 + \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^2\right] = 0,$$

что вместе с тождеством /4/ даст равенство пределов /2/ и /3/ в предположении существования последнего. Таким образом, теорема будет доказана, если будут установлены существование и положительность предела /3/.

Обозначим через T одномерный тор, который мы отождествим с отрезком $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, концы которого $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ различать не будем.

---

* С в. I - с вероятностью I.

Определим на торе T меру $d\varphi$ – лебегову меру интервала $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$. Функции $t=tg\,\varphi$ и $\varphi=arctg\ t$ – взаимообратные функции, отображающие взаимнооднозначно множества T и $\mathbb{R}\cup\infty$ одно на другое. Заметим, что из уравнения /I/ следует

$$a_{k+1}x_{k+1}=-(b_k-\lambda)x_k-a_k x_{k-1}\ (k\geq 0).$$

Введем $\varphi_k\in T\ (k\geq 0)$ так, чтобы $tg\,\varphi_k=a_k\frac{x_k}{x_{k-1}}$. Тогда последнее уравнение запишется в виде

$$tg\,\varphi_{k+1}=-c_k-A_k\,tg^{-1}\varphi_k\quad (k\geq 0), \qquad /5/$$

где $c_k=-(b_k-\lambda)\ (k\geq 0)$, φ_0 – произвольная константа из T. Используя эргодическую теорему [I] для процесса $\{A_k\}_0^\infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n} ln\left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^2=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n} ln\,a_k^{-2}tg^2\varphi_k =$$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n} ln\,tg^2\varphi_k - M\{ln\,A_0\}^{*}.$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно установить существование с в. I следующего предела и получить неравенство

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n} ln\,tg^2\varphi_k > M\{ln\,A_0\}, \qquad /6/$$

где процесс $\{\varphi_k\}_0^\infty$ удовлетворяет равенству /5/. Заметим, что процесс $\{(c_k, A_k)\}_0^\infty$ удовлетворяет, очевидно, условиям I–3. Рассмотрим процесс $\{(\varphi_k, c_k, A_k)\}_0^\infty$ в $T\times\mathbb{R}^2$, который, как легко видеть, является марковским процессом, переходная мера которого равна

$$p\{\varphi, c, A\,|\,d\varphi', dc', dA'\}= \qquad /7/$$

$$=\delta\{arctg\,[c-A\,tg^{-1}\varphi]\,|\,d\varphi'\}\,p\{c, A\,|\,dc', dA'\},$$

где $\delta\{\psi\,|\,d\varphi\}$ – вероятностная мера на T, сосредоточенная в точке ψ. Обозначим через $p^{(n)}\{\varphi, c, A\,|\,d\varphi', dc', dA'\}$ переходную меру от (φ_k, c_k, A_k) к $(\varphi_{k+n}, c_{k+n}, A_{k+n})$.
Имеет место следующая

Лемма I. Существует функция $p^{(3)}\{\varphi, c, A\,|\,\varphi', c', A'\}$ такая, что

$$p^{(3)}\{\varphi, c, A\,|\,d\varphi', dc', dA'\}=p^{(3)}\{\varphi, c, A\,|\,\varphi', c', A'\}\,d\varphi'\,p\{dc', dA'\},$$

---

* $M\{\cdot\}$ – математическое ожидание.

$$p^{(3)}\{\varphi, c, A \mid \varphi', c', A'\} \le K_1 < \infty .$$

Рассмотрим сначала $p^{(2)}\{\varphi, c, A \mid d\varphi', dc', dA'\}$. Используя /7/ и условие 2, получаем $\forall \tau > 0$:

$$\tau^{-1} \int_{\eta \in [\varphi', \varphi'+\tau]} p^{(2)}\{\varphi, c, A \mid d\eta, dc', dA'\} \le$$
$$\le K^3 p\{dc', dA'\} \tau^{-1} [tg(\varphi'+\tau) - tg\varphi'] .$$

Из последнего неравенства следует существование такой функции $p^{(2)}\{\varphi; c, A \mid \varphi', c', A'\}$, что $\forall \delta > 0$:

$$p^{(2)}\{\varphi, c, A \mid d\varphi', dc', dA'\} = p^{(2)}\{\varphi, c, A \mid \varphi', c', A'\} d\varphi' p\{dc', dA'\}, \quad /8/$$
$$\varphi' \in T \setminus \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right],$$
$$p^{(2)}\{\varphi, c, A \mid \varphi', c', A'\} \le K^3 [tg^2\varphi' + 1] .$$

Перейдем к рассмотрению $p^{(3)}\{\varphi, c, A \mid d\varphi', dc', dA'\}$. Из /8/ следует, очевидно, что $\forall \delta > 0$

$$p^{(3)}\{\varphi, c, A \mid d\varphi', dc', dA'\} = p^{(3)}\{\varphi, c, A \mid \varphi', c', A'\} d\varphi' p\{dc', dA'\}, \quad /9/$$
$$\varphi' \in T \setminus \left[\frac{\pi}{2} - \delta, \frac{\pi}{2} + \delta\right],$$
$$p^{(3)}\{\varphi, c, A \mid \varphi', c', A'\} \le K^3 [tg^2\varphi' + 1] .$$

Исследуем поведение меры $p^{(3)}\{\varphi, c, A \mid d\varphi', dc', dA'\}$, когда φ' лежит в окрестности точки $\frac{\pi}{2}$

$$p^{(3)}\{\varphi, c, A \mid d\varphi', dc', dA'\} = \int p^{(2)}\{\varphi, c, A \mid d\psi, du, dB\} \times$$
$$\times \delta\{arctg[u - B\, tg^{-1}\psi] \mid d\varphi'\} p\{u, B \mid dc', dA'\} . \quad /10/$$

Выберем C_0 так, чтобы $\alpha^{-1}, \beta \le C_0$ и $\chi(c) = 0$, если $|c| \ge C_0$. Пусть $\varphi' \in [arctg\, 2C_0, \frac{\pi}{2}]$. Тогда из /10/, используя /9/, нетрудно получить оценку

$$\tau^{-1} \int_{\eta \in [\varphi', \varphi'+\tau]} p^{(3)}\{\varphi, c, A \mid d\eta, dc', dA'\} \le 2K^5 p\{dc', dA'\} \times$$
$$\times \int du\, \chi(u) Q(dB) \left\{ arctg\left[\frac{B}{u - tg(\varphi'+\tau)}\right] - arctg\left[\frac{B}{u - tg\varphi'}\right]\right\}.$$

Отметим, что из очевидного неравенства $arctg\, x - arctg\, y \le x - y \; (x \ge y)$ и последнего неравенства следует

$$\tau^{-1} \int_{\eta \in [\varphi', \varphi'+\tau]} p^{(3)}\{\varphi, c, A \mid d\eta, dc', dA'\} \le \quad /11/$$
$$\le p\{dc', dA'\}\, 8K^5 C_0^3 \frac{tg^2(\varphi'+\tau) + 1}{tg(\varphi'+\tau)\, tg\varphi'} .$$

Если же $\varphi' \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\mathrm{arctg}\ 2C_0\right)$, то, почти дословно повторяя предыдущие рассуждения, получаем

$$\tau^{-1} \int_{\eta \in [\varphi', \varphi'+\tau]} \rho^{(3)}\left\{\varphi, c, A \,\middle|\, d\eta, dc', dA'\right\} \le$$
$$\le \rho\left\{dc', dA'\right\} 8K^5 C_0^3 \frac{tg^2\varphi' + 1}{|tg\,\varphi'||tg(\varphi'+\tau)|}. \qquad /12/$$

Заметим, что из /10/, в силу /8/, следует $\rho^{(3)}\left\{\varphi, c, A \,\middle|\, \frac{\pi}{2}; dc', dA'\right\} = 0$. Последнее замечание вместе с неравенствами /11/ и /12/ влекут существование такой функции $\{\varphi, c, A \mid \varphi', c', A'\}$, что

$$\rho^{(3)}\left\{\varphi, c, A \,\middle|\, d\varphi', dc', dA'\right\} = \rho^{(3)}\left\{\varphi, c, A \,\middle|\, \varphi', c', A'\right\} d\varphi' \rho\left\{dc', dA'\right\},$$
$$\varphi' \in \left[-\frac{\pi}{2}; -\mathrm{arctg}\ 2C_0\right] \cup \left[\mathrm{arctg}\ 2C_0; \frac{\pi}{2}\right], \qquad /13/$$
$$\rho^{(3)}\left\{\varphi, c, A \,\middle|\, \varphi', c', A'\right\} \le 16 K^5 C_0^3.$$

Из неравенств /9/ и /13/ следует утверждение леммы. Отметим, что для любого $n \geq 3$ доказанная лемма влечет

$$\rho^{(n)}\left\{\varphi, c, A \,\middle|\, d\varphi', dc', dA'\right\} = \rho^{(n)}\left\{\varphi, c, A \,\middle|\, \varphi', c', A'\right\} d\varphi' \rho\left\{dc', dA'\right\}, \qquad /14/$$
$$\rho^{(n)}\left\{\varphi, c, A \,\middle|\, \varphi', c', A'\right\} < K_1 < \infty.$$

Перейдем к рассмотрению фигурирующих в неравенстве /6/ сумм случайных величин $\ln tg^2\varphi_k$. Из неравенства /14/ следует выполнение для процесса $\{(\varphi_k, c_k, A_k)\}_0^\infty$ условия Деблина [2]. Последнее влечет за собой [2] существование с в. 1 предела

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=0}^{n} \ln tg^2\varphi_k = \int \ln tg^2\varphi\, \hat{\rho}(d\varphi, dc, dA), \qquad /15/$$

где вероятностная мера $\hat{\rho}(d\varphi, dc, dA)$ инвариантна относительно переходной меры $\rho\{\varphi, c, A | d\varphi', dc', dA'\}$ и зависит, вообще говоря, от реализации $\{(\varphi_k, c_k, A_k)\}_0^\infty$.

Для доказательства неравенства /6/ покажем, что для любой такой меры

$$\int \ln tg^2\varphi\, \hat{\rho}(d\varphi, dc, dA) > \int \ln A \rho\{dc, dA\}. \qquad /16/$$

Заметим, что из неравенства /14/ следует существование такой функции $\hat{\rho}(\varphi, c, A)$, что

$$\hat{\rho}(d\varphi, dc, dA) = \hat{\rho}(\varphi, c, A) d\varphi \rho\{dc, dA\}, \qquad /17/$$
$$\hat{\rho}(\varphi, c, A) \le K_1, \quad \hat{\rho}(\varphi) = \int \tilde{\rho}(\varphi, c, A) \rho\{dc, dA\} \le K_1.$$

Левую часть неравенства /I6/ удобно представить в виде

$$\int \ln tg^2\varphi\, \hat{\rho}(d\varphi, dc, dA) = \int_T \ln tg^2\varphi\ \hat{\rho}(\varphi)d\varphi =$$
$$= \int_T d\varphi\, 2\hat{\rho}(\varphi)\left[\ln\left|\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right| - \ln|\cos\varphi|\right] = \qquad /I8/$$
$$= -2\int_T d\varphi\, \hat{\rho}(\varphi) \lim_{\delta\to+0} Re\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg(\varphi+x+i\delta)dx\right\} =$$
$$= -2\lim_{\delta\to+0} Re\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_T tg(\varphi+x+i\delta)\hat{\rho}(\varphi)d\varphi\right. .$$

Введем в рассмотрение функции

$$g_\delta(x;\ s;\ c;\ A) = \int_T e^{is\,tg(\varphi+x+i\delta)}\hat{\rho}(\varphi, c, A)d\varphi . \qquad /I9/$$

Легко видеть, что

$$-\frac{\partial^2}{\partial s^2}\ g_\delta = -g_\delta + \frac{1}{is}\frac{\partial}{\partial x}g_\delta .$$

Умножим обе части последнего тождества на g_δ^* и вычтем из результата комплексно сопряженный. Интегрируя обе части получившегося тождества по s от 0 до ∞, получаем

$$2Re\left\{\left.\frac{\partial g_\delta}{\partial s}\right|_{s=0} g_\delta(x;0;c;A)\right\} = \frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\left[\frac{\partial g_\delta}{\partial x}g_\delta^* - g_\delta\frac{\partial g_\delta^*}{\partial x}\right].$$

Ввиду равенства /I9/, последнее равенство после интегрирования по x легко преобразуется к виду

$$-2Re\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_T tg(\varphi+x+i\delta)\hat{\rho}(\varphi, c, A)d\varphi\right\} =$$
$$= \int_0^\infty \frac{ds}{s}\left\{\left|g_\delta\left(\frac{\pi}{2}, s, c, A\right)\right|^2 - \left|g_\delta(0, s, c, A)\right|^2\right\}.$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по мере $\rho\{dc,\ dA\}$, получим

$$-2Re\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\int_T tg(\varphi+x+i\delta)\hat{\rho}(\varphi)d\varphi\right\} =$$
$$= \int \rho\{dc, dA\}\int_0^\infty \frac{ds}{s}\left\{\left|g_\delta\left(\frac{\pi}{2}, s, c, A\right)\right|^2 - \left|g_\delta(0,s,c,A)^2\right|\right\}. \qquad /20/$$

Для того чтобы в правой части равенства /20/ перейти к пределу $\delta\to+0$ под знаком интеграла, достаточно установить справедливость следующих лемм.

<u>Лемма 2.</u> Пусть

$$g_j(s) = \int_T e^{is\,tg(\varphi+i\delta)}\rho_j(\varphi)d\varphi, \quad 0\le\rho_j(\varphi)\le K_1 ,$$
$$\int_T \rho_j(\varphi)d\varphi = 1 \qquad (j=1,2).$$

Тогда равномерно по δ и функциям $\rho_j\ (j=1,2)$

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\frac{ds}{s}\left[|g_1(s)|^2-|g_2(s)|^2\right]=0 .$$

Лемма 3. Пусть

$$g(s)=\int_T e^{istg(\varphi+i\delta)}\rho(\varphi)d\varphi,\quad 0\le\rho(\varphi)\le K_1,\quad \int_T\rho(\varphi)d\varphi=1 .$$

Тогда равномерно по δ и функциям $\rho(\varphi)$

$$\lim_{N_1,N_2\to+\infty}\int_{N_1}^{N_2}\frac{ds}{s}\,|g(s)|^2=0 .$$

Доказательство обеих лемм требует рассуждений, которые, не являясь сложными, содержат большое количество громоздких выражений и поэтому не приводятся.

Принимая во внимание соотношения

$$|g_\delta(x,s,c,A)|\le 1,\quad \lim_{\delta\to+0}g_\delta(x,s,c,A)=g_0(x,s,c,A),$$

которые справедливы при любых $x,\ s,\ c$ и A, пользуясь леммами 2, 3 и равенством /20/, получаем

$$-2\lim_{\delta\to+0}Re\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_T tg(\varphi+x+i\delta)\,\hat\rho(\varphi)\,d\varphi\right\}=$$

$$=\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\int\rho\{dc,dA\}\int_\varepsilon^{\varepsilon^{-1}}\frac{ds}{s}\left[\left|g_\delta\left(\frac{\pi}{2},s,c,A\right)\right|^2-|g_\delta(0,s,c,A)|^2\right]=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\rho\{dc,dA\}\int_\varepsilon^{\varepsilon^{-1}}\frac{ds}{s}\left[\left|g_0\left(\frac{\pi}{2},s,c,A\right)\right|^2-|g_0(0,s,c,A)|^2\right]= \qquad /21/$$

$$=\int_0^\infty\frac{ds}{s}\left[\left\|g_0\left(\frac{\pi}{2},s,c,A\right)\right\|^2-\|g_0(0,s,c,A)\|^2\right],$$

где

$$\|g_0(x,s,c,A)\|^2=\int\rho\{dc,dA\}\,|g_0(x,s,c,A)|^2 .$$

Заметим, что из инвариантности меры $\hat\rho(d\varphi,dc,dA)$ условия 3, которому удовлетворяет процесс $\{(c_k,A_k)\}_0^\infty$, а также соотношений /7/ и /17/ следует

$$\hat\rho(d\varphi,dc,dA)=\int\delta\{arctg[u-Btg^{-1}\psi]\,|\,d\varphi\}\times$$

$$\times\rho\{u,B\,|\,dc,dA\}\,\hat\rho(d\psi,du,dB)=$$

$$=\int\delta\{arctg[u-Btg^{-1}\psi]\,|\,d\varphi\}\,\rho\{c,A\,|\,du,dB\}\,\hat\rho(d\psi,u,B).$$

Из последнего равенства имеем

$$\int e^{is\,tg\,\varphi}\,\hat\beta(d\varphi, c, A) =$$

$$= \int e^{is[u + B\,tg(\varphi + \frac{\pi}{2})]}\,\rho\{c, A \mid du, dB\}\,\hat\beta(d\varphi, u, B).$$

Это равенство можно переписать так:

$$g_0(0, s, c, A) = \int \rho\{c, A \mid du, dB\}\, e^{isu}\, g_0(\tfrac{\pi}{2}; Bs; u; B), \qquad /22/$$

если в $L_2(\mathbb{R}^2, \rho\{dc, dA\})$ ввести оператор

$$(Pf)(c, A) = \int \rho\{c, A \mid u, B\}\, f(u, B)\, \rho\{du, dB\}. \qquad /23/$$

Заметим, что, в силу условий I-3, P является самосопряженным оператором Гильберта - Шмидта, $\| P \| \le 1$ и I - максимальное по модулю собственное значение P; константы исчерпывают множество собственных функций, отвечающих собственному значению I. Последнее следует из единственности меры, инвариантной относительно $\rho\{c, A \mid du, dB\}$ [I]. Покажем, что

$$\| P e^{isu} g_0(\tfrac{\pi}{2}; Bs; u; B) \| < \| e^{isu} g_0(\tfrac{\pi}{2}; Bs; u; B) \|. \qquad /24/$$

Действительно, допустим, что неравенство /24/ неверно. Тогда, ввиду $\| P \| \le 1$,

$$\| P e^{isu} g_0(\tfrac{\pi}{2}; Bc; u; B) \| = \| e^{isu} g_0(\tfrac{\pi}{2}; Bc; u; B) \|. \qquad /25/$$

Из последнего равенства и свойств оператора P следует, что $e^{isu} g_0(\frac{\pi}{2}; Bs; u; B)$ не зависит от u и B. Но тогда, как это следует из равенств /23/ и /22/, $g_0(0; s; c; A)$ не зависит от c и A. Следовательно, $g_0(\frac{\pi}{2}; s; c; A)$ не зависит от c и A. Получилось, что $e^{isc} g_0(\frac{\pi}{2}; As; c; A)$ и $g_0(\frac{\pi}{2}; s; c; A)$ не зависят от c и A при любых s. Это, очевидно, невозможно. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства /24/.

Из равенств /22/, /24/ и лемм 2, 3, получим

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{s}\left[\| g_0(\tfrac{\pi}{2}; s; c; A)\|^2 - \| g_0(0; s; c; A)\|^2\right] = \qquad /26/$$

$$= \int_\varepsilon^\infty \frac{ds}{s}\left[\| g_0(\tfrac{\pi}{2}; s; c, A)\|^2 - \| e^{isc} g_0(\tfrac{\pi}{2}; As; c; A)\|^2\right] +$$

$$+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{ds}{s}\left[\|e^{isc}g_0(\tfrac{\pi}{2};As;c;A)\|^2-\|Pe^{isc}g_0(\tfrac{\pi}{2};As;c;A)\|^2\right];$$

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{ds}{s}\left[\|g_0(\tfrac{\pi}{2};s;c,A)\|^2-\|e^{isc}g_0(\tfrac{\pi}{2};As;c,A)\|^2\right]=$$

$$=\int\rho\{dc,dA\}\left[\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{ds}{s}|g_0(\tfrac{\pi}{2};s;c,A)|^2-\int_{A\varepsilon}^{\infty}\frac{ds}{s}|g_0(\tfrac{\pi}{2};s;c;A)|^2\right]=$$

$$=\int\rho\{dc,dA\}\int_{\varepsilon}^{A\varepsilon}\frac{ds}{s}|g_0(\tfrac{\pi}{2};s;c;A)|^2.$$

Из равенств /24/, /26/ при $\varepsilon\to+0$ легко получим

$$\int_{0}^{\infty}\frac{ds}{s}\left[\|g_0(\tfrac{\pi}{2};s;c;A)\|^2-\|g_0(0;s;c;A)\|^2\right]>\int\rho\{dc,dA\}\ln A.$$

Таким образом, последнее неравенство, а также /I5/, /I8/ и /2I/ влекут за собой справедливость неравенства /I6/, а с ним и /6/, что завершает доказательство теоремы.

Следствие I. Абсолютно непрерывная составляющая спектра случайных матриц Якоби, удовлетворяющих условиям теоремы 2, с в. I отсутствует.

Отметим, что доказательство теоремы 2 обобщает и делает строгими соответствующие рассуждения из работы [3], где рассмотрен случай, когда $a_n\equiv 1\ (n\in\mathbb{Z})$.

I. Фиготик Л.Л. Об отсутствии абсолютно непрерывной составляющей спектра у случайных матриц Якоби. I. - Наст. сб., с.193-20I.

2. Дуб Д. Вероятностные процессы. - М.: Изд-во иностр. лит., 1956. - 605 с.

3. Пастур Л.А. О спектре случайных Якобиевых матриц и уравнения Шредингера со случайным потенциалом на всей оси. Препринт, Харьков, ФТИНТ АН УССР, 1974. - I8 с.

УДК 517.9

Обратная задача рассеяния на оси для уравнения Штурма - Лиувилля с квадратично-убывающим потенциалом/ Давыдов Р.Н. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 3-13.

Дано полное решение обратной задачи рассеяния для уравнения

$$-y(x)'' + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x), \quad -\infty < x < \infty$$

с вещественным потенциалом $q(x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_{-\infty}^{-1} \left| q(x) - \frac{2}{x^2} \right|^2 e^{\varepsilon|x|} dx + \int_{-1}^{\infty} |q(x)|^2 e^{\varepsilon x} dx < \infty; \quad \varepsilon > 0.$$

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.929.7

Предельный переход по малому параметру в матрицах Грина сингулярно возмущенных дифференциальных операторов / Дольберг М.Д., Чудинович И.Ю. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 13-23.

Рассмотрен предельный переход по малому параметру в матрицах Грина сингулярно возмущенных обобщенных дифференциальных операторов. Для части матричных элементов доказана равномерная по совокупности переменных сходимость к найденному пределу.

Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.39+571.91+513.88

О конечнопорожденных группах размерности с одним состоянием / Жолткевич Г.Н. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 24-30.

Приведено достаточное условие существования только одного состояния на группе размерности, допускающей представление в виде индуктивного предела системы Эллиота.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.925.6

Элементарное замечание о множестве целых решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Еременко А.Э. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 31-32.

Рассматривается аналитическая система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая при любых начальных условиях удовлетворяет теореме существования Коши. Доказывается, что если система имеет подвижные особенности, то множество начальных условий, для которых решение продолжается до целой функции, имеет нулевую емкость.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 519.210

Интерполяция "на спектре" в классе функций Стилтьеса (случай одного узла) / Кацнельсон В.Э. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 33-43.

Класс Стилтьеса - это класс функций $s(z)$, аналитических в $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ и таких, что $Im\, s(z) \geq 0\, (Im\, z \geq 0)$, $Re\, s(z) \geq 0\, (Re\, z \geq 0)$. Изложено решение интерполяционной задачи: Даны s_0, $s_0 = s_0^*$, и $r \geq 0$. Описать множество всех функций $s(z)$ класса Стилтьеса, аналитических в точке $z = -\lambda_0$ ($\lambda_0 > 0$ - задано), таких, что $s(-\lambda_0) = s_0$, $s'(-\lambda_0) \leq r$.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.9:532

О свойствах системы мод поверхностных волн во вращающейся идеальной жидкости / Копачевский Н.Д. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 43-55.

Рассматривается задача о близких к равномерному вращению колебаниях идеальной жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд. Для поверхностных волн, имеющихся в такой системе, получены достаточные условия полноты в некотором гильбертовом пространстве совокупности мод собственных колебаний. Для соответствующих частот колебаний получены асимптотические формулы, показывающие, что поведение больших по модулю частот определяется действием центробежных, капиллярных и гравитационных сил и не зависит от кориолисовых сил.

Библиогр.: 12 назв.

УДК 517.9

О p-базисности системы корневых векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ / Копачевский Н.Д. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 55-70.

Для самосопряженного пучка операторов $L(\lambda) = I - \lambda A - \lambda^{-1} B$, $A, B \in \mathfrak{S}_\infty$, действующих в гильбертовом пространстве, устанавливаются достаточные условия т.н. p-базисности (при $p=2$ - базисности Бари) системы собственных и присоединенных векторов $L(\lambda)$, отвечающих двум сериям $\{\lambda_{0n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\lambda_{\infty n}\}_{n=1}^{\infty}$ собственных значений пучка, стремящихся к нулю и к бесконечности. Результаты общих рассмотрений применяются к задаче о колебаниях тяжелых вязких жидкостей в сосуде.

Библиогр.: 18 назв.

УДК 517.944

Корректная разрешимость субпериодической краевой задачи в бесконечном брусе / Кириченко Ю.В. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 71-80.

Найдены достаточные условия корректной разрешимости в бесконечном брусе $R^m \times [0, Y_1] \times [0, Y_2]$ различных краевых задач, в том числе и некоторых переопределённых для системы вида

$$\frac{\partial^2 u(x, y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, y_1, y_2) + f(x, y_1, y_2); \quad u \in C^n,$$

где $P(s)$ - произвольная полиномиальная матрица.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.5

Вполне L-супергармонические функции, ассоциированные с последовательностью $\langle \lambda_n \rangle$ / Новицкий М.В. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 81-99.

В работе найдено интегральное представление типа Крейна-Мильмана семейства бесконечно дифференцируемых функций $u(x) \geqslant 0$, заданных в области $D \subset R^m$, $m \geqslant 2$ и удовлетворяющих системе неравенств

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - L) u(x) \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Здесь L - эллиптический оператор второго порядка, последовательность $\langle \lambda_i \rangle$ удовлетворяет условию

$$\lambda_i \geqslant 0, \quad \exists m \geqslant 1 \quad \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty,$$

а ограниченная область D имеет достаточно гладкую границу.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 519.44

О конечных группах, обладающих вполне унитарным элементом / Островская С.И. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 100-113.

Конечная группа G называется TU-группой, если для некоторого ее элемента u и любого неприводимого комплексного характера χ выполнено условие $|\chi(u)| = 1$. В статье дано полное описание метабелевых TU-групп.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 519.210

К теории матричных кругов Вейля / Потапов В.П. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 113-121.

Излагается фундаментальная теорема С.А.Орлова об инвариантности рангов матричных радиусов предельных кругов Вейля. Естественная нормировка аналитических J-сжимающих матриц-функций к модулю позволила, сохранив основные черты доказательства автора, в значительной степени сократить и упростить доказательство.
Библиогр.: 4 назв.

УДК 539.182

Конструктивная реализация вариационного принципа на примере атома гелия / Ратнер А.М. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 121-131.

Решение уравнения Шредингера вариационным методом обычно сводится к численной минимизации усредненного гамильтониана по вариационным параметрам. Существующие методы минимизации проанализированы с точки зрения практической пригодности для этой цели. Два наиболее подходящих, но медленно сходящихся метода объединены в один алгоритм таким образом, что сходимость существенно ускоряется по сравнению с каждым из них. Объединенный алгоритм минимизации проиллюстрирован на примере атома гелия. Показано, что хорошая сходимость алгоритма позволяет сопоставлять разные аппроксимации волновой функции для оценки их точности. Текст предлагаемого алгоритма приведен в алгольной записи.
Ил. 2. Табл. 1. Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.55

О квазиполиномах / Ронкин А.Л. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 131-157.

Рассматриваются функции многих переменных, являющиеся квазиполиномами по каждой переменной. Устанавливается общий вид таких функций. Полученный результат применяется для доказательства теорем о делении квазиполиномов многих переменных и теоремы об извлечении корня из квазиполинома многих переменных.
Библиогр.: 10 назв.

УДК 517.9

Множители Стокса и коэффициенты связи для некоторых уравнений/ Смилянский В.Р. - В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 157-173.

Для скалярного уравнения с линейными коэффициентами ("уравнения Лапласа") найдены множители Стокса и коэффициенты связи (связывающие решения при регулярной особой точке $z=0$ и при иррегулярной $z=\infty$). Для систем и уравнений общего вида найдены соотношения между множителями Стокса и коэффициентами связи. В случае первого ранга дан "геометрический" способ нумерации корней характеристического уравнения.
Ил. 2. Библиогр.: 10 назв.

УДК 548.571; 681.3.

Исследование температурной зависимости среднеквадратичных смещений и скоростей идеальных и примесных атомов в анизотропных кристаллах / Сыркин Е.С., Феодосьев С.Б. – В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 173-191.

На основе развитого ранее В.И.Пересадой метода проведены для конкретной модели вычисления спектральных плотностей $\rho_h(\lambda)$, среднеквадратичных смещений $\langle x_h^2 \rangle_T$ и среднеквадратичных скоростей $\langle v_h^2 \rangle_T$ атомов различных кристаллографических направлениях. В данном методе существенным образом используется то обстоятельство, что оператор, описывающий гармонические колебания любой системы, может быть разбит на совокупность операторов с простым спектром, представляемых якобиевыми матрицами, которые содержат в себе полную информацию о всех свойствах системы, определяемых ее колебаниями. В качестве модели кристалла рассматривалась ОЦ тетрагональная решетка с центральным взаимодействием ближайших соседей как в базисной плоскости, так и в соседних плоскостях. Результаты вычислений $\rho_h(\lambda)$, $\langle x_h^2 \rangle_T$ и $\langle v_h^2 \rangle_T$, проведенных с помощью ЭВМ М-222, представлены в виде графиков.
Ил. 11. Табл. 3. Библиогр.: 14 назв.

УДК 517.4

Об отсутствии абсолютно непрерывной составляющей спектра у случайных матриц Якоби. I / Фиготин А.Л. – В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 192-200.

Доказано отсутствие абсолютно непрерывной составляющей спектра у случайных матриц Якоби с независимыми элементами, когда диагональные и недиагональные элементы соответственно равнораспределены.
Библиогр.: 7 назв.

УДК 517.4

Об отсутствии абсолютно непрерывной составляющей спектра у случайных матриц Якоби. II / Фиготин А.Л. – В кн.: Функциональный анализ и прикладная математика. Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982, с. 200-208.

Доказано отсутствие абсолютно непрерывной составляющей спектра у случайных матриц Якоби, элементы которых образуют стационарный марковский процесс.
Библиогр.: 3 назв.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Сборник научных трудов

Утверждено к печати ученым советом
Физико-технического института низких температур АН УССР

Редактор Т.В.Кацовенко
Обложка художника Т.Я.Смоляковой
Художественный редактор И.П.Савицкая
Технический редактор И.Ю.Алексашина
Корректор Н.Ю.Скульская

Информ. бланк № 5897

Подп. к печ. 31.12.82. БФ 00398. Формат 60х84/16. Бумага офс.№2.
Офс. печ. Усл.печ.л. 12,56. Усл.кр.-отт. 12,79. Уч.-изд.л.10,80.
Тираж 300 экз. Заказ 3-108 Цена 1 р. 30 к.

Издательство "Наукова думка". 252601 Киев, ГСП, Репина, 3.
Киевская книжная типография научной книги. 252004 Киев-4, Репина, 4.