

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ФИЗИКО_ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР
им. Б.И. ВЕРКИНА

Е.Я. Хруслов

Усредненные модели динамики суспензий

Киев, 2018

Аннотация

В монографии рассматриваются суспензии – смеси вязкой несжимаемой жидкости с мелкими твердыми частицами (которые могут взаимодействовать между собой). Изучается асимптотическое поведение таких смесей при стремлении размеров частиц и расстояний между ними к нулю.

Построены усредненные модели динамики суспензий и усредненные уравнения малых колебаний полимерных жидкостей.

Для математиков, научных сотрудников, аспирантов и студентов университетов. Может быть полезна физикам и механикам, интересующимся теорией сложных жидкостей с микроструктурой.

Анотація

В монографії розглядаються суспензії – суміші в'язкої нестисливої рідини з дрібними твердими частинками (які можуть взаємодіяти між собою). Вивчається асимптотична поведінка таких сумішей, коли діаметри частинок і відстані між ними прямують до нуля.

Побудовані усереднені моделі динаміки суспензій і усереднені рівняння малих коливань полімерних рідин.

Для математиків, наукових співробітників, студентів та аспірантів університетів. Може бути корисною фізикам та механікам, що цікавляться теорією складних рідин з микроструктурою.

Предисловие

Как в природе, так и в практической деятельности человека встречаются явления, связанные с процессами переноса мелких твердых частиц водными или воздушными потоками. Это, например, песочные и пылевые бури, перемещение мелкодисперсных твердых взвесей в реках и морях, грязевые потоки. В технике перенос твердых частиц осуществляется при гидро- и пневмотранспорте, обогащении полезных ископаемых, осаждении аэрозолей и т.д.

В последнее время все больше внимания исследователей уделяется изучению поведения сложных искусственных жидкостей с микроструктурой, представляющих собой жидкости со взвешенными мелкими частицами, взаимодействующими между собой посредством сил различной природы. Это, например, коллоиды, полимерные жидкости, ферро и электрореагирующие суспензии и т.д. (см. [45], [74], [75])

Движение таких смесей (которые будем называть просто суспензиями) можно описать с помощью уравнений классической механики, например, уравнениями Навье-Стокса для вязкой жидкости и уравнениями динамики твердого тела для всех частиц с условием прилипания жидкости на частице. Это, так сказать, микроскопическая модель движения суспензии. Однако, ввиду большого числа частиц и их малых размеров, такая модель оказывается практически непригодной ни для численных расчетов, ни для качественного анализа поведения системы. Поэтому требуется построение макроскопической модели, описывающей движение смеси в целом как сложной сплошной среды.

Традиционный (феноменологический) подход механики сплошных сред, основанный на законах сохранения массы, энергии и импульса, в данной задаче не приводит к замкну-

той системе уравнений для эффективной сплошной среды, поскольку остаются неопределенными зависимость тензора напряжений от градиентов скоростей, а также силы межфазного взаимодействия, если соответствующая эффективная среда многофазна.

Более адекватным является, так называемый, микроструктурный подход, заключающийся в соединении феноменологического подхода с детальным изучением течения жидкости в окрестности отдельной частицы, нахождении напряжений в жидкости и сил, действующих на частицу со стороны жидкости с последующим пространственным или пространственно-временным усреднением (см., например [5]).

Такой подход, прежде всего, связан с именем А. Эйнштейна, впервые получившего формулу для эффективной вязкости сильно разбавленной суспензии твердых сферических частиц в вязкой несжимаемой жидкости [51]. Этот результат был обобщен Дж. Джеффри на эллипсоидальные частицы [73]. В последующих работах гидромехаников этот подход получил дальнейшее развитие ([7]-[9], [12], [48] и др.). Были построены макроскопические (одно и многофазные) модели движения суспензий с малой концентрацией твердой фазы, когда гидродинамическое взаимодействие между соседними частицами слабое. Однако, для сильно концентрированных смесей пока получено очень мало теоретических результатов, позволяющих обоснованно написать замкнутые системы уравнений, моделирующие течение таких смесей, что по мнению известного специалиста по гидромеханике Дж. Бетчелора представляет определенный вызов исследователям (см. [12]). Тем не менее, в настоящее время имеется огромное число работ, в которых предложены и применяются для расчета конкретных течений различные математические модели движения смесей жидкости с мелкими твердыми час-

тицами. Как правило, эти модели получены на физическом уровне строгости, часто без достаточного обоснования и указания областей применимости, из-за чего среди них встречаются даже противоречащие друг другу модели.

В общем, проблема построения макроскопических моделей движения смесей жидкости с мелкими твердыми частицами (суспензий) не утратила своей важности и актуальности и по сей день. Естественный подход к этой проблеме, отвечающий определенному уровню математической строгости, заключается в изучении асимптотического поведения суспензии, т.е. описании возможных «асимптотических» режимов ее движения, при стремлении диаметров частиц и расстояний между соседними частицами к нулю. Такие «асимптотические» режимы движения описываются с помощью усредненных дифференциальных уравнений, которые естественно принять в качестве макроскопических моделей движения суспензии. Этот подход характерен для теории усреднения дифференциальных уравнений в частных производных – разделу математики, который интенсивно развивается последние 50 лет ([40], [42], [53], [79]).

Данная монография посвящена математическим вопросам, возникающим при изучении движения суспензии с позиций теории усреднения. В качестве исходной «микроскопической» модели движения суспензии рассматривается система уравнений, состоящая из уравнений Навье-Стокса и уравнений динамики твердого тела, описывающая нестационарное безстолкновительное движение твердых мелких тел в вязкой несжимаемой жидкости. Математически строгий анализ асимптотического поведения решения соответствующей начально-краевой задачи и вывод усредненной системы уравнений наталкивается на большие трудности, связанные с тем, что положение частиц и, значит, область, занимаемая жидкостью,

меняется во времени согласно исходной системе уравнений и заранее неизвестны. Поэтому в монографии применяется естественный прием «расщепления» задачи на две более простые части. Этот прием можно назвать методом «фиксации положений частиц» и состоит он в следующем. Предполагается, что в любой момент времени положения частиц известны и в дополнительной к ним фиксированной области рассматривается специальная модельная краевая задача для стационарной части уравнений Навье-Стокса. Оказывается, что в зависимости от параметров суспензии может реализовываться два качественно различных режима движения суспензии, которым соответствуют два вида модельных задач.

В первой части метода изучается асимптотическое поведение решений соответствующей модельной задачи, когда диаметры частиц стремятся к нулю, а их число к бесконечности. В результате выводится усредненная система уравнений, описывающая движение жидкости, возмущенной частицами. Естественно, эта система оказывается незамкнутой – в нее входят некоторые неизвестные характеристики множества возмущающих частиц (усредненный тензор вязкости, средняя плотность частиц, их скорости). Для замыкания этой системы во второй части метода находятся силы воздействия жидкости на частицы, исследуется зависимость усредненного тензора вязкости от положения частиц, их формы и концентрации. После этого замыкание производится с помощью кинетических уравнений (Лиувилля, или Фоккера-Планка) для функции распределения частиц по их положениям, скоростям, размерам и ориентациям. Ясно, что этот естественный метод вывода замкнутых усредненных уравнений движения суспензии нельзя считать вполне математически обоснованным, хотя отдельные его этапы выполняются на математическом уровне строгости. Поэтому замкнутые системы уравне-

ний, полученные таким методом, требуют анализа их непротиворечивости, т.е. совместности и разрешимости. Это делается в §5 главы 4 и §5 главы 6, где изучается существование слабых глобальных решений начально-краевых задач для таких уравнений.

Таков предмет и общая структура первых семи глав монографии, посвященных выводу усредненных моделей суспензий, в которых твердые частицы не взаимодействуют между собой посредством сил иной природы (кроме гидродинамических) и находятся в сравнительно слабых внешних полях. В главе 5 аналогичные вопросы изучаются для суспензий, находящихся в очень сильных внешних полях (электрических, или магнитных).

Развитые в этих 6 главах методы применяются в главах 7, 8 для исследования малых колебаний вязкой несжимаемой жидкости с мелкими твердыми частицами, взаимодействующими между собой непосредственно с помощью сил различной природы. Системы уравнений, описывающие движение таких смесей, являются простейшими «микроскопическими» моделями вязко-упругих и полимерных сред. Выводятся усредненные уравнения, являющиеся макроскопическими моделями этих сред.

В монографии все формулы, теоремы, леммы и определения в пределах каждой главы имеют двойную нумерацию: первое число указывает номер параграфа, а второй – номер по порядку. Если дается ссылка на формулу другой главы, то первой цифрой указывается номер соответствующей главы.

В заключение, отметим, что описанный выше метод «фиксации положений частиц» был предложен В.А. Львовым, который одним из первых начал применять идеи и методы теории усреднения в задачах гидродинамики и, в частности, для построения усредненных моделей суспензии ([25]-[30]). Его

исследования легли в основу монографии. Автор выражает В.А. Львову свою глубокую благодарность за предложение написать эту монографию, за внимание к работе и ценные замечания. Автор также благодарит М.В.Гончаренко и Н.К. Радякина за помощь в подготовке рукописи.

Глава 1

Основные асимптотические режимы движения суспензии и соответствующие им модельные краевые задачи

В данной главе рассматривается исходная система дифференциальных уравнений, описывающая движение суспензии твердых мелких тел (частиц) в вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости. Вводится понятие обобщенных решений начально-краевых задач для этой системы и обсуждается вопрос существования таких решений. Выводятся априорные оценки для решений, с помощью которых изучается вопрос об асимптотическом поведении суспензии при стремлении к нулю диаметров частиц и средних расстояний между ближайшими соседями. Устанавливается, что в зависимости от соотношений между этими параметрами могут реализоваться два качественно различных режима движения суспензии:

1. режим «вмороженных частиц», когда скорости частиц совпадают (асимптотически) со средней скоростью окружающей жидкости;

2. режим «фильтрующихся частиц», когда их скорости существенно отличаются от средней скорости окружающей жидкости.

Приводятся две модельные краевые задачи A и B , соответствующие этим режимам течения, которые в последующих главах используются при выводе усредненных уравнений, описывающих эти асимптотические режимы и, таким образом, являющихся макроскопическими моделями движения суспензии.

Вводится также модельная задача C , соответствующая течению суспензии в режиме «вмороженных частиц с заданным вращением». Такой режим осуществляется в очень сильных электрических или магнитных полях для поляризующихся

или намагничивающихся частиц.

§ 1. Микроскопическая модель движения суспензии

Пусть Ω – фиксированная ограниченная область в \mathbf{R}^3 с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Предположим, что эта область (объем) полностью заполнен вязкой несжимаемой жидкостью со взвешенными в ней частицами – мелкими твердыми телами Q_ε^i ($i = 1, \dots, N_\varepsilon$), ограниченными гладкими поверхностями и вся эта смесь движется в Ω . Будем предполагать, что система частиц зависит от параметра $\varepsilon > 0$ так, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ диаметры частиц и расстояния между ближайшими соседними частицами стремятся к нулю.

Введем обозначения: $Q_\varepsilon^i t$ – область в Ω , занимаемая i -ой частицей в момент времени $t \in [0, T]$ ($i=1, \dots, N_\varepsilon$); $\Omega_\varepsilon t = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon^i t$ – область занятая жидкостью в момент времени $t \geq 0$; $\Omega_\varepsilon(0) = \Omega_\varepsilon$; $x_i^\varepsilon(t)$ – центр масс частицы $Q_\varepsilon^i t$; $Q_{\varepsilon T}^i$ – след i -ой частицы в пространстве-времени \mathbf{R}^4 при ее движении за время T ; ∂Q_ε^i – боковая сторона поверхности следа; $\Omega_T = \Omega \times [0, T]$ – цилиндрическая область, $\Omega_{\varepsilon T} = \Omega_T \setminus \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_{\varepsilon T}^i$.

Движение жидкости в меняющейся во времени (вообще говоря, неизвестной) области $\Omega_{\varepsilon T}$ описывается системой уравнений Навье-Стокса:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\text{ж}} \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + (u_\varepsilon \nabla) u_\varepsilon \right] - \mu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \rho_{\text{ж}} f_\varepsilon(x, t), \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, \end{aligned} \right\} (x, t) \in \Omega_{\varepsilon T} \quad (1.1)$$

с условиями прилипания на движущихся частицах и неподвижной границе $\partial\Omega$:

$$u_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t)), (x, t) \in \partial Q_{\varepsilon T}^i, \quad (1.2)$$

$$u_\varepsilon(x, t) = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (1.3)$$

где $\rho_{\text{ж}} > 0$ и $\mu > 0$ – плотность и динамическая вязкость жидкости, $u_{\varepsilon}^i(t)$ и $\omega_{\varepsilon}^i(t)$ – векторы скорости центра масс и мгновенной угловой скорости i -ой частицы, $u_{\varepsilon}(x, t)$ и $p_{\varepsilon}(x, t)$ – скорость и давление в жидкости, $f_{\varepsilon}(x, t)$ – плотность внешних сил, действующих на жидкость.

Предположим, что в процессе движения в жидкости частицы не сталкиваются друг с другом и с границей $\partial\Omega$ области Ω . Тогда их движение (как твердых тел) под действием несущей жидкости, внешних сил $f_{\varepsilon}(x, t)$ и внешних моментов $M_{\varepsilon}^i(t)$ ($i = 1, \dots, N_{\varepsilon}$) описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$m_{\varepsilon}^i \dot{u}_{\varepsilon}^i(t) = - \int_{\partial Q_{\varepsilon}^i(t)} \sigma[u_{\varepsilon}] dS + \rho_{\text{ч}\varepsilon} \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} f_{\varepsilon}(x, t) dx, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J_{\varepsilon}^i(t) \omega_{\varepsilon}^i(t)] = & - \int_{\partial Q_{\varepsilon}^i(t)} (x - x_{\varepsilon}^i(t)) \times \sigma[u_{\varepsilon}] dS + \\ & + \rho_{\text{ч}\varepsilon} \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} (x - x_{\varepsilon}^i(t)) \times f_{\varepsilon}(x, t) dx + M_{\varepsilon}^i(t), \quad i = 1, \dots, N_{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\sigma[u_{\varepsilon}] = -np_{\varepsilon} + 2\mu \sum e_{ik}[u_{\varepsilon}] \cos(n, x_i) e^k$ – вектор напряжений в жидкости; $e_{ik}[u] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right]$ – тензор скоростей деформаций, e^k – орт оси x_k , n – единичный вектор внешней нормали к $\partial Q_{\varepsilon}^i$; m_{ε}^i – масса i -ой частицы; $\rho_{\text{ч}\varepsilon}$ плотность вещества частиц; J_{ε}^i – тензор инерции i -ой частицы, который определяется равенством

$$J_{\varepsilon}^i(t) \omega_{\varepsilon}^i(t) = \rho_{\text{ч}\varepsilon} \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} (x - x_{\varepsilon}^i(t)) \times (\omega_{\varepsilon}^i(t) \times (x - x_{\varepsilon}^i(t))) dx. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.4) есть условие сохранения импульса, а уравнение (1.5) – условие сохранения момента импульса (кинетического момента) для i -ой частицы.

Поскольку частицы твердые, каждая точка i -ой частицы движется по траектории $x(t)$, являющейся решением системы

обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x}(t) = u^i(t) + \omega^i(t) \times [x(t) - x^i(t)]$. Следовательно, область $Q_\varepsilon^i(t)$, занимаемая i -ой частицей в Ω в момент времени t , определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon^i(t) &= x(t) \in \Omega : \dot{x}(t) = u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times [x(t) - x_\varepsilon^i(t)], \\ \dot{x}_\varepsilon^i(t) &= u_\varepsilon^i(t), x(0) \in Q_\varepsilon^i(0) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Дополним уравнения (1.1) – (1.7) начальными условиями:

$$u_\varepsilon(x, 0) = U_\varepsilon^0(x), \quad \operatorname{div} U_\varepsilon^0(x) = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (1.8)$$

$$u_\varepsilon^i(0) = u_\varepsilon^{i0}, \quad \omega_\varepsilon^i(0) = \omega_\varepsilon^{i0}, \quad i = 1, \dots, N_\varepsilon, \quad (1.9)$$

где вектор-функция $U_\varepsilon^0(x)$ и постоянные векторы u_ε^{i0} и ω_ε^{i0} удовлетворяют условиям согласования

$$U_\varepsilon^0(x) = u_\varepsilon^{i0} + \omega_\varepsilon^{i0} \times (x - x_\varepsilon^i(0)), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i(0),$$

$$U_\varepsilon^0(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Основная цель первых 6 глав данной книги состоит в изучении асимптотического поведения решения задачи (1.1) – (1.9) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Но сначала уточним, что понимается под решением и обсудим вопрос о его существовании.

Заметим, что неизвестными в этой задаче являются положения $Q_\varepsilon^i(t)$ частиц в области Ω в момент времени $t > 0$ (и, значит, области $Q_{\varepsilon T}^i \subset \Omega_T$, замечаемые частицами за время T), поле скоростей $u_\varepsilon(x, t)$ (соленоидальное по x) и давление $p_\varepsilon(x, t)$ в жидкости, определяемые в области $\Omega_{\varepsilon T} = \Omega_T \setminus \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_{\varepsilon T}^i$, а также скорости $u_\varepsilon^i(t)$ центров масс $x_\varepsilon^i(t)$ и угловые скорости $\omega_\varepsilon^i(t)$ частиц. Но если $Q_\varepsilon^i(t)$ ($t \geq 0$) и $u_\varepsilon(x, t)$ ($(x, t) \in \Omega_{\varepsilon T}$) найдены, то $\operatorname{grad} p_\varepsilon(x, t)$ можно найти из первого уравнения (1.1), а $u_\varepsilon^i(t)$, $\omega_\varepsilon^i(t)$ и $x_\varepsilon^i(t)$ из (1.2) или (1.7).

Ясно, что функцию $u_\varepsilon(x, t)$ можно продолжить на множест-

ва $Q_\varepsilon^i(t)$ равенствами (1.2), сохранив при этом ее солениодальность в Ω . Учитывая это замечание, будем называть решением задачи (1.1) – (1.7) пару $\{\chi_\varepsilon(x, t), u_\varepsilon(x, t)\}$, где $\chi_\varepsilon(x, t)$ – характеристическая функция множества $\bigcup_i Q_{\varepsilon T}^i \subset \Omega_T$ (следа всех частиц в Ω_T), а $u_\varepsilon(x, t)$ – вектор-функция скорости, продолженная на $\bigcup_i Q_{\varepsilon T}^i$ указанным образом.

Обозначим

$$\rho_\varepsilon(x, t) = \rho_{\text{ж}}(1 - \chi_\varepsilon(x, t)) + \rho_{\text{ч}\varepsilon}\chi_\varepsilon(x, t) \quad (1.10)$$

и покажем, что эта пара должна удовлетворять таким интегральным тождествам

$$\int_{\Omega_T} \chi_\varepsilon [\eta_t + (u_\varepsilon \nabla) \eta] dx dt = - \int_{\Omega} \chi_\varepsilon(x, 0) \eta(x, 0) dx, \quad (1.11)$$

$$\int_{\Omega_T} \left\{ \rho_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon + (u_\varepsilon \nabla)v_\varepsilon) - 2\mu \sum_{k,l} e_{kl}[u_\varepsilon] e_{kl}[v_\varepsilon] + \rho_\varepsilon(f_\varepsilon, v_\varepsilon) \right\} dx dt -$$

$$- \sum_i \int_0^T (M_\varepsilon^i, b_\varepsilon^i) dt = - \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x, t)(u_\varepsilon(x, 0), v_\varepsilon(x, 0)) dx. \quad (1.12)$$

Здесь $\eta(x, t)$ и $v_\varepsilon(x, t)$ – произвольные функция и вектор-функция такие, что $\eta \in C^1(\Omega_T)$, $\eta(x, T) = 0$, $v_\varepsilon(x, t) \in W_2^1(\Omega_T) \cap \cap L_2(0, T; \overset{\circ}{J}(\Omega, \chi_\varepsilon(\cdot, t)))$, $v_\varepsilon(x, T) = 0$, $\overset{\circ}{J}(\Omega, \chi_\varepsilon(\cdot, t))$ – класс солениодальных в Ω вектор-функций $v_\varepsilon(x) \in W_2^1(\Omega)$, равных $a^i(t) + b^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))$ на $Q_\varepsilon^i(t) \subset \Omega$ ($x_\varepsilon^i(t)$ – центр масс $Q_\varepsilon^i(t)$); скобками (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение в \mathbf{R}^3 .

Из определения $Q_\varepsilon^i(t)$ и вида $u_\varepsilon(x, t)$ на $Q_\varepsilon^i(t)$ (см. (1.7), (1.2)) следует формула

$$\frac{d}{dt} \int_{Q_\varepsilon^i(t)} g(x, t) dx = \int_{Q_\varepsilon^i(t)} g_t + (u_\varepsilon, \nabla) g \, dx, \quad \forall g \in C^1(\Omega_T). \quad (1.13)$$

Воспользовавшись ею, с учетом свойств $\chi_\varepsilon(x, t)$ и $\eta(x, t)$, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \chi_\varepsilon [\eta_t + (u_\varepsilon \nabla) \eta] dx dt &= \int_0^T \sum_i \int_{Q_\varepsilon^i} \eta_t + (u_\varepsilon \nabla) \eta \, dx dt = \\ &= \int_0^T \sum_i \frac{d}{dt} \int_{Q_\varepsilon^i} \eta dx dt = - \int_0^T \sum_i \int_{Q_\varepsilon^i(0)} \eta(x, 0) dx = - \int_\Omega \chi_\varepsilon(x, 0) \eta(x, 0) dx \end{aligned}$$

и, таким образом, равенство (1.11) установлено.

Чтобы получить равенство (1.12), умножим первое из уравнений (1.1) скалярно на вектор-функцию $v_\varepsilon(x, t) \in W_2^1(\Omega_T) \cap L_2(0, T; J(\Omega, \chi_\varepsilon(x, t)))$ и проинтегрируем по области $\Omega_{\varepsilon T} = \Omega_T \setminus \bigcup_i \Omega_{\varepsilon T}^i$. Тогда после интегрирования по частям с учетом (1.3) и второго уравнения (1.1) получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\varepsilon T}} \left\{ \rho_{\text{ж}} u_\varepsilon [v_{\varepsilon t} + (u_\varepsilon \nabla) v_\varepsilon] - 2\mu \sum_{k,l} e_{kl}[u_\varepsilon] e_{kl}[v_\varepsilon] + \rho_{\text{ж}}(f_\varepsilon, v_\varepsilon) \right\} dx dt = \\ - \int_{\Omega_\varepsilon(0)} \rho_{\text{ж}}(u_\varepsilon(x, 0), v_\varepsilon(x, 0)) dx - \int_0^T dt \sum_i \int_{\partial Q_\varepsilon^i(t)} (\sigma_\varepsilon[u_\varepsilon], v_\varepsilon) dS_x. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Так как $v_\varepsilon(x, t) = a_\varepsilon^i(t) + b_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))$ на $\partial Q_\varepsilon^i(t)$, из (1.14), (1.15) и (1.6) следует:

$$\begin{aligned} \int_0^T dt \sum_i \int_{\partial Q_\varepsilon^i(t)} (\sigma[u_\varepsilon], v_\varepsilon) dS = \int_0^T dt \sum_i \int_{Q_\varepsilon^i} \rho_{\text{ж}}(f_\varepsilon(x, t) - u_\varepsilon^i(t), a_\varepsilon^i(t)) dx + \\ + \int_0^T \sum_i \int_{Q_\varepsilon^i(t)} \rho_{\text{ж}}((x - x_\varepsilon^i(t)) \times f_\varepsilon(x, t), b_\varepsilon^i(t)) dx + \int_0^T \sum_i (M_\varepsilon^i(t), b_\varepsilon^i(t)) dt - \\ - \int_0^T dt \sum_i \rho_{\text{ж}} \left(\frac{d}{dt} \int_{Q_\varepsilon^i(t)} (x - x_\varepsilon^i(t)) \times [\omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))] dx, b_\varepsilon^i(t) \right) = \\ = \int_{\Omega_T} \rho_{\text{ж}} \chi_\varepsilon(f_\varepsilon, v_\varepsilon) dx dt + \int_0^T \sum_i (M_\varepsilon^i(t), b_\varepsilon^i(t)) dt + J_{1\varepsilon} + J_{2\varepsilon}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} J_{1\varepsilon} &= - \sum_i \rho_{\text{ж}} \int_0^T \left(\frac{d}{dt} \int_{Q_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i(t)) \times [\omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))] dx, b_\varepsilon^i(t) \right) dt, \\ J_{2\varepsilon} &= - \sum_i \rho_{\text{ж}} \int_0^T \int_{Q_\varepsilon^i(t)} \dot{u}_\varepsilon^i(t), a_\varepsilon^i(t) dx dt. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой (1.13) и учитывая, что $v_\varepsilon(x, T) = 0$ (т.е.

$a_\varepsilon^i(T) = 0, b_\varepsilon^i(T) = 0$), находим:

$$\begin{aligned} J_{1\varepsilon} &= -\sum_i \rho_{\text{ч}\varepsilon} \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{Q_\varepsilon^i(t)} (u_\varepsilon^i, a_\varepsilon^i) dx dt + \sum_i \rho_{\text{ч}\varepsilon} \int_0^T \int_{Q_\varepsilon^i(t)} (u_\varepsilon^i, \dot{a}_\varepsilon^i) dx dt = \\ &= \int_{\Omega_T} \rho_{\text{ч}\varepsilon} \chi_\varepsilon (u_\varepsilon^i, \dot{a}_\varepsilon^i) dx dt + \int_{\Omega} \rho_{\text{ч}\varepsilon} \chi_\varepsilon (x, 0) (u_\varepsilon^i(0), a_\varepsilon^i(0)) dx. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Аналогично, интегрируя по переменной t по частям и учитывая, что x_ε^i – центры масс множеств $Q_\varepsilon^i(t)$ и $\dot{x}_\varepsilon^i(t) = u_\varepsilon^i(t)$, приходим к равенству:

$$\begin{aligned} J_{2\varepsilon} &= \int_{\Omega_T} \rho_{\text{ч}\varepsilon} \chi_\varepsilon (\omega_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i), b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)) dx dt + \\ &+ \int_{\Omega} \rho_{\text{ч}\varepsilon} \chi_\varepsilon (x, 0) (\omega_\varepsilon^i(0) \times (x - x_\varepsilon^i(0)), b_\varepsilon^i(0) \times (x - x_\varepsilon^i(0))) dx. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Вспоминая определение вектор-функций $u_\varepsilon(x, t)$ и $v_\varepsilon(x, t)$ на множествах $Q_\varepsilon^i(t)$, с помощью (1.16) и (1.17) получаем:

$$\begin{aligned} J_{1\varepsilon} + J_{2\varepsilon} &= \int_{\Omega_T} \rho_{\text{ч}\varepsilon} \chi_\varepsilon (u_\varepsilon, v_{\varepsilon t} + (u_\varepsilon \nabla) v_\varepsilon) dx dt + \\ &+ \int_{\Omega} \rho_{\text{ч}\varepsilon} \chi_\varepsilon (x, 0) (u_\varepsilon(x, 0), v_\varepsilon(x, 0)) dx \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из (1.10), (1.14), (1.15), (1.18) следует требуемое равенство (1.12).

Воспользуемся равенствами (1.11), (1.12) для определения обобщенного решения задачи (1.1)–(1.9). Обозначим $\text{Char}(\Omega_T)$ – класс характеристических функций $\chi_\varepsilon(x, t)$ подмножеств $G_\varepsilon \subset \overset{\circ}{\Omega}_T$, $J(\Omega, \chi_\varepsilon(\cdot, t))$ – класс соленоидальных в Ω вектор-функций $v_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ таких, что $e_{kl}[v_\varepsilon(x)] = 0$ при $x \in G_\varepsilon \cap \{t\}$, т.е. $v_\varepsilon(x) = a^i(t) + b^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))$ на каждой связной компоненте G_ε^i множества $(x_\varepsilon^i - \text{центр масс множества } G_\varepsilon^i \cap \{t\})$.

Следуя [72], [84], назовем обобщенным решением задачи (1.1) – (1.9) (или, что то же (1.11) – (1.12)) пару $\{\chi_\varepsilon(x, t), u_\varepsilon(x, t)\}$, состоящую из функции $\chi_\varepsilon(x, t) \in \text{Char}(\Omega_T) \cap C(0, T; L_p(\Omega))$ ($\forall p > 1$) и вектор-функции $u_\varepsilon(x, t) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; J(\Omega, \chi_\varepsilon(\cdot, t)))$

непрерывной в метрике $L_2(\Omega)$ при $t > 0$, которые удовлетворяют равенствам (1.11), (1.12) для любых $\eta(x, t)$ и $v_\varepsilon(x, t)$, описанных выше классов.

Теорема 1.1. *Предположим, что в начальный момент ($t = 0$) частицы $Q_\varepsilon^i(0)$ ($i = 1, \dots, N_\varepsilon$) находятся на положительном расстоянии друг от друга и от границы $\partial\Omega$ области Ω , их границы $\partial Q_\varepsilon^i(0)$ и $\partial\Omega$ принадлежат классу C_0^2 , а начальная скорость $U_\varepsilon^0(x)$ – классу $J(\Omega, \chi_\varepsilon(\cdot, 0))$. Предположим также, что $f_\varepsilon(x, t) \in L_2(\Omega_T)$, $M_\varepsilon^i(t) \in C[0, T]$.*

Тогда существует обобщенное решение задачи (1.1) – (1.9) на интервале $[0, T_\varepsilon]$, где момент времени $T_\varepsilon \subseteq T$ соответствует первому столкновению между частицами и внешней границей $\partial\Omega$ области Ω .

Доказательство теоремы проводится методом работы [70] (см. также [64], [65], [69]), но в виду громоздкости мы его не приводим.

В работе [70] доказано, что решение задачи (1.1) – (1.2) можно продолжить (с некоторой потерей гладкости) на весь интервал $[0, T]$, при условии что столкнувшиеся частицы слипаются и дальше движутся как твердое тело (гантелька) с негладкой границей.

§ 2. Априорные оценки решения исходной задачи и основные асимптотические режимы движения суспензий

Выберем в качестве параметра $\varepsilon > 0$, характеризующего микроструктуру суспензии, среднее расстояние между центрами масс $x_\varepsilon^i(0)$ ближайших частиц в начальный момент времени, т.е.

$$\varepsilon = \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \min_{i \neq j} |x_\varepsilon^j(0) - x_\varepsilon^i(0)|,$$

где N_ε – общее число частиц, находящихся в рассматриваемой области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

Предположим, что в начальный момент частицы расположены в Ω объемно и компактно так, что $N_\varepsilon = O\left(\frac{\text{mes}\Omega}{\varepsilon^3}\right)$ и выполняются неравенства

$$C_1\varepsilon < \min_{j \neq i} |x_\varepsilon^j(0) - x_\varepsilon^i(0)| < C_2\varepsilon,$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ – постоянные, не зависящие от ε и $j = 1, \dots, N_\varepsilon$.

В качестве второго параметра, характеризующего микроструктуру суспензии, выберем число $\alpha \geq 1$, предположив, что диаметр частиц $d_\varepsilon^i = \text{diam}(Q_\varepsilon^i)$ удовлетворяет неравенствам

$$C_3\varepsilon^\alpha \leq d_\varepsilon^i \leq C_4\varepsilon^\alpha, \quad i = 1, \dots, N_\varepsilon, \quad (2.1)$$

где $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ не зависят от ε и i .

Будем рассматривать такие ансамбли частиц $Q_\varepsilon^i, i = 1, \dots, N_\varepsilon$, чтобы в каждую из них вкладывался шар B_ε^i с центром в ее центре масс x_ε^i , а сама частица погружалась в концентрический шар V_ε^i ($B_\varepsilon^i \subset Q_\varepsilon^i \subset V_\varepsilon^i$), причем радиусы a_ε^i и a_ε^i этих шаров удовлетворяют неравенствам

$$C_0 d_\varepsilon^i \leq a_\varepsilon^i \leq a_\varepsilon^i \leq d_\varepsilon^i, \quad (2.2)$$

где $C_0 > 0$ не зависит от ε и $i = 1, \dots, N_\varepsilon$.

Ясно, что тогда число α характеризует объемную концентрацию твердой фазы суспензии, при $\alpha = 1$ эта концентрация остается строго положительной при $\varepsilon \rightarrow 0$ (такие суспензии обычно называют концентрированными), а при $\alpha > 1$ она стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ (такие суспензии называют разбавленными). В монографии мы будем рассматривать α принадлежащие сегменту $[1, 3]$, причем при $\alpha = 3$ суспензию будем называть критически разбавленной. Случай $\alpha > 3$ не интересен, так как тогда твердые частицы не оказывают влияние на

движение жидкости.

Предположим, что движение суспензии на интервале времени $(0, T)$ происходит так, что центры масс $x_\varepsilon^i(t)$ твердых частиц $Q_\varepsilon^i(t)$ удовлетворяют таким же неравенствам, как и в начальный момент времени $t = 0$, т.е.

$$C_1^1 \varepsilon \leq \min_{\substack{1 \leq i \leq N_\varepsilon \\ i \neq j}} (x_\varepsilon^j(t) - x_\varepsilon^i(t)) \leq C_1^2 \varepsilon, \quad j = 1, \dots, N_\varepsilon, \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.3)$$

где $C_1^1 > 0$, $C_1^2 > 0$ постоянные, не зависящие от ε , j и $t \in [0, T]$.

Существование решения исходной задачи (1.1), (1.2) на произвольном интервале $(0, T)$, которому соответствует такое движение суспензии, вообще говоря, не доказано. Оно доказано лишь на интервале $(0, T_\varepsilon)$, где T_ε – момент первого столкновения между частицами, который может зависеть от расстояния между частицами в начальный момент, т.е. от ε (см. теорему 1.1). Однако, согласно работе [70], это решение продолжается на произвольный интервал времени со специальным условием слипания частиц после их столкновения. Можно ожидать для продолженного решения неравенства (2.3) выполняются, но не для всего множества частиц $R_\varepsilon = Q_\varepsilon^j(t), j = 1, \dots, N_\varepsilon$, а лишь для некоторой достаточно большой его части $R'_\varepsilon(t)$ (вообще говоря, зависящей от $t \in [0, T]$), так что число частиц входящих в дополнение к $R'_\varepsilon(t)$ не очень велико, по сравнению с N_ε , а именно $n_\varepsilon(t) = o(N_\varepsilon^{1/3})$.

При этом условии для решения можно получить априорные оценки, которые позволяют выделить основные асимптотические (при $\varepsilon \rightarrow 0$) режимы течения суспензии. Но, во избежание дополнительных технических трудностей, мы будем предполагать, что неравенства (2.3) выполняются для всех частиц R_ε .

Введем обозначения

$$E_{\Omega_T}[u_\varepsilon] = \int_{\Omega_T} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[u_\varepsilon] dxdt,$$

$$\hat{u}_\varepsilon^i(t) = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{\hat{B}_\varepsilon^i(t)} u_\varepsilon dx$$

– среднее значение вектор-функции $u_\varepsilon(x, t)$ в шаре $\hat{B}_\varepsilon^i(t)$ радиусом ε с центром в точке $x_\varepsilon^i(t)$.

Лемма 2.1. Пусть выполняются условия (2.1) – (2.3). Тогда векторное поле скорости $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (1.1) – (1.9) (продолженное на $Q_\varepsilon^i(t)$ согласно (1.2)) удовлетворяет таким неравенствам

$$\int_{\Omega_T} |u_\varepsilon|^2 dxdt \leq CE_{\Omega_T}[u_\varepsilon], \quad (2.4)$$

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |\omega_\varepsilon^i(t)|^2 \text{mes } Q_\varepsilon^i dt \leq CE_{\Omega_T}[u_\varepsilon], \quad (2.5)$$

$$\int_0^T \frac{1}{N_\varepsilon} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |\hat{u}_\varepsilon^i(t) - u_\varepsilon^i(t)|^2 dt \leq C\varepsilon^{3-\alpha} E_{\Omega_T}[u_\varepsilon], \quad (2.6)$$

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{Q_\varepsilon^i(t)} |u_\varepsilon|^2 dxdt \leq C\varepsilon^{3(\alpha-1)} E_{\Omega_T}[u_\varepsilon], \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x, T) |u_\varepsilon(x, T)|^2 dx + 2\mu E_{\Omega_T}[u_\varepsilon] \leq \\ & \leq C \left\{ \int_{\Omega_T} \rho_\varepsilon |f_\varepsilon|^2 dxdt (1 + \rho_{\text{ч}\varepsilon} \varepsilon^{3(\alpha-1)}) + \varepsilon^{-3\alpha} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (M_\varepsilon^i(t))^2 dt + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega} \rho_\varepsilon(x, 0) |u_\varepsilon(x, 0)|^2 dx \right\}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где функция $\rho_\varepsilon(x, t)$ определена равенством (1.10), а постоянные C всюду не зависят от ε .

Доказательство. Так как $u_\varepsilon(x, t) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ и $\text{div } u_\varepsilon(x, t) = 0$, $x \in \Omega$, $t > 0$, то

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u_\varepsilon|^2 dxdt \leq \frac{1}{\lambda_0} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dxdt, \quad (2.9)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dxdt \leq 2E_{\Omega_T}[u_{\varepsilon}], \quad (2.10)$$

где $|\nabla u_{\varepsilon}|^2 = \sum_{k,l=1}^3 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right)^2$ (это обозначение будет использоваться и

в дальнейшем); λ_0 – наименьшее собственное значение оператора Лапласа в области Ω с нулевым граничным условием на $\partial\Omega$.

Неравенство (2.9) вытекает из вариационного принципа для собственных значений, а неравенство (2.10) получается с помощью интегрирования по частям с учетом соленоидальности $u_{\varepsilon}(x, t)$ в Ω . Ясно, что из (2.9) и (2.10) следует (2.4).

Согласно явному виду продолжения $u_{\varepsilon}(x, t)$ на $Q_{\varepsilon}^i(t)$ имеем $\operatorname{rot} u_{\varepsilon}(x, t) = 2\omega_{\varepsilon}^i(t)$ при $x \in Q_{\varepsilon}^i(t)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} |\omega_{\varepsilon}^i|^2 \operatorname{mes} Q_{\varepsilon}^i dt &= \frac{1}{4} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} |\operatorname{rot} u_{\varepsilon}|^2 dxdt \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega} |\operatorname{rot} u_{\varepsilon}|^2 dxdt = \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dxdt. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (2.10), получаем (2.5).

Перейдем к выводу неравенства (2.6). Не ограничивая общности, можно считать, что $u_{\varepsilon}(x, t) \in C[0, T; C^1(\bar{\Omega})]$. Возьмем две точки $x = (r, \theta) \in B_{\varepsilon}^i(t)$ и $\hat{x} = (\hat{r}, \theta) \in \hat{B}_{\varepsilon}^i(t)$, лежащие на луче с началом в точке $x_{\varepsilon}^i(t)$ ($r = |x - x_{\varepsilon}^i(t)|$, $\hat{r} = |\hat{x} - x_{\varepsilon}^i(t)|$ – радиальные координаты точек, а $\theta \in S_2$ – угловая координата) и запишем

$$u_{\varepsilon}(\hat{r}, \theta) - u_{\varepsilon}(r, \theta) = \int_r^{\hat{r}} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial \rho}(\rho, \theta) d\rho. \quad (2.11)$$

Умножая это равенство на $\frac{9r\hat{r}^2}{4\pi\varepsilon^3(a_{\varepsilon}^i)^3}$ и интегрируя по r и \hat{r} соответственно в пределах $(0, a_{\varepsilon}^i)$ и $(0, \varepsilon)$, а затем по $\theta \in S_2$, получаем

$$\hat{u}_\varepsilon^i - u_\varepsilon^i = \frac{9}{4\pi\varepsilon^3(a_\varepsilon^i)^3} \int_{S_2} d\theta \left\{ \int_0^\varepsilon \int_0^{a_\varepsilon^i} \hat{r}^2 r^2 \int_0^{\hat{r}} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \rho}(\rho, \theta) d\rho dr d\hat{r} \right\}, \quad (2.12)$$

где \hat{u}_ε^i – среднее значение $u_\varepsilon(x, t)$ в шаре $\hat{B}_\varepsilon^i(t)$, а u_ε^i – среднее значение $u_\varepsilon(x, t)$ в шаре $B_\varepsilon^i(t) \subset Q_\varepsilon^i(t)$, которое согласно продолжения $u_\varepsilon(x, t)$ на $Q_\varepsilon^i(t)$ равно скорости центра масс $Q_\varepsilon^i(t)$.

Преобразуем интегралы в правой части (2.12) последовательно с помощью неравенства Коши и воспользуемся неравенством:

$$\left(\int_r^{\hat{r}} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \rho} d\rho \right)^2 \leq \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\hat{r}} \right) \int_r^{\hat{r}} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \rho} \right)^2 \rho^2 d\rho.$$

Тогда из (2.12) получим

$$|\hat{u}_\varepsilon^i - u_\varepsilon^i|^2 \leq \frac{1}{24\pi} \left(\frac{1}{a_\varepsilon^i} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_{\hat{B}_\varepsilon^i} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx. \quad (2.13)$$

Так как $N_\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$ и шары $\hat{B}_\varepsilon^i(t)$ могут пересекаться с кратностью, ограниченной сверху числом, не зависящим от ε , то из (2.1), (2.2), (2.13) и (2.10) следует неравенство (2.6). Неравенство (2.7) можно доказать также с помощью (2.11). Но интегрирование по r нужно провести в пределах $(0, \tilde{a}_\varepsilon^i)$, т.е. по шару $\tilde{B}_\varepsilon^i(t) \supset Q_\varepsilon^i(t)$ и оценить L_2 -норму $u_\varepsilon(x, t)$ по всем шарам $\hat{B}_\varepsilon^i(t)$ с помощью (2.4).

Перейдем к доказательству неравенства (2.8). Умножим первое уравнение (1.1) на $u_\varepsilon(x, t)$ (скалярно в \mathbf{R}^3) и проинтегрируем по x по области $\Omega_\varepsilon(t)$. Тогда после интегрирования по частям получаем

$$\int_{\Omega_\varepsilon(t)} \frac{\rho_{\text{ж}}}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} |u_\varepsilon|^2 + (u_\varepsilon \nabla) |u_\varepsilon|^2 \right\} dx + 2\mu \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [u_\varepsilon] dx - \sum_i \int_{\partial Q_\varepsilon^i} (\sigma[u_\varepsilon], u_\varepsilon) dS = \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \rho_{\text{ж}} (f_\varepsilon, u_\varepsilon) dx. \quad (2.14)$$

Учитывая, что в силу (1.3) и второго уравнения (1.1)

$$\int_{\Omega} (u_{\varepsilon} \nabla) |u_{\varepsilon}|^2 dx = 0$$

и пользуясь формулой (1.13), преобразуем первое слагаемое в левой части (2.14) следующим образом

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\varepsilon}(t)} \frac{\rho_{ж}}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} |u_{\varepsilon}|^2 + (u_{\varepsilon} \nabla) |u_{\varepsilon}|^2 \right\} dx = \int_{\Omega} \frac{\rho_{ж}}{2} \frac{\partial}{\partial t} |u_{\varepsilon}|^2 dx - \\ & - \sum_i \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} \frac{\rho_{ж}}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} |u_{\varepsilon}|^2 + (u_{\varepsilon} \nabla) |u_{\varepsilon}|^2 \right\} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_{ж} |u_{\varepsilon}|^2 dx - \\ & - \frac{1}{2} \sum_i \frac{d}{dt} \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} \rho_{ж} |u_{\varepsilon}|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_{\varepsilon}(t)} \rho_{ж} |u_{\varepsilon}(x,t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поверхностные интегралы в (2.14) с помощью (1.3), (1.4), (1.5), (1.6) и формулы (1.13) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} & \int_{\partial Q_{\varepsilon}^i(t)} (\sigma[u_{\varepsilon}], u_{\varepsilon}) dS = \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} \rho_{чг} (f_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) dx + (M_{\varepsilon}^i(t), \omega_{\varepsilon}^i(t)) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} \rho_{чг} |u_{\varepsilon}(x,t)|^2 dx - \frac{d}{dt} \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} \rho_{чг} |\omega_{\varepsilon}^i(t) \times (x - x_{\varepsilon}^i(t))|^2 dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} \rho_{чг} \frac{\partial}{\partial t} |\omega_{\varepsilon}^i(t) \times (x - x_{\varepsilon}^i(t))|^2 dx = \\ & = \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} \rho_{чг} (f_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) dx + (M_{\varepsilon}^i(t), \omega_{\varepsilon}^i(t)) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} \rho_{чг} |u_{\varepsilon}(x,t)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.16)$$

При этом следует учесть, что $x_{\varepsilon}^i(t)$ – центры масс областей $Q_{\varepsilon}^i(t)$ и справедливо равенство:

$$(\omega_{\varepsilon}^i(t) \times (x - x_{\varepsilon}^i(t)), \nabla) |\omega_{\varepsilon}^i(t) \times (x - x_{\varepsilon}^i(t))|^2 = 0.$$

Объединяя (2.14), (2.15), (2.16) и вспоминая обозначения (1.10), запишем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} |u_{\varepsilon}|^2 dx + 2\mu \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [u_{\varepsilon}] dx = \\ & = \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} (f_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) dx + \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} (M_{\varepsilon}^i(t), \omega_{\varepsilon}^i(t)), \end{aligned}$$

откуда после интегрирования по t в пределах $(0, T)$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon}(x, T) |u_{\varepsilon}(x, T)|^2 dx + 2\mu E_{\Omega_T}[u_{\varepsilon}] = \int_{\Omega_T} \rho_{\varepsilon}(f_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) dx dt + \\ + \int_0^T \sum_i (M_{\varepsilon}^i(t), \omega_{\varepsilon}^i(t)) dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon}(x, 0) |u_{\varepsilon}(x, 0)|^2 dx. \end{aligned} \quad (2.17)$$

С помощью неравенства Коши и неравенств (2.4), (2.7), (2.5), (2.2) и (2.3) первые два слагаемых в правой части (2.17) оцениваются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_T} \rho_{\varepsilon}(f_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}) dx dt \right| \leq \\ \leq \left(\int_{\Omega_T} \rho_{\varepsilon} |f_{\varepsilon}|^2 dx dt \right)^{1/2} \left(\rho_{\text{ж}} \int_{\Omega_T \setminus \bigcup_i Q_{\varepsilon}^i} |u_{\varepsilon}|^2 dx dt + \rho_{\text{ч}\varepsilon} \int_0^T \sum_i \int_{Q_{\varepsilon}^i(t)} |u_{\varepsilon}|^2 dx dt \right)^{1/2} \leq (2.18) \\ \leq C \left((1 + \rho_{\text{ч}\varepsilon} \varepsilon^{3(\alpha-1)}) \int_{\Omega_T} \rho_{\varepsilon} |f_{\varepsilon}|^2 dx dt \right)^{1/2} E_{\Omega_T}^{1/2}[u_{\varepsilon}] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \sum_i (M_{\varepsilon}^i, \omega_{\varepsilon}^i) dt \right| \leq \left(\int_0^T \sum_i \frac{|M_{\varepsilon}^i|^2}{\text{mes } Q_{\varepsilon}^i} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \sum_i |\omega_{\varepsilon}^i|^2 \text{mes } Q_{\varepsilon}^i dt \right)^{1/2} \leq \\ \leq C \left(\varepsilon^{-3\alpha} \int_0^T \sum_i |M_{\varepsilon}^i|^2 dt \right)^{1/2} E_{\Omega_T}^{1/2}[u_{\varepsilon}], \end{aligned} \quad (2.19)$$

где постоянные C не зависят от ε .

Легко видеть, что из (2.17), (2.18), (2.19) следует неравенство (2.8). Лемма 1.1 доказана.

Предположим, что правая часть в неравенстве (2.8) ограничена равномерно по ε . Это выполняется, например, если $M_{\varepsilon}^i(x, t) \leq C \text{mes } Q_{\varepsilon}^i = O(\varepsilon^{3\alpha})$ и $\rho_{\text{ч}\varepsilon} = O(\varepsilon^{3(1-\alpha)})$.

Тогда из неравенств (2.8) и (2.6) следует, что при $\alpha < 3$ скорости центров масс частиц при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся (в среднем) к средней скорости окружающей частицы жидкости. В этом случае частицы движутся как бы «вмороженными» в несущую жидкость и смесь в целом может рассматриваться как однофазная среда.

В случае, если $\alpha \geq 3$, то как видно из неравенств (2.8), (2.6) и (2.5), скорости частиц могут существенно отличаться от средней скорости окружающей частицы жидкости, т. е. частицы могут двигаться как бы фильтруясь сквозь поток несущей жидкости. Такой режим течения смеси будем называть режимом «фильтрующихся частиц». Для того, чтобы он реализовался нужно, чтобы инерционные или гравитационные силы, действующие на частицу, были сравнимы (или превосходили) силу взаимодействия с жидкостью (стоксову силу) а, значит, плотность вещества частиц должна быть достаточно велика (порядка $O(\varepsilon^{3(1-\alpha)})$). При этом, если $\alpha > 3$, то частицы фильтруются сквозь жидкость, почти не возмущая ее. Такой режим течения не интересен и здесь не рассматривается. Интерес представляет критический случай $\alpha = 3$, когда асимптотический режим течения смеси описывается двух или многофазной моделью взаимопроникающих и взаимодействующих жидкостей.

Таким образом, в зависимости от соотношения между диаметрами частиц d_ε^i твердой фазы и средним расстоянием ε между соседними частицами, а также в зависимости от плотности вещества твердой фазы $\rho_{ч\varepsilon}$ и величин внешних моментов M_ε^i могут реализоваться два качественно различных режима течения суспензии:

1. режим «вмороженных частиц» ($d_\varepsilon^i = O(\varepsilon^\alpha)$, $1 \leq \alpha < 3$), когда скорости центров масс частиц почти не отличаются от средней скорости жидкости в их окрестностях;

2. режим «фильтрующихся частиц» ($d_\varepsilon^i = O(\varepsilon^\alpha)$, $\rho_{ч\varepsilon} = O(\varepsilon^{3(1-\alpha)})$, $\alpha = 3$), когда скорости центров масс частиц существенно отличаются от средней скорости жидкости в окрестностях частиц.

§3. Метод фиксации положений частиц. Три основные модельные задачи

Цель данной монографии – построить и изучить усредненные математические модели движения суспензии, отвечающие этим режимам течения. Для этого необходимо исследовать асимптотическое поведение решений исходной задачи (1.1) – (1.9) при $\varepsilon \rightarrow 0$ при различных соотношениях между ε , d_ε^i , $\rho_{ч\varepsilon}$ и M_ε^i , и получить усредненные уравнения, описывающие соответствующие пределы решений.

Математически строгое решение этой проблемы наталкивается на ряд принципиальных трудностей, вызванных спецификой задачи (1.1) – (1.9). Одна из них связана с неизвестностью областей $\Omega_{\varepsilon T}$, в которых производится усреднение исходных уравнений гидродинамики (1.1). Поэтому в монографии применяется метод построения усредненных уравнений для задачи (1.1) – (1.9), который можно назвать методом «фиксации положений частиц» и состоит он в следующем. Предполагается, что в любой момент времени t положения частиц и, значит, области $\Omega_\varepsilon(t)$, занятые жидкостью, известны. В этих областях рассматривается стационарная система уравнений Стокса при определенных граничных условиях на поверхностях частиц ∂Q_ε^i , диктуемых выделенными выше режимами течения суспензии. Изучается асимптотическое поведение решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и строится усредненная система уравнений для модельной краевой задачи, соответствующая рассматриваемому режиму течения. Эта часть исследования проводится на вполне математическом уровне строгости. В результате приходим к усредненной системе уравнений, которая описывает движение несущей жидкости, возмущенной движущимися в ней частицами. Эта система оказывается незамкнутой, т. к. в нее входят неизвестные коэффициенты, зависящие от расположения частиц, их объемной плотности,

скоростей, ориентации и т.д. Чтобы замкнуть эту систему необходимо изучить воздействие жидкости на частицы, т.е. найти силы и моменты, действующие на них со стороны жидкости. В случае частиц, размеры которых малы по сравнению с расстояниями до ближайших частиц (т.е. при $\alpha > 1$) удается получить асимптотически точные (при $\varepsilon \rightarrow 0$) формулы для этих величин, вывести уравнения эволюции вектора ориентации частиц. После этого выписывается кинетическое уравнение (типа Лиувилля, или Фоккера-Планка) для функции распределения частиц по координатам, скоростям и в результате приходим к замкнутой усредненной модели движения суспензии в том или ином режиме. Такой способ замыкания усредненной системы уравнений является естественным с физической точки зрения и соответствует физическому уровню строгости, но математически он не вполне обоснован. Поэтому полученные замкнутые системы уравнений требуют анализа их непротиворечивости, что и делается в монографии в последующих главах.

Теперь приведем две основные модельные задачи А и В (соответствующие выделенным режимам течения суспензии), усреднение которых служит ключевым моментом в построении усредненных моделей суспензии.

Будем пользоваться следующей простой леммой.

Лемма 3.1. *Предположим, что решение $\{u_\varepsilon(x, t), \chi_\varepsilon(x, t)\}$ задачи (1.1) – (1.9) таково, что $u_\varepsilon(x, t) \in C(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)) \cap L_\infty(\Omega_T)$*

$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, t) \in L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$, $\chi_\varepsilon(x, t) \in C(0, T; L_\infty(\Omega))$. Обозначим

$$\tilde{f}_\varepsilon(x, t) = \rho_\varepsilon(x, t) f_\varepsilon(x, t) - \rho_\varepsilon(x, t) \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, t) + (u_\varepsilon \nabla) u_\varepsilon(x, t) \right], \quad (3.1)$$

где функция $\rho_\varepsilon(x, t)$ определена равенством (1.10).

Тогда для почти всех $t \in [0, T]$ вектор-функция $u_\varepsilon(x, t)$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[u_{\varepsilon}] e_{kl}[\zeta_{\varepsilon}] - (\tilde{f}_{\varepsilon}, \zeta_{\varepsilon}) \right\} dx + \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} (M_{\varepsilon}^i, \beta_{\varepsilon}^i) = 0 \quad (3.2)$$

для любой соленоидальной вектор-функции $\zeta_{\varepsilon} \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ равной $\alpha_{\varepsilon}^i + \beta_{\varepsilon}^i \times (x - x_{\varepsilon}^i(t))$ на частицах $Q_{\varepsilon}^i(t)$ (т.е. $\zeta_{\varepsilon}(x) \in J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega)$), где $\alpha_{\varepsilon}^i, \beta_{\varepsilon}^i$ – постоянные векторы.

Доказательство леммы вытекает из равенства (1.12), если в нем положить $v_{\varepsilon}(x, t) = \zeta_{\varepsilon}(x)\eta_{\varepsilon}(t)$, $\forall \zeta_{\varepsilon}(x) \in J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega)$, $\forall \eta(t) \in C_0^1(0, T)$ и воспользоваться равенством

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} \left(\frac{\partial v_{\varepsilon}}{\partial t} + (u_{\varepsilon} \nabla) v_{\varepsilon}, u_{\varepsilon} \right) dx dt = - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_{\varepsilon} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial t} + (u_{\varepsilon} \nabla) u_{\varepsilon}, v_{\varepsilon} \right) dx dt.$$

Последнее легко проверяется с помощью формулы (1.13), с учетом того, что $u_{\varepsilon}(x, t) \in J(\Omega, \chi_{\varepsilon}(t))$.

1. Предположим, что $d_{\varepsilon}^i = O(\varepsilon^{\alpha})$ при $1 \leq \alpha < 3$ и, значит течение суспензии происходит в режиме «вмороженных частиц».

Обозначим через $J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega)$ класс соленоидальных вектор-функций $v_{\varepsilon} \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, равных $a_{\varepsilon}^i + b_{\varepsilon}^i \times (x - x_{\varepsilon}^i(t))$ на частицах $Q_{\varepsilon}^i(t)$, где a_{ε}^i и b_{ε}^i произвольные постоянные векторы. Учитывая лемму 3.1, из равенства (3.2) стандартным образом (см., например [35], [36]) заключаем, что вектор скорости $u_{\varepsilon}(x, t)$ суспензии (продолженный на частицы согласно (1.2)) при почти всех t минимизирует функционал

$$\Phi_{\varepsilon}[v_{\varepsilon}] = \int_{\Omega} \left\{ \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_{\varepsilon}] + (\tilde{f}_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) \right\} dx + \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} (M_{\varepsilon}^i(t), b_{\varepsilon}^i) \quad (3.3)$$

в классе вектор-функций $v_{\varepsilon}(x) \in J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega)$, т. е. является решением вариационной задачи

$$\Phi_{\varepsilon}[u_{\varepsilon}] = \min_{v_{\varepsilon} \in J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega)} \Phi_{\varepsilon}[v_{\varepsilon}]. \quad (3.4)$$

Дальше будем называть эту задачу модельной задачей A . Она

эквивалентна следующей краевой задаче

$$\left. \begin{aligned} -\mu\Delta u_\varepsilon + \text{grad } p_\varepsilon &= \tilde{f}_\varepsilon, \\ \text{div } u_\varepsilon &= 0, \end{aligned} \right\} x \in \Omega_\varepsilon(t),$$

$$u_\varepsilon = a_\varepsilon^i(t) + b_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t)), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i(t),$$

$$\int_{\partial Q_\varepsilon^i(t)} \sigma[u_\varepsilon] dS = \int_{Q_\varepsilon^i(t)} \tilde{f}_\varepsilon dx, \quad i = 1, \dots, N_\varepsilon,$$

$$\int_{\partial Q_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i(t)) \times \sigma[u_\varepsilon] dS = \int_{Q_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i(t)) \times \tilde{f}_\varepsilon dx + M_\varepsilon^i(t),$$

$$u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где a_ε^i и b_ε^i – некоторые постоянные векторы (неизвестные).

Согласно (2.20) и (1.10) вектор-функция $\tilde{f}_\varepsilon(x, t)$ (как и область $\Omega_\varepsilon(t) = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon^i(t)$) зависят от решения $\{u_\varepsilon(x, t), \chi_\varepsilon(x, t)\}$ задачи (1.1) – (1.9). Однако в модельной задаче A они считаются заданными при любом фиксированном t . В этом состоит главный принцип метода «фиксации положения частиц».

2. Рассмотрим теперь критический случай: $d_\varepsilon^i = O(\varepsilon^\alpha)$ и $\rho_{\text{чс}} = O(\varepsilon^{3(1-\alpha)})$ при $\alpha = 3$, когда течение суспензии происходит в режиме «фильтрующихся частиц». В этом случае провести усреднение модельной задачи A не удастся, т.к. при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\tilde{f}_\varepsilon(x, t)$ быстро растет и поведение скоростей частиц трудно контролировать. Поэтому мы будем пользоваться модельной задачей другого типа (в которой скорости частиц считаются заданными). А именно, предполагая, что в любой момент времени известны не только положения частиц, но также скорости $u_\varepsilon^i(t)$ их центров масс $x_\varepsilon^i(t)$ и угловые скорости $\omega_\varepsilon^i(t)$, обозначим через $J_{\varepsilon B}^\circ(\Omega)$ класс соленоидальных вектор-функций $v_\varepsilon(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$ равных $u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))$ на $Q_\varepsilon^i(t) \subset \Omega$. Тогда из леммы 3.1. следует, что вектор скорости $u_\varepsilon(x, t)$ сус-

пензии является решением вариационной задачи

$$\Phi_\varepsilon^0[u_\varepsilon] = \min_{v_\varepsilon \in J_{\varepsilon B}(\Omega)} \Phi^0[v_\varepsilon], \quad (3.5)$$

где функционал определяется равенством

$$\Phi_\varepsilon^0[v_\varepsilon] = \int_\Omega \left\{ \mu \sum_{k,l} e_{kl}^2[v_\varepsilon] + (\tilde{f}_\varepsilon, v_\varepsilon) \right\} dx. \quad (3.6)$$

В этом случае сумма в (3.3) опущена, поскольку моменты M_ε^i и угловые скорости $b_\varepsilon^i = \omega_\varepsilon^i$ заданы.

Будем называть задачу (3.5), (3.6) *модельной задачей В*. Она эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon + \text{grad } p_\varepsilon &= \tilde{f}_\varepsilon, \\ \text{div } u_\varepsilon &= 0, \end{aligned} \right\} x \in \Omega_\varepsilon(t),$$

$$u_\varepsilon = u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t)), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i(t),$$

$$u_\varepsilon = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где вектор-функция $\tilde{f}_\varepsilon(t)$ и постоянные (по x) векторы $u_\varepsilon^i(t)$ и $\omega_\varepsilon^i(t)$ заданы.

3. Введем еще одну модельную задачу (задача С), которая соответствует движению суспензии в режиме «вмороженных частиц» (т.е. при $d_\varepsilon^i = O(\varepsilon^\alpha)$, $1 \leq \alpha < 3$) в очень сильных электрических, или магнитных полях. Естественно, частицы должны быть электризующимися, или намагничивающимся. В этом случае, проекции угловых скоростей частиц на некоторое подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^3$ могут быть заданными (в частности, нулевыми). Например, если частицы – вытянутые эллипсоиды вращения, то в очень сильных полях их оси и их угловые скорости ориентируются по полю. В этом случае, подпространство \mathcal{L} – двумерное, перпендикулярное полю (см. [24]). Если же частицы – сплюснутые эллипсоиды вращения, то в сильных полях их оси направлены перпендикулярно полю. Подпространство \mathcal{L} в этом случае – одномерное, перпен-

дикулярное поле и осям вращения частиц.

Обозначим через $P_{\mathcal{L}}$ оператор ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^3$, и через $J_{\varepsilon C}^{\circ}(\Omega)$ класс соленоидальных вектор-функций $v_{\varepsilon}(x) \in W_2^1(\Omega)$ равных $a_{\varepsilon}^i + \omega_{\varepsilon}^i \times (x - x^i)$, где $\omega_{\varepsilon}^i = P_{\mathcal{L}} C_{\varepsilon}^i + (E - P_{\mathcal{L}}) b_{\varepsilon}^i$, a_{ε}^i , b_{ε}^i – произвольные постоянные векторы, C_{ε}^i – заданный вектор.

Модельная задача C – есть такая вариационная задача:

$$\Phi_{\varepsilon}^0[v_{\varepsilon}] = \int_{\Omega} \left\{ \mu \sum_{k,l} e_{kl}^2[v_{\varepsilon}] + (\tilde{f}_{\varepsilon}, v_{\varepsilon}) \right\} dx \rightarrow \min_{v_{\varepsilon} \in J_{\varepsilon C}^{\circ}(\Omega)} \quad (3.7)$$

Она эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\left. \begin{aligned} -\mu \Delta u_{\varepsilon} + \text{grad } p_{\varepsilon} &= \tilde{f}_{\varepsilon}, \\ \text{div } u_{\varepsilon} &= 0, \end{aligned} \right\} x \in \Omega_{\varepsilon}(t),$$

$$u_{\varepsilon} = a_{\varepsilon}^i(t) + \omega_{\varepsilon}^i \times (x - x_{\varepsilon}^i(t)), \quad x \in \partial\Omega_{\varepsilon}(t),$$

$$\int_{\partial Q_{\varepsilon}^i} \sigma[u_{\varepsilon}] dS = \int_{Q_{\varepsilon}^i} \tilde{f}_{\varepsilon} dx, \quad i=1, \dots, N_{\varepsilon}$$

$$(E - P_{\mathcal{L}}) \left[\int_{\partial Q_{\varepsilon}^i} (x - x_{\varepsilon}^i) \times \sigma[u_{\varepsilon}] dS - \int_{Q_{\varepsilon}^i} (x - x_{\varepsilon}^i(t)) \times \tilde{f}_{\varepsilon} dx \right] = 0,$$

$$u_{\varepsilon} = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Дальнейшие главы посвящены построению замкнутых усредненных моделей для рассмотренных выше асимптотических режимов течений суспензии и первый шаг в этой программе – есть исследование асимптотического поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения соответствующих им модельных задач A , B и C .

Глава 2

Усредненные уравнения движения суспензии в режиме замороженных частиц

В этой главе рассматриваются концентрированные ($\alpha = 1$) и слабо концентрированные ($1 < \alpha < 3$) суспензии, когда диаметры частиц имеют порядок ε^α , где ε – порядок расстояний между соседними частицами. Изучается движение таких суспензий в слабых внешних полях, когда создаваемые ими моменты сил воздействия на частицы малы (порядка $o(\varepsilon^{3\alpha})$). Как было отмечено в главе 1 в этом случае частицы движутся как бы «замороженными» в несущую жидкость: их скорости асимптотически при $\varepsilon \rightarrow 0$ совпадают со средними скоростями несущей жидкости в их окрестностях, и вращение частиц определяется в основном воздействием жидкости.

Получены усредненные уравнения (незамкнутые), описывающие движение суспензии в режиме замороженных частиц. Вывод этих уравнений базируется на исследовании асимптотического поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения модельной задачи A , которое проводится в § 1 и является главным результатом данной главы.

Замыкание полученных уравнений дается в главе 4.

§ 1. Исследование асимптотического поведения решения модельной задачи A

Рассмотрим вариационную задачу (1.3.4), являющуюся модельной задачей, соответствующей движению суспензии в режиме замороженных частиц:

$$\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \equiv \int_\Omega \left\{ \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_\varepsilon] - (\tilde{f}_\varepsilon, v_\varepsilon) \right\} dx - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (M_\varepsilon^i, b_\varepsilon^i) \rightarrow \inf_{v_\varepsilon \in J_{\varepsilon A}(\Omega)} . \quad (1.1)$$

Напомним, что в этой задаче вектор-функции $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ и посто-

янный вектор M_ε^i заданы и минимум функционала $\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon]$ ищется в классе соленоидальных вектор-функций $v_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ равных $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на множествах $Q_\varepsilon^i \subset \Omega$, где a_ε^i и b_ε^i – некоторые постоянные векторы и x_ε^i – центры масс Q_ε^i . При $\tilde{f}_\varepsilon(x) \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $u_\varepsilon(x) \in J_{\varepsilon A}(\Omega)$ этой задачи.

Цель данного параграфа – описать асимптотическое поведение $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Будем предполагать, что выполняются условия (1.2.1)–(1.2.3) и $1 \leq \alpha < 3$. Относительно формы частиц и их взаимного расположения в Ω будем предполагать следующее:

(i) каждая частица Q_ε^i ($i = 1, \dots, N_\varepsilon$) является сжатием некоторого тела Q^{mi} из конечного множества M тел Q^m ($m = 1, \dots, M$) единичного диаметра с границей $\partial Q^m \in C^2$, т. е. $Q_\varepsilon^i = \{x : (d_\varepsilon^i)^{-1}(x - x_\varepsilon^i) \in \Pi^i Q^{mi}, Q^{mi} \subset M\}$, $i = 1, \dots, N_\varepsilon$, где Π^i – оператор поворота, d_ε^i и x_ε^i – диаметр и центр масс частицы;

(ii) расстояние r_ε^i от минимального шара $B(Q_\varepsilon^i)$ с центром в точке x_ε^i , содержащего частицу Q_ε^i до других минимальных шаров и до границы $\partial\Omega$ области (т. е. $r_\varepsilon^i = \text{dist}(B(Q_\varepsilon^i), \bigcup_j B(Q_\varepsilon^j) \cup \partial\Omega)$) удовлетворяет неравенству:

$r_\varepsilon^i \geq C(d_\varepsilon^i)^\kappa$, где $\kappa \leq 1$ и постоянная C не зависит от i и ε .

Определим локальную мезоскопическую характеристику суспензии, которую будем называть средним тензором вязкости. Такие характеристики определяются в каждом кубе $K(\xi, h)$ с центром в точке $\xi \in \Omega$ и сторонами длиной h , такой, что $0 < \varepsilon \ll h \ll 1$, поэтому характеристика называется мезоскопической. Ориентация кубов $K(\xi, h)$ может быть произвольной, но не зависящей от ε, ξ, h . Для определенности будем считать,

что их ребра параллельны координатным осям.

Введем вектор-функцию

$$\psi^{np}(x) = \frac{1}{2}(x_n e^p + x_p e^n) - \frac{\delta_{np}}{3} \sum_{i=1}^3 x_i e^i = \sum_{q,r=1}^3 I_{npqr} x_q e^r. \quad (1.2)$$

Здесь и далее через e^r обозначается орт оси x_r , а через I_{npqr} – компоненты изотропного тензора 4-го ранга [43]:

$$I_{npqr} = \frac{1}{2}(\delta_{nq} \delta_{pr} + \delta_{nr} \delta_{pq}) - \frac{1}{3} \delta_{np} \delta_{qr}. \quad (1.3)$$

Рассмотрим в кубе $K(\xi, h)$ задачу минимизации

$$\begin{aligned} & \Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_\varepsilon) \equiv \\ & \equiv \frac{\mu}{h^3} \int_{K(\xi, h)} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e^2[v_\varepsilon] + h^{-2-\gamma} |v_\varepsilon - \sum_{k,l=1}^3 \psi^{kl}(x-\xi) R_{kl}|^2 \right\} dx \rightarrow \inf_{v_\varepsilon \in J_{\xi, h}^\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $R = \{R_{kl}\}_{k,l=1}^3$ – произвольный симметричный тензор второго ранга в \mathbf{R}^3 , γ – некоторое число, удовлетворяющее неравенству $0 < \gamma < 2$. Минимум функционала $\Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_\varepsilon)$ ищется в классе $J_{\xi, h}^\varepsilon$ соленоидальных вектор-функций v_ε из $\overset{\circ}{W}_2^1(K(\xi, h))$ равных $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на $Q_\varepsilon^i \cap K(\xi, h)$, где $a_\varepsilon^i, b_\varepsilon^i$ – произвольные постоянные векторы.

Стандартным образом (см., например, [35], [36], [17]) можно показать, что существует единственная вектор-функция $v_\varepsilon \in J_{\xi, h}^\varepsilon$ доставляющая минимум в (1.4), причем в области $K(\xi, h) \cap \Omega_\varepsilon$ она является решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} -\Delta v_\varepsilon + 2h^{-2-\gamma} v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= 2h^{-2-\gamma} \sum_{k,l=1}^3 \psi^{kl}(x-\xi) R_{kl}, \\ \operatorname{div} v_\varepsilon &= 0, \end{aligned} \right\} x \in K(\xi, h) \cap \Omega_\varepsilon, \\
& v_\varepsilon(x) = a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i, \\
& \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma[v_\varepsilon] dS = 2h^{-2-\gamma} \left\{ \int_{Q_\varepsilon^i} \sum_{k,l=1}^3 \psi^{kl}(x-\xi) R_{kl} dx - \rho_\varepsilon^{-1} m_\varepsilon^i a_\varepsilon^i \right\}, \quad (1.5) \\
& \int_{\partial Q_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[v_\varepsilon] dS = 2h^{-2-\gamma} \int_{Q_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times \sum_{k,l=1}^3 \psi^{kl}(x-\xi) R_{kl} dx - \rho_\varepsilon^{-1} J_\varepsilon^i b_\varepsilon^i, \\
& \sigma[v_\varepsilon] = 0, \quad x \in \partial K(\xi, h) \cap \Omega_\varepsilon,
\end{aligned}$$

где m_ε^i – масса, а J_ε^i – тензор инерции частицы Q_ε^i (см. (1.6)), ρ_ε – плотность материала частиц.

Обозначим через $v_\varepsilon^{np}(x)$ минимизант функционала $\Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_\varepsilon)$ с тензором R , являющимся координатной диадой $R^{np} = \frac{1}{2}(e^n \otimes e^p + e^p \otimes e^n)$, т.е. $v_\varepsilon^{np}(x)$ – решение задачи (1.5) при

$$R_{ik} \equiv R_{ik}^{np} = \begin{cases} 1, & \text{если } k=n, i=p \text{ или } k=p, i=n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда, пользуясь линейностью задачи (1.5) для произвольного тензора $R = \{R_{np}\}_{n,p=1}^3$ получаем $v_\varepsilon(x) = \sum_{k,l=1}^3 v_\varepsilon^{np}(x) R_{np}$. Отсюда следует, что минимальное значение достигаемое функционалом $\Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_\varepsilon)$ на решении $v_\varepsilon(x)$ равно

$$\min_{v_\varepsilon \in J_{\xi,h}^\varepsilon} \Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_\varepsilon) = \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi) R_{np} R_{qr}, \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi) &= \frac{\mu}{h^3} \int_{K(\xi,h)} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e_{kl} [v_\varepsilon^{np}] e_{kl} [v_\varepsilon^{qr}] + \right. \\
& \left. + h^{-2-\gamma} (v_\varepsilon^{np}(x) - \psi^{np}(x-\xi), v_\varepsilon^{qr}(x) - \psi^{qr}(x-\xi)) \right\} dx. \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Из (1.7) и симметрии $\psi^{np}(x)$ следует, что система чисел

$\{a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi)\}_{n,p,q,r=1}^3$ образует тензор четвертого ранга в \mathbf{R}^3 , обладающий симметрией

$$a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi) = a_{qmpn}(\varepsilon, h, \xi) = a_{nrpq}(\varepsilon, h, \xi) = a_{pnqr}(\varepsilon, h, \xi).$$

Этот тензор примем в качестве основной количественной характеристики множества $Q_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon^i$ в кубе $K(\xi, h)$ и назовем его средним тензором вязкости суспензии в окрестности точки $\xi \in \Omega$.

Приведем эвристические соображения, объясняющие введение такой характеристики. Предположим, что суспензия ведет себя как некоторая эффективная сплошная среда – жидкость. Тогда для определения локальных реологических свойств этой среды в окрестности точки $\xi \in \Omega$ (например, эффективной вязкости жидкости), естественно выделить малый объем, например, куб $K(\xi, h)$ и в нем измерять энергию деформации среды. Этот объем должен быть не очень малым так, чтобы в нем содержалось много частиц, влияющих на энергию деформации. Отсюда возникает промежуточный «мезомасштаб» h ($\varepsilon \ll h \ll 1$). Энергия деформации (скорости деформации для жидкости) определяется интегралом $\Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_\varepsilon)$, в котором второе слагаемое вводится по таким соображениям. Скорость $v(x)$ эффективной жидкости есть гладкая функция и в малом кубе $K(\xi, h)$ она почти линейная:

$$v(x) = v(\xi) + \sum_{k,l=1}^3 \psi^{kl}(x - \xi) R_{kl}, \text{ где } R_{kl} \text{ – постоянный тензор – гра-}$$

диент скорости. Изменение скорости суспензии $\delta v_\varepsilon(x)$ в $K(\xi, h)$ в среднем должно быть близко к изменению эффективной жидкости, так что

$$\left| \delta v_\varepsilon(x) - \sum_{k,l=1}^3 \psi^{kl}(x - \xi) R_{kl} \right| \sim h^{1+\gamma/2} = o(h)$$

при $x \in K(\xi, h)$. Это обеспечивается вторым слагаемым в $\Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_\varepsilon)$, играющим роль штрафа с параметром $\gamma > 0$. Ес-

тественно, что при этом тензор $\{a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi)\}$ (1.6) зависит от γ . Но эта зависимость при малых ε и h становится очень слабой и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ исчезает, так что предельный тензор вязкости $\{a_{npqr}(x)\}$ не зависит от γ . Это будет доказано в главе 3 (§ 2).

Сформулируем теперь основной результат данного параграфа.

Теорема 1.1. Пусть $\alpha = 1$ и выполняются следующие условия:

$$1. \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{npqr}(\varepsilon, h, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}} a_{npqr}(\varepsilon, h, x) = a_{npqr}(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

где $a_{npqr}(x)$ непрерывные в Ω функции ($n, p, q, r = 1, 2, 3$);

$$2. \tilde{f}_\varepsilon(x) \rightarrow \tilde{f}(x) \text{ слабо в } L_2(\Omega);$$

$$3. \max_i M_\varepsilon^i = o(\varepsilon^3).$$

Тогда решение $u_\varepsilon(x)$ вариационной задачи (1.1) сходится в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $u(x) \in J(\Omega)$, являющейся решением вариационной задачи

$$\Phi[v] = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x) e_{np}[v] e_{qr}[v] - (\tilde{f}, v) \right\} dx \rightarrow \inf_{v \in J(\Omega)}, \quad (1.8)$$

где через $J(\Omega)$ обозначен класс соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(\Omega)$.

Доказательство. 1. Пусть $u_\varepsilon(x)$ вектор-функция класса $J_{\varepsilon A}(\Omega)$, доставляющая минимум в задаче (1.1). Тогда, учитывая, что $\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[0] = 0$, с помощью неравенства Коши получаем:

$$\begin{aligned} & \mu \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[u_\varepsilon] dx \leq \\ & \leq \|\tilde{f}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(M_\varepsilon^i)^2}{\text{mes } Q_\varepsilon^i} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (b_\varepsilon^i)^2 \text{mes } Q_\varepsilon^i \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Воспользуемся такими неравенствами:

$$\|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 < \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [u_\varepsilon] dx,$$

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (b_\varepsilon^i)^2 \text{mes } Q_\varepsilon^i \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\text{rot } u_\varepsilon|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [u_\varepsilon] dx,$$

где C не зависит от ε .

Первое из них есть неравенство Корна для функций $u_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ [39], а второе следует из того, что $u_\varepsilon \in J_{\varepsilon A}(\Omega)$, т. е. $\text{rot } u_\varepsilon = 2b_\varepsilon^i$ на Q_ε^i и $\text{div } u_\varepsilon = 0$ в Ω .

Тогда, учитывая, что в силу условий 2) и 3) теоремы 1.1 норма вектор-функций $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ в $L_2(\Omega)$ ограничена равномерно относительно ε и $M_\varepsilon^i = o(\text{mes } Q_\varepsilon^i)$, из (1.9) получаем:

$$\int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [u_\varepsilon] dx \leq C,$$

и, значит, согласно неравенству Корна

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C,$$

где C не зависит от ε .

Из последней оценки следует, что множество $\{u_\varepsilon(x), \varepsilon > 0\}$ решений задачи (1.1) слабо компактно в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и, значит можно выделить последовательность $\{u_{\varepsilon_k}, \varepsilon_k \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots\}$ слабо сходящуюся в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ к некоторой вектор-функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Ясно, что эта вектор-функция соленоидальна, т. е. принадлежит классу $J(\Omega)$. Покажем, что она доставляет минимум функционалу $\Phi_\varepsilon[v]$ (см. (1.8)) в классе $\overset{\circ}{J}(\Omega)$. Это делается в п. 3 – 6. Наметим в общих чертах схему доказательства.

Сначала в п. 3 по произвольной вектор-функции $w(x) \in$

$\in J(\Omega) \cap C^2(\Omega)$ строится специальная пробная вектор-функция $w_{\varepsilon h}(x)$ принадлежащая классу $J_{\varepsilon A}(\Omega)$. Так как $u_\varepsilon(x)$ минимизирует функционал $\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon]$ в этом классе (см. (1.1)), то справедливо неравенство $\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[w_{\varepsilon h}]$. В п. 4, пользуясь конструкцией пробной вектор-функции $w_{\varepsilon h}(x)$, оцениваем предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[w_{\varepsilon h}] \leq \Phi[w], \quad (1.10)$$

где функционал $\Phi[w]$ определен равенством (1.8). Поэтому

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \leq \Phi[w]. \quad (1.11)$$

Далее в п. 5 показываем, что если вектор-функция $u(x) \in J(\Omega)$ является слабым пределом в $W_2^1(\Omega)$ решений $u_\varepsilon(x)$ вариационной задачи (1.1) по выделенной последовательности $\{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0\}$, то

$$\underline{\lim}_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \geq \Phi[u]. \quad (1.12)$$

Из (1.11) и (1.12) следует, что $\Phi[u] \leq \Phi[w]$ для любой вектор-функции $w(x) \in J(\Omega)$ и, значит, $u(x)$ есть решение вариационной задачи (1.8). Поскольку эта задача имеет единственное решение (см. п. 5), то $u_\varepsilon(x)$ сходится к $u(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$, а в силу теоремы вложения и сильно в $L_2(\Omega)$. Для реализации этой схемы установим необходимые вспомогательные утверждения.

2. Рассмотрим конечное покрытие области Ω кубами $K^i = K(x^i, h)$ с ребрами длиной h , ориентированными по координатным осям с центрами x^i , образующими в \mathbf{R}^3 кубическую решетку с периодом $h - \delta$ ($0 < \delta = o(h)$). В дальнейшем будем полагать $\delta = h^{1+\gamma/2}$.

Пусть $K_1^j = K(x^j, h_1)$ – куб с центром в точке x^j и ребрами длиной $h_1 = h - 2\delta$, т. е. $K_1^j = K^j \setminus \bigcup_{i \neq j} K^i$. Следующая лемма дает

оценки для решения задачи (1.4).

Лемма 1.1. Пусть $v_\varepsilon^{np,j}(x)$ – решение задачи (1.4) в кубе $K^j = K(x^j, h)$ при $R = \frac{1}{2}(e^n \otimes e^p + e^p \otimes e^n)$. При достаточно малых ε и h справедливы оценки:

$$\int_{K^j} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [v_\varepsilon^{np,j}] dx = O(h^3), \quad (1.13)$$

$$\int_{K^j} |v_\varepsilon^{np,j} - \psi^{np}(x - x^j)|^2 dx = O(h^{5+\gamma}), \quad (1.14)$$

$$\int_{K^j \setminus K_1^j} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [v_\varepsilon^{np,j}] dx = o(h^3), \quad (1.15)$$

$$\int_{K^j \setminus K_1^j} |v_\varepsilon^{np,j} - \psi^{np}(x - x^j)|^2 dx = o(h^{5+\gamma}). \quad (1.16)$$

Доказательство. Оценки (1.13), (1.14) следуют из (1.7) и условия 1 теоремы 1.1. Далее, обозначая $\psi^{np,j}(x) \equiv \psi^{np}(x - x^j)$ и учитывая, что $h_1 = h - 2\delta < h$, запишем:

$$\begin{aligned} & \int_{K^j \setminus K_1^j} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [v_\varepsilon^{np,j}] dx + h^{-2-\gamma} \int_{K^j \setminus K_1^j} |v_\varepsilon^{np,j} - \psi^{np,j}|^2 dx = \\ & = \int_{K^j} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [v_\varepsilon^{np,j}] + h^{-2-\gamma} |v_\varepsilon^{np,j} - \psi^{np,j}|^2 \right\} dx - \\ & - \int_{K_1^j} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [v_\varepsilon^{np,j}] + h^{-2-\gamma} |v_\varepsilon^{np,j} - \psi^{np,j}|^2 \right\} dx + \\ & + (h_1^{-2-\gamma} - h^{-2-\gamma}) \int_{K_1^j} |v_\varepsilon^{np,j} - \psi^{np,j}|^2 dx. \end{aligned}$$

С помощью (1.6), (1.7) замечаем, что первое слагаемое в правой части этого равенства равно $a_{npnp}(\varepsilon, h, x^j) \frac{h^3}{\mu}$, второе – не меньше, чем $a_{npnp}(\varepsilon, h_1, x^j) \frac{h_1^3}{\mu}$, а третье, в силу (1.14), имеет порядок $O(\delta h^2)$. Поэтому справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{K^j \setminus K_1^j} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [v_\varepsilon^{np,j}] dx + h^{-2-\gamma} \int_{K^j \setminus K_1^j} |v_\varepsilon^{np,j} - \psi^{np,j}|^2 dx \leq \\ & \leq a_{npnp}(\varepsilon, h, x^j) \frac{h^3}{\mu} - a_{npnp}(\varepsilon, h_1, x^j) \frac{h_1^3}{\mu} + O(\delta h^2), \end{aligned}$$

из которого в силу условия 1 теоремы 1.1 следуют и оценки (1.15), (1.16). Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. Пусть выполняется условие (ii) $r_\varepsilon^i > C(d_\varepsilon^i)^\alpha$. Тогда при достаточно малых ε , существует специальное разбиение единицы $\{\varphi_\varepsilon^j(x)\}$, связанное с покрытием области Ω кубами K^j , т. е. набор функций $\varphi_\varepsilon^j(x) \in C^2(\mathbf{R}^3)$, удовлетворяющих условиям:

1. $\sum_j \varphi_\varepsilon^j(x) = 1, \quad x \in \Omega;$
2. $\varphi_\varepsilon^j(x) = 1$ при $x \in K_1^j$, $\varphi_\varepsilon^j(x) = 0$ при $x \in K^j$, $0 \leq \varphi_\varepsilon^j \leq 1;$
3. $\varphi_\varepsilon^j(x) = C_\varepsilon^{ij}$ при $x \in Q_\varepsilon^i$, где C_ε^{ij} – постоянные, $0 \leq C_\varepsilon^{ij} \leq 1;$
4. $\left| \frac{\partial \varphi_\varepsilon^j}{\partial x_k} \right| \leq C\delta^{-1}$ ($k = 1, 2, 3$), C не зависят от ε .

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу свойств рассматриваемого покрытия $\bigcup_j K^j \supset \Omega$: ($K^j = K(x^j, h)$, $K_1^j = K(x^j, h_1) = K(x^j, h) \setminus \bigcup_{i \neq j} K(x^i, h)$ и $h_1 = h - 2\delta$) существует обычное разбиение единицы $\{\varphi^j(x)\}$, т. е. набор функций $\varphi^j(x) \in C^2(\mathbf{R}^3)$ обладающих свойствами 1, 2 и 4. Эти функции можно изменить в окрестностях частиц Q_ε^i так, чтобы выполнялось и условие 3. Для этого поместим каждую частицу Q_ε^i в минимальный шар $B(Q_\varepsilon^i)$ с центром в точке x_ε^i , содержащий частицу Q_ε^i . Ясно, что его радиус a_ε^i не меньше чем $\frac{d_\varepsilon^i}{2}$, но не превосходит d_ε^i . В силу условия (ii) эти шары можно поместить в непересекающиеся шары B_ε^i с центрами в точках

x_ε^i и радиусами $a_\varepsilon^2 \geq \kappa a_\varepsilon^i$, где $\kappa > 1$ и не зависит от i и ε . Следовательно, можно построить функции $\beta_\varepsilon^i(x) \in C^2(\mathbf{R}^3)$ такие, что

$$\beta_\varepsilon^i(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \in B(Q_\varepsilon^i), \quad \text{при} \quad x \notin B_\varepsilon^i, \quad 0 \leq \beta_\varepsilon^i(x) \leq 1,$$

$$\left| \frac{\partial \beta_\varepsilon^i}{\partial x_k} \right| \leq \frac{(a_\varepsilon^i)^{-1}}{\kappa - 1} \leq \frac{2(d_\varepsilon^i)^{-1}}{\kappa - 1} \quad (k=1,2,3).$$

Теперь при достаточно малых ε таких, что $d_\varepsilon^i \ll \delta$, положим

$$\varphi_\varepsilon^j(x) = \varphi^j(x) + \sum_i [\varphi^j(\tilde{x}_\varepsilon^i) - \varphi^j(x)] \beta_\varepsilon^i(x),$$

где $\tilde{x}_\varepsilon^i = x_\varepsilon^i$, если $B_\varepsilon^i \cap \left(\bigcup_j K_1^j \right) = \emptyset$ и \tilde{x}_ε^i — произвольная точка $B_\varepsilon^i \cap K_1^r$, если при каком-то r $B_\varepsilon^i \cap K_1^r \neq \emptyset$.

Нетрудно проверить, что функции $\varphi_\varepsilon^j(x) \in C^2(\mathbf{R}^3)$ и удовлетворяют условиям 1–3 с постоянными $C_\varepsilon^{ij} = \varphi^j(\tilde{x}_\varepsilon^i)$. Остается убедиться, что выполняется условие 4. Согласно определению $\varphi_\varepsilon^j(x)$:

$$\frac{\partial \varphi_\varepsilon^j}{\partial x_k}(x) = \left[1 - \sum_i \beta_\varepsilon^i(x) \right] \frac{\partial \varphi^j}{\partial x_k}(x) + \sum_i [\varphi^j(\tilde{x}_\varepsilon^i) - \varphi^j(x)] \frac{\partial \beta_\varepsilon^i}{\partial x_k}(x).$$

Поскольку носители функций $\beta_\varepsilon^i(x)$ не пересекаются, из этого равенства следует

$$\left| \frac{\partial \varphi_\varepsilon^j(x)}{\partial x_k} \right| \leq \left| \frac{\partial \varphi^j(x)}{\partial x_k} \right| + \max_i \left\{ |\nabla \varphi^j(x_\varepsilon^i)| \operatorname{diam} B_\varepsilon^i \left| \frac{\partial \beta_\varepsilon^i(x)}{\partial x_k} \right| \right\},$$

где x_ε^i — некоторая точка шара B_ε^i . Отсюда, учитывая свойства функций $\varphi_\varepsilon^j(x)$ и $\beta_\varepsilon^i(x)$, получаем оценку 4. Лемма 1.2 доказана.

Лемма 1.3. Пусть выполняются условия (i) и (ii). Тогда для любой функции $\psi_\varepsilon(x) \in L_2(\Omega)$, удовлетворяющей условиям

$$1. \int_\Omega \psi_\varepsilon(x) dx = 0,$$

2. $\psi_\varepsilon(x) = 0$ при $x \in \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon^i$

существует вектор-функция $\zeta_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ такая, что

$$\operatorname{div} \zeta_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega; \quad \zeta_\varepsilon(x) = \zeta_\varepsilon^i, \quad x \in Q_\varepsilon^i \quad (i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon),$$

$$\|\zeta_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|\psi_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)},$$

где ζ_ε^i – постоянные векторы, $C > 0$ не зависит от ε .

Доказательство. В силу условия 1 существует функция $\varphi_\varepsilon(x)$, являющаяся решением такой задачи Неймана

$$\Delta \varphi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega; \quad \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.17)$$

Такая функция определяется с точностью до постоянного слагаемого. Фиксируем ее, считая, что ее среднее значение равно 0. Тогда, при достаточно гладкой границе $\partial\Omega$, справедливы оценки [19]:

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega)} \leq C \|\psi_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|\varphi_\varepsilon\|_{W_2^{3/2}(\partial\Omega)} \leq C \|\psi_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}. \quad (1.18)$$

Положим $u_\varepsilon(x) = \nabla \varphi_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(x)$, где $v_\varepsilon(x)$ – соленоидальное векторное поле в Ω с нормальной составляющей $v_{en}(x)$ к $\partial\Omega$, равной нулю, и касательной составляющей $v_{e\tau}(x)$, равной $-\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \tau}$.

Такое поле можно построить, например, по схеме, изложенной в работе [17]. Из этого построения следует, что при достаточно гладкой границе $\partial\Omega$ (класса C^2) выполняется неравенство

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)}. \quad (1.19)$$

Таким образом, согласно (1.17), (1.18), (1.19)

$$\operatorname{div} u_\varepsilon = \psi_\varepsilon(x), \quad \text{в } \Omega, \quad u_\varepsilon(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad (1.20)$$

и справедлива оценка

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \|\psi_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}, \quad (1.21)$$

где постоянная C не зависит от ε .

Согласно условию (ii) множества Q_ε^i можно поместить в непересекающиеся шары B_ε^i с центрами в точках x_ε^i и диаметрами $d_\varepsilon^i = ad_\varepsilon^i$ ($a > 1$). Растягивая эти шары в $(d_\varepsilon^i)^{-1}$ раз, преобразуем их в шар B диаметра $a > 1$ с центром в 0. При этом $Q_\varepsilon^i \subset B_\varepsilon^i$ перейдет в множество $Q = \Pi^i Q^{m_i}$ диаметра 1, где $Q^{m_i} \subset M$, Π^i – оператор поворота (см. условие (i)). Рассмотрим в Q вектор-функцию $U_\varepsilon(\xi) = u_\varepsilon(d_\varepsilon^i \xi + x_\varepsilon^i)$. Очевидно, что $U_\varepsilon \in W_2^1(Q)$ и справедливы равенства:

$$\|D_x^k u_\varepsilon(x)\|_{L_2(Q_\varepsilon^i)} = (d_\varepsilon^i)^{3/2-k} \|D_\xi^k U_\varepsilon(\xi)\|_{L_2(Q)}, \quad k = 0, 1, \quad (1.22)$$

где D^k – производная порядка k .

Положим

$$V_\varepsilon(\xi) = U_\varepsilon(\xi) - \frac{1}{\text{mes}Q} \int_Q U_\varepsilon d\xi.$$

Применяя к $V_\varepsilon(x)$ неравенство Пуанкаре, получаем

$$\|V_\varepsilon\|_{W_2^1(Q)} \leq C \|\nabla V_\varepsilon\|_{L_2(Q)} = C \|\nabla U_\varepsilon\|_{L_2(Q)}. \quad (1.23)$$

Согласно (1.19) и условия 2 леммы 1.3 имеем

$$\text{div} V_\varepsilon(\xi) = \text{div} U_\varepsilon(\xi) = d_\varepsilon^i \text{div} u_\varepsilon(x) \Big|_{x=d_\varepsilon^i \xi \in Q_\varepsilon^i} = d_\varepsilon^i \psi_\varepsilon(x) \Big|_{x \in Q_\varepsilon^i} = 0,$$

т. е. вектор-функция $V_\varepsilon(\xi)$ соленоидальна в Q .

Поэтому (см. [10]) существует соленоидальная вектор-функция $\tilde{V}_\varepsilon(\xi) \in W_2^2(Q)$ такая, что $V_\varepsilon(\xi) = \text{rot} \tilde{V}_\varepsilon(\xi)$ и

$$\|\tilde{V}_\varepsilon\|_{W_2^2(Q)} \leq C \|V_\varepsilon\|_{W_2^1(Q)}. \quad (1.24)$$

Продолжим $\tilde{V}_\varepsilon(\xi)$ на множество $B \setminus Q$ так, чтобы продолженная вектор-функция $\tilde{W}_\varepsilon(\xi) \in W_2^2(B)$ удовлетворяла неравенству

$$\|\tilde{W}_\varepsilon\|_{W_2^2(B)} \leq C \|\tilde{V}_\varepsilon\|_{W_2^2(Q)}. \quad (1.25)$$

Постоянные C в (1.23), (1.24), (1.25) зависят только от области Q . Но так как Q с точностью до поворота совпадает с одним из конечного числа множеств $Q^m \in M$ (см условие (i)),

то постоянные в (1.23), (1.24), (1.25) можно выбрать не зависящими от ε .

Пусть $\varphi(\xi)$ – функция класса $C^2(\mathbf{R}^3)$, равная 1 в шаре $B(Q)$ (являющимся растяжением минимального шара $B(Q_\varepsilon^i)$) и 0 вне шара B . Положим

$$W_\varepsilon(\xi) = \text{rot}[\tilde{W}_\varepsilon(\xi)\varphi(\xi)], \quad w_\varepsilon^i(x) = W_\varepsilon\left(\frac{x-x_\varepsilon^i}{d_\varepsilon^i}\right) \quad (1.26)$$

и определим функцию $\zeta_\varepsilon(x)$ равенством

$$\zeta_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} w_\varepsilon^i(x).$$

Из построения следует, что $\zeta_\varepsilon(x) \in W_2^1(\Omega)$,

$$\text{div} \zeta_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega,$$

$$\zeta_\varepsilon(x) = \zeta_\varepsilon^i = \frac{1}{\text{mes}Q_\varepsilon^i} \int_{Q_\varepsilon^i} u_\varepsilon(x) dx, \quad x \in Q_\varepsilon^i.$$

Так как носители \hat{B}_ε^i вектор-функций $w_\varepsilon^i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$) не пересекаются, то

$$\|\zeta_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq 2 \left(\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \|w_\varepsilon^i\|_{W_2^1(B_\varepsilon^i)}^2 \right). \quad (1.27)$$

Очевидно, что для вектор-функций $w_\varepsilon^i(x)$ и $W_\varepsilon(\xi)$ справедливы равенства (1.22) с заменой Q_ε^i и Q на B_ε^i и B . Поэтому

$$\|w_\varepsilon^i\|_{W_2^1(B_\varepsilon^i)}^2 \leq d_\varepsilon^i \|W_\varepsilon\|_{W_2^1(B)}^2.$$

Отсюда, пользуясь первым равенством (1.26), оценками (1.23), (1.25), а затем снова равенствами (1.22), получаем:

$$\|w_\varepsilon^i\|_{W_2^1(B_\varepsilon^i)}^2 \leq C d_\varepsilon^i \|\tilde{W}_\varepsilon\|_{W_2^1(B)}^2 \leq C d_\varepsilon^i \|\nabla U_\varepsilon\|_{L_2(Q)}^2 = C \|\psi_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i)}^2.$$

Наконец, используя оценки (1.20) и (1.18), окончательно получаем: $\|\zeta_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|\psi_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}$, что и доказывает лемму 1.3.

3. Перейдем к построению пробной вектор-функции $w_{\varepsilon h}(x) \in J_{\varepsilon A}(\Omega)$. Пусть $w(x)$ – произвольная дважды-непрерывно

дифференцируемая соленоидальная вектор-функция с компактным носителем в Ω . Необходимо по ней построить вектор-функцию $w_{\varepsilon h}(x)$, принадлежащую классу $J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega)$ и близкую в метрике $L_2(\Omega)$ к $w(x)$ при малых ε и h ($\varepsilon \ll h \ll 1$). Идея построения такой вектор-функции состоит в следующем.

Известно, что соленоидальную вектор-функцию $w(x) \in C^2(\Omega)$ в окрестности любой точки (в качестве таких окрестностей будут выбраны кубы $K^j = K(x^j, h)$ с центрами x^j и ребрами длиной $h \ll 1$) можно представить в виде

$$w(x) = w(x^j) + \sum_{p,q} e_{pq}[w](x^j) \psi^{pq}(x - x^j) + \sum_{p,q} \omega_{pq}[w](x^j) \varphi^{pq}(x - x^j) + O(|x - x^j|), \quad (1.28)$$

где

$$e_{pq}[w](x^j) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_p}{\partial x_q}(x^j) + \frac{\partial w_q}{\partial x_p}(x^j) \right]$$

– симметричная часть тензора градиента скорости $w(x)$, а

$$\omega_{pq}[w](x^j) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_p}{\partial x_q}(x^j) - \frac{\partial w_q}{\partial x_p}(x^j) \right]$$

– его антисимметричная часть; вектор-функции $\psi^{pq}(x)$ определены равенством (1.2), а $\varphi^{pq}(x)$ – равенством

$$\varphi^{pq}(x) = \frac{1}{2} (x_p e^q - x_q e^p).$$

Первую сумму в (1.28) называют деформационной частью течения, а вторую – вращательной.

Обозначим

$$g^{pq,j}(x) = \omega_{pq}[w](x^j) \varphi^{pq}(x - x^j). \quad (1.29)$$

Нетрудно убедиться, что справедливо представление

$$g^{pq,j}(x) = \theta^{pq,j} \times (x - x^j), \quad (1.30)$$

где $\theta^{pq,j}$ – постоянный вектор (его компоненты определяются равенствами $\theta_k^{pq,j} = \frac{1}{2} \varepsilon_{pqk} \omega_{pq}[w](x^j)$, где ε_{pqk} – тензор Леви-

Чевита.

Отсюда следует, что вектор-функция $g^{pq,j}(x)$ удовлетворяет условию жесткого перемещения частиц Q_ε^j , т.е. $g^{pq,j}(x) = a^i + b^i \times (x - x^j)$ на Q_ε^j и, кроме того всюду

$$e_{kl}[g^{pq,j}](x) = 0, \quad (1.31)$$

$$\operatorname{div} g^{pq,j}(x) = 0. \quad (1.32)$$

Итак, задача состоит в построении близкой (при $\varepsilon \ll h \ll 1$) к $w(x)$ вектор-функции $w_{\varepsilon h}(x)$ класса $J_{\varepsilon A}^\circ(\Omega)$, т. е. соленоидальной вектор-функции из $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющей условию жесткого перемещения на частицах $Q_\varepsilon^i \subset \Omega$. Естественно, такая вектор-функция будет близка в каждом кубе $K(x^j, h)$ к линейной вектор-функции, являющейся суммой первых трех слагаемых в (1.28). Но она не может совпадать с ней, поскольку вектор-функция $\psi^{pq}(x - x^j)$ во втором слагаемом не удовлетворяет условию жесткого перемещения на Q_ε^j . Однако этому условию удовлетворяет вектор-функция $v_\varepsilon^{pq,j}(x)$, являющаяся решением задачи (1.4) при $R = \frac{1}{2}(e^p \otimes e^q - e^q \otimes e^p)$ и, согласно лемме 1.1, близка к $\psi^{pq}(x - x^j)$ при $\varepsilon \ll h \ll 1$. Поэтому при построении $w_{\varepsilon h}(x)$ в кубах $K(x^j, h)$ можно заменить в формуле (1.28) $\psi^{pq}(x - x^j)$ на $v_\varepsilon^{pq,j}(x)$. После этого необходимо склеить получившиеся разложения в кубах K^j с помощью специального разбиения единицы $\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$, построенного в лемме 1.2. Такое разложение единицы обеспечивает выполнение условия жесткого перемещения на частицах. Однако при склеивании нарушается соленоидальность и поэтому необходимо добавить вектор-функцию $\zeta_{\varepsilon h}(x)$ компенсирующую дефект соленоидальности и не нарушающую остальных требуемых свойств пробной вектор-функции $w_{\varepsilon h}(x)$.

Таким образом, пробная вектор-функция $w_{\varepsilon h}(x)$ строится с учетом (1.28), (1.29) по следующей формуле:

$$w_{\varepsilon h}(x) = \sum_j \left\{ w(x^j) + \sum_{n,p=1}^3 (e_{np}[w](x^j) v_{\varepsilon h}^{np,j}(x) + g^{np,j}(x)) \right\} \varphi_{\varepsilon h}^j(x) + \zeta_{\varepsilon h}(x) \equiv Z_{\varepsilon h}(x) + \zeta_{\varepsilon h}(x). \quad (1.33)$$

Здесь вектор-функцию $\zeta_{\varepsilon h}(x)$ нужно выбрать в соответствии с леммой 1.3, в которой положить $\psi_{\varepsilon}(x) = -\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}(x)$.

Покажем, что при достаточно малых ε и h вектор-функция $\psi_{\varepsilon}(x) = -\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}(x)$ удовлетворяет условиям 1 и 2 леммы 1.3 и, таким образом, вектор-функция $\zeta_{\varepsilon h}(x)$ с указанными в лемме 1.3 свойствами существует.

Так как $w(x)$ имеет компактный носитель в Ω , то согласно (1.33), при достаточно малых h , вектор-функция $Z_{\varepsilon h}(x)$ тоже имеет компактный носитель и, значит, ее нормальная компонента $(Z_{\varepsilon h}(x))_n = 0$ на $\partial\Omega$. Поэтому

$$\int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div} Z_{\varepsilon h} dx = - \int_{\partial\Omega} (Z_{\varepsilon h})_n dS = 0,$$

т. е. условие 1 выполнено.

Из свойств $v_{\varepsilon h}^{npj}(x)$, $\varphi_{\varepsilon h}^j(x)$ и (1.32) следует, что $\psi_{\varepsilon}(x) = -\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}(x) = 0$ при $x \in Q_{\varepsilon}^i$ ($i=1,2,\dots,N_{\varepsilon}$), т. е. выполняется и условие 2.

Согласно лемме 1.3 существует вектор-функция $\zeta_{\varepsilon h}(x) \in W_2^1(\Omega)$ такая, что $\operatorname{div} \zeta_{\varepsilon h}(x) = -\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}(x)$ ($x \in \Omega$) и $\zeta_{\varepsilon h}(x) = \zeta_{\varepsilon h}^i$ при $x \in Q_{\varepsilon}^i$ ($i=1,2,\dots,N_{\varepsilon}$), где $\zeta_{\varepsilon h}^i$ – постоянные векторы.

Таким образом, формулой (1.33) определена вектор-функция $w_{\varepsilon h}(x)$, которая в силу свойств $w(x)$, $v_{\varepsilon h}^{npj}(x)$, $g^{npj}(x)$, $\zeta_{\varepsilon h}(x)$ и свойств специального разбиения единицы $\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$ принадлежит требуемому классу $J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega)$.

Покажем, что при $\varepsilon, h \rightarrow 0$ она сходится в $L_2(\Omega)$ к $w(x)$. Это будет следовать из приведенных ниже лемм 1.4 и 1.5.

Лемма 1.4. *Справедливо равенство*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\zeta_{\varepsilon h}\|_{W_2^1(\Omega)} = 0.$$

Доказательство. В силу леммы 1.3

$$\|\zeta_{\varepsilon h}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}\|_{L_2(\Omega)}, \quad (1.34)$$

где постоянная C не зависит от ε и h .

Оценим правую часть этого неравенства. Учитывая, что $w(x) \in C^2(\Omega)$, а $\operatorname{div} w(x) = 0$, перепишем (1.28) в виде

$$w(x) = w(x^j) + \sum_{n,p=1}^3 \left[e_{np}[w](x^j) \psi^{np,j}(x) + g^{np,j}(x) \right] + \sigma^j(x), \quad (1.35)$$

где использованы обозначения $\psi^{np,j}(x) = \psi^{np}(x - x^j)$, (1.2) и (1.29), а остаточный член $\sigma^j(x)$ есть соленоидальная вектор-функция, имеющая в кубе $K^j = K(x^j, h)$ оценки

$$|D^k \sigma^j(x)| = O(h^{2-k}) \quad (k = 0, 1). \quad (1.36)$$

Учитывая (1.33), (1.35) и свойства разбиения единицы $\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$, получаем

$$Z_{\varepsilon h}(x) = w(x) + \sum_j \left\{ \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^j) [v_{\varepsilon h}^{np,j}(x) - \psi^{np,j}(x)] - \sigma^j(x) \right\} \varphi_{\varepsilon h}^j(x). \quad (1.37)$$

Отсюда, в силу соленоидальности вектор-функций $w(x)$, $v_{\varepsilon h}^{np,j}(x)$, $\psi^{np,j}(x)$ и $\sigma^j(x)$ следует

$$\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}(x) = \sum_j \left(\sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^j) (v_{\varepsilon h}^{np,j}(x) - \psi^{np,j}(x)), \nabla \varphi_{\varepsilon h}^j(x) \right) - \sum_j (\sigma^j(x), \nabla \varphi_{\varepsilon h}^j(x))$$

С помощью этого равенства, учитывая свойства разбиения единицы $\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$ (см. лемму 1.2), получаем

$$\|\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta^2} \left\{ \sum_j \sum_{n,p=1}^3 \|v_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi_{\varepsilon h}^{np,j}\|_{L_2(K^j \setminus K_1^j)}^2 + \sum_j \|\sigma^j\|_{L_2(K^j \setminus K_1^j)}^2 \right\},$$

где C не зависит от ε и h .

Полагая в этом неравенстве $\delta = h^{1+\gamma/2}$ и оценивая слагаемые

первой суммы с помощью (1.16), а второй – с помощью (1.36), заключаем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

откуда в силу (1.34) следует утверждение леммы.

Лемма 1.5. *Справедливо равенство*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Z_{\varepsilon h} - w\|_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Доказательство. С помощью равенства (1.37), с учетом свойств разбиения единицы $\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$, получаем

$$\|Z_{\varepsilon h} - w\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \left\{ \sum_j \|v_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi_{\varepsilon h}^{np,j}\|_{L_2(K^j)}^2 + \sum_j \|\sigma^j\|_{L_2(K^j)}^2 \right\}.$$

Отсюда в силу оценок (1.14) и (1.36) следует утверждение леммы.

4. Теперь докажем неравенство (1.10). Для этого сначала вычислим $e_{kl}[w_{\varepsilon h}]$. Согласно (1.33) и (1.37)

$$w_{\varepsilon h}(x) = w(x) + \sum_j \left\{ \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^j) (v_{\varepsilon h}^{np,j}(x) - \psi^{np,j}(x)) - \sigma^j(x) \right\} \varphi_{\varepsilon h}^j(x) + \zeta_{\varepsilon h}(x)$$

Произведя непосредственный подсчет с помощью этого равенства и выделив главные слагаемые, запишем:

$$e_{kl}[w_{\varepsilon h}](x) = \sum_j \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^j) e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{np,j}](x) \varphi_{\varepsilon h}^j(x) + \delta_{\varepsilon h}^{(1)}(x) + \delta_{\varepsilon h}^{(2)}(x) + e_{kl}[\zeta_{\varepsilon h}](x), \quad (1.38)$$

где

$$\delta_{\varepsilon h}^{(1)} = \sum_j \left\{ e_{kl}[w] - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^j) e_{kl}[\psi^{np,j}] - e_{kl}[\sigma^j] \right\} \varphi_{\varepsilon h}^j,$$

$$\delta_{\varepsilon h}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_j \left\{ \frac{\partial \varphi_{\varepsilon h}^j}{\partial x_k} \left[\sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^j) (v_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi^{np,j}) - \sigma^j \right] + \frac{\partial \varphi_{\varepsilon h}^j}{\partial x_l} \left[\sum_{n,p=1}^3 [e_{np}[w](x^j) (v_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi^{np,j}) - \sigma^j(x)] \right] \right\},$$

Из (1.35) и (1.31) следует, что

$$\delta_{\varepsilon h}^{(1)}(x) \equiv 0. \quad (1.39)$$

Далее, учитывая свойства разбиения единицы $\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$ (лемма 1.2), получаем:

$$\|\delta_{\varepsilon h}^{(2)}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{C}{\delta^2} \left\{ \sum_j \sum_{n,p=1}^3 \|\vartheta_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi^{np,j}\|_{L_2(K^j \setminus K_i^j)}^2 + \sum_j \|\sigma^j\|_{L_2(K^j \setminus K_i^j)}^2 \right\}.$$

Оценим слагаемые первой суммы в фигурных скобках с помощью (1.16), а второй – с помощью (1.36). Тогда, учитывая, что $\delta = h^{1+\gamma/2}$, получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\delta_{\varepsilon h}^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (1.40)$$

Наконец, из леммы 1.4 следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|e_{kl}[\zeta_{\varepsilon h}]\|_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (1.41)$$

Учитывая (1.38) и (1.39), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[w_{\varepsilon h}] dx = \\ & = \sum_{i,j} \sum_{k,l=1}^3 \sum_{n,p,q,r=1}^3 \int_{\Omega} e_{np}[w](x^i) e_{qr}[w](x^j) e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{np,i}] e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{pq,j}] \varphi_{\varepsilon h}^i \varphi_{\varepsilon h}^j dx + \\ & \quad + E(\varepsilon, h), \end{aligned} \quad (1.42)$$

где $E(\varepsilon, h) = E(\varepsilon, h, \delta; w)$ содержит оставшиеся слагаемые – интегралы, в которых подынтегральные выражения являются квадратичными комбинациями от $\delta_{\varepsilon h}^{(2)}$ и $e_{kl}[\zeta_{\varepsilon h}]$, а также произведениями их на главное слагаемое в (1.38). Поэтому из (1.40) – (1.42) и оценки (1.13) следует, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} E(\varepsilon, h) = 0. \quad (1.43)$$

Поскольку $\text{supp } \varphi_{\varepsilon h}^j \subset K^j$, равенство (1.42) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[w_{\varepsilon h}] dx = \\ & = \sum_j \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w](x^j) e_{qr}[w](x^j) \int_{K^j} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{np,j}] e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{qr,j}] dx + \\ & \quad + E(\varepsilon, h) + I_1(\varepsilon, h) + I_2(\varepsilon, h), \end{aligned} \quad (1.44)$$

где

$$\begin{aligned}
I_1(\varepsilon, h) &= \\
&= \sum_j^3 \sum_{k,l}^3 \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w](x^j) e_{qr}[w](x^j) \int_{K^j} e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{np,j}] e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{qr,j}] [(\varphi_{\varepsilon h}^j)^2 - 1] dx, \\
I_2(\varepsilon, h) &= \\
&= \sum_{j \neq i}^3 \sum_{k,l}^3 \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w](x^i) e_{qr}[w](x^j) \int_{K^j} e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{np,i}] e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{qr,j}] \varphi_{\varepsilon h}^i \varphi_{\varepsilon h}^j dx.
\end{aligned}$$

Учитывая свойства разбиения единицы $\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$ и пользуясь оценкой (1.15) получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} I_k(\varepsilon, h) = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (1.45)$$

Легко видеть, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,p,q,r} e_{np}[w](x^j) e_{qr}[w](x^j) (v_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi^{np,j}, v_{\varepsilon h}^{qr,j} - \psi^{qr,j}) \equiv \\
&\equiv \left(\sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^j) (v_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi^{np,j}), \sum_{q,r=1}^3 e_{qr}[w](x^j) (v_{\varepsilon h}^{qr,j} - \psi^{qr,j}) \right) \geq 0,
\end{aligned}$$

в силу которого из определения $a_{npqr}(\varepsilon, h, x^j)$ (см. формулу (1.7)) следует, что

$$\begin{aligned}
&\mu \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w](x^j) e_{qr}[w](x^j) \int \sum_{K^j} e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{np,j}] e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{qr,j}] dx \leq \\
&\leq \mu \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w](x^j) e_{qr}[w](x^j) \times \\
&\times \int_{K^j} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{np,j}] e_{kl}[v_{\varepsilon h}^{qr,j}] + h^{-2-\gamma} (v_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi^{np,j})(v_{\varepsilon h}^{qr,j} - \psi^{qr,j}) \right\} dx = \\
&= h^3 \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w](x^j) e_{qr}[w](x^j) a_{npqr}(\varepsilon, h, x^j).
\end{aligned}$$

Подставляя это неравенство в (1.44) и учитывая (1.43) и (1.45), с помощью условия 1 теоремы 1.1, заключаем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[w_{\varepsilon h}] \leq \int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x) e_{np}[w] e_{qr}[w] dx. \quad (1.46)$$

Оценим значение функционала Φ_{ε} (см. формулу (1.1)) на пробной функции $w_{\varepsilon h}(x)$:

$$\Phi_\varepsilon[w_{\varepsilon h}] = \int_\Omega \left\{ \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[w_{\varepsilon h}] - (\tilde{f}_\varepsilon, w_{\varepsilon h}) \right\} dx - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (M_\varepsilon^i, b_{\varepsilon h}^i), \quad (1.47)$$

Здесь первый интеграл уже оценен (см. (1.46)), а сумму, содержащую M_ε^i можно оценить так же, как в (1.9). В результате, пользуясь оценками $M_\varepsilon^i = o(\text{mes } Q_\varepsilon^i)$ и (1.46), получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (M_\varepsilon^i, b_{\varepsilon h}^i) = 0. \quad (1.48)$$

Наконец, вспомним, что $w_{\varepsilon h}(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ сходится сильно в $L_2(\Omega)$ к $w(x)$, а в силу условия 2 теоремы 1.1 $f_\varepsilon(x)$ сходится слабо в $L_2(\Omega)$ к $f(x)$. Поэтому из (1.47), (1.46), (1.48) следует требуемое неравенство (1.10).

5. Теперь докажем неравенство (1.12). Предположим сначала для простоты, что предельная вектор-функция $u(x)$ достаточно гладкая, а именно $u(x) \in C_0^1(\Omega)$. Разрежем область Ω на кубы $K^j = K(x^j, h)$ с центрами в x^j , образующими кубическую решетку периодом h . В каждом таком кубе, не пересекающемся с $\partial\Omega$ рассмотрим вектор-функцию

$$u_\varepsilon^j(x) = u_\varepsilon(x) - (u(x^j) + \theta^j \times (x - x^j)), \quad (1.49)$$

где $u_\varepsilon(x)$ – решение задачи (1.1), $\theta^j = \sum_{p,q} \theta^{pq,j}$, а $\theta^{pq,j}$ – постоянные векторы, определенные равенствами (1.29), (1.30), в которых вместо $w(x)$ подставляется $u(x)$. Легко видеть, что $u_\varepsilon^j(x)$ принадлежит классу $J_{x^j,h}^\varepsilon$, в котором ищется минимум в задаче (1.4) в кубе $K(x^j, h)$.

Поэтому, согласно (1.6)

$$\Gamma(\varepsilon, h, x^j, R; u_\varepsilon^j) \geq \sum_{n,p,q,r} a_{npqr}(\varepsilon, h, x^j) R_{np} R_{qr}$$

для любого тензора $R = \{R_{np}\}_{n,p=1}^3$.

Полагая здесь $R_{np} = e_{np}[u](x^j)$ и учитывая вид (1.4) функционала Γ , а также вид (1.49) вектор-функции $u_\varepsilon^j(x)$ и равенство

(1.31), получаем

$$\int_{K^j} \left\{ \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[u_\varepsilon] + h^{-2-\gamma} \left| u_\varepsilon^j - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[u](x^j) \psi^{np,j} \right|^2 \right\} dx \geq \quad (1.50)$$

$$\geq \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\varepsilon, h, x^j) e_{np}[u](x^j) e_{qr}[u](x^j).$$

Из (1.49), (1.35) и (1.30) следует неравенство

$$\left\{ \int_{K^j} \left| u_\varepsilon^j - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[u](x^j) \psi^{np,j} \right|^2 dx \right\}^{1/2} \leq \left\{ \int_{K^j} |u_\varepsilon - u|^2 dx \right\}^{1/2} + \left\{ \int_{K^j} |\sigma^j|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

В правой части этого неравенства первое слагаемое стремится к нулю при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ в силу предполагаемой сходимости $u_\varepsilon(x)$ к $u(x)$ (в метрике $L_2(\Omega)$), а второе – имеет порядок $O(h^{7/2})$ в силу оценок (1.36). Следовательно

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{K_j} \left| u_\varepsilon^j - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[u](x^j) \psi^{np,j} \right|^2 dx = O(h^7). \quad (1.51)$$

Учитывая вид (1.1) функционала $\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon]$ с помощью (1.50), (1.51) заключаем, что при достаточно малых ε_k ($\varepsilon_k \leq \varepsilon(h)$)

$$\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \geq \sum_j \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\varepsilon, h, x^j) e_{np}[u](x^j) e_{qr}[u](x^j) - \int_{\Omega} (\tilde{f}_\varepsilon, u_\varepsilon) dx - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (M_\varepsilon^i, b_\varepsilon^i) + O(h^{2-\gamma}),$$

где $b_\varepsilon^i = \frac{1}{2} \operatorname{rot} u_\varepsilon$ при $x \in Q_\varepsilon^i$ и $\gamma < 2$.

Перейдем в этом неравенстве к пределу сначала по $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, а затем по $h \rightarrow 0$. Тогда, учитывая условия 1 и 2 теоремы 1.1 и вспоминая, что $u_\varepsilon(x)$ сходится к $u(x)$ сильно в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, а $M_\varepsilon^i = o(\operatorname{mes} Q_\varepsilon^i)$, получаем

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \geq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x) e_{np}[u](x) e_{qr}[u](x) - (f(x), u(x)) \right\} dx. \quad (1.52)$$

Таким образом, требуемое неравенство (1.12) выведено в предположении, что предельная вектор-функция $u(x)$ принад-

лежит классу $C_0^2(\Omega)$. Поскольку заранее это не известно, технически доказательство несколько усложняется, хотя его схема остается той же: необходимо перейти к подходящим аппроксимациям $w(x)$ и $w_\varepsilon(x)$ и к ним применить прежнюю схему. Для этого и понадобится следующая лемма.

Лемма 1.6. Пусть $w(x)$ – произвольная вектор-функция класса $\overset{\circ}{J}(\Omega)$, т. е. $w(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и $\operatorname{div} w = 0$. Тогда, если выполняется условие 1 теоремы 1.1 и условие (ii), то существует последовательность вектор-функций $\{w_\varepsilon(x) \in J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega), \varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots\}$, которая сходится к $w(x)$ слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$, причем справедливы неравенства:

$$\|w_\varepsilon\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)} \leq C \|w\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)},$$

$$\sum_i (b_\varepsilon^i)^2 \operatorname{mes} Q_\varepsilon^i \leq C \|w\|_{\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)},$$

где $b_\varepsilon^i = \frac{1}{2} \operatorname{rot} w_\varepsilon(x)$ при $x \in Q_\varepsilon^i$, а постоянные C не зависят от $\varepsilon = \varepsilon_k \leq \varepsilon(w)$.

Доказательство. Так как вектор-функции из $C^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$ плотны $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ в метрике $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, то достаточно убедиться в справедливости леммы для $w(x) \in C^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$.

Определим вектор-функцию $w_{\varepsilon h}(x)$ равенством (1.33). По доказанному ранее, для нее справедливо неравенство (1.46) и, кроме того, в силу лемм 1.4 и 1.5

$$w_{\varepsilon h}(x) = w(x) + \eta_{\varepsilon h}(x), \quad (1.53)$$

где вектор-функция $\eta_{\varepsilon h}(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\eta_{\varepsilon h}\|_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (1.54)$$

Поэтому из (1.46), (1.53), (1.54) и условия 1 теоремы 1.1

$$\int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [w_{\varepsilon h}] dx + \int_{\Omega} |w_{\varepsilon h}|^2 dx \leq C \|w\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \delta(\varepsilon, h, w),$$

где постоянная C не зависит от ε , h и w и при любой фиксированной $w \in J(\Omega)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon, h, w) = 0.$$

Отсюда, воспользовавшись вторым неравенством Корна [39], заключаем, что существуют числа $h(w)$ и $\varepsilon(w)$ такие, что при $h \leq h(w)$ и $\varepsilon \leq \varepsilon(w)$ справедливо неравенство

$$\|w_{\varepsilon h}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|w\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad (1.55)$$

где постоянная C не зависит от w и $h \leq h(w)$, $\varepsilon \leq \varepsilon(w)$. Заметим, что $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Учитывая это, будем строить вектор-функцию $w_{\varepsilon h}(x)$ по формуле (1.33), выбирая в ней $\varepsilon = \varepsilon_k$, где $\{\varepsilon_k \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots\}$ — числовая последовательность по которой $u_{\varepsilon}(x)$ сходится к $u(x)$, и $h = \frac{1}{m}$ ($m \in \mathbf{Z}$, $m \geq h^{-1}(w)$), когда ε_k находится в пределах $\varepsilon \left(\frac{1}{m+1} \right) \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon \left(\frac{1}{m} \right)$. Тогда, из (1.55) будет следовать первое неравенство в лемме 1.6. Второе неравенство следует из первого и неравенства

$$\sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} (b_{\varepsilon}^i)^2 \text{mes } Q_{\varepsilon}^i \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} |\text{rot } w_{\varepsilon h}|^2 dx, \quad \varepsilon = \varepsilon_k,$$

где $b_{\varepsilon}^i = \frac{1}{2} \text{rot } w_{\varepsilon h}(x)$ при $x \in Q_{\varepsilon}^i$.

Осталось убедиться, что полученная последовательность вектор-функций $\{w_{\varepsilon}(x), \varepsilon = \varepsilon_k\}$ сходится к $w(x)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$. Но это следует из лемм 1.4 и 1.5 и уже доказанного первого неравенства, т. е. слабой компактности $\{w_{\varepsilon_k}(x)\}$ в $W_2^1(\Omega)$. Лемма 1.6 доказана.

Пусть $u(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ – слабый предел в $W_2^1(\Omega)$ решений $u_\varepsilon(x)$ вариационной задачи (1.1.) при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$. Аппроксимируем $u(x)$ вектор функцией $u_\delta(x)$ класса $\overset{\circ}{J}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, удовлетворяющей неравенству

$$\|u - u_\delta\|_{W_2^1(\Omega)} < \delta \quad (\forall \delta > 0), \quad (1.56)$$

и рассмотрим вектор-функцию

$$w_\delta(x) = u_\delta(x) - u(x).$$

Ясно, что $w_\delta(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ и согласно лемме 1.6 существует последовательность вектор-функций $\{w_{\delta\varepsilon}(x), \varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots\}$ классов $J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega)$ ($\varepsilon = \varepsilon_k, k = 1, 2, \dots$), сходящаяся к $w_\delta(x)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ (и сильно $L_2(\Omega)$) и удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} \|w_{\delta\varepsilon}\|_{W_1^2(\Omega)} &\leq C \|u - u_\delta\|_{W_1^2(\Omega)}, \\ \sum_i (b_{\delta\varepsilon}^i)^2 \text{mes } Q_\varepsilon^i &\leq C \|u - u_\delta\|_{W_1^2(\Omega)}^2, \end{aligned} \quad (1.57)$$

где $b_{\delta\varepsilon}^i = \frac{1}{2} \text{rot } w_{\delta\varepsilon}(x)$ при $x \in Q_\varepsilon^i$, постоянные C не зависят от δ и ε .

Положим

$$u_{\delta\varepsilon}(x) = u_\varepsilon(x) + w_{\delta\varepsilon}(x), \quad \varepsilon = \varepsilon_k.$$

Из свойств вектор-функций $u_\varepsilon(x)$ и $w_{\delta\varepsilon}(x)$ следует, что $u_{\delta\varepsilon} \in J_{\varepsilon A}^{\circ}(\Omega)$ и последовательность $\{w_{\delta\varepsilon}(x), \varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0, k = 1, 2, \dots\}$ сходится слабо в $W_2^1(\Omega)$ и сильно $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $u_\delta(x)$, причем согласно (1.56) и (1.57) выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|u_{\delta\varepsilon} - u_\varepsilon\| &\leq C\delta, \quad \varepsilon = \varepsilon_k, \\ \sum_i |b_{\delta\varepsilon}^i - b_\varepsilon^i|^2 \text{mes } Q_\varepsilon^i &\leq C\delta^2, \quad \varepsilon = \varepsilon_k, \end{aligned} \quad (1.58)$$

где $b_{\delta\varepsilon}^i = \frac{1}{2} \text{rot } w_{\delta\varepsilon}(x)$, $b_\varepsilon^i = \frac{1}{2} \text{rot } u_\varepsilon(x)$ при $x \in Q_\varepsilon^i$.

Теперь применим предыдущую схему вывода неравенства

(1.12) к вектор-функции $u_\delta(x) \in C^2(\Omega) \cap J(\Omega)$ и к $u_{\delta\varepsilon}(x) \in J_{\varepsilon A}(\Omega)$ ($\varepsilon = \varepsilon_k$). Тогда получим неравенство (1.52), в котором $u_\varepsilon(x)$ заменено на $u_{\delta\varepsilon}(x)$, а $u(x)$ – на $u_\delta(x)$. Перейдем в этом неравенстве к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Тогда, учитывая вид функционала Φ_ε (см. (1.1)), пользуясь оценками (1.56) и (1.58), получаем требуемое неравенство (1.12).

6. Остается только показать, что задача (1.8) имеет единственное решение. Для этого необходимо доказать, что предельный тензор вязкости $\{a_{npqr}(x)\}_{n,p,q,r=1}^3$ в задаче (1.8) положительно определен. Начнем со вспомогательной леммы.

Лемма 1.7. *Для любой вектор-функции $w(x) \in W_2^1(K_h)$ справедливо неравенство*

$$\int_{\partial K_h} |w|^2 ds \leq C \left\{ \tau \int_{K_h} \sum e_{kl}^2 [w] dx + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h} \right) \int_{K_h} |w|^2 dx \right\},$$

где K_h – куб с ребрами длиной h , параллельными координатным осям, τ – произвольное положительное число, а постоянная C не зависит от h , δ и w .

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что центр куба K_h находится в нуле. Пусть $u(x) = u(\bar{x}, x_3)$ ($\bar{x} = \{x_1, x_2\}$) – некоторая функция из $C^2(K_h)$. Тогда

$$u^2(\bar{x}, \frac{h}{2}) = u^2(\bar{x}, x_3) + \frac{1}{2} \int_{x_3}^{h/2} u(\bar{x}, \xi) \frac{\partial u}{\partial \xi}(\bar{x}, t) dt.$$

Отсюда, в силу неравенств Юнга и Коши, следует

$$u^2(\bar{x}, \frac{h}{2}) \leq u^2(\bar{x}, x_3) + \frac{\tau}{4} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |u(\bar{x}, t)|^2 dt + \frac{1}{4\tau} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left| \frac{\partial u(\bar{x}, t)}{\partial t} \right|^2 dt$$

где τ – произвольное положительное число.

Интегрируя это неравенство по \bar{x} по квадрату

$\left\{ \bar{x} : -\frac{h}{2} \leq x_1 \leq \frac{h}{2}, -\frac{h}{2} \leq x_2 \leq \frac{h}{2} \right\}$ и затем – по x_3 в пределах от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$, получаем

$$\int_{\Gamma_h} u^2 dx \leq \frac{\tau}{2} \int_{K_h} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 dx + \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\tau} \right) \int_{K_h} u^2 dx,$$

где Γ_h – грань куба K_h перпендикулярная x_3 . Отсюда следует, что для произвольной вектор-функции $w(x) \in W_2^1(K_h)$ при любом $\tau > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{\partial K_h} |w|^2 dx \leq C \left\{ \tau \int_{K_h} |\nabla w|^2 dx + \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\tau} \right) \int_{K_h} |w|^2 dx \right\}, \quad (1.59)$$

где постоянная C не зависит от h и τ .

Представим произвольную вектор-функцию $w(x) \in W_2^1(K_h)$ в виде $w = w^{(1)} + w^{(2)}$, где $w^{(1)}$ принадлежит пространству жестких смещений $L^{(1)}(K_h) \subset L_2(K_h)$ (т. е. имеет вид $w^{(1)} = a + b \times x$, a и b – постоянные векторы), а $w^{(2)}$ принадлежит ортогональному к $L^{(1)}(K_h)$ пространству $L^{(2)}(K_h) = L_2(K_h) \ominus L^{(1)}(K_h)$. Для вектор-функции $w^{(2)} \in L^{(2)}(K_h)$ справедливо неравенство Корна [39]

$$\|\nabla w^{(2)}\|_{L_2(K_h)}^2 \leq C \int_{K_h} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [w^{(2)}] dx,$$

причем постоянная C не зависит от h , что следует из соображений подобия.

Поэтому, учитывая (1.59), для вектор-функции $w^{(2)}$, получаем

$$\int_{\partial K_h} |w^{(2)}|^2 dx \leq C \left\{ \tau \int_{K_h} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [w^{(2)}] dx + \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{\tau} \right) \int_{K_h} |w^{(2)}|^2 dx \right\}. \quad (1.60)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для вектор-функций $w^{(1)}$ из пространства жестких перемещений $L^{(1)}(K_h)$ справедливо неравенство

$$\int_{\partial K_h} |w^{(1)}|^2 ds \leq \frac{6}{h} \int_{K_h} |w^{(1)}|^2 dx. \quad (1.61)$$

Поскольку $e_{kl}[w^{(1)}] \equiv 0$ и $\|w\|_{L_2(K_h)}^2 = \|w^{(1)}\|_{L_2(K_h)}^2 + \|w^{(2)}\|_{L_2(K_h)}^2$ из (1.60) и (1.61) следует требуемое неравенство для w . Лемма доказана.

Лемма 1.8. Тензор вязкости $\{a_{npqr}\}_{n,p,q,r=1}^3$ положительно определен в следующем смысле: для любого симметричного тензора второго ранга $\{R_{np}\}_{n,p=1}^3$ с нулевым следом ($\sum_n R_{nn} = 0$) справедливо неравенство

$$\sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x) R_{np} R_{qr} \geq \mu \sum_{n,p=1}^3 R_{np}^2.$$

Доказательство. Обозначим через $J_{\xi,h}$ класс соленоидальных в кубе $K(\xi, h)$ вектор-функций из $W_2^1(K(\xi, h))$ и рассмотрим задачу минимизации

$$\Gamma(h, \xi, R; v) = \frac{\mu}{h^3} \int_{K(\xi, h)} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v] + h^{-2-\gamma} |v - \psi|^2 \right\} dx = \inf_{v \in J_{\xi, h}}, \quad (1.62)$$

где $\psi(x) = \sum_{k,l=1}^3 \psi^{kl}(x - \xi) R_{kl}$, а вектор-функции $\psi^{kl}(x)$ определены равенством (1.2).

Будем искать решение этой задачи в виде $\tilde{v}(x) = \psi(x) + \tilde{w}(x)$. Так как $\psi \in J_{\xi, h}$, то вектор-функция $\tilde{w}(x)$ должна минимизировать функционал

$$\Gamma_1(h, \xi, R; w) = \frac{\mu}{h^3} \int_{K(\xi, h)} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[w] + h^{-2-\gamma} |w|^2 + 2 \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[\psi] e_{kl}[w] \right\} dx$$

в классе $J_{\xi, h}$.

Поскольку $\Gamma_1(h, \xi, R; \tilde{w}) \leq \Gamma_1(h, \xi, R; 0) = 0$, отсюда следует неравенство

$$\int_{K(\xi, h)} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[w] + h^{-2-\gamma} |\tilde{w}|^2 \right\} dx \leq 2 \left| \int_{K(\xi, h)} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[\psi] e_{kl}[\tilde{w}] dx \right|.$$

Преобразуем интеграл в правой части с помощью интегриро-

вания по частям. Тогда, учитывая, что $\Delta\psi = 0$ и $\operatorname{div} \psi = 0$, получаем

$$\int_{K(\xi, h)} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[w] + h^{-2-\gamma} |\tilde{w}|^2 \right\} dx \leq 4 \left| \int_{\partial K(\xi, h)} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[\psi] \tilde{w} \cos(n, x_k) dS \right| \leq \quad (1.63)$$

$$\leq 16 \left\{ \int_{\partial K(\xi, h)} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\psi] dS \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\partial K(\xi, h)} |\tilde{w}|^2 dS \right\}^{1/2}.$$

Первый сомножитель в правой части имеет порядок $O(h)$, а второй оценим с помощью леммы 1.7, в которой положим

$\tau = h^{1+\frac{\gamma}{2}}$. Тогда из (1.63) находим

$$\int_{K(\xi, h)} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[w] + h^{-2-\gamma} |\tilde{w}|^2 \right\} dx = O(h^{3+\frac{\gamma}{2}}) \quad (0 < \gamma < 2). \quad (1.64)$$

Вычислим значение функционала $\Gamma(h, \xi, R; v)$ на вектор-функции $\tilde{v}(x) = \psi(x) + \tilde{w}(x)$, являющейся решением задачи минимизации (1.62). Тогда, пользуясь оценкой (1.64), равенствами (1.2), (1.3) и учитывая, что тензор $\{R_{np}\}$ симметричен и имеет нулевой след, получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Gamma(h, \xi, R; \tilde{v}) = \mu \sum_{n,p,q,r} \mathbf{I}_{npqr} R_{np} R_{qr} = \mu \sum_{n,p=1}^3 R_{np}^2. \quad (1.65)$$

Поскольку решение \tilde{v}_ε задачи (1.4) принадлежит классу $J_{\xi, h}^\varepsilon \subset J_{\xi, h}$, то $\Gamma(h, \xi, R; \tilde{v}_\varepsilon) \geq \Gamma(h, \xi, R; \tilde{v})$. Поэтому, согласно (1.6) и (1.65)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi) R_{np} R_{qr} \geq \mu \sum_{n,p=1}^3 R_{np}^2, \quad (1.66)$$

откуда, в силу условия 1 теоремы 1.1, следует требуемое неравенство для предельного тензора $\{a_{npqr}(x)\}_{n,p,q,r=1}^3$. Лемма 1.8 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству единственности решения задачи (1.8). Прежде всего заметим, что решение $u(x)$ этой задачи, т. е. задача минимизации квадратичного функционала Φ в классе $\mathring{J}(\Omega)$ удовлетворяет интегральному

тождеству

$$\int_{\Omega} \left\{ 2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x) e_{np}[u] e_{qr}[\zeta] - \tilde{f} \zeta \right\} dx = 0 \quad (1.67)$$

для любой вектор-функции $\zeta \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ и, следовательно, является решением линейной краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} (a_{npqr}(x) e_{qr}[u]) e^n + \nabla p &= \tilde{f}(x), \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \right\} x \in \Omega, \quad (1.68)$$

Поэтому достаточно показать, что соответствующая однородная задача ($\tilde{f} = 0$) имеет только нулевое решение. Полагая в (1.67) $\tilde{f}(x) = 0$ и $\zeta(x) = u(x)$, получаем

$$\int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x) e_{np}[u](x) e_{qr}[u](x) dx = 0.$$

Отсюда, учитывая, что тензор скоростей деформации $\{e_{np}[u]\}_{n,p=1}^3$ симметричен и имеет нулевой след, с помощью леммы 1.8 заключаем, что для почти всех $x \in \Omega$

$$e_{np}[u](x) = 0, \quad n, p = 1, 2, 3.$$

Из этих равенств в силу условия $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, следует, что $u(x) \equiv 0$ в Ω , т. е. однородная задача (1.68) имеет лишь нулевое решение.

Таким образом, теорема 1.1 доказана полностью.

Замечание. Теорема 1.1 верна также, если условие 1 заменить более слабым условием вида

$$1') \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |a_{npqr}(\varepsilon, h, x) - a_{npqr}(x)| dx = 0.$$

Доказательство в этом случае довольно громоздко, но в главной части оно почти совпадает с приведенным выше (см., например [34], гл. 7).

Рассмотрим теперь случай, когда параметр α находится в

пределах: $1 < \alpha < 3$, что соответствует суспензиям с малой объемной концентрацией твердой фазы. В этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. Пусть $1 < \alpha < 3$ и вектор-функция $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ и моменты M_ε^i в задаче (1.1) удовлетворяют условиям:

1. $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \tilde{f}_{1\varepsilon}(x) + \tilde{f}_{2\varepsilon}(x)$ и существуют вектор-функции $\tilde{f}_1(x)$ и $\tilde{f}_2(x) \in L_\infty(\Omega)$ такие, что $\tilde{f}_{1\varepsilon}(x)$ сходится слабо в $L_2(\Omega)$ к $\tilde{f}_1(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;

$$\tilde{f}_{2\varepsilon}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in \Omega \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i, \\ O(\varepsilon^{3(1-\alpha)}), & \text{при } x \in \bigcup_i Q_\varepsilon^i, \end{cases}$$

и для любой вектор-функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\tilde{f}_{2\varepsilon}, \varphi) dx = \int_{\Omega} (\tilde{f}_2, \varphi) dx \quad \text{где } f_2 \in L_\infty(\Omega);$$

$$2. M_\varepsilon^i = o(\varepsilon^{3\alpha}).$$

Тогда решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.1) сходится в $L_2(\Omega)$ к решению задачи (1.8), в которой $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + \tilde{f}_2(x)$ и $a_{npqr}(x) = \mu \mathbf{I}_{npqr}$, где \mathbf{I}_{npqr} – компоненты изотропного тензора четвертого ранга, определяемого равенством (1.3).

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и теоремы 1.1, но более громоздко. Рассмотрим подробнее лишь простейший случай. Пусть $\tilde{f}_{\varepsilon 2}(x) \equiv 0$ и $M_\varepsilon^i = o(\varepsilon^{3\alpha})$. Тогда утверждение теоремы 1.2 будет следовать из теоремы 1.1, если установить, что условие 1 теоремы 1.1 выполняется и $a_{npqr}(x) = \mu \mathbf{I}_{npqr}$.

Пусть $\{a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi)\}_{n,p,q,r=1}^3$ – средний тензор вязкости суспензии в кубе $K(\xi, h)$. Как следует из приведенных выше рассуждений (см. (1.65) и (1.66)), всегда выполняется неравенство:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi) R_{np} R_{qr} \geq \mu \sum_{n,p,q,r=1}^3 \mathbf{I}_{npqr} R_{np} R_{qr}, \quad (1.69)$$

где $\{R_{np}\}$ – произвольный симметричный тензор второго ранга. Покажем, что если $\alpha > 1$, то имеет место и обратное неравенство

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi) R_{np} R_{qr} \leq \mu \sum_{n,p,q,r=1}^3 I_{npqr} R_{np} R_{qr}. \quad (1.70)$$

Прежде всего заметим, что вектор-функции (1.2) представимы в виде

$$\psi^{np}(x) = \text{rot } \tilde{\psi}^{np}(x),$$

где $\tilde{\psi}^{np}$ – однородные квадратичные вектор-функции от x :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^{np}(x) = \sum_{i,jk} a_{ijk}^{np} x_i x_j e^k, \quad a_{ijk}^{np} - \text{const.} \quad \text{Например, } \tilde{\psi}^{11}(x) = x_1 x_2 e^3 + \\ + \frac{2}{3} x_2 x_3 e^1 + \frac{1}{3} x_3 x_1 e^2, \quad \tilde{\psi}^{12} = -\frac{x_1^2}{2} e^3 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Учитывая это, рассмотрим в кубе $K(\xi, h)$ вектор-функцию

$$w_\varepsilon^{np}(x) = \psi^{np}(x - \xi) - \text{rot} \left\{ \sum_i h \tilde{\psi}^{np}(x - x_\varepsilon^i) \beta_\varepsilon^i(x) \right\}, \quad (1.71)$$

где $\beta_\varepsilon^i(x)$ – функции, введенные в лемме 1.2: $\beta_\varepsilon^i(x) \in C^2(\mathbf{R}^3)$,

$$\beta_\varepsilon^i(x) = 1 \quad \text{при } x \in B(Q_\varepsilon^i), \quad \beta_\varepsilon^i(x) = 0 \quad \text{при } x \notin B_\varepsilon^i, \quad 0 \leq \beta_\varepsilon^i(x) \leq 1,$$

$$\left| \frac{\partial \beta_\varepsilon^i}{\partial x_k} \right| \leq C(d_\varepsilon^i)^{-1}, \quad k = 1, 2, 3; \quad \text{сумма } \sum_i h \quad \text{распространяется на те } i,$$

для которых $Q_\varepsilon^i \cap K(\xi, h) \neq \emptyset$.

Легко видеть, что $w_\varepsilon^{np}(x) \in C^2(K(\xi, h))$, $\text{div } w_\varepsilon^{np} = 0$,

$$w_\varepsilon^{np}(x) = \psi^{np}(x_\varepsilon^i - \xi) = a_\varepsilon^{i,np} \quad \text{при } x \in B(Q_\varepsilon^i). \quad \text{Поэтому вектор-}$$

функция

$$w_\varepsilon(x) = \sum_{n,p} w_\varepsilon^{np}(x) R_{np},$$

принадлежит классу $J_{\xi,h}^\varepsilon$, в котором ищется минимум функционала Γ в задаче (1.4) и, следовательно,

$$\min_{v_\varepsilon \in J_{\xi,h}^\varepsilon} \Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_\varepsilon) \leq \Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; w_\varepsilon) = \sum_{n,p,q,r=1}^3 \tilde{a}_{npqr}(\varepsilon, h, \xi) R_{np} R_{qr}. \quad (1.72)$$

Здесь коэффициенты $\tilde{a}_{npqr}(\varepsilon, h, \xi)$ определяются формулой

$$\tilde{a}_{npqr}(\varepsilon, h, \xi) = \frac{\mu}{h^3} \int_{K(\xi, h)} \left\{ \sum_{k,l} e_{kl}[w_\varepsilon^{np}] e_{kl}[w_\varepsilon^{qr}] + \right. \\ \left. + h^{-2-\gamma} (w_\varepsilon^{np} - \psi^{np}(x-\xi), (w_\varepsilon^{qr} - \psi^{qr}(x-\xi))) \right\} dx.$$

Вычисляя их с помощью (1.71) и (1.2) с учетом свойств функций $\beta_\varepsilon^i(x)$ и $\psi^{np}(x)$, получаем

$$\Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; w_\varepsilon) = \mu \sum_{n,p,q,r=1}^3 I_{npqr} R_{np} R_{qr} + \gamma(\varepsilon, h), \quad (1.73)$$

где коэффициенты I_{npqr} определяются равенствами (1.3), а $\gamma(\varepsilon, h)$ имеет оценку

$$|\gamma(\varepsilon, h)| = O \left[\max_i \left(\frac{d_\varepsilon^i}{\varepsilon} \right)^{3/2} \right].$$

Так как $d_\varepsilon^i = O(\varepsilon^\alpha)$ и $\alpha > 1$, то из (1.6), (1.72) и (1.73) следует (1.70).

Неравенства (1.69), (1.70) справедливы для любого симметричного тензора $\{R_{np}\}$. Поэтому, учитывая симметрию среднего тензора вязкости $a_{npqr}(\varepsilon, h, \xi)$ из (1.69) и (1.70) заключаем, что условие 1 теоремы 1.1 выполняется и предельный тензор $\{a_{npqr}(x)\} = \mu \{I_{npqr}\}$. Этим заканчивается доказательство теоремы 1.2.

§ 2. Сходимость резольвенты модельной задачи A

В этом параграфе теоремы 1.1 и 1.2 переформулируются на языке теории операторов в гильбертовом пространстве. А именно, вводятся линейные самосопряженные, вполне непрерывные операторы R_ε , действующие в пространстве $L_2(\Omega)$ и являющиеся резольвентами (разрешающими операторами) вариационной задачи (1.1), и доказывается, что они при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся по операторной норме к резольвенте R вариационной задачи (1.8).

1. Пусть $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ – множество вектор-функций, удовлетворяющих условиям: $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega_\varepsilon)$; $\operatorname{div} u_\varepsilon(x) = 0$; $x \in \Omega_\varepsilon$; $u(x) = a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$, $x \in Q_\varepsilon^i$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$), где a_ε^i , b_ε^i – произвольные постоянные векторы. Обозначим через $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ замыкание в $L_2(\Omega)$ множеств $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$, а через $G_\varepsilon(\Omega)$ множество вектор-функций из $L_2(\Omega)$ представимых в виде: $g(x) = \operatorname{grad} \varphi(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \psi_\varepsilon^i(x) \chi_\varepsilon^i(x)$, где $\varphi(x)$ – функция из $W_2^1(\Omega)$, $\chi_\varepsilon^i(x)$ – характеристическая функция множества Q_ε^i , а $\psi_\varepsilon^i(x)$ – вектор-функции ортогональны в $L_2(Q_\varepsilon^i)$ ко всем вектор-функциям вида $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$.

Очевидно $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ и $G_\varepsilon(\Omega)$ – подпространства в $L_2(\Omega)$, причем имеют место включения $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega) \subset \overset{\circ}{J}(\Omega)$ и $G_\varepsilon(\Omega) \supset G(\Omega)$. Здесь и далее через $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ обозначается замыкание в $L_2(\Omega)$ множества соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, а через $G(\Omega)$ множество градиентов $u = \operatorname{grad} \varphi$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$.

Лемма 2.1. Справедливо ортогональное разложение

$$L_2(\Omega) = \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega) \oplus G_\varepsilon(\Omega).$$

Доказательство. Пусть $u_\varepsilon \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ и $g_\varepsilon \in G_\varepsilon(\Omega)$ произвольные вектор-функции. Тогда $g_\varepsilon = \operatorname{grad} \varphi + \psi_\varepsilon^i \chi_\varepsilon^i$, а $u \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ и, кроме того, $u = a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $L_2(\Omega) \ominus G_\varepsilon(\Omega)$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$). Отсюда, учитывая известное ортогональное разложение $L_2(\Omega) = \overset{\circ}{J}(\Omega) \oplus G(\Omega)$ и свойства ψ_ε^i , получаем

$$(u_\varepsilon, g_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} (u_\varepsilon, \text{grad } \varphi) dx + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{Q_\varepsilon^i} (a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i), \psi_\varepsilon^i) dx = 0.$$

Таким образом, $J_\varepsilon^\circ(\Omega) \perp G_\varepsilon(\Omega)$. Далее, пусть $u_\varepsilon(x)$ – произвольная вектор-функция из $L_2(\Omega) \ominus G_\varepsilon(\Omega)$. Тогда для любой

$$g_\varepsilon = \text{grad } \varphi + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \psi_\varepsilon^i \chi_\varepsilon^i, \text{ имеем:}$$

$$0 = (u_\varepsilon, g_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} (u_\varepsilon, \text{grad } \varphi) dx + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{Q_\varepsilon^i} (u_\varepsilon, \psi_\varepsilon^i) dx.$$

Положив в этом равенстве $\psi_\varepsilon^i \equiv 0$, получим, что $u_\varepsilon \in J_\varepsilon^\circ(\Omega)$. С другой стороны, выбирая $\varphi \equiv 0$ и учитывая свойства вектор-функции $\psi_\varepsilon^i(x)$, получим, что $u_\varepsilon(x) = a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $x \in Q_\varepsilon^i$ ($i=1, 2, \dots, N_\varepsilon$). Следовательно, $u_\varepsilon \in J_\varepsilon^\circ(\Omega)$ и, значит, $L_2(\Omega) \ominus G_\varepsilon(\Omega) \subset J_\varepsilon^\circ(\Omega)$. Отсюда, вспоминая, что $J_\varepsilon^\circ(\Omega) \perp G_\varepsilon(\Omega)$ приходим к равенству $L_2(\Omega) = J_\varepsilon^\circ(\Omega) \oplus G_\varepsilon(\Omega)$. Лемма доказана.

Для произвольной вектор-функции $u_\varepsilon(x) \in J_\varepsilon^\circ(\Omega) \cap W_2^2(\Omega_\varepsilon)$ введем постоянные векторы

$$\begin{aligned} a^i[u_\varepsilon] &= \frac{\rho_{\varepsilon\varepsilon}}{m_\varepsilon^i} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma^0[u_\varepsilon] dS, \\ b^i[u_\varepsilon] &= \rho_{\varepsilon\varepsilon} (J_\varepsilon^i)^{-1} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \{(x - x_\varepsilon^i) \times \sigma^0[u_\varepsilon]\} dS, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\sigma^0[u_\varepsilon] = 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[u_\varepsilon] \cos(n, x^l) e^k, \quad (2.2)$$

n – внутренняя нормаль к ∂Q_ε^i , предельные значения производных $u_\varepsilon(x)$ на поверхности ∂Q_ε^i берутся из области Ω_ε , m_ε^i – масса i -й частицы, $(J_\varepsilon^i)^{-1}$ – тензор обратный к тензору инерции i -й частицы, $\rho_{\varepsilon\varepsilon}$ – плотность материала частиц.

Обозначим через \tilde{A}_ε линейный оператор, действующий из $J_\varepsilon^\circ(\Omega) \cap W_2^2(\Omega_\varepsilon)$ в $L_2(\Omega)$ согласно равенствам

$$\tilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon = \begin{cases} -\mu \Delta \bar{u}_\varepsilon(x), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ a^i[u_\varepsilon] + b^i[u_\varepsilon] \times (x - x_\varepsilon^i), & x \in Q_\varepsilon^i \quad (i=1, 2, \dots, N_\varepsilon) \end{cases}$$

Положим $A_\varepsilon = P_\varepsilon \tilde{A}_\varepsilon$, где P_ε – оператор ортогонального проектирования в $L_2(\Omega)$ на подпространство $J_\varepsilon^\circ(\Omega) = L_2(\Omega) \ominus G_\varepsilon(\Omega)$. Ясно, что A_ε – неограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве $J_\varepsilon^\circ(\Omega)$, определенный на плотном в $J_\varepsilon^\circ(\Omega)$ множестве $D(A_\varepsilon) = J_\varepsilon^\circ(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ и, в силу свойств проектора P_ε представим в виде

$$A_\varepsilon u_\varepsilon = \begin{cases} -\mu \Delta \bar{u}_\varepsilon + \text{grad } p_\varepsilon, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ a^i[u_\varepsilon] + b^i[u_\varepsilon] \times (x - x_\varepsilon^i) + \text{grad } p_\varepsilon + \psi_\varepsilon^i, & x \in Q_\varepsilon^i, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $p_\varepsilon(x)$ – функция из $W_2^1(\Omega)$, а $\psi_\varepsilon^i(x)$ – вектор-функции из $L_2(Q_\varepsilon^i)$ такие, что $\text{grad } p_\varepsilon(x) + \psi_\varepsilon^i(x) = a_\varepsilon^i + \hat{b}_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $x \in Q_\varepsilon^i$ ($i=1, 2, \dots, N_\varepsilon$).

Покажем, что A_ε – симметричный, положительно-определенный оператор. Пусть $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in D(A_\varepsilon) = J_\varepsilon^\circ(\Omega) \cap W_2^2(\Omega_\varepsilon)$. Тогда $u_\varepsilon = a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$, $v_\varepsilon = c_\varepsilon^i + d_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $x \in Q_\varepsilon^i$ ($i=1, 2, \dots, N_\varepsilon$) и согласно (2.3), (2.1)

$$\begin{aligned} (A_\varepsilon u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} &= \int_{\Omega_\varepsilon} (-\mu \Delta u_\varepsilon + \text{grad } p_\varepsilon, v_\varepsilon) dx + \\ & \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{Q_\varepsilon^i} \left(\frac{\rho_{\text{ч}_\varepsilon}}{m_\varepsilon^i} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma^0[u_\varepsilon] dS + \rho_\varepsilon (J_\varepsilon^i)^{-1} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \left\{ (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma^0[u_\varepsilon] \right\} dS \times (x - x_\varepsilon^i) \right. \\ & \left. + (\text{grad } p_\varepsilon, c_\varepsilon^i + d_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)) \right) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая свойства вектор-функций $\psi_\varepsilon^i(x)$ и определением центра масс x_ε^i частицы Q_ε^i , после несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned}
(A_\varepsilon u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = & - \int_{\Omega_\varepsilon} (-\mu \Delta u_\varepsilon + \text{grad } p_\varepsilon, v_\varepsilon) dx + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} (\sigma^0[u_\varepsilon], c_\varepsilon^i) dS + \\
& + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(\rho_{\text{ч}_\varepsilon} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \left\{ (x-x_\varepsilon^i) \times [d_\varepsilon^i \times (x-x_\varepsilon^i)] \right\} dS, (J_\varepsilon^i)^{-1} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \left\{ (x-x_\varepsilon^i) \times \sigma^0[u_\varepsilon] \right\} dS \right) - \\
& - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} (np_\varepsilon, c_\varepsilon^i) dS - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} (np_\varepsilon, d_\varepsilon^i \times (x-x_\varepsilon^i)) dS.
\end{aligned} \quad (2.4)$$

Учитывая определение тензора инерции J_ε^i и его симметричность, третье слагаемое в правой части (2.4) запишем в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(\rho_{\text{ч}_\varepsilon} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \left\{ (x-x_\varepsilon^i) \times [d_\varepsilon^i \times (x-x_\varepsilon^i)] \right\} dS, (J_\varepsilon^i)^{-1} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \left\{ (x-x_\varepsilon^i) \times \sigma^0[u_\varepsilon] \right\} dS \right) = \\
& = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} (\sigma^0[u_\varepsilon], d_\varepsilon^i \times (x-x_\varepsilon^i)) dS.
\end{aligned} \quad (2.5)$$

Так как $v_\varepsilon \in J_\varepsilon^\circ(\Omega)$ ($v_\varepsilon(x) = c_\varepsilon^i + d_\varepsilon^i \times (x-x_\varepsilon^i)$ при $x \in Q_\varepsilon^i$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$) и $v_\varepsilon(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$), то из (2.4) и (2.5) следует равенство:

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega_\varepsilon} (-\mu \Delta u_\varepsilon + \text{grad } p_\varepsilon, v_\varepsilon) dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (\sigma[u_\varepsilon], v_\varepsilon) dS, \quad (2.6)$$

где $\sigma[u_\varepsilon] = -np_\varepsilon + \sigma^0[u_\varepsilon]$. В силу второй формулы Грина [17], его можно записать так:

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon, -\mu \Delta v_\varepsilon + \text{grad } p'_\varepsilon) dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon, \sigma'[v_\varepsilon]) dS,$$

где $p'_\varepsilon(x)$ – произвольная функция из $W_2^1(\Omega)$ и

$$\sigma'[v_\varepsilon] = -np'_\varepsilon + \sigma^0[v_\varepsilon].$$

Производя со вторым слагаемым правой части этого равенства преобразования аналогичные преобразованиям (2.4) и (2.5), но в обратном порядке, получаем:

$$\begin{aligned}
(A_\varepsilon u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} &= - \int_{\Omega_\varepsilon} (u_\varepsilon, -\mu \Delta v_\varepsilon + \text{grad } p'_\varepsilon) dx + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(\int_{Q_\varepsilon^i} (a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)) dx, \frac{\rho_{\text{ч}\varepsilon}}{m_\varepsilon^i} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma^0[v_\varepsilon] dS \right) + \\
&+ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \rho_{\text{ч}\varepsilon} (J_\varepsilon^i)^{-1} \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \left\{ (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma^0[v_\varepsilon] \right\} dS \times (x - x_\varepsilon^i) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{Q_\varepsilon^i} (\text{grad } p'_\varepsilon, \psi_\varepsilon'^i) dx,
\end{aligned}$$

где $\psi_\varepsilon'^i(x)$ – любая вектор-функция ортогональная в $L_2(Q_\varepsilon^i)$ вектор-функциям вида $a^i + b^i \times (x - x_\varepsilon^i)$. В этом равенстве функции $p'_\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ и вектор-функция $\psi_\varepsilon'^i(x) \in L_2(Q_\varepsilon^i)$ – произвольные. Выбирая их в соответствии с определением оператора A_ε (см. (2.3)), заключаем, что

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon, v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (u_\varepsilon, A_\varepsilon v_\varepsilon)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u_\varepsilon, v_\varepsilon \in D(A_\varepsilon),$$

т. е. оператор A_ε симметричен на области определения $D(A_\varepsilon)$ плотной в $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$.

Положим теперь в равенстве (2.6) $u_\varepsilon = v_\varepsilon \in D(\hat{A}_\varepsilon)$. Тогда, пользуясь первой формулой Грина [17] и неравенством Корна для вектор-функций $u_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, получаем

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = \mu \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{ik}^2[u_\varepsilon] dx \geq C \|u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}, \quad C > 0,$$

т. е. оператор A_ε – положительно определен.

Обозначим через A_ε расширение по Фридрихсу оператора A_ε . Оператор A_ε устанавливает взаимно-однозначное соответствие между пространством $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ и множеством решений вариационной задачи (1.1) при $\tilde{f}_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$, которое и является его областью определения $D(A_\varepsilon)$. Это вытекает из равенства

$$(A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} - (\tilde{f}_\varepsilon, u_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \left\{ \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[u_\varepsilon] - (f_\varepsilon, u_\varepsilon) \right\} dx = \Phi_\varepsilon[u_\varepsilon],$$

справедливого для любых вектор-функций $u_\varepsilon \in D(A_\varepsilon)$ и $f_\varepsilon(x) = \tilde{f}_\varepsilon(x) + \sum_i (J_\varepsilon^i)^{-1} M_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i) \chi_\varepsilon^i(x) \in J_\varepsilon^\circ(\Omega)$, где J_ε^i – тензоры инерции частиц Q_ε^i (см (1.6)), $\chi_\varepsilon^i(x)$ – характеристические функции областей Q_ε^i . Отсюда получаем, что A_ε устанавливает взаимно-однозначное соответствие между $J_\varepsilon^\circ(\Omega)$ и множеством вектор-функций, удовлетворяющих тождеству

$$\int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[u_\varepsilon] e_{kl}[\zeta_\varepsilon] - (\hat{f}_\varepsilon, \zeta_\varepsilon) \right\} dx = 0 \quad (2.7)$$

для любой $\zeta_\varepsilon \in J_{\varepsilon A}^\circ(\Omega)$ и, кроме того, справедлива оценка (см. §1)

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.8)$$

Оператор A_ε замкнут. Действительно, пусть $v_\varepsilon^{(n)} \in D(A_\varepsilon)$ и при $n \rightarrow \infty$ вектор-функции $v_\varepsilon^{(n)}$ и $f_\varepsilon^{(n)} = A_\varepsilon v_\varepsilon^{(n)}$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к v_ε и f_ε соответственно. Ясно, что для $u_\varepsilon = v_\varepsilon^{(n)}$ и $f_\varepsilon = f_\varepsilon^{(n)}$ выполняется тождество (2.7), а также неравенство (2.8), в силу которого $v_\varepsilon^{(n)}$ сходится к v_ε и слабо в $W_2^1(\Omega)$. Поэтому, делая в тождестве (2.7) предельный переход при $n \rightarrow \infty$, получаем, что предельные вектор-функции v_ε и f_ε удовлетворяют (2.7) и, значит, $v \in D(A_\varepsilon)$ и $f_\varepsilon = A_\varepsilon v_\varepsilon$.

Таким образом, оператор A_ε замкнут, симметричен, обратим и его область значений совпадает со всем пространством $J_\varepsilon^\circ(\Omega)$. Следовательно, он самосопряжен (см. [44]). Кроме того, обратный оператор $(A_\varepsilon)^{-1}$ вполне непрерывен, что вытекает из неравенства (2.8) и компактности вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Введем в пространстве $L_2(\Omega)$ оператор R_ε , положив $R_\varepsilon f_\varepsilon = (A_\varepsilon)^{-1} f_\varepsilon$ при $f_\varepsilon \in J_\varepsilon^\circ(\Omega)$, $R_\varepsilon f_\varepsilon = 0$ при $f_\varepsilon \in G_\varepsilon(\Omega)$ и продолжив его на все пространство $L_2(\Omega)$ по линейности. Из приве-

денных рассуждений вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Оператор R_ε вполне непрерывен, самосопряжен, неотрицателен и сопоставляет каждому $f_\varepsilon \in L_2(\Omega)$ решение u_ε вариационной задачи (1.1):*

$$u_\varepsilon = R_\varepsilon f_\varepsilon \quad (f_\varepsilon(x) = \tilde{f}_\varepsilon(x) + \sum \rho_{\chi_\varepsilon}(J_\varepsilon^i)^{-1} M_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i) \chi_\varepsilon^i(x)).$$

Оператор R_ε назовем резольвентой (разрешающим оператором) вариационной задачи (1.1).

2. Аналогичным образом, учитывая положительную определенность и симметричность тензора $\{a_{npqr}(x)\}_{n,p,q,r=1}^3$ (см. лемму 1.8), введем разрешающий оператор R вариационной задачи (1.8), который обладает следующими свойствами: R – сопоставляет каждому $f \in L_2(\Omega)$ решение $u \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ вариационной задачи (1.8) при $\tilde{f}(x) = f(x)$; R – вполне непрерывен, самосопряжен и неотрицателен в $L_2(\Omega)$. Как было отмечено выше $R\tilde{f}$ является решением краевой задачи (1.68).

Теорема 2.2. *Если выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.1, то R_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к R по операторной норме: $\|R_\varepsilon - R\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что согласно теореме 4.2 и определению разрешающих операторов R_ε и R для любой слабо сходящейся к $f(x)$ в $L_2(\Omega)$ последовательности $\{f_{\varepsilon_k}, \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ соответствующая последовательность $\{R_{\varepsilon_k} f_{\varepsilon_k}, \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ сходится к Rf сильно в $L_2(\Omega)$.

Предположим, что R_ε не сходится к R по норме. Тогда найдется нормированная последовательность $\{f_{\varepsilon_k} : \|f_{\varepsilon_k}\| = 1\}$, слабо сходящаяся к $f(x)$, и такая, что для некоторого $\delta > 0$

$$\|R_{\varepsilon_k} f_{\varepsilon_k} - Rf\| \geq \delta. \quad (2.9)$$

Так как оператор R вполне непрерывен, то последователь-

ность $\{Rf_{\varepsilon_k}, \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ сильно сходится к Rf , что вместе с (2.9) противоречит сильной сходимости $R_{\varepsilon_k} f_{\varepsilon_k}$ к Rf . Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Если выполняются условия теоремы 1.2, т. е. $1 < \alpha < 3$ и $f_\varepsilon \rightarrow \tilde{f}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любой вектор-функции $\varphi(x) \in C_0(\Omega)$, то $R_\varepsilon f_\varepsilon$ сходится к $R\tilde{f}$ сильно в $L_2(\Omega)$. Здесь R – разрешающий оператор задачи (1.8) при $a_{npqr} = \mu \mathbf{I}_{npqr}$.*

§ 3. Равномерные оценки производных решения исходной задачи

Чтобы применить результаты предыдущего параграфа к исследованию асимптотического поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения исходной задачи (1.1.1) – (1.1.9), необходимо установить равномерные по ε оценки производных решения $u_\varepsilon(x, t)$ этой задачи. Производные по пространственным переменным фактически уже были оценены в лемме 1.2.1. Действительно, если исходные данные задачи равномерно по ε удовлетворяют условиям: $f_\varepsilon(x, t) = O(1)$, $u_\varepsilon(x, 0) = O(1)$, $M_\varepsilon^i = O(\varepsilon^{3\alpha})$, $\rho_\varepsilon = O(\varepsilon^{3(1-\alpha)})$, то из неравенств (1.2.4), (1.2.8) и (1.2.10), следует, что

$$\int_0^T \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt \leq C, \quad (3.1)$$

где постоянная C не зависит от ε .

Заметим, что эта оценка получена при условии выполнения неравенств (1.2.1)-(1.2.3), последнее из которых является априорным предположением о распределении частиц в области Ω в процессе движения суспензии.

Перейдем к оценке производной по времени от скорости жидкости $u_\varepsilon(x, t)$ в области $\Omega_{\varepsilon T}$. Будем предполагать, что вектор скорости $u_\varepsilon(x, t)$ суспензии при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет таким условиям:

(j) $u_\varepsilon(x, t) \in L_2(0, T; J(\Omega), \chi_\varepsilon(\cdot, t)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega_\varepsilon(t)) \cap W_2^1(\Omega_{\varepsilon T}))$ и $|u_\varepsilon(x, t)| < C$;

(jj) скорости $u_\varepsilon^i(t) = \dot{x}_\varepsilon^i(t)$ центров масс $x_\varepsilon^i(t)$ частиц в любой момент времени плавно меняются от частицы к частице, а именно, $u_\varepsilon^i(t) = V_\varepsilon(x_\varepsilon^i(t), t)$, где $V_\varepsilon(x, t)$ некоторая гладкая вектор-функция в Ω_T такая, что $|\nabla_x V_\varepsilon(x, t)| < C$, $|V_{\varepsilon t}(x, t)| < C$ и

$(V_\varepsilon(x, t), n(x)) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ ($n(x)$ – нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$);

(jjj) мгновенные угловые скорости частиц $\omega_\varepsilon^i(t)$ и их производные по времени $\dot{\omega}_\varepsilon^i(t)$ ограничены, так что $|\omega_\varepsilon^i(t)| < C$ и $\sum_i |\dot{\omega}_\varepsilon^i(t)|^2 (d_\varepsilon^i)^3 < C$.

Здесь всюду постоянные C не зависят от ε и $x \in \Omega$ и t .

Определим в области Ω_T вектор-функцию

$$v_\varepsilon(x, t) = V_\varepsilon(x, t) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} [u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t)) - V_\varepsilon(x, t)] \beta_\varepsilon^i(x, t), \quad (3.2)$$

где $\beta_\varepsilon^i(x, t)$ – «срезающие» функции введенные в лемме 1.2, т.е. удовлетворяющие условиям: $\beta_\varepsilon^i(x, t) = 1$ при $x \in B_\varepsilon^i(t) = B(Q_\varepsilon^i(t))$; $\beta_\varepsilon^i(x, t) = 0$ при $x \notin B_\varepsilon^i(t)$; $0 \leq \beta_\varepsilon^i(x, t) \leq 1$ и $|\nabla_x \beta_\varepsilon^i(x, t)| \leq C(d_\varepsilon^i)^{-1}$ всюду. Напомним, что через $B_\varepsilon^i(t)$ и $B_\varepsilon^i(t)$ обозначаются шары с центрами в точках $x_\varepsilon^i(t)$ и радиусами $b_\varepsilon^i = c_1 d_\varepsilon^i$, $\hat{b}_\varepsilon^i = c_2 d_\varepsilon^i$ ($c_2 > c_1$), причем $B_\varepsilon^i(t)$ – минимальные шары, содержащие частицы $Q_\varepsilon^i(t)$, а $B_\varepsilon^i(t)$ не пересекаются между собой и с границей $\partial\Omega$.

Из (3.2) и свойств $V_\varepsilon(x, t)$ и $\beta_\varepsilon^i(x, t)$ следует, что $v_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))$ при $x \in Q_\varepsilon^i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$), $(v_\varepsilon(x, t), n(x)) = 0$, $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]$ и

$$|v_\varepsilon(x, t)| < C, \quad |\nabla_x v_\varepsilon(x, t)| < C, \quad (3.3)$$

где C не зависит от ε .

Рассмотрим в области Ω_T вектор-функцию

$$q_\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v_{\varepsilon i} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i} = (1 + |v_\varepsilon|^2)^{1/2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial l_\varepsilon}, \quad (3.4)$$

где $\frac{\partial}{\partial l_\varepsilon}$ – производная по направлению $l_\varepsilon(x, t)$ в Ω_T :

$$\vec{l}_\varepsilon = \left\{ \frac{1}{(1 + |v_\varepsilon|^2)^{1/2}}, \frac{v_{\varepsilon 1}}{(1 + |v_\varepsilon|^2)^{1/2}}, \frac{v_{\varepsilon 2}}{(1 + |v_\varepsilon|^2)^{1/2}}, \frac{v_{\varepsilon 3}}{(1 + |v_\varepsilon|^2)^{1/2}} \right\}. \quad (3.5)$$

Учитывая свойства $u_\varepsilon(x, t)$ и убедившись с помощью (3.5), (3.2) и (1.1.7), что векторное поле $l_\varepsilon(x, t)$ касательно к боковой поверхности $\Omega_{\varepsilon T}$, заключаем, что $q_\varepsilon(x, t) \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ и при почти всех $t \in [0, T]$ справедливы равенства

$$\operatorname{div} q_\varepsilon(x, t) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial v_{\varepsilon j}}{\partial x_k} \frac{\partial u_{\varepsilon k}}{\partial x_j}, \quad x \in \Omega \quad (3.6)$$

и

$$\frac{\partial q_{\varepsilon k}}{\partial x_j}(x, t) = C_{kjr} \dot{\omega}_{\varepsilon r}^i(t) + C_{kjrs} \omega_{\varepsilon r}^i(t) \omega_{\varepsilon s}^i(t), \quad x \in Q_\varepsilon^i(t), \quad (3.7)$$

причем

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} q_\varepsilon(x, t) dx = 0$$

и постоянные C_{kjr} и C_{kjrs} не зависят от ε, i, x, t .

Лемма 3. 1. Пусть $q_\varepsilon(x)$ – произвольная вектор-функция из $L_2(\Omega)$ такая, что $\nabla q_\varepsilon(x) \in L_2(Q_\varepsilon^i)$ ($i = 1, 2, \dots, N_\vartheta$), $\operatorname{div} q_\varepsilon(x) \in L_2(\Omega)$ и $\int_{\Omega} \operatorname{div} q_\varepsilon(x) dx = 0$. Тогда, если выполняются условия (i) и (ii), то

существует вектор-функция $z_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая условиям: $\operatorname{div} z_\varepsilon(x) = \operatorname{div} q_\varepsilon(x)$, $x \in \Omega$; $z_\varepsilon(x) = q_\varepsilon(x) + a_\varepsilon^i$ при $x \in Q_\varepsilon^i$ и справедлива оценка

$$\|z_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\operatorname{div} q_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \|\nabla q_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i)}^2 \right), \quad (3.8)$$

где a_ε^i – постоянные векторы, а C не зависит от ε .

Доказательство этой леммы проводится аналогично доказательству леммы 1.3. Сначала по заданной функции $\psi_\varepsilon(x) = \operatorname{div} q_\varepsilon(x)$ строим вектор-функцию $p_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ такую, что $\operatorname{div} p_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon(x)$ и

$$\|p_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|\operatorname{div} q_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}, \quad (3.9)$$

где C не зависит от ε . Затем по вектор-функции $v_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(x) - q_\varepsilon(x)$ с помощью формул (1.26) строим вектор-функции $w_\varepsilon^i(x)$ ($i=1,2,\dots,N_\varepsilon$), удовлетворяющие таким условиям: $w_\varepsilon^i(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$; носители $w_\varepsilon^i(x)$ принадлежат шарам \tilde{B}_ε^i , т. е. они не пересекаются между собой и с границей $\partial\Omega$, $\operatorname{div} w_\varepsilon^i = 0$ всюду в Ω , $w_\varepsilon^i(x) = v_\varepsilon(x) - a_\varepsilon^i$ на Q_ε^i , где a_ε^i – среднее значение $v_\varepsilon(x)$ в Q_ε^i , и выполняются неравенства

$$\|w_\varepsilon^i\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\|\nabla p_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i)}^2 + \|\nabla q_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i)}^2 \right). \quad (3.10)$$

Наконец, полагаем

$$z_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(x) - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} w_\varepsilon^i(x).$$

Легко проверить, что вектор-функция $z_\varepsilon(x)$ удовлетворяет необходимым требованиям: $z_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\operatorname{div} z_\varepsilon(x) = \operatorname{div} q_\varepsilon(x)$, при $x \in \Omega$, $z_\varepsilon(x) = q_\varepsilon(x) + a_\varepsilon^i$ при $x \in Q_\varepsilon^i$, а оценка (3.8) следует из (3.9), (3.10). Лемма 3.1 доказана.

Пользуясь этой леммой, по вектор-функции $q_\varepsilon(x, t)$, определенной равенством (3.4), построим (при каждом $t \in [0, T]$) вектор-функцию $z_\varepsilon(x, t)$. Тогда из (3.8), (3.6), (3.7) и (3.3), следует неравенство

$$\|z_\varepsilon(t)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \left\{ \|\nabla u_\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (|\dot{\omega}_\varepsilon^i(t)|^2 + |\omega_\varepsilon^i|^4)(d_\varepsilon^i)^3 \right\},$$

где d_ε^i – диаметр множества Q_ε^i , а постоянная C не зависит от ε и t .

Отсюда в силу (3.1) и условия (jjj) следует равномерная по ε оценка

$$\int_0^T \|z_\varepsilon(t)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt \leq C. \quad (3.11)$$

Положим $w_\varepsilon(x, t) = q_\varepsilon(x, t) - z_\varepsilon(x, t)$. Ясно, что $w_\varepsilon(x, t) \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$, $\operatorname{div} w_\varepsilon(x, t) = 0$ в Ω при любом t и $w_\varepsilon(x, t) = a_\varepsilon^i(t)$ при $x \in Q_\varepsilon^i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$). Умножим уравнение (1.11) на $w_\varepsilon(x, t)$ и проинтегрируем по области $\Omega_{\varepsilon T}$. Тогда, после интегрирования по частям с учетом свойств $w_\varepsilon(x, t)$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \rho_{\text{ж}}(w_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \rho_{\text{ж}}(w_\varepsilon, (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon) dx dt + \\ & + 2\mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[w_\varepsilon] \varepsilon_{kl}[u_\varepsilon] dx dt - \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(\int_{\partial Q_\varepsilon^i(t)} \sigma[u_\varepsilon] ds, a_\varepsilon^i(t) \right) dt = \\ & = \rho_{\text{ж}} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} (w_\varepsilon, f_\varepsilon) dx dt. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Учитывая вид вектор-функции $q_\varepsilon(x, t)$ ((3.4)), свойства вектор-функции $v_\varepsilon(x)$ (см. (3.3)) и пользуясь неравенствами Коши и Юнга оцениваем правую часть этого равенства следующим образом

$$\begin{aligned} & \left| \rho_{\text{ж}} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} (w_\varepsilon, f_\varepsilon) dx dt \right| = \rho_{\text{ж}} \left| \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} (z_\varepsilon - q_\varepsilon, f_\varepsilon) dx dt \right| \leq \\ & \leq \rho_{\text{ж}} \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})} \left(\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})} + C \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})} + \|z_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})} \right) \leq \\ & \leq \frac{\rho_{\text{ж}} \delta}{2} \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^T)}^2 + \frac{\rho_{\text{ж}}}{2} \left(\frac{1}{\delta} + C \right) \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^T)}^2 + \frac{C \rho_{\text{ж}}}{2} \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^T)}^2 + \|z_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^T)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь δ – произвольное положительное число, а C не зависит

от ε .

Аналогично, с учетом условия (j) ($\max_{x,t} |u_\varepsilon(x,t)| < C$), оцениваем второе слагаемое в левой части (3.12):

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \rho_{\text{ж}}(w_\varepsilon, (u_\varepsilon \cdot \nabla)u_\varepsilon) dxdt \right| \leq \\ & \leq \frac{C\delta}{2} \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 + \frac{C}{2} \left(\frac{1}{\delta} + 3 \right) \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 + \frac{C}{2} \|z_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Первое слагаемое оценим снизу. Тогда, учитывая (3.4), (3.3), получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \rho_{\text{ж}}(w_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}) dxdt = \rho_{\text{ж}} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} (z_\varepsilon, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}) dxdt - \\ & - \rho_{\text{ж}} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right|^2 dxdt + \rho_{\text{ж}} \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{j=1}^3 (v_{\varepsilon j} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t})^2 dxdt \geq \\ & \geq \rho_{\text{ж}} \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 - C \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})} \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 + \|z_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 \right) \geq \\ & \geq (\rho_{\text{ж}} - C\delta) \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 - \frac{C}{2\delta} \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 + \|z_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где δ – произвольное число такое, что $0 < \delta < \frac{\rho_{\text{ж}}}{2C}$ и постоянная C не зависит от ε .

Для оценки поверхностного интеграла в (3.12) воспользуемся равенством (1.1.4), в силу которого

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(\int_{\partial Q_\varepsilon^i(t)} \sigma[u_\varepsilon] ds, a_\varepsilon^i(t) \right) dt = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} m_\varepsilon^i \int_0^T (\dot{u}_\varepsilon^i(t), a_\varepsilon^i(t)) dt - \\ & - \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{Q_\varepsilon^i(t)} \rho_{\text{ч}\varepsilon}(f_\varepsilon(x,t), a_\varepsilon^i(t)) dxdt = J_\varepsilon^{(1)} + J_\varepsilon^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Пользуясь неравенствами Коши и равенством $a_\varepsilon^i(t) = z_\varepsilon(x,t) - q_\varepsilon(x,t)$ при $x \in Q_\varepsilon^i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$) запишем

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon^1| &\leq \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left\{ \int_0^T m_\varepsilon^i |u_\varepsilon^i(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^T m_\varepsilon^i |a_\varepsilon^i(t)|^2 dt \right\}^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} m_\varepsilon^i |\dot{u}_\varepsilon^i(t)|^2 dt + \frac{\rho_{\varepsilon}}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{Q_\varepsilon^i(t)} (|z_\varepsilon(x,t)|^2 + |q_\varepsilon(x,t)|^2) dx dt.
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая вид вектор-функции $q_\varepsilon(x, t)$ на частицах $Q_\varepsilon^i(t)$ (см. (3.4), (3.2)) получаем

$$|J_\varepsilon^1| \leq \frac{\rho_{\varepsilon}}{2} \int_0^T \|z_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i(t))}^2 dt + A_\varepsilon, \quad (3.17)$$

где постоянная

$$A_\varepsilon = C \rho_{\varepsilon} \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (|\dot{\omega}_\varepsilon^i(t)|^2 + |\omega_\varepsilon^i(t)|^4)(d_\varepsilon^i)^5 + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (|\dot{u}_\varepsilon^i(t)| + |\omega_\varepsilon^i(t)|^2)(d_\varepsilon^i)^3 \right\},$$

в силу условий (j) и (jjj) и оценок $N_\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$, $\rho_\varepsilon = O(\varepsilon^{3(1-\alpha)})$, $d_\varepsilon^i = O(\varepsilon^\alpha)$ ограничена равномерно по ε : $A_\varepsilon \leq A_0$.

Аналогичным образом оцениваем $J_\varepsilon^{(2)}$:

$$\begin{aligned}
|J_\varepsilon^{(2)}| &\leq \frac{\rho_{\varepsilon}}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \|z_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i)}^2 dt + A_\varepsilon + \frac{\rho_{\varepsilon}}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \|q_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i)} dt \leq \\
&\leq \frac{\rho_{\varepsilon}}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \|z_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i)}^2 dt + A_0 + A_1.
\end{aligned} \quad (3.18)$$

При этом предполагается, что вектор-функции $f_\varepsilon(x, t)$ ограничены равномерно относительно ε .

Таким образом, согласно (3.16) – (3.18)

$$\left| \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(\int_{\partial Q_\varepsilon^i(t)} \sigma[u_\varepsilon] dS, a_\varepsilon^i(t) \right) dt \right| \leq \rho_{\varepsilon} \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \|z_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i)}^2 dt + C. \quad (3.19)$$

Для вектор-функции $z_\varepsilon(x, t)$ легко получить оценку (например, так же как в лемме 1.1.1)

$$\int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \|z_\varepsilon\|_{L_2(Q_\varepsilon^i(t))}^2 dt \leq C \varepsilon^{3(\alpha-1)} \int_0^T \|z_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt,$$

в силу которой из (3.19) и (3.11) следует, что

$$\left| \int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(\int_{\partial Q_\varepsilon^i(t)} \sigma[u_\varepsilon] dS, a_\varepsilon^i(t) \right) dt \right| \leq C. \quad (3.20)$$

Здесь всюду через C обозначаются постоянные не зависящие от ε .

Оценим третье слагаемое в левой части (3.12). Учитывая, что $w_\varepsilon = q_\varepsilon - z_\varepsilon$, запишем

$$\begin{aligned} & 2\mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{k,l=1}^3 e_{kk}[w_\varepsilon] e_{kl}[u_\varepsilon] dxdt = \\ & = 2\mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[q_\varepsilon] e_{kl}[u_\varepsilon] dxdt - 2\mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[z_\varepsilon] e_{kl}[u_\varepsilon] dxdt. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Второе слагаемое в правой части(3.21) имеет оценку

$$2\mu \left| \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[z_\varepsilon] e_{kl}[u_\varepsilon] dxdt \right| \leq C \left(\|\nabla z_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 + \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 \right). \quad (3.22)$$

Вспомяная определение вектор-функции $q_\varepsilon(x, t)$ (3.4) и векторного поля l_ε в Ω_T (3.5), первое слагаемое в (3.21) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & 2\mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[q_\varepsilon] e_{ik}[u_\varepsilon] dxdt = \\ & = \mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{j=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(l_{\varepsilon j} (1 + |v_\varepsilon|^2)^{1/2} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[u_\varepsilon] \right) dxdt + \\ & + \mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{i,k,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_{\varepsilon j}}{\partial x_k} \frac{\partial u_{\varepsilon i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{\varepsilon j}}{\partial x_i} \frac{\partial u_{\varepsilon k}}{\partial x_j} \right) e_{ik}[u_\varepsilon] dxdt - \\ & - \mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_{\varepsilon j}}{\partial x_j} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[u_\varepsilon] dxdt = J_\varepsilon^{(1)} + J_\varepsilon^{(2)} + J_\varepsilon^{(3)}. \end{aligned}$$

В силу (3.3) имеем

$$|J_\varepsilon^{(2)}| + |J_\varepsilon^{(3)}| \leq C \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2.$$

Применяя к интегралу $J_\varepsilon^{(1)}$ теорему Гаусса-Остроградского и учитывая, что векторное поле $l_\varepsilon(x, t)(1 + |v_\varepsilon|^2)^{1/2} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[u_\varepsilon]$ касательно к боковой поверхности области $\Omega_{\varepsilon T}$, получаем

$$J_\varepsilon^{(1)} = \mu \int_{\Omega_\varepsilon(T)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon(x, T)] dx - \mu \int_{\Omega_\varepsilon(0)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon(x, 0)] dx.$$

Таким образом,

$$2\mu \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon(t)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [q_\varepsilon] e_{ik} [u_\varepsilon] dx dt \geq \mu \int_{\Omega_\varepsilon(T)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon(x, T)] dx - \\ - \mu \int_{\Omega_\varepsilon(0)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon^0] dx - C \|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_\varepsilon^T)}^2.$$

Из (3.12) – (3.15) и (3.20) – (3.23), вытекает неравенство

$$\left(\rho_\varepsilon - \frac{3C + \rho_\varepsilon}{2} \delta \right) \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \mu \int_{\Omega_\varepsilon(T)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon(x, T)] dx \leq \frac{\rho_\varepsilon}{2} \left(\frac{1}{\delta} + C \right) \|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \\ + C \left(\rho_\varepsilon + \frac{1}{\delta} + 1 \right) \left(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 + \|\nabla z_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 + \|z_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 \right) + \mu \int_{\Omega_\varepsilon(0)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon^0(x)] dx.$$

Полагая в нем $\delta = \frac{\rho_\varepsilon}{3C + \rho_\varepsilon}$, пользуясь оценками (3.1), (3.11) и предполагая равномерную по ε ограниченность (в соответствующих нормах) внешних сил $f_\varepsilon(x, t)$ и начальных данных $u_\varepsilon^0(x)$, приходим к неравенству

$$\rho_\varepsilon \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_{\varepsilon T})}^2 + \mu \int_{\Omega_\varepsilon(T)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon(x, T)] dx \leq C,$$

где постоянная C не зависит от ε .

Отсюда, учитывая равенство $u_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))$ при $(x, t) \in \bigcup_i Q_{\varepsilon T}^i$ и условия (jj), (jjj), получаем искомую оценку

$$\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \int_{\Omega^i, k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon(x, T)] dx < C. \quad (3.24)$$

Отсюда, в силу неравенства Корна следует равномерное по ε

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega_T)} < C, \quad (3.25)$$

причем это верно при любом α ($1 \leq \alpha \leq 3$).

§ 4. Усредненные уравнения, описывающие возмущение несущей жидкости мелкими твердыми частицами, движущимися в режиме замороженных частиц

Воспользуемся оценками (3.1) и (3.24) и покажем, что при определенных условиях решения $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (1.1.1) – (1.1.9) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится слабо в $W_2^1(\Omega_T)$ (и в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ для почти всех $t \in [0, T]$) к вектор-функции $u(x, t)$, являющейся решением следующей начально-краевой задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + (u \cdot \nabla)(\rho u) - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} \{a_{npqr}(x, t) e_{np}[u]\} \bar{e}^q + \nabla p = \rho f, \\ \operatorname{div} u(x, t) = 0, \end{aligned} \right\} x \in \Omega_T, \quad (4.1)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]; \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.3)$$

где $\rho = \rho(x, t)$ – положительная, а $\{a_{npqr} = a_{npqr}(x, t)\}_{n,p,q,r=1}^3$ – непрерывный, положительно определенный тензор в \mathbf{R}^3 четвертого ранга (при $\forall t \in [0, T]$) такие, что $\rho(x, t), a_{npqr}(x, t) \in L_\infty(\Omega_T)$, $\rho(x, t) \in L_2(0, T; L_4(\Omega))$; вектор-функции $f = f(x, t)$ и $u^0(x)$ пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$ внешнего силового поля $f_\varepsilon(x, t)$ и начальных данных задачи (1.1.1) – (1.1.9).

Назовем обобщенным решением задачи (4.1) – (4.3) вектор-функцию $u(x, t)$, класса

$$\mathcal{L}(\Omega_T) = W_2^1(\Omega_T) \cap L_\infty(\Omega_T) \cap L_2(0, T; J(\Omega)),$$

удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_\tau} \left\{ (\rho u, \zeta_\tau + (u \cdot \nabla)\zeta) + \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x, t) e_{np}[u] e_{qr}[\zeta] \right\} dx dt + \\ + \int_{\Omega} (\rho u(x, T), \zeta(x, T)) dx + \int_{\Omega} (\rho u(x, 0), \zeta(x, 0)) dx = \int_{\Omega_\tau} (\rho f, \zeta) dx dt, \end{aligned} \quad (4.4)$$

при $\forall \zeta \in \mathcal{L}(\Omega_T) \forall \tau \in (0, T)$. Круглыми скобками обозначается скалярное произведение в \mathbf{R}^3 , $\Omega_\tau = \Omega \times [0, \tau]$.

Лемма 4. 1. *Задача (4.1) – (4.3) может иметь не более одно-*

го обобщенного решения из класса $\mathcal{L}(\Omega_T)$.

Доказательство леммы проводится методом близким к методу, изложенному в [17]. Пусть $u'(x, t)$ и $u''(x, t)$ – два решения, тогда их разность $u = u' - u'' \in \mathcal{L}(\Omega_T)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & - \int \int_{\Omega_\tau} \{(\rho u, \zeta_t) + (\rho u, (u' \cdot \nabla) \zeta) + (\rho u'', (u \cdot \nabla) \zeta)\} dx dt + \\ & + 2 \int \int_{\Omega_\tau} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr} e_{np}[u] e_{qr}[\zeta] dx dt + \int_{\Omega} (\rho(x, \tau) u(x, \tau), \zeta(x, \tau)) dx = 0. \end{aligned}$$

Полагая в нем $\zeta(x, t) = u(x, t)$, после очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(x, t) |u(x, \tau)|^2 dx + 2 \int_{\Omega_\tau} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr} e_{np}[u] e_{qr}[u] dx dt \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_\tau} |\rho_t| |u|^2 dx dt + \int_{\Omega_\tau} \rho \{ |(u, (u' \cdot \nabla) u)| + |(u'', (u \cdot \nabla) u)| \} dx dt. \end{aligned}$$

Отсюда в силу положительной определенности тензора $\{a_{npqr}(x, t)\}_{n,p,q,r=1}^3$ (см. лемму 1.8), неравенства Корна (см. § 2, п. 1) и ограниченности $\rho(x, t)$ и вектор-функций $u'(x, t)$ и $u''(x, t)$ ($\rho, u', u'' \in L_\infty(\Omega_T)$) следует

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq \tau} \int_{\Omega} \rho(x, t) |u(x, t)|^2 dx + \int \int_{\Omega_\tau} |\nabla u|^2 dx dt \leq \\ & \leq C \left\{ \int_{\Omega_\tau} |\rho_t| |u|^2 dx dt + \int_{\Omega_\tau} |u| |\nabla u| dx dt \right\}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где постоянная C не зависит от τ .

Пользуясь неравенством Гельдера, запишем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\tau} |\rho_t| |u|^2 dx dt \leq \\ & \leq \left\{ \int_0^\tau \left(\int_{\Omega} |u|^q dx \right)^{r/q} dt \right\}^{2/r} \left\{ \int_0^\tau \left(\int_{\Omega} |\rho_t|^{q'} dx \right)^{r'/q'} dt \right\}^{1/r'} = \|u\|_{q,r,\Omega_\tau}^2 \|\rho_t\|_{q',r',\Omega_\tau}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $q' = \frac{q}{q-2}$, $r' = \frac{r}{r-2}$, ($q > 2$, $r > 0$).

Воспользуемся теперь таким неравенством

$$\|u\|_{\bar{q}, \bar{r}, \Omega_\tau} \leq \beta \|u\|_{\Omega_\tau}, \quad (4.7)$$

справедливым для функций из пространства $\mathring{V}_2(\Omega_\tau)$ [17], в котором норма $\|\cdot\|$ определена равенством

$$\|u\|_{\Omega_\tau} = \max_{0 \leq t \leq \tau} \int_{\Omega} |u(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega_\tau} |\nabla u(x, t)|^2 dx dt.$$

Здесь \bar{q} , \bar{r} – любые числа, удовлетворяющие условиям

$$\frac{1}{\bar{r}} + \frac{3}{2\bar{q}} = \frac{3}{4}, \quad \bar{r} \geq 2, \quad 2 \leq \bar{q} \leq 6, \quad \text{а постоянная } A \text{ зависит только от}$$

\bar{q} и \bar{r} . Заметим, что в силу теорем вложения вектор-функции из класса $\mathcal{L}(\Omega_T)$ имеют конечные нормы $\|u\|_{\Omega_T}$,

т.е. принадлежат $\mathring{V}_2(\Omega_T)$. Выбирая в (4.6) $q = 4$ и $r = \frac{8}{3}$ и учи-

тывая (4.7), получаем

$$\int_{\Omega_\tau} |\rho_t \|u\|^2 dx dt \leq A^2 \|u\|_{\Omega_\tau} \|\rho_t\|_{2,4,\Omega_\tau}. \quad (4.8)$$

Далее, пользуясь неравенством Гельдера, запишем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\tau} |u| |\nabla u| dx dt &\leq \left\{ \int_{\Omega_\tau} |u|^2 dx dt \right\} \|u\|_{\Omega_\tau} \leq \\ &\leq (\tau)^{1/r'} (\text{mes } \Omega)^{1/q'} \|u\|_{q,r,\Omega_\tau} \|u\|_{\Omega_\tau}, \end{aligned}$$

где $r' = \frac{2r}{r-2}$, $q' = \frac{2q}{q-2}$. Полагая, здесь $q = 4$, $r = \frac{8}{3}$ и учитывая

(4.7), получаем

$$\int_{\Omega_\tau} |u| |\nabla u| dx dt \leq A(\tau)^{1/8} (\text{mes } \Omega)^{1/4} \|u\|_{\Omega_\tau}^2. \quad (4.9)$$

Из (4.5), (4.8), (4.9) следует, что

$$\|u\|_{\Omega_\tau}^2 \leq \delta(\tau) \|u\|_{\Omega_\tau}^2, \quad (4.10)$$

где $\delta(\tau) = C[A^2 \|\rho_t\|_{2,4,\Omega_\tau} + A(\tau)^{1/8} (\text{mes } \Omega)^{1/4}]$.

Учитывая, что $\rho_t \in L_2(0, T; L_4(\Omega))$, можно выбрать τ таким, чтобы $\delta(\tau)$ было меньше 1. Тогда из (4.10) следует, что $u(x, t) \equiv$

0 в Ω_τ . Если такое τ не исчерпывает всего отрезка $[0, T]$, то разбивая $[0, T]$ на части длины $\leq \tau$ (для которых $u(x, t) \equiv 0$) и повторяя приведенные рассуждения, за конечное число шагов убеждаемся, что $u(x, t) \equiv u'(x, t) - u''(x, t) \equiv 0$ в Ω_τ . Лемма доказана.

Чтобы сформулировать основной результат, введем при каждом $t \in [0, T]$ характеристики множества $Q_\varepsilon(t) \equiv \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon^i(t)$ в кубе $K(x, h)$, а именно: $\{a_{npqr}(\varepsilon, h, x, t)\}$ – средний тензор вязкости суспензии в $K(x, h)$ (см. формулы (1.4) – (1.7)), а также среднюю плотность смеси жидкости и частиц в $K(x, h)$.

$$\rho(\varepsilon, h, x, t) = \frac{1}{h^3} \int_{K(x, h)} \{\rho_{z_\varepsilon} \chi_\varepsilon(z, t) + \rho_x (1 - \chi_\varepsilon(z, t))\} dz, \quad (4.11)$$

где $\chi_\varepsilon(z, t)$ – характеристическая функция множеств $Q_\varepsilon(t)$.

Предположим, что при всех $t \in [0, T]$ существуют пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |a_{npqr}(\varepsilon, h, x, t) - a_{npqr}(x, t)| dx = 0, \quad (4.12)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\rho(\varepsilon, h, x, t) - \rho(x, t)| dx = 0. \quad (4.13)$$

Учитывая определения $a_{npqr}(\varepsilon, h, x, t)$ и $\rho(\varepsilon, h, x, t)$ (см. (1.4) – (1.7) и (4.11)) и условия (i), (ii), (j) – (jjj) можно показать, что $\{a_{npqr}(x, t)\}_{n, p, q, r=1}^3$ – положительно-определенный тензор, а $\rho(x, t)$ – положительная функция в Ω_T , причем $a_{npqr}(x, t) \in L_\infty(\Omega_T)$, $\rho(x, t) \in L_\infty(\Omega_T) \cap W_2^1(0, T; L_4(\Omega))$.

Теорема 4. 1. Пусть выполнены условия (4.12), (4.13) и пусть внешние силы $f_\varepsilon(x, t)$ и начальные данные $u_\varepsilon^0(x)$ задачи (1.1.1) – (1.1.9) сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к вектор-функциям $f(x, t)$ и $u^0(x)$ соответственно в $L_2(\Omega_T)$ и $L_2(\Omega)$, а моменты $M_\varepsilon^i = o(\varepsilon^{3\alpha})$. Тогда решения $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (1.1.1) – (1.1.9) (продолженные на $\bigcup_i Q_{\varepsilon T}^i$ равенством $u_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))$) сходятся в $L_2(\Omega_T)$ (и в

$L_2(\Omega)$ при любом $t \in [0, T]$) к вектор-функции $u(x, t)$, являющейся обобщенным решением задачи (4.1) – (4.9).

Доказательство. Согласно оценкам (3.1) и (3.24) множество вектор-функций $\{u_\varepsilon(x, t), \varepsilon \rightarrow 0\}$ ограничено и, значит, слабо компактно в пространстве $W_2^1(\Omega_T)$. Поэтому можно выделить подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_k}(x, t), \varepsilon_k \rightarrow 0\}$, которая сходится слабо в $W_2^1(\Omega_T)$ к некоторой вектор-функции $u(x, t)$. Более того, из оценки (3.24) (верной при любом $t \geq 0$) и неравенства Корна следует, что подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_k}(x, t), \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ всегда можно выбрать так, чтобы она сходилась к $u(x, t)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ равномерно по $t \in [0, T]$, а в силу условия (j) $u(x, t) \in L_\infty(\Omega_T)$ и, значит, $u(x, t) \in \mathcal{X}(\Omega_T)$.

Покажем, что $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи (4.1) – (4.3), т. е. удовлетворяет тождеству (4.4). Поскольку эта задача согласно лемме 4.1 имеет единственное обобщенное решение класса $\mathcal{X}(\Omega_T)$, то отсюда будет следовать, что $u_\varepsilon(x, t)$ сходится к $u(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В силу теоремы вложения имеет место сходимости в $L_4(\Omega_T)$ и в $L_2(\Omega)$ при каждом $t \in [0, T]$.

Рассмотрим вектор-функцию

$$w_\varepsilon(x, t) = \rho_\varepsilon(x, t) \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \right], \quad (4.14)$$

где $\rho_\varepsilon(x, t)$ – функция, определенная в Ω_T равенством (1.1.10).

Лемма 4. 2. Пусть $\alpha = 1$. Тогда множество вектор-функций $\{w_\varepsilon(x, t), \varepsilon > 0\}$ слабо компактно в $L_2(\Omega_T)$ и их слабый предел по подпоследовательности $\{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ имеет вид

$$w(x, t) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + (u \cdot \nabla)(\rho u), \quad (4.15)$$

где $u = u(x, t)$ – предел последовательности $\{u_{\varepsilon_k}(x, t), \varepsilon_k \rightarrow 0\}$, а функция $\rho = \rho(x, t)$ определена равенством (4.13).

При $1 < \alpha < 3$, $\rho_{\text{ч}\varepsilon} = O(\varepsilon^{3(1-\alpha)})$ последовательность $\{w_\varepsilon(x, t), \varepsilon > 0\}$ сходится к $w(x, t)$ (4.15) в смысле распределений.

Доказательство. Рассмотрим случай $\alpha = 1$. Тогда $\rho_{\text{ч}\varepsilon} = O(1)$ и, следовательно из оценок (3.1) и (3.24) следует, что множество вектор-функций $\{w_\varepsilon(x, t), \varepsilon \rightarrow 0\}$ ограничено по норме $L_2(\Omega_T)$ и, значит, слабо компактно в $L_2(\Omega_T)$. Пусть $\varphi(x, t)$ – произвольная гладкая вектор-функция с компактным носителем в Ω_T . Учитывая (4.14) и (1.1.10) и определение вектор-функции $u_\varepsilon(x, t)$ на множестве $\bigcup_i Q_{\varepsilon T}^i$, запишем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} (w_\varepsilon, \varphi) dxdt &= \rho_{\text{ж}} \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon, \varphi \right) dxdt + \\ &+ (\rho_{\text{ч}\varepsilon} - \rho_{\text{ж}}) \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{Q_{\varepsilon T}^i} \left(\frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon^i}{\partial t} + (\tilde{u}_\varepsilon^i \cdot \nabla) \tilde{u}_\varepsilon^i, \varphi \right) dxdt = J_\varepsilon^{(1)} + J_\varepsilon^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где $\tilde{u}_\varepsilon^i(x, t) = u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))$, $(x, t) \in Q_{\varepsilon T}^i$.

В силу сходимости $u_{\varepsilon_k}(x, t)$ к $u(x, t)$ (слабой в $W_2^1(\Omega_T)$ и сильной в $L_2(\Omega_T)$)

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow \infty} J_{\varepsilon_k}^{(1)} = \rho_{\text{ж}} \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u, \varphi \right) dxdt. \quad (4.17)$$

Второе слагаемое в (4.16) представим в виде

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon_k}^{(2)} &= (\rho_{\text{ч}\varepsilon} - \rho_{\text{ж}}) \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{Q_{\varepsilon T}^i} \int \sum_{j=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [(\tilde{u}_{\varepsilon_k}^i, \vec{\varphi}) l_{\varepsilon_j}^i] dxdt + \\ &+ \int_{\Omega_T} (u_\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \varphi) (\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{ч}\varepsilon}(x, t)) dxdt = J_{\varepsilon_1}^{(2)} + J_{\varepsilon_2}^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где $x_0 = t$, $l_{\varepsilon_0}^i = 1$ и $l_{\varepsilon_j}^i = \tilde{u}_{\varepsilon_j}^i(x, t)$ ($j = 1, 2, 3$).

Так как векторное поле $l_{\varepsilon}^i(x, t) = \{l_{\varepsilon_j}^i\}_{j=0}^3$ касательно к боковой поверхности $\partial Q_{\varepsilon T}^i$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$), а вектор-функция $\varphi(x, t)$ финитна в Ω_T , то в силу формулы Гаусса-Остроградского- $J_{\varepsilon_1}^{(2)} = 0$.

Далее, учитывая (4.11) и (4.13) легко показать, что $\rho_\varepsilon(x, t)$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится слабо в $L_2(\Omega_T)$ к функции $\rho(x, t)$, а так как $u_\varepsilon(x, t)$ при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ сходится к $u(x, t)$ в $L_4(\Omega_T)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} J_{\varepsilon^2}^{(2)} &= \int_{\Omega_T} \left[\left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + (u \cdot \nabla) \varphi \right] (\rho_{ж} - \rho(x, t)) dx dt = \\ &= \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + (u \cdot \nabla)(\rho u), \varphi \right) dx dt - \rho_{ж} \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u, \varphi \right) dx dt. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Объединяя (4.16) – (4.19), получаем

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} (w_\varepsilon, \varphi) dx dt = \int_{\Omega_T} \left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + (u \cdot \nabla)(\rho u), \varphi \right) dx dt,$$

откуда следует утверждение леммы 4.2 при $\alpha = 1$.

В случае $1 < \alpha < 3$ доказательство проводится аналогично с учетом условий (j) – (jjj) и оценки (1.2.6) леммы 1.2.1, в силу которой вектор-функции $V_\varepsilon(x, t)$ из условия (jj) сходится при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ к $u(x)$. Этим замечанием заканчивается доказательство леммы 4.2.

Продолжим доказательство теоремы 4.1.

Как следует из теоремы 2.1 и леммы 1.7.1 решение $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (1.1.1) – (1.1.9) можно представить в виде

$$u_\varepsilon(x, t) \equiv R_\varepsilon^t \hat{f}_\varepsilon[x] + R_\varepsilon^t \tilde{f}_\varepsilon^t[x], \quad (4.20)$$

где R_ε^t – линейный самосопряженный и вполне непрерывный оператор в $L_2(\Omega)$ – резольвента вариационной задачи A в области $\Omega_\varepsilon(t)$ (см. гл. 1)

$$\begin{aligned} \tilde{f}_\varepsilon^t[x] &= \rho_\varepsilon(x, t) f_\varepsilon(x, t) - w_\varepsilon(x, t), \\ \tilde{f}_\varepsilon^t[x] &= \sum_i \rho_{чэ} (J_\varepsilon^i(t))^{-1} M_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t)) \chi_\varepsilon^i(x, t). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Здесь всюду t – параметр.

Пусть $\varphi(x, t)$ – произвольная вектор-функция из $L_2(\Omega_T)$. Тогда $\varphi(x, t) = \varphi^t[x] \in L_2(\Omega)$ для почти всех $t \in [0, T]$ и, согласно (4.20), ограниченности и самосопряженности оператора R_ε^t , имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_T} (u_\varepsilon, \varphi) dx dt &= \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R_\varepsilon^t \varphi^t)_\Omega dt + \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R_\varepsilon^t \varphi^t)_\Omega dt = \\
&= \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R^t \varphi^t)_\Omega dt + \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R_\varepsilon^t \varphi^t - R^t \varphi^t)_\Omega dt + \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R_\varepsilon^t \varphi^t)_\Omega dt,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

где через $(\cdot, \cdot)_\Omega$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega)$.

Согласно определению оператора R_ε^t при $x \in Q_\varepsilon^i(t)$ $R_\varepsilon^t \varphi^t[x] = a_\varepsilon^i(t) + b_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t))$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$) причем равномерно по ε и t

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} ((a_\varepsilon^i)^2 + (b_\varepsilon^i)^2) \text{mes } Q_\varepsilon^i(t) \leq C \|\varphi^t\|_{L_2(\Omega)}.$$

Поэтому, учитывая вид вектор-функции $\tilde{f}_\varepsilon^t[x]$ (4.21) и формулу (1.1.6), получаем:

$$\left| \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R_\varepsilon^t \varphi^t)_\Omega dt \right| = \left| \int_0^T (M_\varepsilon^i(t), b_\varepsilon^i(t)) dt \right| \leq C \left(\int_0^T \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(M_\varepsilon^i(t))^2}{\text{mes } Q_\varepsilon^i(t)} dt \right)^{1/2} \|\varphi\|_{L_2(\Omega)}.$$

Так как $M_\varepsilon^i(t) = o(\varepsilon^{3\alpha})$ и $\text{mes } Q_\varepsilon^i(t) \geq C\varepsilon^{3\alpha}$ ($C > 0$), то отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R_\varepsilon^t \varphi^t)_\Omega dt = 0. \tag{4.23}$$

Далее, в силу леммы 4.2 и условий теоремы 4.1, при $\alpha = 1$ подпоследовательность $\{\tilde{f}_\varepsilon^t[x] \equiv \tilde{f}_\varepsilon(x, t), \varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ (см. (1.2.1)) сходится слабо в $L_2(\Omega_T)$ к вектор-функции $\Phi(x, t) = \rho(x, t)f(x, t) - w(x, t) \in L_2(\Omega_T)$, где $w(x, t)$ определено равенством (4.15). Поэтому

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R^t \varphi^t)_\Omega dt &= \lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} (\tilde{f}_\varepsilon(x, t), R^t \varphi(x, t)) dx dt = \\
&= \int_{\Omega_T} (\Phi(x, t), R^t \varphi(x, t)) dx dt = \int_0^T (\Phi^t, R^t \varphi^t)_\Omega dt = \\
&= \int_0^T (R^t \Phi^t, \varphi^t)_\Omega dt = \int_{\Omega_T} (R^t \Phi^t[x], \varphi(x, t)) dx dt.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь учтено, что оператор R^t самосопряжен в $L_2(\Omega)$ и для

почти всех $t \in [0, T]$, $\Phi(x, t) \in L_2(\Omega_T)$. Наконец, воспользуемся неравенством

$$\left| \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R_\varepsilon^t \varphi^t - R^t \varphi^t)_\Omega dt \right| \leq \|\tilde{f}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega_T)} \left\{ \int_0^T \|R_\varepsilon^t \varphi^t - R^t \varphi^t\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \right\}^{1/2},$$

с помощью которого, учитывая теорему 2.2 (и замечания к теореме 1.1) равномерную ограниченность по ε $R_\varepsilon^t \varphi^t$ в $L_2(\Omega)$ и равномерную по ε ограниченность $\tilde{f}(x, t)$ в $L_2(\Omega_T)$, получаем

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \left| \int_0^T (\tilde{f}_\varepsilon^t, R_\varepsilon^t \varphi^t - R^t \varphi^t)_\Omega dt \right| = 0. \quad (4.25)$$

Из (4.22) – (4.25) следует, что

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \left| \int_{\Omega_T} (u_\varepsilon, \varphi) dx dt \right| = \int_0^T (R^t \Phi^t[x], \varphi^t)_\Omega dt.$$

С другой стороны, так как $u_\varepsilon(x, t) \equiv u_\varepsilon^t[x]$ при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ сходится к $u(x, t) \equiv u^t[x]$ в $L_2(\Omega_T)$ и в $L_2(\Omega)$ равномерно по $t \in [0, T]$, то

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} (u_\varepsilon, \varphi) dx dt = \int_0^T (u^t, \varphi^t)_\Omega dt.$$

Поэтому, при всех $t \in [0, T]$, $u(x, t) \equiv u^t[x] = R^t \Phi^t[x] = R^t[\rho(x, t)f(x, t) - w(x, t)]$, и в силу сходимости начальных данных задачи (1.1.1) – (1.1.9) $u(x, 0) = u^0(x)$. Отсюда, согласно определению оператора R^t и равенству (1.1.10), следует, что $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи (4.1) – (4.3). Таким образом, при $\alpha = 1$ теорема 4.1 доказана.

В случае $1 < \alpha < 3$ доказательство проводится аналогично с помощью леммы 4.2 и теорем 1.2 и 2.3 (с учетом замечания к теореме 1.1). На этом заканчивается доказательство Теоремы 4.1.

Замечание. Теорема 4.1 доказана при условии существования пределов (4.12) – (4.13) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Можно, однако, показать, что всегда можно выделить подпоследовательность $\{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ такую, что эти пределы существуют при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ для

почти всех $t \in [0, T]$. Следовательно, все предельные вектор-функции $u(x, t)$ для решений $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (1.1.1) – (1.1.9) являются решениями задачи (4.1) – (4.9), в которой функции $\rho(x, t)$ и $a_{npqr}(x, t)$ зависят, вообще говоря, от выбора подпоследовательности $\{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0\}$.

Задача (4.1) – (4.2) описывает поведение вектора скорости $u(x, t)$ несущей жидкости возмущенной мелкими твердыми частицами. Но система (4.1) не замкнута, т. к. в нее входят неизвестная функция $\rho(x, t)$ и неизвестное тензорное поле $\{a_{npqr}(x, t)\}$. Из физических соображений ясно, что плотность $\rho(x, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \rho = 0, \quad (4.26)$$

поскольку частицы движутся как бы замороженными в несущую жидкость, скорость которой равна $u(x, t)$. Но это можно и доказать с помощью формул (4.11), (4.13), (1.1.7). Действительно, пусть $\varphi(x, t)$ – гладкая финитная в Ω_T функция. Учитывая (1.1.10), запишем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \rho_\varepsilon(x, t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (u_\varepsilon \cdot \nabla) \varphi \right] dx dt = \\ & = \rho_{\text{ж}} \int_{\Omega_{\varepsilon T}} [\varphi_t + (u_\varepsilon \cdot \nabla) \varphi] dx dt + \rho_{\text{ж}} \int_{\Omega_T \setminus \Omega_{\varepsilon T}} [\varphi_t + (u_\varepsilon \cdot \nabla) \varphi] dx dt = \\ & = \rho_{\text{ж}} \int_{\Omega_{\varepsilon T}} \sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} [l_{\varepsilon k}(x, t) \varphi(x, t)] dx dt + \\ & + \rho_{\text{ж}} \int_{\Omega_T \setminus \Omega_{\varepsilon T}} \sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} [l_{\varepsilon k}(x, t) \varphi(x, t)] dx dt, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $l_{\varepsilon 0}(x, t) = 1$, $l_{\varepsilon k}(x, t) = u_{\varepsilon k}(x, t)$ ($k = 1, 2, 3$), $x_0 = t$. Согласно (1.1.7) векторное поле $l(x, t) \in \mathbf{R}^4$ касательно к боковой поверхности $\partial Q_{\varepsilon T}$ и $\partial \Omega \setminus Q_{\varepsilon T}$. Поэтому, в силу финитности $\varphi(x, t)$ и теоремы Гаусса-Остроградского оба слагаемых в правой части (4.27) равны нулю и, значит

$$\int_{\Omega_T} \rho_\varepsilon(x, t) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (u_\varepsilon \cdot \nabla) \varphi \right] dx dt = 0. \quad (4.28)$$

С другой стороны из (1.1.10), (4.13), следует, что функция $\rho_\varepsilon(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к $\rho(x, t)$ слабо в $L_2(\Omega_T)$, при $\alpha = 1$ (и в смысле распределений при $1 < \alpha < 3$). Поэтому, учитывая, что $u_\varepsilon(x, t)$ сходится к $u(x, t)$ сильно в $L_2(\Omega)$, а также условие (jj) (при $1 < \alpha < 3$), получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_T} \rho_\varepsilon(x, t) [\varphi_t + (u_\varepsilon \cdot \nabla) \varphi] dx dt = \int_{\Omega_T} \rho(x, t) [\varphi_t + (u \cdot \nabla) \varphi] dx dt. \quad (4.29)$$

Из (4.28) и (4.29) следует, что функция плотности смеси $\rho(x, t)$ является обобщенным решением уравнения (4.26)

Что касается тензорного поля $\{a_{npqr}(x, t)\}_{n,p,q,r=1}^3$, то вывести уравнение, которому оно удовлетворяет в общем случае, основываясь только на определениях (4.12) и (1.1.7) невозможно.

Необходима явная параметризация тензора $\{a_{npqr}(x, t)\}_{n,p,q,r=1}^3$ с помощью векторов ориентации частиц и их объемной плотности. Это будет сделано в следующей главе для некоторых конкретных распределений частиц. Затем в главе 4 выводится уравнение для среднего вектора ориентации, которое вместе (4.26) замыкает систему (4.1).

Глава 3

Тензор вязкости суспензии

Вычисление предельного тензора вязкости суспензии $\{a_{npqr}(x,t)\}_{n,p,q,r=1}^3$ определенного в главе 2 формулами (2.1.7) в общем случае представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Но в некоторых конкретных ситуациях этот тензор все же удастся выразить через более простые локальные характеристики системы частиц, например, через характеристики ячейки для периодических структур, или геометрические параметры и ориентации отдельных частиц для сильно разбавленных суспензий. Этим вопросам и посвящена данная глава.

В §1 рассматривается структура близкая к периодической. Получено выражение для тензора $\{a_{npqr}(x,t)\}_{n,p,q,r=1}^3$ в терминах решения так называемой ячеечной задачи.

В §3 рассматривается случай произвольного расположения частиц осесимметричной формы, размеры которых малы по сравнению с расстояниями между соседними частицами. Получена асимптотическая формула для тензора $\{a_{npqr}(x,t)\}_{n,p,q,r=1}^3$, когда суммарный объем частиц стремится к нулю.

В §4 получена формула для среднего значения тензора вязкости при случайном распределении частиц.

§ 1. Вычисление тензоров вязкости для структур близких к периодическим

В этом параграфе будет получена формула для предельного тензора вязкости суспензии $\{a_{npqr}(x,t)\}_{n,p,q,r=1}^3$ в предположении, что в любой момент времени $t \in [0, T]$ конфигурация системы частиц $\cup Q_\varepsilon^i(t)$ в области Ω удовлетворяет такому условию: каждая частица принадлежит одной из периодически расположенных в Ω ячеек (размера $O(\varepsilon)$), причем положения

центров масс x_ε^i , диаметры d_ε^i и ориентации λ_ε^i частиц, находящихся в соседних ячейках, отличаются на малую величину (по сравнению с размером ячейки). При этом для частиц, находящихся в ячейках, расположенных на конечных расстояниях друг от друга эти параметры могут отличаться на величину порядка $O(\varepsilon)$ (а ориентации – на конечную величину). Таковую структуру принято называть локально-периодической.

Дадим точные определения и покажем, что в этом случае тензор $\{a_{npqr}(x, t)\}_{n,p,q,r=1}^3$ выражается через решение ячеечной краевой задачи, зависящей от $(x, t) \in Q_T$ (как от параметров).

1. Разобьем область Ω на параллелепипеды $\Pi_\varepsilon^j = \{x : |x_i - \bar{x}_{\varepsilon i}^j| \leq \varepsilon_i / 2 \ (i = 1, 2, 3)\}$ с центрами в узлах периодической решетки $\{\bar{x}_\varepsilon^j\}$ и сторонами длины $\varepsilon_i = \gamma_i \varepsilon$, ориентированными по координатным осям. Пусть в каждом внутреннем параллелепипеде $\Pi_\varepsilon^j \subset \Omega$ находится частица Q_ε^j , диаметром $d_\varepsilon^j = \beta(\bar{x}_\varepsilon^j) \varepsilon$ с центром масс в точке $x_\varepsilon^j = \varepsilon b(\bar{x}_\varepsilon^j)$ и ориентацией, определенной оператором поворота $A(\bar{x}_\varepsilon^j)$ так, что

$$Q_\varepsilon^j = \left\{ x \in \Pi_\varepsilon^j : A^{-1}(\bar{x}_\varepsilon^j) \frac{x - \varepsilon b(\bar{x}_\varepsilon^j)}{\varepsilon \beta(\bar{x}_\varepsilon^j)} \in Q \right\},$$

где $\beta(y) \in C^1(\bar{\Omega})$ – положительная функция, $b(y) \in C^1(\bar{\Omega})$ – вектор-функция; Q – некоторое фиксированное тело в \mathbf{R}^3 диаметром $d = 1$ с центром масс в начале координат и границей ∂Q класса $C^{2+\alpha}$ ($\alpha > 0$). Будем предполагать, что

$\max_{y \in \Omega} (\beta(y) + |b(y)|) < \min \frac{\gamma_i (1 - 2\delta)}{2}$ ($\delta > 0$), тогда частица Q_ε^j нахо-

дится внутри параллелепипеда $\Pi_\varepsilon^{j_1} = \{x : |x_i - \bar{x}_{\varepsilon i}^{j_1}| \leq$

$\leq \varepsilon_i \frac{1 - 2\delta}{2} \ (i = 1, 2, 3)\} \subset \Pi_\varepsilon^j$.

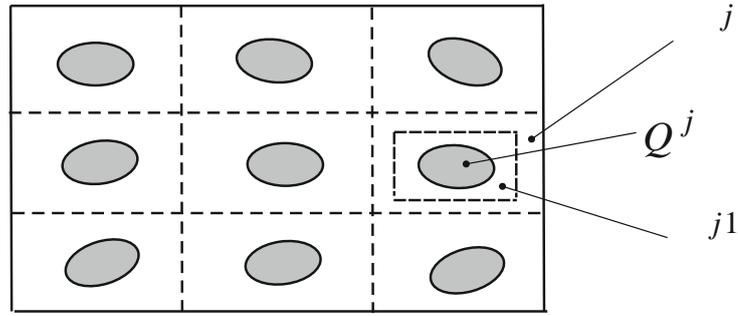


Рис.1

Обозначим $\Pi = \left\{ x : |x_i| \leq \frac{\gamma_i}{2} (i=1,2,3) \right\}$ – параллелепипед в \mathbf{R}^3

и $Q^y = \left\{ x \in \Pi : A^{-1}(y) \frac{x-b(y)}{\beta(y)} \in Q \right\}$ – область в нем. Рассмотрим в

области $\Pi \setminus \overline{Q^y}$ следующую краевую задачу, зависящую от параметров $y \in \Omega$ и $r, s = 1, 2, 3$:

$$-\Delta u^{rs} + \nabla p^{rs} = 0, \quad \operatorname{div} u^{rs} = 0, \quad x \in \Pi \setminus \overline{Q^y}, \quad (1.1)$$

$$u^{rs}(x; y) = -\psi^{rs}(x) + \omega^{rs} \times x, \quad x \in \partial Q^y \quad (1.2)$$

$$\int_{\partial Q^y} \{x \times \sigma[u^{rs}]\} dS = 0, \quad (1.3)$$

$$u^{rs}(x; y)|_{x \in \Gamma_i^+} = u^{rs}(x; y)|_{x \in \Gamma_i^-}, \quad (1.4)$$

$$\sigma[u^{rs}]|_{x \in \Gamma_i^+} = -\sigma[u^{rs}]|_{x \in \Gamma_i^-}, \quad (1.5)$$

где

$$\sigma[u] = 2 \sum_{i,k} e_{ik} [u] n_i e^k + np \quad (1.6)$$

– вектор напряжений; $\Gamma_i^\pm = \partial \Pi \cap \left\{ x_i = \pm \frac{\gamma_i}{2} \right\}$ ($i = 1, 2, 3$) –

противоположные грани параллелепипеда Π ; вектор-функция $\psi^{rs}(x)$ определена формулой (2.1.2), ω^{rs} – некоторый постоянный вектор.

Давление $p(x)$ в задаче (1.1) – (1.5) определяется с точностью до аддитивной постоянной, поэтому можно считать, что

$$\int_{\Pi \setminus Q^y} p^{rs}(x; y) dx = 0. \quad (1.7)$$

Лемма 1.1. *Задача (1.1)–(1.7) имеет единственное решение $\{u^{rs}(x; y), p^{rs}(x; y)\}$ такое, что $u^{rs} \in C^{2+\alpha}(\overline{\Pi \setminus Q^y})$, $p^{rs} \in C^{1+\alpha}(\overline{\Pi \setminus Q^y})$. Это решение можно периодически продолжить на все пространство \mathbf{R}^3 с сохранением гладкости.*

Доказательство. Установим сначала единственность. Пусть существует два решения $\{u', p'\}$ и $\{u'', p''\}$ (зависимость от индексов r, s и от параметра $y \in \mathbf{R}^3$ опущены). Тогда их разность $v = u' - u''$, $q = p' - p''$ является решением однородной задачи:

$$-\Delta v + \nabla q = 0, \operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Pi \setminus \bar{Q}, \quad (1.8)$$

$$v(x) = \omega \times x, \quad x \in \partial Q \quad (1.9)$$

$$\int_{\partial Q} \{x \times \sigma[v]\} dS = 0, \quad (1.10)$$

$$v|_{\Gamma_i^+} = v|_{\Gamma_i^-} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.11)$$

$$\sigma[v]|_{\Gamma_i^+} = -\sigma[v]|_{\Gamma_i^-}, \quad (1.12)$$

$$\int_{\Pi \setminus Q} q dx = 0, \quad (1.13)$$

где ω – некоторый постоянный вектор.

Умножим первое уравнение (1.8) на v и проинтегрируем по области $\Pi \setminus \bar{Q}$. Пользуясь формулой Грина, получим

$$-2 \int_{\Pi \setminus \bar{Q}} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[v] dx + \int_{\partial Q} (\sigma[v], v) dS + \int_{\partial \Pi} (\sigma[v], v) dS = 0.$$

Здесь третий интеграл равен нулю в силу условий периодичности (1.11), (1.12), а из условий (1.9), (1.10) следует, что

$$\int_{\partial Q} (\sigma[v], v) dS = (\omega, \int_{\partial Q} \{x \times \sigma[v]\} dS) = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{\Pi \setminus \bar{Q}} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[v] dx = 0,$$

и, значит, вектор-функция $v(x)$ есть жесткое перемещение, т.е. $v(x) = a + \omega \times x$ при $x \in \Pi \setminus Q$. В силу условия (1.9) $a \equiv 0$, а $\omega \times$

x удовлетворяет условию периодичности (1.11) лишь при $\omega \equiv 0$. Следовательно, $v = u' - u'' \equiv 0$, а в силу первого уравнения (1.8) и (1.13) $q = p' - p'' \equiv 0$ при $x \in \Pi \setminus Q$. Таким образом, единственность решения задачи (1.1) – (1.7) доказана.

Для доказательства существования решения заметим, что задача (1.1) – (1.7) эквивалентна задаче нахождения минимума функционала

$$J[u] = \int_{\Pi \setminus Q} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[u] dx \quad (1.14)$$

в классе $J_\psi(\Pi \setminus \bar{Q})$ соленоидальных вектор-функций $u \in W_2^1(\Pi \setminus \bar{Q})$, удовлетворяющих граничным условиям (1.2) и (1.4). Нетрудно убедиться, что класс $J_\psi(\Pi \setminus \bar{Q})$ не пуст. Действительно, вектор-функции $\psi(x)$, определенные равенством (2.1.2), представимы в виде $\psi = \text{rot } \tilde{\psi}$, где $\tilde{\psi}$ – однородный полином 2-й степени. Например, для $\psi = \psi^{11}$, $\tilde{\psi} = \frac{1}{3}(x_1^2 e^1 - x_1 x_3 e^2 + x_1 x_2 e^3)$, для $\psi = \psi^{12}$, $\tilde{\psi} = \frac{1}{2}(x_1 x_3 e^1 - x_2 x_3 e^2 + x_3^2 e^3)$ и т. д.

Пусть Π' и Π'' – параллелепипеды такие, что $Q \subset \Pi' \subset \Pi'' \subset \Pi$ и функция $\varphi(x) \in C_0^2(\Pi)$ равна 1 в Π' и нулю вне Π'' . Положим $\psi_0(x) = \text{rot}[\tilde{\psi}(x)\varphi(x)]$. Легко видеть, что вектор-функция $\psi_0 \in W_2^1(\Pi \setminus Q)$ соленоидальна, удовлетворяет условию (1.4) ($\psi_0|_{\Gamma^+} = \psi_0|_{\Gamma^-} = 0$), условию (1.2) (при $\omega = 0$), и, следовательно, $\psi_0 \in J_\psi(\Pi \setminus \bar{Q})$.

В силу условий (1.2), (1.4) класс вектор-функций $J_\psi(\Pi \setminus \bar{Q})$ есть замкнутое множество в $W_2^1(\Omega)$, не пересекающееся с подпространством вектор-функций вида $a + b \times x$, где a и b – постоянные векторы. Отсюда следует, что для вектор-функций $u \in J_\psi(\Pi \setminus \bar{Q})$ выполняется неравенство Корна [39]

$$\|u\|_{W_2^1(\Pi \setminus \bar{Q})}^2 \leq C \int_{\Pi \setminus \bar{Q}} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u] dx,$$

где постоянная $C < \infty$ не зависит от $u \in J_\psi(\Pi \setminus \bar{Q})$.

С помощью этого неравенства, обычным образом можно показать, что существует минимизант $u(x) \in J_\psi(\Pi \setminus \bar{Q})$ функционала (1.14), который принадлежит $W_2^1(\Pi \setminus \bar{Q})$ и, является обобщенным решением краевой задачи (1.1) – (1.7) при некотором давлении $p(x)$. Из результатов О.А. Ладыженской [17] следует, что вектор скорости $u(x; y)$ обобщенного решения из $W_2^1(\Pi \setminus \bar{Q})$ имеет внутри области $\Pi \setminus \bar{Q}$ локально суммируемые с квадратом производные до второго порядка, а давление $p(x)$ – до первого. Таким образом, $u(x) \in W_{2,lok}^2(\Pi \setminus \bar{Q}) \cap W_2^1(\Pi \setminus \bar{Q})$, $p(x) \in W_{2,loc}^1(\Pi \setminus \bar{Q})$.

Обозначим через $\{\tilde{u}, \tilde{p}\}$ периодическое продолжение решения $\{u, p\}$ на все пространство \mathbf{R}^3 . В силу (1.4) $\tilde{u} \in W_2^1(\mathbf{R}^3)$ и $\operatorname{div} \tilde{u} = 0$ всюду в \mathbf{R}^3 . Ясно также, что $\{\tilde{u}, \tilde{p}\}$ удовлетворяет первому уравнению (1.1) во внутренних точках ячеек, полученных сдвигами ячейки $\Pi \setminus \bar{Q}$ на векторы $e^1 \gamma_1 n + e^2 \gamma_2 m + e^3 \gamma_3 l$ ($n, m, l \in \mathbf{Z}$).

Пусть $\tilde{\Pi} = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 : |x_i| \leq \frac{\gamma_i(1+\delta)}{2}, i=1,2,3, \delta > 0 \right\}$ – прямоугольник концентрический с $\Pi \subset \tilde{\Pi}$, а $\zeta(x) \in C_0^1(\tilde{\Pi} \setminus \bar{Q})$ – соленоидальная вектор-функция с носителем пересекающимся с $\partial\Pi$.

Тогда, согласно формуле Грина, имеем

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\tilde{\Pi} \setminus \bar{Q}} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [\tilde{u}] e_{ik} [\zeta] dx = \\ & = 2 \int_{\Pi \setminus \bar{Q}} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [\tilde{u}] e_{ik} [\zeta] dx + 2 \int_{\tilde{\Pi} \setminus \Pi} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [\tilde{u}] e_{ik} [\zeta] dx = \\ & = \int_{\Pi \setminus \bar{Q}} (\zeta, -\Delta u + \nabla p) dx + \int_{\tilde{\Pi} \setminus \Pi} (\zeta, -\Delta \tilde{u} + \nabla \tilde{p}) dx + \\ & \quad + \int_{\partial\Pi} (\sigma[u], \zeta) dS - \int_{\partial\Pi} (\sigma[\tilde{u}], \zeta) dS, \end{aligned}$$

откуда, в силу свойств продолжения $\{\tilde{u}, \tilde{p}\}$, следует, что

$$\int_{\tilde{\Pi} \setminus Q} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[\tilde{u}] e_{ik}[\zeta] dx = 0,$$

и, значит, $\{\tilde{u}, \tilde{p}\}$ является обобщенным решением задачи (1.1) – (1.7) всюду в $\tilde{\Pi} \setminus Q$. Теперь, воспользовавшись результатами работы [17], с учетом гладкости ∂Q заключаем, что $u \in C^{2+\alpha}(\overline{\tilde{\Pi} \setminus Q})$ и $p \in C^{1+\alpha}(\overline{\tilde{\Pi} \setminus Q})$. Лемма 1.1 доказана.

Покажем, что решение $\{u, p\}$ задачи (1.1) – (1.7) удовлетворяет равенствам:

$$\int_{\partial Q} \sigma[\psi + u] dS = 0, \text{ и } \int_{\partial Q} (\sigma[\psi + u] \times x) dS = 0. \quad (1.15)$$

Применяя в области $\Pi \setminus Q$ формулу Грина к u и e^i ($i = 1, 2, 3$) и учитывая краевые условия (1.5), получаем

$$\int_{\partial Q} \sigma[u] dS = - \int_{\partial \Pi} \sigma[u] dS = 0. \quad (1.16)$$

Аналогично с помощью формулы Грина, примененной в области Q к ψ^{rs} и e^i , а также к ψ^{rs} и $e^i \times x$, находим

$$\int_{\partial Q} \sigma^0[\psi] dS = \int_{\partial Q} \{\sigma^0[\psi] \times x\} dS = 0, \quad (1.17)$$

где $\sigma^0[\psi]$ определен равенством (1.6) при $p = 0$. Поскольку $\sigma[\psi + u] = \sigma^0[\psi] + \sigma[u]$, то из (1.16), (1.17) и (1.3) следуют равенства (1.15).

Решение $\{\tilde{u}^{rs}(x; y), p^{rs}(x; y)\}$ задачи (1.1) – (1.7) зависит от точки $y \in \Omega$ через посредство параметров $\beta = \beta(y)$, $b = b(y)$ и $A = A(y)$. Учитывая гладкость $\beta(y)$, $b(y)$ и $A(y)$, можно показать, что $\tilde{u}^{rs}(x; y)$ и $\tilde{p}^{rs}(x; y)$ дифференцируемы по этим параметрам. Тогда, при $Q^y = Q(\beta, b, A) \subset \Pi' \subset \Pi''$ и $x \in \tilde{\Pi} \setminus \Pi''$ получим:

$$|D_y D_x^\alpha \tilde{u}^{rs}(x; y)| < C, \quad |D_y \tilde{p}^{rs}(x; y)| < C \quad (|\alpha| = 0, 1), \quad (1.18)$$

где постоянная C не зависит от положения Q в параллелепипеде Π' .

2. Покажем теперь, что для описанной выше конфигура-

ции частиц тензор вязкости $\{a_{npqr}\}$ выражается через решение $u^{rs}(x; y)$ ячеечной задачи (1.1) – (1.7), а именно: справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть в момент времени t распределение частиц в жидкости такое, как описано в п. 1. Тогда существуют пределы в условии 1 теоремы 2.1.1, причем предельный тензор вязкости вычисляется по формуле

$$a_{npqr}(y) = \mu \mathbf{I}_{npqr} + \frac{\mu}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \int \sum_{\Pi^{i,k=1}}^3 e_{ik}[u^{np}] e_{ik}[u^{qr}] dx, \quad (1.19)$$

где \mathbf{I}_{npqr} – изотропный тензор четвертого ранга в \mathbf{R}^3 , определенный формулой (2.1.3), а $u^{np} = u^{np}(x; y)$ – решение задачи (1.1) – (1.7), продолженное на множество Q^y равенством (1.2).

Доказательство. Введем обозначения

$$\Pi''_{\varepsilon j} = \{x : |x_i - x_i^j| \leq \delta_i(1 - h^\kappa) / 2, i = 1, 2, 3\},$$

$$\tilde{\Pi}_{\varepsilon j} = \{x : |x_i - x_i^j| \leq \delta_i(1 + h^\kappa) / 2, i = 1, 2, 3\},$$

где число κ удовлетворяет неравенству $0 < \kappa < \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{4}$.

Параллелепипеды $\tilde{\Pi}_{\varepsilon j}$ покрывают пространство \mathbf{R}^3 . Свяжем с этим покрытием разбиение единицы $\{\varphi_\varepsilon^j(x)\}$, удовлетворяющее условиям: $\varphi_\varepsilon^j(x) = 1$ при $x \in \Pi''_{\varepsilon j}$; $\varphi_\varepsilon^j(x) = 0$ вне $\tilde{\Pi}_{\varepsilon j}$;

$$\sum_j \varphi_\varepsilon^j(x) = 1, \quad |D_x^\alpha \varphi_\varepsilon^j(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon^{|\alpha|} h^{\kappa|\alpha|}} \quad (|\alpha| = 0, 1).$$

Пусть $K^h = K(\bar{x}, h)$ – куб с центром в точке $\bar{x} \in \Omega$ и ребрами длины h , ориентированными по координатным осям. Рассмотрим в K^h вектор-функцию

$$V_\varepsilon^{rs}(x) = \psi^{rs}(x) + \varepsilon \sum_j \varphi_\varepsilon^j(x) \tilde{u}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right), \quad (1.20)$$

где $\{\tilde{u}^{rs}(x; y), p^{rs}(x; y)\}$ – решение задачи (1.1) – (1.7), продолженное на Q^y в соответствии с равенством (1.2) и на $\tilde{\Pi}$ согласно лемме 1.1. Очевидно, V_ε^{rs} принимает на частице Q_ε^j значения

$\psi^{rs}(\bar{x}_\varepsilon^j) + \omega^{rs} \times (x - \bar{x}_\varepsilon^j)$. Оценим дивергенцию вектор-функции $V_\varepsilon^{rs}(x)$ в $K(\bar{x}, h)$. В силу соленоидальности $\psi^{rs}(x)$ и $\tilde{u}^{rs}(x)$

$$\operatorname{div} V_\varepsilon^{rs}(x) = \varepsilon \sum_j (\nabla \varphi_\varepsilon^j(x), \tilde{u}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right)),$$

и, значит, $\operatorname{div} V_\varepsilon^{rs}(x) = 0$ при $x \in \Pi_{ei}''$ при любом i .

Пусть $x \in \tilde{\Pi}_{ei} \setminus \Pi_{ei}''$. Тогда, в силу свойств разбиения единицы $\{\varphi_\varepsilon^j\}$ можно записать

$$\operatorname{div} V_\varepsilon^{rs}(x) = \varepsilon \sum_j' (\nabla \varphi_\varepsilon^j(x), \tilde{u}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right) - \tilde{u}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^i}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^i \right)), \quad (1.21)$$

где сумма \sum_j' распространяется на параллелепипеды $\tilde{\Pi}_{ej}$, которые пересекаются с $\tilde{\Pi}_{ei}$. Учитывая периодичность $\tilde{u}^{rs}(x; y)$ и $p^{rs}(x; y)$ по x и оценки (1.18) получаем при $x \in \tilde{\Pi}_{ei} \cap \tilde{\Pi}_{ej}$

$$\begin{aligned} & \left| D_x^\alpha \tilde{u}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right) - D_x^\alpha \tilde{u}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^i}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^i \right) \right| \leq \\ & \leq \frac{C_1}{\varepsilon^{|\alpha|}} |\bar{x}_\varepsilon^j - \bar{x}_\varepsilon^i| \leq C \varepsilon^{1-|\alpha|} \quad (|\alpha| = 0, 1), \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\left| \tilde{p}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right) - \tilde{p}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^i}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^i \right) \right| \leq C_2 |\bar{x}_\varepsilon^j - \bar{x}_\varepsilon^i| \leq C \varepsilon. \quad (1.23)$$

В силу свойств разбиения единицы из (1.21) и (1.22) следует, что $|\operatorname{div} V_\varepsilon^{rs}(x)| \leq C \varepsilon h^{-\kappa}$ и, значит,

$$\left\| \operatorname{div} V_\varepsilon^{rs} \right\|_{L_2(K^h)}^2 \leq C \varepsilon^2 h^{3-\kappa}. \quad (1.24)$$

Здесь и далее буквой C обозначаются постоянные, не зависящие от ε и h .

Воспользуемся леммой 2.1.3. Так как $\operatorname{div} V_\varepsilon^{rs}(x) = 0$ при $x \in Q_\varepsilon^j$ ($j = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$), то с помощью этой леммы заключаем, что существует вектор-функция $z_\varepsilon^{rs}(x) \in W_2^1(K^h)$, удовлетворяющая условиям: $\operatorname{div} z_\varepsilon^{rs}(x) = \operatorname{div} V_\varepsilon^{rs}(x)$ ($x \in K^h$), $z_\varepsilon^{rs}(x) = a^i$ при

$x \in Q_\varepsilon^i$ и справедливы неравенства

$$\|z_\varepsilon^{rs}\|_{W_2^1(K^h)} \leq \tilde{C} \|\operatorname{div} V_\varepsilon^{rs}\|_{L_2(K^h)} \leq C\varepsilon h^{\frac{3-\kappa}{2}}, \quad (1.25)$$

второе из которых следует из (1.24).

Будем искать решение v_ε^{rs} вариационной задачи (2.1.4) при $R = \frac{1}{2}(e^r \otimes e^s + e^s \otimes e^r)$ в виде

$$v_\varepsilon^{rs}(x) = V_\varepsilon^{rs}(x) - z_\varepsilon^{rs}(x) + w_\varepsilon^{rs}(x), \quad (1.26)$$

где $V_\varepsilon^{rs}(x)$ определена формулой (1.20). Из свойств $V_\varepsilon^{rs}(x)$ и $z_\varepsilon^{rs}(x)$ следует, что вектор-функция $w_\varepsilon^{rs}(x)$ должна минимизировать функционал

$$\begin{aligned} J[w_\varepsilon^{rs}] = & \int_{K^h} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [w_\varepsilon^{rs}] + h^{-2-\gamma} |w_\varepsilon^{rs}|^2 \right\} dx + \\ & + 2 \int_{K^h} \sum_{i,k=1}^3 \varepsilon_{ik} [V_\varepsilon^{rs}] e_{ik} [w_\varepsilon^{rs}] dx - 2 \int_{K^h} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [z_\varepsilon^{rs}] e_{ik} [w_\varepsilon^{rs}] dx - \\ & - 2h^{-2-\gamma} \int_{K^h} (z_\varepsilon^{rs}, w_\varepsilon^{rs}) dx + 2h^{-2-\gamma} \int_{K^h} (V_\varepsilon^{rs} - \psi^{rs}, w_\varepsilon^{rs}) dx = \sum_{k=1}^5 J_\varepsilon^{(k)} \end{aligned}$$

в классе $J_\varepsilon(K^h)$ соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(K^h)$, принимающих на Q_ε^j значения $a_\varepsilon^j + \omega_\varepsilon^j \times (x - x_\varepsilon^j)$, где a_ε^j и ω_ε^j – некоторые постоянные векторы, x_ε^j – центр масс Q_ε^j .

Ясно, что 0 принадлежит классу $J_\varepsilon(K^h)$ и, значит $J[w_\varepsilon^{rs}] \leq J[0] = 0$. Поэтому

$$J_\varepsilon^{(1)} \equiv \int_{K^h} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [w_\varepsilon^{rs}] + h^{-2-\gamma} |w_\varepsilon^{rs}|^2 \right\} dx \leq \sum_{k=2}^5 |J_\varepsilon^{(k)}|. \quad (1.27)$$

Из неравенства (1.25) следует, что

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon^{(3)}| \leq 2 \left\{ \int_{K^h} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [z_\varepsilon^{rs}] dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{K^h} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [w_\varepsilon^{rs}] dx \right\}^{1/2} \leq \\ \leq C\varepsilon h^{\frac{3-\kappa}{2}} (J_\varepsilon^{(1)})^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$|J_\varepsilon^{(4)}| \leq Ch^{-2-\gamma} \|z_\varepsilon^{rs}\|_{L_2(K^h)} \|w_\varepsilon^{rs}\|_{L_2(K^h)} \leq C\varepsilon h^{\frac{1-\gamma-\kappa}{2}} (J_\varepsilon^{(1)})^{1/2}. \quad (1.29)$$

Далее, пользуясь представлением (1.20) для $V_\varepsilon^{rs}(x)$ и учитывая, что куб K^h накрыт $N_{\varepsilon h} = O(h^3\varepsilon^{-3})$ параллелепипедами $\tilde{\Pi}_{\varepsilon j}$ и кратность накрытия не превышает 8, получаем

$$|J_\varepsilon^{(5)}| \leq 2h^{-2-\gamma} \left\{ \sum_j \left\| \tilde{u}_\varepsilon^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}, \bar{x}_\varepsilon^j \right) \right\|_{L_2(\tilde{\Pi}_{\varepsilon j})}^2 \right\}^{1/2} \|w_\varepsilon^{rs}\|_{L_2(K^h)} \leq (1.30)$$

$$\leq C\varepsilon h^{2-\frac{\gamma}{2}} (J_\varepsilon^{(1)})^{1/2}.$$

Оценим теперь интеграл $J_\varepsilon^{(2)}$. Положим $P_\varepsilon^{rs}(x) = \sum_j \varphi_\varepsilon^j(x) \tilde{p}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right)$, где $\tilde{p}^{rs}(x; y)$ – давление в задаче (1.1) – (1.7), продолженное периодически на \mathbf{R}^3 . Учитывая, что $w_\varepsilon^{rs}(x)$ – соленоидальный вектор, равный $a^j + \omega^j \times (x - x_\varepsilon^j)$ при $x \in Q_\varepsilon^j$, и, пользуясь равенствами (1.15), с помощью интегрирования по частям получаем

$$J_\varepsilon^{(2)} = \int_{K^h} (-\Delta V_\varepsilon^{rs} + \nabla p_\varepsilon^{rs}, w_\varepsilon^{rs}) dx + \int_{K^h \setminus \cup_j Q_\varepsilon^j} (w_\varepsilon^{rs}, \nabla) \operatorname{div} V_\varepsilon^{rs} dx + (1.31)$$

$$+ \int_{\partial K^h} (\sigma[V_\varepsilon^{rs}], w_\varepsilon^{rs}) dS.$$

Чтобы не усложнять доказательство, будем предполагать, что частицы Q_ε^j не пересекаются с границей ∂K^h куба K^h . Этого всегда можно добиться малым (порядка $O(\varepsilon)$) смещением центра \bar{x} куба K^h или изменением длины его ребер. Учитывая, что вектор-функция $\tilde{u}_\varepsilon^{rs}(x)$ удовлетворяет уравнению (1.1), преобразуем первое слагаемое в (1.31) к виду

$$\begin{aligned}
& \int_{K^h \setminus \cup_j \mathcal{Q}_\varepsilon^j} (-\Delta V_\varepsilon^{rs} + \nabla P_\varepsilon^{rs}, w_\varepsilon^{rs}) dx = \\
& = \int_{K^h \setminus \cup_j \mathcal{Q}_\varepsilon^j} \sum_j (\nabla \varphi_\varepsilon^j(x) \tilde{p}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right), w_\varepsilon^{rs}(x)) dx - \\
& - \varepsilon \int_{K^h \setminus \cup_j \mathcal{Q}_\varepsilon^j} \sum_j (\Delta \varphi_\varepsilon^j(x) \tilde{u}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right), w_\varepsilon^{rs}(x)) dx - \\
& - 2\varepsilon \int_{K^h \setminus \cup_j \mathcal{Q}_\varepsilon^j} \sum_j ((\nabla \varphi_\varepsilon^j(x) \cdot \nabla) \tilde{u}^{rs} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right), w_\varepsilon^{rs}(x)) dx.
\end{aligned}$$

Каждое слагаемое в правой части этого равенства можно оценить подобно (1.24) с помощью неравенств (1.22), (1.23) и с учетом свойств разбиения единицы $\{\varphi_\varepsilon^j\}$. В результате получим

$$\int_{K^h \setminus \cup_j \mathcal{Q}_\varepsilon^j} (-\Delta V_\varepsilon^{rs} + \nabla P_\varepsilon^{rs}, w_\varepsilon^{rs}) dx \leq Ch^{3/2(1-\kappa)} \|w_\varepsilon^{rs}\|_{L_2(K^h)} \leq Ch^{1/2(5+\gamma-3\kappa)} (J_\varepsilon^{(1)})^{1/2}. \quad (1.32)$$

Аналогично оценивается второе слагаемое в (1.31)

$$\left| \int_{K^h \setminus \cup_j \mathcal{Q}_\varepsilon^j} (w_\varepsilon^{rs}, \nabla) \operatorname{div} V_\varepsilon^{rs} dx \right| \leq Ch^{1/2(5+\gamma-\kappa)} (J_\varepsilon^{(1)})^{1/2}. \quad (1.33)$$

Так как согласно (1.20) и (1.18) $\sigma[V_\varepsilon^{rs}(x)] < C$, то в силу неравенства Коши имеем

$$\int_{\partial K^h} (\sigma[V_\varepsilon^{rs}], w_\varepsilon^{rs}) dS \leq Ch \left\{ \int_{\partial K^h} |w_\varepsilon^{rs}|^2 dS \right\}^{1/2}.$$

Поверхностный интеграл в правой части оценим с помощью леммы 2.1.7, в которой положим $\tau = h^{1+\gamma/2}$. Тогда получим

$$\int_{\partial K^h} (\sigma[V_\varepsilon^{rs}], w_\varepsilon^{rs}) dS \leq Ch^{3/2+\gamma/4} (J_\varepsilon^{(1)})^{1/2} \quad (h < 1). \quad (1.34)$$

Таким образом, из (1.31) и оценок (1.32)–(1.34), следует, что

$$|J_\varepsilon^{(2)}| \leq C \left(h^{2(5+\gamma-3\kappa)} + h^{2\frac{3+\gamma}{4}} \right) (J_\varepsilon^{(1)})^{1/2}. \quad (1.35)$$

Теперь, учитывая (1.27)–(1.30) и (1.35), окончательно получаем

$$\int_{K^h} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [w_\varepsilon^{rs}] + h^{-2\gamma} |w_\varepsilon^{rs}|^2 \right\} dx \leq Ch^3 \left(h^3 (h^2 + \varepsilon h^{-2-\gamma-\varkappa} + h^{2+\gamma-3\varkappa}) \right). \quad (1.36)$$

Подставим теперь в выражение (2.1.7) для тензора вязкости $\{a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x})\}$ вектор-функции v_ε^{np} и v_ε^{qr} в виде (1.26) и выделим квадратичные по $\{V_\varepsilon^{np}\}_{n,p=1}^3$ и $\{V_\varepsilon^{np} - \psi^{np}\}_{n,p=1}^3$ слагаемые. Остальные слагаемые оценим с помощью неравенств (1.25) и (1.36). Тогда при $h < 1$ и $\varepsilon = O(N_\varepsilon^{-1/3}) \ll 1$ получим

$$a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x}) = \frac{\mu}{h^3} \int_{K^h} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [V_\varepsilon^{np}] e_{ik} [V_\varepsilon^{qr}] dx + h^{-2-\gamma} \int_{K^h} (V_\varepsilon^{np} - \psi^{np}, V_\varepsilon^{qr} - \psi^{qr}) dx + O \left(h^4 + h^{\frac{2+\gamma-3\varkappa}{2}} + \varepsilon h^{\frac{2+\gamma+\varkappa}{2}} \right). \quad (1.37)$$

Напомним, что $\gamma > 0$, $0 < \varkappa < \frac{2+\gamma}{3}$.

Согласно (1.20) и лемме 1.1

$$\int_{K^h} (V_\varepsilon^{np} - \psi_\varepsilon^{np}, V_\varepsilon^{qr} - \psi_\varepsilon^{qr}) dx \leq C\varepsilon^2 h^3. \quad (1.38)$$

Далее, учитывая (1.20) и линейность вектор-функции $\psi^{np}(x)$, запишем

$$\begin{aligned} & \int_{K^h} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [V_\varepsilon^{np}] e_{ik} [V_\varepsilon^{qr}] dx = \\ & = \sum_j \int_{\Pi_{\varepsilon j} \setminus Q_\varepsilon^j} \varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} \left[\psi^{np} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon} \right) + u_\varepsilon^{np} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right) \right] \times \\ & \quad \times e_{ik} \left[\psi^{qr} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon} \right) + u_\varepsilon^{qr} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right) \right] dx - \\ & - \int_{\Pi_{\varepsilon j} \setminus \Pi_{\varepsilon j}^*} \varepsilon^2 \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} \left[\psi^{np} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon} \right) + u_\varepsilon^{np} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right) \right] \times \\ & \quad \times e_{ik} \left[\psi^{qr} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon} \right) + u_\varepsilon^{qr} \left(\frac{x - \bar{x}_\varepsilon^j}{\varepsilon}; \bar{x}_\varepsilon^j \right) \right] dx - \\ & - \int_j \sum_{\cup (\Pi_{\varepsilon j} \setminus \Pi_{\varepsilon j}^*)} e_{ik} [V_\varepsilon^{np}] e_{ik} [V_\varepsilon^{qr}] dx = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned}$$

В силу гладкости решения $u_\varepsilon^{np}(x; y)$ задачи (1.1)–(1.7) и

свойств покрытия $K^h \subset \bigcup_j \tilde{\Pi}_{\varepsilon j}$ слагаемое J_1 можно представить

в виде

$$J_1 = \frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \int_{K^h} \int_{\Pi \setminus Q^y} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [\psi^{np}(x) + u_\varepsilon^{np}(x; y)] \times \\ \times e_{ik} [\psi^{qr}(x) + u_\varepsilon^{qr}(x; y)] dx dy + O(\varepsilon). \quad (1.39)$$

В слагаемых J_2 и J_3 интегрирование проводится по множествам $\bigcup_j (\Pi_{\varepsilon j} \setminus \Pi''_{\varepsilon j})$ и $\bigcup_j (\tilde{\Pi}_{\varepsilon j} \setminus \Pi''_{\varepsilon j})$, лебегова мера которых имеет порядок $O(h^{3+\kappa})$. Поэтому, учитывая неравенство $|e_{ik}[V_\varepsilon^{np}]| \leq C(1 + \varepsilon h^{-\kappa})$, которое аналогично (1.24) выводится из (1.20), с учетом свойств разбиения единицы и неравенства (1.22), получаем

$$|J_2| + |J_3| \leq C(h^{3+\kappa} + \varepsilon h^{3-\kappa}) \quad (1.40)$$

Из (1.37) – (1.40) следует, что существуют пределы в условии 1 теоремы 2.1, причем предельный тензор $a_{npqr}(y)$ определяется равенством

$$a_{npqr}(y) = \frac{\mu}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \int_{\Pi \setminus Q^y} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [\psi^{np}(x) + u^{np}(x; y)] \times e_{ik} [\psi^{qr}(x) + u^{qr}(x; y)] dx. \quad (1.41)$$

Так как при $x \in Q^y$ $u^{np}(x; y) = -\psi^{np} + \omega^{np} \times x$ и, следовательно, $e_{ik}[\psi^{np} - u^{np}] = 0$, то интегрирование в (1.41) можно распространить на весь параллелепипед Π . В результате получаем

$$a_{npqr}(y) = \frac{\mu}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \int_{\Pi} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [\psi^{np}] e_{ik} [\psi^{qr}] dx + \\ + \frac{\mu}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \int_{\Pi} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [\psi^{np}] e_{ik} [u^{qr}] + e_{ik} [u^{np}] e_{ik} [\psi^{qr}] dx + \\ + \frac{\mu}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \int_{\Pi} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [u^{np}] e_{ik} [u^{qr}] dx.$$

Учитывая граничные условия (1.4) и линейность вектор-функции ψ^{np} , с помощью интегрирования по частям заключаем, что второй интеграл в предыдущем равенстве равен нулю. Далее, пользуясь равенствами (2.1.2), (2.1.3) убеждаемся, что

$$\frac{1}{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \int \sum_{\Pi^{i,k=1}}^3 e_{ik} [\psi^{np}] e_{ik} [\psi^{qr}] dx = I_{npqr}.$$

Следовательно, тензор $\{a_{npqr}(y)\}$ вычисляется по формуле (1.19) и, таким образом, теорема доказана.

Следствие. Частным случаем рассмотренной ситуации является периодическое расположение частиц Q_ε^j . Ясно, что в этом случае тензор вязкости $\{a_{npqr}\}$, вычисленный по формуле (1.19), будет постоянным (не зависящим от y).

§ 2. Эквивалентное определение тензора вязкости

Средний тензор вязкости $\{a_{npqr}(\varepsilon, h, x)\}$ для произвольного расположения частиц Q_ε^i в области Ω был определен в главе 2 равенством (2.1.7), в которое введен произвольный числовой параметр γ (параметр «штрафа»). Поэтому предельный тензор $a_{npqr}(x)$ в (2.1.7), казалось бы, должен зависеть от этого параметра. Здесь будет дано эквивалентное определение среднего тензора вязкости, которое показывает, что предельный тензор от γ не зависит (что согласуется с результатом § 3.1). Кроме того новое определение более удобно для вычислений, в частности, при исследовании асимптотического поведения $a_{npqr}(\varepsilon, h, x)$ в случае малых объемных концентраций частиц (см. следующий параграф).

Пусть, как и прежде, $K^h = K(\bar{x}, h)$ – куб с центром в точке $\bar{x} \in \Omega' \subset \subset \Omega$ и ребрами длиной h ($h \ll 1$), а $K^{h_1} \subset K^h$ – концентрический с K^h куб с длиной ребра $h_1 = h - 2h^{1+\kappa}$ ($\kappa > 0$). Обозначим $K_{h\varepsilon} = K_{h_1} \setminus \bigcup_i^{h_1} Q_\varepsilon^i$, где объединение $\bigcup_i^{h_1}$ берется по множествам Q_ε^i ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon(h)$), полностью принадлежащих кубу K^{h_1} .

В области $K_{h\varepsilon}$ рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta v_\varepsilon^{qr} + \nabla p^{qr} = 0, \quad \operatorname{div} v_\varepsilon^{np} = 0, \quad x \in K_{h\varepsilon}, \quad (2.1)$$

$$v_\varepsilon^{qr}(x) = a_\varepsilon^{i,qr} + b_\varepsilon^{i,qr} \times (x - x_\varepsilon^i), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i \quad (i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon(h)), \quad (2.2)$$

$$\int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma[v_\varepsilon^{qr}] dS = \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \{(x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[v_\varepsilon^{qr}]\} dS = 0, \quad (2.3)$$

$$v_\varepsilon^{qr}(x) = \psi^{qr}(x - \bar{x}), \quad x \in \partial K^h, \quad (2.4)$$

где $a_\varepsilon^{i,qr}$, $b_\varepsilon^{i,qr}$ – некоторые постоянные векторы ($q, r = 1, 2, 3$), $\psi^{qr}(x)$ определена равенством (2.1.2).

Можно показать, что при любом фиксированном ε существует единственное решение $v_\varepsilon^{qr}(x)$ задачи (2.1) – (2.4), причем оно доставляет минимум функционалу

$$J_1(v_\varepsilon) = \int_{K^h} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [v_\varepsilon] dx$$

в классе $J_\varepsilon^\psi(K^h)$ соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(K^h)$, определенных на $Q_\varepsilon^i \subset K^h$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon(h)$) равенством (2.2) и удовлетворяющих на ∂K^h граничному условию (2.4). Положим

$$a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x}) = \frac{\mu}{h^3} \int_{K^h} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [v_\varepsilon^{np}] e_{ik} [v_\varepsilon^{qr}] dx. \quad (2.5)$$

Система чисел $\{a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x})\}_{n,p,q,r=1}^3$ образует тензор четвертого ранга в \mathbf{R}^3 . Покажем, что при $\varepsilon \ll h \ll 1$ этот тензор близок к тензору $\{a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x})\}$, введенному в § 2.1. А именно, справедлива теорема.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия 1, 2 теоремы 2.1, причем в условии 1 $a_{npqr}(x) \in C(\bar{\Omega})$. Тогда имеет место равенство

$$\limlim_{h \rightarrow 0 \quad \varepsilon \rightarrow 0} a_{npqr}(\varepsilon, h, x) = a_{npqr}(x).$$

Доказательство. Пусть $\zeta^{qr}(x) \in C^2(K^h)$ соленоидальная вектор-функция, равная $\psi^{np}(x)$ при $x \in \partial K^h$ и 0 при $x \in \bar{K}^h$. Положим

$$u_\varepsilon^{qr}(x) = v_\varepsilon^{qr}(x) - \zeta^{qr}(x), \quad (2.6)$$

где $v_\varepsilon^{qr}(x)$ – решение задачи (2.1) – (2.4). Ясно, что вектор-функция $u_\varepsilon^{qr}(x)$ является решением краевой задачи:

$$-\mu\Delta u_\varepsilon^{qr} + \nabla p_\varepsilon^{qr} = \mu\Delta\zeta^{qr}, \quad \operatorname{div} u_\varepsilon^{qr} = 0, \quad x \in K^h, \quad (2.7)$$

$$u_\varepsilon^{qr}(x) = a_\varepsilon^{i,qr} + b_\varepsilon^{i,qr} \times (x - x_\varepsilon^i), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i, \quad (2.8)$$

$$\int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma[u_\varepsilon^{qr}] dS = \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \{(x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[u_\varepsilon^{qr}]\} dS = 0, \quad (2.9)$$

$$u_\varepsilon^{qr}(x) = 0, \quad x \in \partial K^h \quad (2.10)$$

и, следовательно, доставляет минимум функционалу

$$J_\varepsilon^{qr}[u] = \int_{K^h} \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[u] - \mu(\Delta\zeta^{qr}, u) \right\} dx \quad (2.11)$$

в классе соленоидальных вектор-функций $J_\varepsilon^\circ(K^h)$ из $W_2^1(K^h)$, определенных на \bar{Q}_ε^i ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon(h)$) равенством (2.2). Применяя к функционалу (2.11) теорему 2.1 (которая остается справедливой и в случае, когда функции $a_{npqr}(x)$ кусочно-непрерывные), заключаем, что вектор-функции $u_\varepsilon^{qr}(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся сильно в $L_2(K^h)$ и слабо в $W_2^1(K^h)$ к соленоидальной вектор-функции $u^{qr}(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(K^h)$, доставляющей минимум функционалу

$$J'_\zeta(u) = \int_{K^h} \left\{ \sum_{i,k,l,m=1}^3 a'_{iklm}(x) e_{ik}[u] e_{lm}[\bar{u}] - (\Delta\zeta^{qr}, u) \right\} dx. \quad (2.12)$$

Здесь $\{a'_{npqr}(x)\}$ – кусочно-непрерывный и дифференцируемый вне поверхности разрыва ∂K^{h_1} положительно определенный тензор:

$$a'_{iklm}(x) = \begin{cases} a_{iklm}(x), & x \in K^{h_1}, \\ \mu \mathbf{I}_{iklm}, & x \in K^h \setminus K^{h_1}, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $\{a_{iklm}(x)\}$ – предельный тензор в условии 2 теоремы 2.1.1, а \mathbf{I}_{iklm} – изотропный тензор (см. (2.1.3)).

Учитывая, что $\operatorname{supp} \Delta\zeta^{qr} \subset K^h \setminus K^{h_1}$ из (2.12), (2.13) получаем, что $u^{qr}(x)$ является решением следующей краевой задачи

$$-\sum_{i,k,l,m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (a_{iklm}(x)e_{ik}[u^{qr}])e^l + \nabla p^{qr} = 0, \quad x \in K^{h_1}, \quad (2.14)$$

$$-\Delta u^{qr} + \nabla p^{qr} = \Delta \zeta^{qr}, \quad x \in K^h \setminus K^{h_1}, \quad (2.15)$$

$$\operatorname{div} u^{qr} = 0, \quad x \in K^h, \quad (2.16)$$

$$(\sigma_a[u^{qr}])^+ = (\sigma[u^{qr}])^-, \quad x \in \partial K^{h_1} \quad (2.17)$$

$$(u^{qr})^+ = (u^{qr})^-, \quad x \in \partial K^{h_1} \quad (2.18)$$

$$u^{qr} = 0, \quad x \in \partial K^h, \quad (2.19)$$

$$\sigma_a[u] = -np + 2 \sum_{i,k,l,m=1}^3 a'_{iklm}(x)e_{ik}[u] \cos(n, e^l) e^m, \quad (2.20)$$

где p^{qr} – непрерывная в K^h функция, знаками «+» и «-» отмечены предельные значения вектор-функций с разных сторон поверхности ∂K^{h_1} .

Согласно (2.5) и (2.6) имеем

$$\begin{aligned} a_{npqr}(\varepsilon, h, 0) &= \frac{\mu}{h^3} \int_{K^{hi}, k=1}^3 e_{ik}[u_\varepsilon^{np}] e_{ik}[u_\varepsilon^{qr}] dx + \\ &+ \frac{\mu}{h^3} \int_{K^{hi}, k=1}^3 e_{ik}[u_\varepsilon^{np}] e_{ik}[\zeta^{qr}] + e_{ik}[\zeta^{np}] e_{ik}[u_\varepsilon^{qr}] + e_{ik}[\zeta^{np}] e_{ik}[\zeta^{qr}] dx. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Воспользовавшись формулой Грина и учитывая равенства (2.7) – (2.10), преобразуем первый интеграл в правой части (2.21) к виду

$$\int_{K^{hi}, k=1}^3 e_{ik}[u_\varepsilon^{np}] e_{ik}[u_\varepsilon^{qr}] dx = \frac{1}{2} \int_{K^h} (\Delta \zeta^{np}, u_\varepsilon^{qr}) dx. \quad (2.22)$$

Теперь перейдем к пределу в равенстве (2.21) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном h . Учитывая при этом (2.22), а также сильную в $L_2(K^h)$ и слабую в $W_2^1(K^h)$ сходимость $u_\varepsilon^{np}(x)$ к $u^{np}(x)$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{npqr}(\varepsilon, h, 0) &= \frac{\mu}{h^3} \int_{K^h} (\Delta \zeta^{np}, u^{qr}) dx + \\ &+ \frac{\mu}{h^3} \int_{K^h} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[u^{np}] e_{ik}[\zeta^{qr}] + e_{ik}[\zeta^{np}] e_{ik}[u^{qr}] + e_{ik}[\zeta^{np}] e_{ik}[\zeta^{qr}] \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части, пользуясь

формулой Грина и учитывая (2.15) – (2.17), (2.19)

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{2} \int_{K^h} (\Delta \zeta^{np}, u^{qr}) dx &= \mu \int_{K^h \setminus K^{h_1}} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[u_\varepsilon^{np}] e_{ik}[u_\varepsilon^{qr}] dx - \\ &- \int_{\partial K^{h_1}} (\sigma_a[u_\varepsilon^{np}], u_\varepsilon^{qr}) dS. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Интегрируя по частям с учетом (2.14), (2.15), (2.20) запишем

$$- \int_{\partial K^{h_1}} (\sigma_a[u^{np}], u^{qr}) dS = \int_{K^{h_1}} \sum_{i,k,l=1}^3 a_{iklm}(x) e_{ik}[u^{np}] e_{lm}[u^{qr}] dx. \quad (2.25)$$

Объединяя (2.23) – (2.25), (2.13) и вспоминая, что $\text{supp } \zeta^{np} \subset K^h \setminus K^{h_1}$, получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{npqr}(\varepsilon, h, 0) = \frac{1}{h^3} \int_{K^h} \sum_{i,k,l,m=1}^3 a'_{iklm}(x) e_{ik}[v^{np}] e_{lm}[v^{qr}] dx, \quad (2.26)$$

где $v^{np}(x) = u^{np}(x) + \zeta^{np}(x)$.

Из (2.12) следует, что вектор-функция $v^{np}(x)$ доставляет минимум функционалу

$$J'[v] = \int_{K^h} \sum_{i,k,l,m=1}^3 a'_{iklm}(x) e_{ik}[v] e_{lm}[v] dx \quad (2.27)$$

в классе соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(K^h)$, равных $\psi^{np}(x)$ на ∂K^h .

Лемма 2.1. *Вектор-функция $v^{np}(x)$ представима в виде*

$$v^{np}(x) = \psi^{np}(x) + w^{np}(x), \quad (2.28)$$

где $w^{np}(x)$ – соленоидальная функция из $\overset{\circ}{W}_2^1(K^h)$ ($w^{np} \in J^{(1)}(K^h)$) удовлетворяющая неравенству

$$\|w^{np}\|_{W_2^1(K^h)}^2 \leq Ch^{3+\varkappa} \quad (\varkappa > 0). \quad (2.29)$$

Доказательство. Подставляя (2.28) в (2.27), заключаем, что вектор-функция $w^{np}(x)$ должна доставлять минимум функционалу

$$\begin{aligned}
I'[w^{np}] &= \int_{K^h} \sum_{i,k,l,m=1}^3 a'_{iklm}(x) e_{ik}[w^{np}] e_{lm}[w^{qr}] dx + \\
&+ 2 \int_{K^h} \sum_{i,k,l,m=1}^3 a'_{iklm}(x) e_{ik}[\psi^{np}] e_{lm}[w^{qr}] dx = I'_1[w^{np}] + 2I'_2[w^{np}]
\end{aligned} \tag{2.30}$$

в классе вектор-функций из $J^{(1)}(K^h)$.

Так как $0 \in J^{(1)}(K^h)$ и $I'[0] = 0$, то $I'[w^{np}] \leq 0$ и, следовательно

$$I'[w^{np}] \leq 2|I'_2[w^{np}]|. \tag{2.31}$$

Учитывая, что тензор $\{a_{iklm}(x)\}$ – положительно определенный и $w^{np}(x) \in J^{(1)}(K^h)$, получаем

$$I'_1[w^{np}] \geq C \|w^{np}\|_{W_2^1(K^h)}, \quad C > 0. \tag{2.32}$$

Оценим теперь интеграл $I'_2[w^{np}]$. Разделяя куб K^h на две подобласти K^{h_1} и $K^h \setminus K^{h_1}$ и производя в каждой из подобластей интегрирование по частям, с учетом (2.13), преобразуем интеграл $I'_2[w^{np}]$ к виду

$$\begin{aligned}
I'_2 &= -2 \int_{K^{h_1}} \sum_{i,k,l,m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (a_{iklm}(x) e_{ik}[\psi^{np}]) w_l^{np} dx + \\
&+ \int_{\partial K^{h_1}} \sum_{i,k,l,m=1}^3 (a_{iklm}(x) - \mathbf{I}_{iklm}) e_{ik}[\psi^{np}] \cos(n, x_m) w_l^{np} dS.
\end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Коши, учитывая, что $a_{iklm}(x) \in C^1(\overline{K^{h_1}})$ и $\psi^{np}(x) \in C^1(K^{h_1})$ получаем

$$|I'_2[w^{np}]| \leq C \left\{ h^{3/2} \|w^{np}\|_{L_2(K^{h_1})} + h \|w^{np}\|_{L_2(\partial K^{h_1})} \right\}, \tag{2.33}$$

где постоянная C не зависит от h .

Так как $w^{np} \in \overset{\circ}{W}_2^1(K^h)$ и поверхность ∂K^{h_1} отстоит от поверхности ∂K^h на расстояние $h^{1+\kappa}$ ($\kappa > 0$), то имеют место оценки

$$\|w^{np}\|_{L_2(K^h)}^2 \leq h^2 \|\nabla w^{np}\|_{L_2(K^h)}^2,$$

$$\|w^{np}\|_{L_2(\partial K^h)}^2 \leq h^{1+\kappa} \|\nabla w^{np}\|_{L_2(K^h \setminus K^h)}^2,$$

которые получаются стандартным способом.

Из этих оценок и (2.33), следует неравенство

$$|I'_2[w^{np}]| \leq C(h^{5/2} + h^{\frac{3+\kappa}{2}}) \|\nabla w^{np}\|_{L_2(K^h)},$$

которое вместе с (2.31) и (2.32) приводит к требуемому неравенству (2.29). Лемма доказана.

Теперь нетрудно закончить доказательство теоремы 2.1. В силу леммы 2.1, правая часть в (2.26), представляется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^3} \int \sum_{K^{hi,k,l,m=1}}^3 a'_{iklm}(x) e_{ik}[v^{np}] e_{lm}[v^{qr}] dx = \\ & = \frac{1}{h^3} \int \sum_{K^{hi,k,l,m=1}}^3 a'_{iklm}(x) e_{ik}[\psi^{np}] e_{lm}[\psi^{qr}] dx (1 + o(1)) \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Воспользуемся следующими равенствами, которые вытекают из (2.1.2), (2.1.3)

$$e_{ik}[\psi^{np}] = I_{iknp}, \quad \sum_{i,k=1}^3 a_{iklm}(x) I_{iknp} = a_{nplm}(x). \quad (2.35)$$

Тогда, учитывая (2.13), получим

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int \sum_{K^{hi,k,l,m=1}}^3 a'_{iklm}(x) e_{ik}[\psi^{np}] e_{lm}[\psi^{qr}] dx = a_{nprq}(0),$$

где 0 – центр куба K^h . Отсюда, согласно (2.34) и (2.26) следует требуемое равенство (при $\bar{x} = 0$). Теорема 2.1 доказана.

§ 3. Асимптотика тензоров вязкости при малых концентрациях

Предположим, что все частицы Q_ε^j ($j = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$) осесимметричны и являются гомотетическим сжатием некоторого фиксированного тела вращения Q единичного диаметра с гладкой поверхностью ∂Q . Ориентации частиц определяются единичными векторами λ^j ($j = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$), направленными вдоль осей симметрии частиц Q_ε^j . Предположим также, что частицы расположены в $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ не очень близко друг от друга,

а именно частица Q_ε^j находится на расстоянии r_ε^j от остальных частиц, причем $r_\varepsilon^j \geq C(d_\varepsilon^j)^\delta$, где d_ε^j – диаметр Q_ε^j , $1 > \delta > 0$, а постоянная C не зависит от ε .

Изучим асимптотическое поведение среднего тензора вязкости $\{a_{npqr}(\varepsilon, h, x)\}$, определенного формулой (2.5) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Будем обозначать $\tau_\varepsilon^j = \frac{|Q_\varepsilon^j|}{h^3}$ – относительные объемы частиц

Q_ε^j и $\tau_\varepsilon = \sum_j' \tau_\varepsilon^j$ – полный относительный объем частиц, попавших в куб $K(x, h_1) \subset K(x, h)$ ($h_1 = h - 2h^\kappa$, $\kappa > 1$).

Основным результатом данного параграфа является следующая асимптотическая формула

$$\begin{aligned} a_{npqr}(\varepsilon, h, x) = & \mu I_{npqr} + \mu \tau_\varepsilon A_{npqr} + \\ & + \mu \sum_{(j)}' \tau_\varepsilon^j \left\{ B[\lambda_n^j \lambda_q^j \delta_{pr} + \lambda_q^j \lambda_p^j \delta_{nr} + \lambda_n^j \lambda_r^j \delta_{qp} + \lambda_r^j \lambda_p^j \delta_{nq}] + \right. \\ & \left. + C[\lambda_n^j \lambda_p^j \delta_{qr} + \lambda_q^j \lambda_r^j \delta_{np}] + D \lambda_n^j \lambda_p^j \lambda_q^j \lambda_r^j \right\} + o(\tau_\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где I_{npqr} и A_{npqr} – изотропные тензоры, определенные равенствами (2.1.3) и $A_{npqr} = A_1(\delta_{nq}\delta_{pr} + \delta_{nr}\delta_{pq}) + A_2\delta_{np}\delta_{qr}$, суммирование в $\sum_{(j)}'$ распространяется на те значения j , для которых частицы Q_ε^j полностью попадают в куб $K(x, h_1)$ ($h_1 = h - 2h^\kappa$). Коэффициенты A_1, A_2, B, C, D зависят от формы осесимметричного тела Q единичного диаметра. Ниже (см. (3.33)) для них будут приведены явные выражения.

Доказательство асимптотической формулы (3.1) приводится в пунктах 1 – 4.

1. Предположим, что ось вращения фиксированного тела Q направлена по оси x_1 , а центр масс расположен в начале координат. Рассмотрим в области $\mathbf{R}^3 \setminus Q$ краевую задачу:

$$\Delta u = \nabla p, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus Q \quad (3.2)$$

$$u(x) = \psi(x) + a + b \times x, \quad x \in \partial Q \quad (3.3)$$

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad p(x) = O\left(\frac{1}{|x|^3}\right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

где a и b – некоторые постоянные векторы и $\psi(x) \in C(\partial Q)$.

Лемма 3. 1. *Найдутся такие векторы a и b , для которых существует единственное решение $\{u(x), p(x)\}$ краевой задачи (3.2) – (3.4), причем выполняются равенства*

$$\int_{\partial Q} \sigma[u] dS = \int_{\partial Q} (x \times \sigma[u]) dS = 0, \quad (3.5)$$

где

$$\sigma[u] = np - 2 \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [u] \cos(n, e^i) e^k \quad (3.6)$$

– вектор напряжений в жидкости, а n – внешняя нормаль к ∂Q .

Доказательство. Будем искать решение задачи (3.2) – (3.4) с помощью гидродинамических потенциалов двойного слоя

$$u = \int_{\partial Q} K(x, y) \varphi(y) dS_y, \quad p(x) = \int_{\partial Q} (\Pi(x, y), \varphi(y)) dS_y, \quad (3.7)$$

в которых ядра $K(x, y) = \{K_{ij}(x, y)\}_{i,j=1}^3$ и $\Pi(x, y) = \{\Pi_j(x, y)\}_{j=1}^3$ определены равенствами [17]

$$K_{ij}(x, y) = -\frac{3}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x_k - y_k)}{|x - y|^5} n_k(y), \quad (3.8)$$

$$\Pi_j(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{|x_j - y_j|}{|x - y|^3} n_k(y), \quad (3.9)$$

где $n = \{n_k(y)\}_{k=1}^3$ – внешняя нормаль к ∂Q в точке $y \in \partial Q$.

Удовлетворяя граничному условию (3.3), получаем для вектора плотности $\varphi(x)$ интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2} \varphi(x) + \int_{\partial Q} K(x, y) \varphi(y) dS_y = \psi(x) + a + b \times x, \quad x \in \partial Q. \quad (3.10)$$

Известно [17], что сопряженное однородное уравнение

$$-\frac{1}{2} g(x) + \int_{\partial Q} K^*(x, y) g(y) dS_y = 0, \quad (3.11)$$

где $K^*(x, y) = \{K_{ji}(y, x)\}_{i,j=1}^3$ – сопряженное к $K(x, y)$ ядро, имеет шесть линейно независимых решений $g^k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, 6$) таких, что соответствующие им потенциалы простого слоя $V(x, g^k) = \{V_i(x, g^k)\}_{i=1}^3$ и $p(x, g^k)$:

$$V_i(x, g^k) = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial Q} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\delta_{ij}}{|x-y|} + \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^3} \right] g_j^k(y) dS_y,$$

$$p(x, g^k) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial Q} \sum_{j=1}^3 \frac{x_j - y_j}{|x-y|^3} g_j^k(y) dS_y,$$

при $x \in Q$ равны, соответственно:

$$V(x, g^k) = e^k, \quad \text{при } k = 1, 2, 3, \quad (3.12)$$

$$V(x, g^k) = e^{k-3} \times x, \quad \text{при } k = 4, 5, 6, \quad (3.13)$$

$$p(x, g^k) = 0, \quad \text{при } k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.14)$$

При этом из свойств потенциала простого слоя вытекает, что вектор вязких напряжений, вычисленный на ∂Q с внешней стороны, равен

$$\begin{aligned} \sigma[V(x, g^k)] &= np(x, g^k) - 2 \sum_{i,j=1}^3 e_{ik} [V(x, g^k)] \cos(n, x_i) e^j = \\ &= -g^k(x), \quad x \in \partial Q. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Интегральное уравнение (3.10) имеет решение, если его правая часть ортогональна в $L_2(\partial Q)$ решениям $g^k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, 6$) сопряженного однородного уравнения (3.10). Положим $a = \sum_{i=1}^3 C_i e^i$, $b = \sum_{i=4}^6 C_i e^{i-3}$, учитывая равенства (3.12) и (3.13), запишем условия ортогональности в виде

$$\int_{\partial Q} (\psi(x) - \sum_{i=1}^6 C_i V(x, g^i), g^k(x)) dS = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 6). \quad (3.16)$$

Покажем, что относительно C_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) система линейных уравнений (3.16) однозначно разрешима. Для этого покажем, что соответствующая однородная система имеет лишь нулевое решение. Умножим однородную систему (т. е. (3.16) для $\psi(x) = 0$) на C_k и суммируя по k от 1 до 6, получим

$$\int_{\partial Q} (V, g) dS = 0,$$

$$\text{где } V = \sum_{k=1}^6 C_k V(x, g^k), \quad g = \sum_{k=1}^6 C_k g^k(x).$$

Отсюда, пользуясь формулой Грина в области $\mathbf{R}^3 \setminus Q$, уравнением (3.11) и равенством (3.15), можно показать (см. [17]), что $g = 0$, а в силу линейной независимости вектор-функций $g^k(x)$ все $C_k = 0$. Таким образом, система (3.16) имеет единственное решение C_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) и, значит, интегральное уравнение (3.10) при $a = \sum_{i=1}^3 C_i e^i$ и $\omega = \sum_{i=1}^6 C_i e^{i-3}$ имеет решение $\varphi(x) \in C(\partial Q)$.

Соответствующий этому решению потенциал двойного слоя (3.7) является решением краевой задачи (3.2) – (3.4). Учитывая поведение ядра (3.8), (3.9) при $|x - y| \rightarrow \infty$, получаем оценки

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C}{|x|^{2+|\alpha|}}, \quad |D^\alpha p(x)| \leq \frac{C}{|x|^{3+|\alpha|}} \quad (\alpha = 0, 1). \quad (3.17)$$

Остается показать, что найденное решение удовлетворяет условиям (3.5).

Пусть S_R – сфера достаточно большого радиуса R с центром в начале координат, а Ω_R – область, заключенная между ∂Q и S_R . Применяя в области Ω_R к $\{u(x), p(x)\}$, определенными формулами (3.7) и $\{V(x, g^k), p(x, g^k)\}$ ($k = 1, 2, \dots, 6$) вторую формулу Грина (см. [17]), учитывая (3.17) и убывание $\{u(x), p(x)\}$ и $\{V(x, g^k), p(x, g^k)\}$ на бесконечности:

$$|D^\alpha V(x, g^k)| \leq \frac{C}{|x|^{1+|\alpha|}}; \quad |p(x, g^k)| \leq \frac{C}{|x|^2};$$

получим после перехода к пределу по $R \rightarrow \infty$

$$\int_{\partial Q} (\sigma[u], V(x, g^k)) dS = \int_{\partial Q} (\sigma[V(x, g^k)], u) dS, \quad (3.18)$$

где $\sigma[u]$ и $\sigma[V]$ – векторы напряжений, определенные соответственно формулами (3.6) и (3.15). Так как при $x \in \partial Q$ $u(x) =$

$\psi(x) + a + b \times x$, $V(x, g^k) = e^k$ ($k = 1, 2, 3$), $V(x, g^k) = e^{k-3} \times x$ ($k = 4, 5, 6$), а $\sigma[V(x, g^k)] = -g^k(x)$ (см. (3.12) – (3.15)), то в силу выбора постоянных векторов a и b (см. (3.16)), из (3.18) вытекают равенства (3.5).

Единственность решения задачи (3.2) – (3.4) может быть установлена обычным образом. Лемма 3.1 доказана.

В дальнейшем будем рассматривать лишь случай $\psi(x) = \psi^{np}(x)$ ($n, p = 1, 2, 3$), где вектор-функция $\psi^{np}(x)$ определена формулой (2.1.2). Соответствующее решение задачи (3.2) – (3.4) будем обозначать $u^{np}(x)$, а постоянные векторы из условия (3.3) соответственно a^{np} и b^{np} .

Из вида вектор-функции $\psi^{np}(x)$, симметрии задачи (3.2) – (3.4) и условий (3.5) следует, что все $a_i^{np} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), кроме a_1^m ($n = 1, 2, 3$), a_1^{12} , a_1^{13} (причем $a_1^{22} = a_1^{33}$ и $a_1^{12} = a_1^{13}$), и все $b_i^{np} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), кроме $b_3^{12} = b_3^{21}$ и $b_2^{13} = b_2^{31}$. В этом легко убедиться, воспользовавшись гидродинамической интерпретацией задачи (3.2) – (3.4). Действительно, векторное поле скоростей $v^{np}(x) = \psi^{np}(x) + a^{np} + b^{np} \times x - u^{np}(x)$ и поле давлений $p^{np}(x)$ описывают движение вязкой несжимаемой жидкости вне неподвижного осесимметричного тела Q (с осью симметрии, направленной по координатной оси x_1) с асимптотикой вектора скорости на бесконечности $v^{np}(x) \sim \psi^{np}(x) + a^{np} + b^{np} \times x$. При этом полная сила и момент, действующие со стороны жидкости на тело Q равны нулю, что следует из равенства (3.5). Отсюда, учитывая симметрию тела Q и симметрию течения на бесконечности, заключаем, что ненулевыми компонентами векторов a^{np} и b^{np} в граничном условии (3.3) могут быть лишь

$$a_1^{11}, a_1^{22} = a_1^{33}, \quad a_2^{12} = a_3^{13}; \quad b_2^{13} = b_2^{31} = b_3^{12} = b_3^{21}. \quad (3.19)$$

Введем связанный с телом Q тензор $\{a_{npqr}(Q)\}$

$$a_{npqr}(Q) = \int_{R^3 \setminus Q} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik} [u^{np}] e_{ik} [u^{qr}] dx. \quad (3.20)$$

Ясно, что он симметричен относительно перестановок индексов n и p , q и r , а также пар индексов np и qr , т.е.

$$a_{npqr}(Q) = a_{pnqr}(Q) = a_{nprq}(Q) = a_{qmrp}(Q). \quad (3.21)$$

Учитывая вид граничных условий для $u^{np}(x)$ (см. (3.3), (3.19)), симметрию тела Q и его ориентацию в \mathbf{R}^3 , нетрудно показать, что тензор четвертого ранга $\{a_{npqr}(Q)\}$ имеет 21 ненулевые компоненты вида: $a_{nnnn}(Q)$, $a_{nnpp}(Q)$, $a_{nppn}(Q)$ ($n, p = 1, 2, 3$), которые удовлетворяют таким равенствам

$$\begin{aligned} a_{2222}(Q) &= a_{3333}(Q), \\ a_{1122}(Q) &= a_{1133}(Q), \quad a_{1212}(Q) = a_{1313}(Q), \\ a_{2222}(Q) &= a_{2233}(Q) + 2 a_{2323}(Q), \end{aligned} \quad (3.22)$$

с учетом симметрии (3.21). Остальные компоненты равны нулю.

2. Пусть $Q(\lambda)$ – осесимметричное тело единичного диаметра с центром в начале координат и осью симметрии, направленной по единичному вектору λ (при $\lambda=e^1 Q(\lambda)$ совпадает с Q).

Введем прямоугольную систему координат, связанную с телом $Q(\lambda)$, оси которой задаются единичными векторами λ^k ($k=1, 2, 3$), причем $\lambda^1=\lambda$. Обозначим через $\{A_{ik}\}_{i,k=1}^3$ ортогональную матрицу преобразования координатных векторов λ^k повернутой системы координат в координатные e^i исходной (лабораторной) системы координат, т.е. $e^i = \sum_{k=1}^3 A_{ik} \lambda^k$ и $x_i = \sum_{k=1}^3 A_{ik} \xi_k$, где x_i и ξ_i – координаты точки x в исходной и, соответственно, повернутой системе координат. Легко видеть, что $A_{i1} = \lambda_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Пусть $\psi^{np}(x)$ – вектор-функция, определенная равенством (2.12) в лабораторной системе координат, а $\psi'^{lm}(x)$ – вектор-функция, определенная той же формулой, но в повернутой системе координат, т.е.

$$\psi'^{lm}(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left[\delta_{ij} \delta_{mi} + \delta_{mj} \delta_{li} - \frac{2}{3} \delta_{lm} \delta_{ij} \right] \xi_j \lambda^i. \quad (3.23)$$

В дальнейшем важную роль играет следующая формула преобразования $\psi'^{lm}(x)$ в $\psi^{np}(x)$

$$\psi^{np}(x) = \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^3 C_{nplm} \psi'^{lm}(x), \quad (3.24)$$

где $C_{nplm} = A_{nl} A_{pm} + A_{pl} A_{nm}$. В справедливости формулы легко убедиться непосредственной проверкой с учетом ортогональности матрицы $\{A_{ik}\}_{i,k=1}^3$.

Рассмотрим в области $\mathbf{R}^3 \setminus Q(\lambda)$ краевую задачу:

$$\Delta u^{np} = \nabla q^{np}, \quad \operatorname{div} u^{np} = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus Q(\lambda), \quad (3.25)$$

$$u^{np}(x) = \psi^{np}(x) + a^{np} + b^{np} \times x, \quad x \in \partial Q(\lambda), \quad (3.26)$$

$$\int_{\partial Q(\lambda)} \sigma[u^{np}] dS = \int_{\partial Q(\lambda)} (x \times \sigma[u^{np}]) dS = 0, \quad (3.27)$$

$$u^{np}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad q^{np}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^3}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3.28)$$

где a^{np} и b^{np} – некоторые постоянные векторы, а вектор-функция $\psi^{np}(x)$ определена формулой (2.1.2).

Если в этой задаче положить $\psi^{np}(x) = \psi'^{lm}(x)$, где $\psi'^{lm}(x)$ определена формулой (3.23), то в повернутой системе координат она совпадает с краевой задачей (3.2) – (3.5), рассмотренной в предыдущем пункте. Ее решение обозначим через $\{u'^{lm}(x), q'^{lm}(x)\}$, а соответствующие постоянные векторы – a'^{lm} и b'^{lm} .

В силу линейности задачи (3.25) – (3.28) и формулы (3.24) ее решения $\{u^{np}(x), q^{np}(x)\}$ связаны с $\{u'^{np}(x), q'^{np}(x)\}$ равенствами:

$$u^{np}(x) = \frac{1}{2} \sum_{l,m} C_{nplm} u'^{lm}(x), \quad q^{np}(x) = \frac{1}{2} \sum_{l,m} C_{nplm} q'^{lm}(x). \quad (3.29)$$

При этом $a^{np} = \frac{1}{2} \sum_{l,m} C_{nplm} a'^{lm}$, $b^{np} = \frac{1}{2} \sum_{l,m} C_{nplm} b'^{lm}$.

Введем тензор $\{a_{npqr}(Q(\lambda))\}_{n,p,q,r=1}^3$, связанный с телом $Q(\lambda)$:

$$a_{npqr}(Q(\lambda)) = \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q(\lambda)} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[u^{np}]e_{ik}[u^{qr}]dx, \quad (3.30)$$

где $u^{np}(x)$ – решение задачи (3.25) – (3.28). В силу (3.29)

$$a_{npqr}(Q(\lambda)) = \frac{1}{4} \sum_{l,m,t,s=1}^3 C_{npml} C_{qrst} a'_{lmst}(Q), \quad (3.31)$$

где $\{a'_{lmst}(Q)\}$ – тензор, введенный в п. 1 (см. (3.20)). Отсюда, учитывая, что $A_{i1} = \lambda_i$ и свойства ортогональности матрицы $\{A_{ik}\}_{i,k=1}^3$, записанные в виде: $A_{i2} A_{j2} + A_{i3} A_{j3} = \delta_{ij} - \lambda_i \lambda_j$ ($i, j = 1, 2, 3$), получаем

$$a_{npqr}(Q(\lambda)) = A'_{npqr} + B'[\lambda_n \lambda_q \delta_{pr} + \lambda_p \lambda_q \delta_{nr}] + \\ + C'[\lambda_q \lambda_r \delta_{np} + \lambda_n \lambda_p \delta_{qr}] + D' \lambda_n \lambda_p \lambda_q \lambda_r, \quad (3.32)$$

где тензоры A'_{npqr} и коэффициенты B', C', D' выражаются через компоненты тензора $\{a'_{lmst}(Q)\}$ по формулам:

$$A'_{npqr} = a'_{2323}(\delta_{nq} \delta_{pr} + \delta_{nr} \delta_{qp}) + a'_{2233} \delta_{np} \delta_{qr}; \\ B' = a'_{1212}(Q) - a'_{2323}(Q); \\ C' = a'_{1122}(Q) - a'_{2233}(Q); \\ D' = a'_{1111}(Q) - a'_{2222}(Q) - 2a'_{1122}(Q) - 4a'_{1212}(Q). \quad (3.33)$$

При выводе формул (3.32), (3.33) учтены свойства (3.21), (3.22) тензора $a_{npqr}(Q)$. Отметим, что если Q – шар, то $B' = C' = D' = 0$ и, следовательно тензор $a_{npqr}(Q(\lambda))$ – полностью изотропный.

3. Пусть Q_ε^j – осесимметричное тело диаметра d_ε^j с осью симметрии, направленной по единичному вектору λ^j , и с центром масс, расположенным в точке $x_\varepsilon^j \in K^h$ (т. е. частица Q_ε^j получается гомотетическим сжатием тела $Q(\lambda^j)$ в $\frac{1}{d_\varepsilon^j}$ раз и сдвигом на вектор x_ε^j).

В области $\mathbf{R}^3 \setminus Q_\varepsilon^j$ рассмотрим краевую задачу

$$\Delta v_\varepsilon^{j,np} = \nabla q_\varepsilon^{j,np}, \quad \text{div } v_\varepsilon^{j,np} = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus Q_\varepsilon^j; \quad (3.34)$$

$$v_\varepsilon^{j,np}(x) = \psi^{np}(x) + a_\varepsilon^{j,np} + b_\varepsilon^{j,np} \times (x - x_\varepsilon^j), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^j; \quad (3.35)$$

$$\int_{\partial Q_\varepsilon^j} \sigma[v_\varepsilon^{j,np}] dS = \int_{\partial Q_\varepsilon^j} \{(x - x_\varepsilon^j) \times \sigma[v_\varepsilon^{j,np}]\} dS = 0; \quad (3.36)$$

$$v_\varepsilon^{j,np}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad q_\varepsilon^{j,np}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^3}\right) \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3.37)$$

Легко видеть, что решение этой задачи представимо в виде

$$v_\varepsilon^{j,np}(x) = d_\varepsilon^j u^{np}\left(\frac{x - x_\varepsilon^j}{d_\varepsilon^j}\right), \quad q_\varepsilon^{j,np}(x) = q^{np}\left(\frac{x - x_\varepsilon^j}{d_\varepsilon^j}\right), \quad (3.38)$$

где $\{u^{np}, p^{np}\}$ – решение задачи (3.25) – (3.28).

Отсюда, согласно (3.17) и (3.29) следуют неравенства, справедливые при $|x - x_\varepsilon^j| \gg d_\varepsilon^j$:

$$|D^\alpha v_\varepsilon^{j,np}(x)| \leq \frac{C(d_\varepsilon^j)^3}{|x - x_\varepsilon^j|^{2+\alpha}}, \quad |D^\alpha q_\varepsilon^{j,np}(x)| \leq \frac{C(d_\varepsilon^j)^3}{|x - x_\varepsilon^j|^{3+\alpha}}, \quad (3.39)$$

где постоянные C не зависят от ε и j , $\alpha = 0, 1$.

С каждой частицей Q_ε^j свяжем тензор $\{a_{npqr}(Q_\varepsilon^j)\}$ четвертого ранга:

$$a_{npqr}(Q_\varepsilon^j) = \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q_\varepsilon^j} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[v_\varepsilon^{j,np}] e_{ik}[v_\varepsilon^{j,np}] dx. \quad (3.40)$$

Из равенств (3.37), (3.40) и (3.30) следует, что

$$a_{npqr}(Q_\varepsilon^j) = (d_\varepsilon^j)^3 a_{npqr}(Q(\lambda)), \quad (3.41)$$

где $a_{npqr}(Q(\lambda))$ определено равенством (3.32), (3.33).

4. Перейдем непосредственно к доказательству формулы (3.1). Будем предполагать, что диаметры d_ε^j частиц Q_ε^j имеют порядок $O(\varepsilon^\alpha)$, $\alpha > 5/3$, частицы располагаются не очень близко друг к другу так, что расстояния r_ε^i от Q_ε^j до ближайшей соседней частицы ограничено снизу величиной $C\varepsilon$, $C > 0$. Параметр ε равен среднему расстоянию между ближайшими соседями так, что число частиц в кубе K^h имеет порядок $O\left(\frac{h^3}{\varepsilon^3}\right)$.

Введем вектор-функцию

$$V_\varepsilon^{np}(x) = \psi^{np}(x - \bar{x}) - \sum_j v_\varepsilon^{j,np}(x) \varphi_\varepsilon^j(x), \quad (3.42)$$

где $v_\varepsilon^{j,np}(x)$ – решение задачи (3.34) – (3.37), \bar{x} – центр куба

K^h , $\varphi_\varepsilon^j(x) = \varphi\left(\frac{x - x_\varepsilon^j}{r_\varepsilon^j}\right)$, $\varphi(r)$ – дважды непрерывно дифференци-

руемая функция, равная 1 при $r < 1/4$ и 0 при $r > 1/2$, \sum_j – рас-

пространяется на те значения индекса j , для которых Q_ε^j полностью содержится в кубе $K^{h_1} \subset K^h = K(x, h)$ ($h_1 = h - 2h^\kappa$, $\kappa > 1$).

Из построений следует, что при достаточно малых ε $V_\varepsilon^{np}(x)$ принимает на частицах Q_ε^j значения $a_\varepsilon^{j,np} + b_\varepsilon^{j,np} \times (x - x_\varepsilon^j)$, где $a_\varepsilon^{j,np}$, $b_\varepsilon^{j,np}$ – некоторые постоянные векторы, а на границе куба K^h – значения $\psi^{np}(x - \bar{x})$ и всюду в K^h

$$\operatorname{div} V_\varepsilon^{np}(x) = - \sum_j (v_\varepsilon^{j,np}, \nabla \varphi_\varepsilon^j).$$

Учитывая свойства срезающих функций $\varphi_\varepsilon^j(x)$ и неравенства (3.39) получаем

$$\|\operatorname{div} V_\varepsilon^{np}\|_{L_2(K^h)}^2 \leq \sum_j \frac{(d_\varepsilon^j)^6}{(r_\varepsilon^j)^3}, \quad (3.43)$$

где C не зависит от ε и h .

Обозначим через $z_\varepsilon^{np}(x)$ вектор-функцию, равную постоянным векторам $c_\varepsilon^{j,np}$ на частицах Q_ε^j , нулю на ∂K^h и такую, что $\operatorname{div} z_\varepsilon^{np}(x) = -\operatorname{div} V_\varepsilon^{np}(x)$ при $x \in K^h$. Так как $\operatorname{div} V_\varepsilon^{np} = 0$ на частицах Q_ε^j и

$$\int_{K^h} \operatorname{div} V_\varepsilon^{np} dx = \int_{\partial K^h} (\psi^{np}, n) dS = \int_{K^h} \operatorname{div} \psi^{np} dx = 0,$$

то согласно лемме 2.1.3 такая вектор-функция существует и справедлива оценка

$$\|z_\varepsilon^{np}\|_{W_2^1(K^h)} \leq C \|\operatorname{div} V_\varepsilon^{np}\|_{L_2(K^h)}, \quad (3.44)$$

где постоянная C не зависит от ε . Привлекая соображения подобия, заключаем, что C можно выбрать не зависящим и от h (при малых h).

Из оценок (3.43), (3.44) следует, что

$$\int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik}^2 [z_\varepsilon^{np}] dx = o(\tau_{\varepsilon h}), \quad (3.45)$$

где $\tau_{\varepsilon h}$ – суммарный объем частиц, содержащихся в кубе $K^h \subset K^h$. При этом учитывается, что $r_\varepsilon^j \geq C\varepsilon$, $d_\varepsilon^j = O(\varepsilon^\alpha)$ и $\alpha > 5/3$.

Представим решение $v_\varepsilon^{np}(x)$ задачи (2.1) – (2.4) в виде

$$v_\varepsilon^{np}(x) = V_\varepsilon^{np}(x) + z_\varepsilon^{np}(x) + w_\varepsilon^{np}(x). \quad (3.46)$$

Поскольку $v_\varepsilon^{np}(x)$ минимизирует функционал

$$I_1(v_\varepsilon^{np}) = \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik}^2 [v_\varepsilon^{np}] dx,$$

в классе $J_\varepsilon^\psi(K^h)$, то в силу свойств вектор-функции $z_\varepsilon^{np}(x)$ искомая вектор-функция $w_\varepsilon^{np}(x)$ должна составлять минимум функционалу

$$\begin{aligned} I[w_\varepsilon^{np}] &= \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik}^2 [w_\varepsilon^{np}] dx + 2 \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik} [V_\varepsilon^{np}] e_{ik} [w_\varepsilon^{np}] dx + \\ &+ 2 \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik} [z_\varepsilon^{np}] e_{ik} [w_\varepsilon^{np}] dx = I_1[w_\varepsilon^{np}] + I_2[w_\varepsilon^{np}] + I_3[w_\varepsilon^{np}] \end{aligned} \quad (3.47)$$

в классе $J_\varepsilon^\circ(K^h)$ соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(K^h)$, равных на $a_\varepsilon^{j, np} + b_\varepsilon^{j, np} \times (x - x_\varepsilon^j)$ на частицах $Q_\varepsilon^j \subset K^h$.

Пользуясь неравенством Коши и учитывая (3.45), оцениваем интеграл $I_3[w_\varepsilon^{np}]$ следующим образом:

$$I_3[w_\varepsilon^{np}] = o(\tau_{\varepsilon h}^{1/2}) (I_1[w_\varepsilon^{np}])^{1/2}. \quad (3.48)$$

Интеграл $I_2[w_\varepsilon^{np}]$ преобразуем с помощью интегрирования по частям. Тогда, учитывая (3.42), (3.34) – (3.36) и вспоми-

ная, что $w_\varepsilon^{np} \in J_\varepsilon(K^h)$, получим

$$I_2[w_\varepsilon^{np}] = \sum_j \int_{B_\varepsilon^j} (\nabla \varphi_\varepsilon^j \cdot q^{j,np}, w_\varepsilon^{np}) dx - \sum_j \int_{B_\varepsilon^j} (\Delta \varphi_\varepsilon^j \cdot v_\varepsilon^{j,np}, w_\varepsilon^{np}) dx - \\ - \sum_j \int_{B_\varepsilon^j} ((\nabla \varphi_\varepsilon^j, \nabla) v_\varepsilon^{j,np}, w_\varepsilon^{np}) dx.$$

Здесь всюду интегрирование ведется по носителям $B_\varepsilon^j = \text{supp}\{\nabla \varphi_\varepsilon^j(x)\}$. Оценим интегралы в правой части с помощью неравенств Коши. Тогда, учитывая свойства функций $\varphi_\varepsilon^j(x)$ и неравенства (3.39), получаем

$$|I_2[w_\varepsilon^{np}]| \leq C \left\{ \sum_j \frac{(d_\varepsilon^j)^6}{(r_\varepsilon^j)^5} \right\}^{1/2} \|w_\varepsilon^{np}\|_{L_2(K^h)} \leq C \varepsilon^{\frac{3\alpha-5}{2}} \tau_{\varepsilon h}^2 h^2 (I_1[w_\varepsilon^{np}])^{1/2}. \quad (3.49)$$

Второе неравенство в (3.49) записано с учетом того, что $d_\varepsilon^j = O(\varepsilon^\alpha)$ ($\alpha > 5/3$), $r_\varepsilon^j > C\varepsilon$ и $w_\varepsilon^{np} \in J_\varepsilon(K^h)$.

Поскольку $I[w_\varepsilon^{np}] \leq 0$, то из (3.47) следует неравенство

$$I_1[w_\varepsilon^{np}] \leq |I_2[w_\varepsilon^{np}]| + |I_3[w_\varepsilon^{np}]|,$$

с помощью которого, учитывая (3.48) и (3.49), получаем:

$$I_1[w_\varepsilon^{np}] = \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik}^2 [w_\varepsilon^{np}] dx = o(\tau_{\varepsilon h}). \quad (3.50)$$

где $\tau_{\varepsilon h}$ – суммарный объем частиц в кубе $K^h \subset K^h$. Теперь, пользуясь формулами (2.5), (3.46) и (3.42), запишем

$$a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x}) = \\ = \frac{\mu}{h^3} \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik} [\psi^{np}] e_{ik} [\psi^{qr}] dx + \frac{\mu}{h^3} \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik} [\tilde{v}_\varepsilon^{np}] e_{ik} [\tilde{v}_\varepsilon^{qr}] dx + \\ + \frac{\mu}{h^3} \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik} [z_\varepsilon^{np} + w_\varepsilon^{np}] e_{ik} [z_\varepsilon^{qr} + w_\varepsilon^{qr}] dx + \frac{\mu}{h^3} \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik} [\tilde{v}_\varepsilon^{np}] e_{ik} [z_\varepsilon^{qr} + w_\varepsilon^{qr}] dx + \\ + \dots + \frac{\mu}{h^3} \int \sum_{K^h, i, k=1}^3 e_{ik} [\psi^{np}] e_{ik} [\tilde{v}_\varepsilon^{qr} + z_\varepsilon^{qr} + w_\varepsilon^{qr}] dx + \dots, \quad (3.51)$$

где $\tilde{v}_\varepsilon^{qr}(x) = \sum_j \int v_\varepsilon^{j,np} \cdot \varphi_\varepsilon^j(x)$, а точками обозначены интегралы,

получаемые перестановкой индексов np и qr .

Пользуясь равенствами (2.35) заключаем, что первое слагаемое в правой части (3.51) равно I_{npqr} . Оценим второе слагаемое. Учитывая, что носители функций φ_ε^j не пересекаются, запишем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^3} \int \sum_{K^h, k=1}^3 e_{ik} [\tilde{v}_\varepsilon^{np}] e_{ik} [\tilde{v}_\varepsilon^{np}] dx = \frac{1}{h^3} \sum_j \int_{R^3 \setminus Q_\varepsilon^j} e_{ik} [v_\varepsilon^{j,np}] e_{ik} [v_\varepsilon^{j,qr}] dx + \\ & + \frac{1}{h^3} \sum_j \int_{R^{3i}, k=1}^3 e_{ik} [v_\varepsilon^{j,np} (\varphi_\varepsilon^j - 1)] e_{ik} [v_\varepsilon^{j,qr}] + e_{ik} [v_\varepsilon^{j,np}] \times e_{ik} [v_\varepsilon^{j,qr} (\varphi_\varepsilon^j - 1)] + \\ & + e_{ik} [v_\varepsilon^{j,np} (\varphi_\varepsilon^j - 1)] e_{ik} [v_\varepsilon^{j,qr} (\varphi_\varepsilon^j - 1)] dx = I_{1\varepsilon} + I_{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Из (3.41) и (3.32), следует, что

$$\begin{aligned} I_{1\varepsilon} = & \sum_j \tau_\varepsilon^j A_{npqr} + B[\lambda_n^j \lambda_q^j \delta_{pr} + \lambda_q^j \lambda_p^j \delta_{nr} + \lambda_n^j \lambda_r^j \delta_{qp} + \lambda_r^j \lambda_p^j \delta_{nq}] + \\ & + C[\lambda_q^j \lambda_r^j \delta_{np} + \lambda_n^j \lambda_p^j \delta_{qr}] + D \lambda_n^j \lambda_p^j \lambda_q^j \lambda_r^j, \end{aligned} \quad (3.52)$$

где $\tau_\varepsilon^j = \frac{|Q|}{h^3} (d_\varepsilon^i)^3$ – относительный объем частицы Q_ε^i , а коэффициенты A_{npqr} , B , C , D равны соответствующим штрихованным коэффициентам (3.33), деленным на объем тела Q :

$$A_{npqr} = \frac{A'_{npqr}}{|Q|}; \quad B = \frac{B'}{|Q|}; \quad C = \frac{C'}{|Q|}; \quad D = \frac{D'}{|Q|}. \quad (3.53)$$

Далее, пользуясь неравенствами (3.37) и свойствами функций $\varphi_\varepsilon^j(x)$, заключаем, что

$$I_{2\varepsilon} \leq \frac{C}{h^3} \sum_j \frac{(d_\varepsilon^j)^6}{(r_\varepsilon^j)^3} = o(\tau_\varepsilon), \quad (3.54)$$

где $\tau_\varepsilon = \frac{\tau_{\varepsilon h}}{h^3}$ – суммарный относительный объем частиц в кубе K^h .

Заметим, что из (3.52) и (3.54) следует оценка

$$\frac{1}{h^3} \int \sum_{K^h, k=1}^3 e[\tilde{v}_\varepsilon^{np}] e[\tilde{v}_\varepsilon^{qr}] dx = O(\tau_\varepsilon),$$

которая вместе с (3.45) и (3.50) показывает, что третье и четвертое слагаемые в (3.51) имеют порядок $o(\tau_\varepsilon)$. Пятое слагаемое в (3.51) равно нулю, в чем нетрудно убедиться интегрированием по частям, учитывая при этом, что вектор-функция

ψ_ε^{np} линейна, а $\tilde{v}_\varepsilon^{np} + z_\varepsilon^{np} + w_\varepsilon^{np}$ равна нулю на ∂K^h .

Таким образом, из приведенных оценок и равенств (3.51), (3.52) вытекает асимптотическая формула (3.1).

§ 4. Среднее значение тензора вязкости при случайном распределении диаметров и ориентаций частиц

Полученная в предыдущем параграфе в предположении малых объемных концентраций частиц асимптотическая формула (3.1) для тензора вязкости явно зависит как от вектора ориентации λ^j , так и от относительного объема τ_ε^j каждой частицы. Поэтому при очень большом числе частиц пользоваться такой формулой практически невозможно. В этом параграфе будет выведена аналогичная асимптотическая формула для среднего тензора вязкости, зависящая от среднего вектора ориентации и среднего объема концентрации. Такая формула будет дальше использована для замыкания предельных уравнений движения суспензии, полученных в § 2.

1. Предположим, что относительные объемы частиц $\tau_\varepsilon^j = \frac{|Q_\varepsilon^j|}{h^3}$ – случайны и плотность их функции распределения равна $\varphi_\varepsilon(\tau) = N_\varepsilon^\alpha \varphi(N_\varepsilon^\alpha \tau)$, где $\varphi(\tau)$ – неотрицательная ограниченная достаточно быстро убывающая при $\tau \rightarrow \infty$ функция, нормированная на единицу в $L_1(0, \infty)$, N_ε^α – общее число частиц, а $\alpha > 5/3$.

Предположим также, что частицы Q_ε^j осесимметричны и их векторы ориентации λ^j (единичные векторы, направленные вдоль оси вращения) являются случайными векторами, распределенными на единичной сфере S с плотностью распределения $f(\lambda)$. В случае, когда частицы имеют плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения, их ориентации задаются не векторами, а «директорами», т. е. направленными-

ми отрезками без стрелки. Асимптотическая формула (3.1), описывающая влияние мелких частиц на эффективную вязкость суспензии, а также формула (4.2.1), описывающая асимптотическую динамику малой осесимметричной частицы в потоке жидкости, показывают, что направление стрелки вектора ориентации частицы не влияет на результат и в том случае, когда частица не имеет плоскости симметрии. Поэтому функция распределения $f(\lambda)$ должна обладать на сфере S такой симметрией: $f(\lambda) = f(-\lambda)$. Это подтверждается также имеющимися экспериментальными наблюдениями за распределением ориентации осесимметричных частиц в потоках вязкой жидкости ([9], [41]).

В этом параграфе мы рассмотрим одну конкретную функцию распределения $f(\lambda)$, представимую в виде

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} \tilde{f}(\lambda) + \tilde{f}(-\lambda), \quad (4.1)$$

где $\tilde{f}(\lambda)$ определено формулой

$$\tilde{f}(\lambda) = \tilde{f}(\lambda, l, \sigma) = \frac{\exp(-\sigma^{-2})}{4\pi\sigma^2 \operatorname{sh} \sigma^{-2}} \exp\left\{-\frac{(\lambda-l)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (4.2)$$

Числовой параметр $\sigma > 0$ в (4.2) характеризует разброс ориентаций частиц вокруг заданных векторов $l \in S$ и $-l \in S$: при $\sigma \rightarrow \infty$ $f(\lambda) \rightarrow \frac{1}{4\pi}$ (равномерное распределение), а при $\sigma \rightarrow 0$ $f(\lambda) \rightarrow \frac{1}{2}(\delta(\lambda-l) + \delta(\lambda+l))$ (распределение не случайное).

Ясно, что функция $f(\lambda)$ обладает нужной симметрией $f(\lambda) = f(-\lambda)$ и, как нетрудно убедиться, нормированная

$$\int_S f(\lambda) dS_\lambda = \int_S \tilde{f}(\lambda) dS_\lambda = 1.$$

Здесь и далее через dS_λ обозначен элемент площади единичной сферы S , т.е. $dS_\lambda = \sin\theta d\theta d\varphi$. Отметим, что функции вида (4.1), (4.2) можно использовать, как некоторые аппрокси-

мации для определенного класса симметричных функций распределения. В то же время они позволяют получить явные выражения для средних тензоров вязкости суспензии. Для этого введем понятие среднего вектора ориентации $\tilde{\lambda}$ по формуле

$$\tilde{\lambda} = \int_S \lambda \tilde{f}(\lambda) dS_\lambda. \quad (4.3)$$

Такой вектор будет играть роль параметра порядка в системе случайно ориентированных частиц. Нетрудно проверить, что

$$\tilde{\lambda} = |\tilde{\lambda}| l \quad \text{и} \quad |\tilde{\lambda}| = \frac{1}{\text{th } \sigma^{-2}} - \sigma^2. \quad (4.4)$$

2. Вычислим среднее значение $\langle a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x}) \rangle$ тензора вязкости суспензии в кубе $K(\bar{x}, h)$. Будем предполагать, что совместные функции распределения $F_\varepsilon^{(n)}(\tau^i, \lambda^i; \dots; \tau^{i_n}, \lambda^{i_n})$ частиц Q_ε^j по объемам τ^j и ориентациям λ^j ($j = 1, \dots, N_\varepsilon$, $n = 1, \dots, N_\varepsilon$) имеют вид

$$F_\varepsilon^{(n)}(\tau^i, \lambda^i; \dots; \tau^{i_n}, \lambda^{i_n}) = \prod_{j=i_1, \dots, i_n} \varphi(\tau^j) f(\lambda^j),$$

т. е. частицы распределены независимо.

Тогда из формулы (3.1) следует, что

$$\langle a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x}) \rangle = \mu \mathbf{I}_{npqr} + \mu N_\varepsilon \int_0^\infty \int_S a_{npqr}(\tau, \lambda) \varphi_\varepsilon(\tau) f(\lambda) d\tau dS_\lambda + o(\tau_\varepsilon), \quad (4.5)$$

где $N_\varepsilon(\bar{x}, h)$ и τ_ε – общее число и суммарный относительный объем частиц, попавших в куб $K(\bar{x}, h_1) \subset K(\bar{x}, h)$ ($h_1 = h - 2h^\varepsilon$),

$$a_{npqr}(\tau, \lambda) = \tau \left[A_{npqr} + B(\lambda_n \lambda_q \delta_{pr} + \lambda_n \lambda_r \delta_{pq} + \lambda_r \lambda_p \delta_{nq} + \lambda_p \lambda_q \delta_{nr}) + \right. \\ \left. + C(\lambda_n \lambda_p \delta_{qr} + \lambda_q \lambda_r \delta_{np}) + D \lambda_n \lambda_p \lambda_q \lambda_r \right],$$

а коэффициенты A_{npqr} , B , C , D определены формулами (3.33), (3.53).

Рассмотрим вторые и четвертые моменты функции распределения $f(\lambda)$ (см. формулы (4.1), (4.2))

$$J_2^{np} = \int_S \lambda_n \lambda_p f(\lambda) dS_\lambda \quad \text{и} \quad J_4^{npqr} = \int_S \lambda_n \lambda_p \lambda_q \lambda_r f(\lambda) dS_\lambda.$$

Будем обозначать через $\{\lambda_i\}_{i=1}^3$ компоненты вектора λ в исходной системе координат, а через $\{\lambda'_j\}_{j=1}^3$ – в повернутой прямоугольной системе координат, у которой ось x'_1 направлена по вектору ориентации распределения $l = \{l_i\}_{i=1}^3$ ($l \in S$). Ясно, что координаты вектора λ в этих системах связаны соотношением: $\lambda_i = \sum_{j=1}^3 A_{ij} \lambda'_j$, где A_{ij} – элементы ортогональной матрицы, причем

$$A_{i1} = l_i, \quad A_{n2} A_{p2} + A_{n3} A_{p3} = \delta_{np} - l_n l_p. \quad (4.7)$$

Поэтому согласно (4.1), (4.2)

$$J_2^{np} = \int_S \sum_{j,k=1}^3 A_{nj} A_{pk} \lambda'_j \lambda'_k \tilde{f}(\lambda', |\tilde{\lambda}|) dS_{\lambda'},$$

где введено обозначение $\tilde{f}(\lambda', |\tilde{\lambda}|) = \tilde{f}(\lambda', l, \sigma)$ при $l = (1, 0, 0)$ с учетом (4.4).

Переходя к сферической системе координат, в которой $\lambda'_1 = \cos \theta$, $\lambda'_2 = \sin \theta \cos \varphi$, $\lambda'_3 = \sin \theta \sin \varphi$ ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$), с учетом (4.7), получаем

$$\begin{aligned} J_2^{np} &= l_n l_p 2\pi \int_0^\pi \tilde{f}(\theta, |\tilde{\lambda}|) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta + (\delta_{np} - l_n l_p) \pi \int_0^\pi \tilde{f}(\theta, |\tilde{\lambda}|) \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \delta_{np} f_1(|\tilde{\lambda}|) + l_n l_p f_2(|\tilde{\lambda}|), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где f_1 и f_2 – некоторые функции, зависящие только от параметра порядка $|\tilde{\lambda}|$.

Аналогичным образом вычисляется и четвертый момент:

$$\begin{aligned} J_4^{npqr} &= \int_S \sum_{l,m,t,s=1}^3 A_{nl} A_{pm} A_{qt} A_{rs} \lambda'_l \lambda'_m \lambda'_t \lambda'_s \tilde{f}(\lambda', |\tilde{\lambda}|) dS_{\lambda'} = \\ &= f_3(|\tilde{\lambda}|) (\delta_{pq} \delta_{nr} + \delta_{nq} \delta_{pr} + \delta_{np} \delta_{qr}) + \\ &+ f_4(|\tilde{\lambda}|) (\delta_{nr} l_p l_q + \delta_{pq} l_n l_r + \delta_{nq} l_p l_r + \delta_{pr} l_n l_q + \delta_{qr} l_n l_p) + f_5(|\tilde{\lambda}|) l_n l_p l_q l_r, \end{aligned} \quad (4.9)$$

где функции f_i ($i = 3, 4, 5$) выражаются через интегралы от произведений $\tilde{f}(\lambda, l, \sigma) = \tilde{f}(\theta, |\tilde{\lambda}|)$ и некоторых тригонометрических функций аргумента θ . При этом следует воспользо-

ваться формулами приведения вида

$$\begin{aligned} A_{n2}A_{p2}A_{q2}A_{r2} + A_{n3}A_{p3}A_{q3}A_{r3} + A_{n2}A_{p2}A_{q3}A_{r3} + A_{n3}A_{p3}A_{q2}A_{r2} = \\ = \delta_{np}\delta_{qr} - \delta_{np}l_q l_r - \delta_{qr}l_n l_p + l_p l_q l_n l_r \end{aligned} \quad (4.10)$$

вытекающими из (4.7).

Учитывая (4.2), (4.4), (4.7), (4.10), получаем

$$\begin{aligned} f_1(|\tilde{\lambda}|) &= \sigma^2 |\tilde{\lambda}|, \quad f_2(|\tilde{\lambda}|) = 1 - 3\sigma^2 |\tilde{\lambda}|, \\ f_3(|\tilde{\lambda}|) &= \sigma^4 (1 - 3\sigma^2 |\tilde{\lambda}|), \quad f_4(|\tilde{\lambda}|) = \frac{1}{2} \sigma^2 (|\tilde{\lambda}| - 5\sigma^2 + 15\sigma^4 |\tilde{\lambda}|), \\ f_5(|\tilde{\lambda}|) &= 1 + 35\sigma^4 - 10\sigma^2 |\tilde{\lambda}| - 105\sigma^6 |\tilde{\lambda}|. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Пользуясь равенствами (4.5), (4.6), (4.8), (4.9) и (4.11), найдем асимптотическое представление для среднего значения тензора вязкости

$$\begin{aligned} \langle a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x}) \rangle &= \mu \mathbf{I}_{npqr} + \mu \tau_\varepsilon \tilde{A}_{npqr} + \tilde{B} [\delta_{pr} l_n l_q + \delta_{nq} l_p l_r + \delta_{pq} l_n l_r + \delta_{nr} l_p l_q] + \\ &+ \tilde{C} [\delta_{qr} l_n l_p + \delta_{np} l_q l_r] + \tilde{D} l_n l_p l_q l_r + o(\tau_\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $\tau_\varepsilon = N_\varepsilon(\bar{x}, h) \int_0^\infty \tau \varphi_\varepsilon(\tau) d\tau$ – относительный суммарный объем

частиц в кубе $K(\bar{x}, h_1) \subset K(\bar{x}, h)$ ($h_1 = h - 2h^\kappa$, $\kappa > 1$), а коэффици-

енты \tilde{A}_{npqr} , \tilde{B} , \tilde{C} и \tilde{D} определены равенствами

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{npqr} &= A_{npqr} + \left\{ 2B\sigma^2 (|\tilde{\lambda}|) + D\sigma^4 (1 - 3\sigma^2 |\tilde{\lambda}|) \right\} (\delta_{nr} \delta_{pq} + \delta_{nq} \delta_{pr}) + \\ &+ \left\{ 2C\sigma^2 (|\tilde{\lambda}|) + D\sigma^4 (1 - 3\sigma^2 |\tilde{\lambda}|) \right\} \delta_{np} \delta_{qr}, \\ \tilde{B} &= B(1 - 3\sigma^2 |\tilde{\lambda}|) + \frac{1}{2} D\sigma^2 (|\tilde{\lambda}| - 5\sigma^2 + 15\sigma^4 |\tilde{\lambda}|), \\ \tilde{C} &= C(1 - 3\sigma^2 |\tilde{\lambda}|) + \frac{1}{2} D\sigma^4 (|\tilde{\lambda}| - 5\sigma^2 + 15|\tilde{\lambda}|), \\ \tilde{D} &= D(1 + 35\sigma^4 - 10\sigma^2 |\tilde{\lambda}| - 105\sigma^6 |\tilde{\lambda}|). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Таким образом, полученная асимптотическая формула (4.12) дает зависимость среднего значения тензора вязкости от относительного объема частиц в кубе $K(x, h)$ и среднего вектора ориентации частиц $\tilde{\lambda} = l |\tilde{\lambda}|$, $|l| = 1$ (согласно (4.4))

дисперсия σ однозначно определена через $|\tilde{\lambda}|$.

3. Рассмотрим случай, когда векторы ориентации частиц равномерно распределены на единичной сфере S . Такое распределение получается из распределения (4.1), (4.2) в пределе при $\sigma \rightarrow \infty$. Согласно (4.4) имеем при $\sigma \rightarrow \infty$

$$|\tilde{\lambda}| \approx \frac{1}{3\sigma^2} - \frac{1}{45\sigma^6}.$$

Учитывая это асимптотическое соотношение, из (4.12) получаем

$$\begin{aligned} \langle a_{npqr}(\varepsilon, h, \bar{x}) \rangle = & \mu \mathbf{I}_{npqr} + \mu \tau_\varepsilon \left\{ A_{npqr} + \left(\frac{2}{3}B + \frac{1}{15}D \right) (\delta_{nr}\delta_{pq} + \delta_{nq}\delta_{pr}) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{2}{3}C + \frac{1}{15}D \right) \delta_{np}\delta_{qr} \right\} + o(\tau_\varepsilon), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где изотропный тензор A_{npqr} и коэффициенты B , C и D определены равенствами (3.33), (3.53).

Из этой формулы следует, что в случае равномерного распределения ориентации частиц, среднее значение тензора вязкости суспензии есть изотропный тензор и, следовательно, влияние частиц на несущую жидкость учитывается введением эффективной вязкости суспензии

$$\mu_{y6} = \mu \left[1 + \tau_\varepsilon \left(a'_{2323} + \frac{2}{3}B' + \frac{1}{15}D' \right) \right], \quad (4.15)$$

где μ – динамическая вязкость несущей жидкости, τ_ε – относительный объем частиц, а коэффициенты a'_{2323} , B' и D' (см. формулы (3.20), (3.33)) определяются формой частицы.

В случае, когда частицы имеют сферическую форму, коэффициенты B' и D' согласно (3.33) равны нулю. Решая для единичного шара Q краевую задачу (3.2) – (3.4) при $\psi(x) = \psi^{23}(x)$ и вычисляя коэффициент a'_{2323} по формуле (3.20), получаем известную формулу Эйнштейна [51] для коэффициента эффективной вязкости слабо концентрированной суспензии твердых сферических частиц в вязкой несжимаемой жидко-

СТИ:

$$\mu_{y\delta} = \mu \left(1 + \frac{5}{2} \tau_\varepsilon \right). \quad (4.16)$$

Глава 4

Замыкание усредненной системы уравнений, описывающей движение суспензии в режиме вмороженных частиц

В этой главе получены формулы для силы и момента сил, действующих на уединенную осесимметричную частицу со стороны обтекающего ее потока жидкости. Записаны уравнения движения центра масс частицы и эволюции ее вектора ориентации. Выведено уравнение для среднего вектора ориентации осесимметричных частиц, которое используется для замыкания усредненных уравнений, полученных в главе 2. Выписывается замкнутая система уравнений движения суспензии осесимметричных частиц в режиме «вмороженных частиц» и доказывается существование слабых глобальных решений для этой системы.

§ 1. О воздействии потока вязкой несжимаемой жидкости на частицу

1. Как известно (см., например, [23], [38]) на твердую шарообразную частицу, движущуюся со скоростью $v(t)$ в вязкой несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности скорость $u(t)$, действует сила сопротивления

$$f = 6\pi\mu a(u-v) + 6\pi a^2 \sqrt{\rho_{\text{ж}}\mu} \int_0^t \frac{\dot{v}(\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\tau + \\ + \frac{2\pi a^3 \rho_{\text{ж}}}{3} (\dot{u} - \dot{v}) + \frac{4\pi a^3 \rho_{\text{ж}}}{3} (\dot{u} - g),$$

где a – радиус частицы, μ и $\rho_{\text{ж}}$ – динамическая вязкость и плотность несущей жидкости, g – вектор силы тяжести. Здесь первое слагаемое f_S – есть сила Стокса, второе – f_B – наследственная сила Бассе, третье – f_m – вызвано эффектом присоединенной массы жидкости, а четвертое – f_A – сила Архимеда.

Если частица, кроме того, вращается с угловой скоростью

ω , то на нее действует еще и сила Магнуса [11]

$$f_M = \pi \rho_{\text{ж}} a^3 [(u \times v) \times \omega].$$

Как видим, при малом радиусе частицы ($a \ll 1$) наибольшее влияние оказывает сила Стокса $f_S = 6\pi\mu a(u - v) = O(a)$, которую можно определить, рассматривая стационарное обтекание неподвижной частицы потоком жидкости, имеющей на бесконечности скорость $u - v$ [22]. Силы f_m и f_B , обусловлены нестационарностью течения, а также силы Архимеда и Магнуса имеют меньший порядок по a : $f_B = O(a^2)$, $f_m, f_A, f_M = O(a^3)$. Поэтому, если частицы движутся в режиме фильтрации (т.е. $u \neq v$) основной вклад в усредненные уравнения дает только стоксова сила.

Найдем аналог стоксовой силы для частиц Q произвольной формы. Для этого надо решить задачу обтекания неподвижной частицы Q стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости с вектором скорости U на бесконечности:

$$\begin{aligned} \mu \Delta u(x) &= \nabla p(x), \quad \operatorname{div} u(x) = 0, \quad x \in R^3 \setminus Q, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial Q, \quad u(x) - U = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Сила воздействия жидкости на частицу определяется по формуле

$$f = - \int_{\partial Q} \sigma[u] dS,$$

где $\sigma[u] = -np + 2\mu \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}[u] \cos(n, e^i) e^j$ – вектор напряжений,

$e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right]$ – тензор скоростей деформации, n – внутренняя нормаль к ∂Q .

Решение задачи (1.1), в силу ее линейности, представимо в виде

$$u(x) = U - \sum_{l=1}^3 U_l v^l(x), \quad p(x) = -\mu \sum_{l=1}^3 U_l p^l(x),$$

где $\{v^l(x), p^l(x)\}$ – решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta v^l(x) &= \nabla p^l(x), \quad \operatorname{div} v^l(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus Q, \\ v^l(x) &= e^l, \quad x \in \partial Q, \quad v^l(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Учитывая это, с помощью формулы Грина получаем следующее выражение для компонент вектора силы

$$f_k = - \int_{\partial Q} (\sigma[u], e^k) dS = 2\mu \sum_{l=1}^3 U_l \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}[v^k] e_{ij}[v^l] dx.$$

Вводя обозначения

$$C_{kl}(Q) = 2 \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}[v^k] e_{ij}[v^l] dx, \quad (1.3)$$

перепишем предыдущее равенство следующим образом

$$f_k = \mu \sum_{l=1}^3 C_{kl}(Q) U_l. \quad (1.4)$$

Система чисел $\{C_{kl}(Q)\}_{k,l=1}^3$ образует симметричный тензор второго ранга в пространстве \mathbf{R}^3 . Будем называть его тензором сопротивления.

С помощью интегрирования по частям с учетом (1.2) нетрудно показать, что компоненты тензора $\{C_{kl}(Q)\}$ можно также представить в виде

$$C_{kl}(Q) = \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} (\nabla v^k, \nabla v^l) dx, \quad (1.5)$$

откуда следует, что тензор $\{C_{kl}(Q)\}$ положительно определен.

2. Предположим теперь, что частица $Q = Q_d(\lambda)$ осесимметрична, имеет диаметр d и ее ось симметрии направлена по единичному вектору $\lambda = \{\lambda_l\}_{l=1}^3$.

Покажем, что тогда компоненты ее тензора сопротивления задаются формулами

$$C_{kl}(\lambda) \equiv C_{kl}(Q_d(\lambda)) = d[C_{22}\delta_{kl} + (C_{11} - C_{22})\lambda_k\lambda_l], \quad (1.6)$$

где через C_{kl} обозначены компоненты тензора сопротивления частицы $Q_1(e^1)$, полученной гомотетическим растяжением

$Q_d(\lambda)$ в d^{-1} раз и совмещением λ с e^1 (в силу симметрии $Q_1(e^1)$ $C_{22} = C_{33}$ и $C_{kl} = 0$ при $k \neq l$).

Введем систему координат, связанную с частицей $Q_d(\lambda)$, оси которой задаются единичными векторами λ^k ($k = 1, 2, 3$), причем $\lambda^1 = \lambda$. Обозначим через $\{A_{ik}\}_{i,k=1}^3$ – ортогональную матрицу линейного преобразования A , переводящего базисные векторы λ^k повернутой системы координат в базисные векторы e^i лабораторной системы.

Пусть v^l – решение задачи (1.2) для области $\mathbf{R}^3 \setminus Q_d(\lambda)$, а v^l – решение той же задачи в области $\mathbf{R}^3 \setminus Q_1(e^1)$. Очевидно справедливо равенство

$$v^k(x) = \sum_{i=1}^3 A_{ik} v^i\left(\frac{Ax}{d}\right)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} C_{kl}(\lambda) &= \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q_d(\lambda)} (\nabla_x v^k(x), \nabla_x v^l(x)) dx = \\ &= d \sum_{i,j=1}^3 A_{ki} A_{lj} \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q_1(e^1)} (\nabla_y v^i(y), \nabla_y v^j(y)) dy = d \sum_{i,j=1}^3 A_{ki} A_{lj} C_{ij}. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая свойства матрицы $\{A_{ij}\}$ (3.4.7) и равенства $C_{22} = C_{33}$, $C_{ij} = 0$ ($i \neq j$) получаем формулу (1.6).

Отметим, что в случае, когда Q есть эллипсоид вращения с отношением полуосей $b/a = r$ ($\max\{a, b\} = 1/2$), входящие в формулу (1.6) постоянные C_{11} и C_{22} равны (см. [22], [48]):

$$C_{11} = \frac{8\pi}{\chi_0 + \alpha_0}, \quad C_{22} = \frac{8\pi}{\chi_0 + \beta_0 r^2},$$

где

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \int_0^\infty \frac{dt}{(r^2 + t)\sqrt{1+t}}, \quad \beta_0 = \int_0^\infty \frac{dt}{(r^2 + t)^2 \sqrt{1+t}}, \\ \alpha_0 &= \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)(r^2 + t)\sqrt{1+t}}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Ясно, что $C_{22} > C_{11}$ при $r < 1$ (вытянутый эллипсоид враще-

ния), $C_{22} < C_{11}$ при $r > 1$ (сплюснутый эллипсоид вращения), а при $r = 1$ $C_{11} = C_{22} = 3\pi$ (шар).

3. Получим теперь формулу для момента сил, действующих на частицу $Q_d(\lambda)$, обтекаемую стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности скорость

$$U(x) = \sum_{k=1}^3 U_k e^k + \sum_{k,l=1}^3 U_{kl} x_l e^k, \quad (1.8)$$

где U_k, U_{kl} – постоянные и в силу соленоидальности $U(x)$ $\sum_{k=1}^3 U_{kk} = 0$. Будем предполагать, что центр масс частицы находится в начале координат, а ось вращения направлена по единичному вектору λ .

Действующий на частицу со стороны жидкости момент определяется формулой

$$M(\lambda, d) = - \int_{\partial Q_d(\lambda)} \{x \times \sigma[u]\} dS, \quad (1.9)$$

где $u(x)$ – решение задачи (1.1), в которой $U(x)$ определено равенством (1.8).

В силу линейности задачи (1.1) ее решение представимо в виде

$$u(x) = U(x) - \sum_{k=1}^3 U_k v^k(x) - \sum_{k,l=1}^3 U_{kl} w^{kl}(x), \quad (1.10)$$

где $v^k(x)$ – решение задачи (1.2), в области $\mathbf{R}^3 \setminus Q_d(\lambda)$, а $w^{kl}(x)$ – решение такой же задачи, но с граничным условием $w^{kl}(x) = x_l e^k$ на $\partial Q_d(\lambda)$.

Подставляя (1.10) в (1.9) с помощью формулы Грина, получаем

$$\begin{aligned} M_q(\lambda, d) &= - \int_{\partial Q_d(\lambda)} (x \times \sigma[u], e^q) dS = - \int_{\partial Q_d(\lambda)} (\sigma[u], e^q \times x) dS = \\ &= - \int_{\partial Q_d(\lambda)} (\sigma^0[U], e^q \times x) dx + \sum_{k=1}^3 M_{qk} U_k + \sum_{k,l=1}^3 M_{qkl} U_{kl}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned}\sigma^0[U] &= 2\mu \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[U] \cos(n, e^i) e^k, \\ M_{qk} &= 2\mu \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q_d(\lambda)} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}[v^k] e_{ij}[\omega^q] dx, \\ M_{qkl} &= 2\mu \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q_d(\lambda)} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}[w^{kl}] e_{ij}[\omega^q] dx,\end{aligned}\quad (1.12)$$

а $\omega^q = \omega^q(x)$ – решение задачи (1.2) в области $\mathbf{R}^3 \setminus Q_d(\lambda)$ с граничным условием $\omega^q(x) = e^q \times x$ на $\partial Q_d(\lambda)$.

Первое слагаемое в правой части (1.11) равно нулю, в чем легко убедиться с помощью второй формулы Грина, примененной к области $Q_d(\lambda)$.

Обозначим через $v^k(x)$, $w^{kl}(x)$, $\omega^q(x)$ – решения задачи (1.2) в области $\mathbf{R}^3 \setminus Q_d(\lambda)$ с граничными условиями $v^k(x) = e^k$, $w^{kl}(x) = x_l e^k$, $\omega^q(x) = e^q \times x$ на $\partial Q_1(e^1)$. В силу линейности задачи (1.2) справедливы равенства

$$\begin{aligned}v^k(x) &= \sum_{l=1}^3 A_{kl} v^l\left(\frac{Ax}{d}\right), & w^{kl}(x) &= d \sum_{p,m=1}^3 A_{kp} A_{lm} w^{pm}\left(\frac{Ax}{d}\right), \\ \omega^q(x) &= d \sum_{r=1}^3 A_{qr} \omega^r\left(\frac{Ax}{d}\right).\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (1.12), получаем

$$\begin{aligned}M_{qk} &= \mu d^2 \sum_{r,p=1}^3 A_{qr} A_{kp} M_{rp}, \\ M_{qkl} &= \mu d^3 \sum_{r,p,m=1}^3 A_{qr} A_{kp} A_{lm} M_{rpm}, \\ M_{rp} &= 2 \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q_1(e^1)} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}[v^p] e_{ij}[\omega^r] dx, \\ M_{rpm} &= 2 \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q_1(e^1)} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}[w^{pm}] e_{ij}[\omega^r] dx.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Физический смысл этих величин следующий: M_{rp} (M_{rpm}) – есть r -я компонента момента сил, действующих на тело вра-

щения $Q = Q_1(e^1)$ со стороны обтекающей его жидкости, имеющей на бесконечности скорость e^p (соответственно $x_m e^p$).

Можно показать, что если тело Q имеет плоскость симметрии перпендикулярную оси вращения, то $M_{rp} = 0$ ($r, p = 1, 2, 3$). В общем случае для тел вращения справедливы равенства

$$\begin{aligned} M_{11} = M_{12} = M_{21} = M_{13} = M_{31} = 0, \\ M_{22} = M_{33} = 0, \quad M_{32} = -M_{23} = D. \end{aligned}$$

При этом знак D зависит от выбора направления вектора λ по оси вращения тела.

Соответствующие равенства для моментов M_{rpm} ($r, p, m = 1, 2, 3$) имеют вид: $M_{rpq} = 0$ при совпадении любой пары индексов; $-M_{123} = M_{132} = A > 0$; $-M_{231} = M_{213} = B > 0$; $-M_{312} = M_{321} = C > 0$.

Учитывая это, из (1.13) получаем

$$\begin{aligned} M_{qk} &= -\mu d^2 D \sum_{i=1}^3 \lambda_i \varepsilon_{iqk}, \\ M_{qkl} &= -\mu d^3 \left[C \varepsilon_{qkl} + (A - C) \lambda_q \sum_{i=1}^3 \lambda_i \varepsilon_{ikl} + (B - C) \lambda_k \sum_{i=1}^3 \lambda_i \varepsilon_{ilq} \right], \end{aligned} \quad (1.14)$$

где ε_{iqk} – тензор Леви-Чевита. При этом нужно воспользоваться

равенствами: $A_{j1} = \lambda_j$, $A_{l2} A_{k3} - A_{l1} A_{k2} = \sum_{j=1}^3 \lambda_j \varepsilon_{jlk}$, $\sum_{p,r,s=1}^3 A_{jp} A_{lr} A_{ks} \varepsilon_{prs} = \varepsilon_{jlk}$.

Из (1.11) и (1.14) следует такая формула для момента сил, действующих на частицу $Q_d(\lambda)$ со стороны потока жидкости $U(x)$ (1.8)

$$\begin{aligned} M(\lambda, d) &= \mu d^2 D[\lambda \times U(0)] + \mu d^3 \left[\frac{C + B}{2} \text{rot } U + \right. \\ &\left. + \frac{2A - B - C}{2} (\text{rot } U, \lambda) \lambda + (C - B)(\lambda \times E[U] \lambda) \right], \end{aligned} \quad (1.15)$$

где через $E[U]$ обозначена матрица с элементами $e_{ik}[U]$ ($i, k = 1, 2, 3$) – симметричная часть тензора градиента скорости $U(x)$.

В случае, когда Q есть эллипсоид вращения коэффициен-

ты, входящие в формулы (1.14) равны ([22], [48]):

$$D = 0, \quad A = \frac{4\pi}{3\beta_0}, \quad B = \frac{8\pi r^2}{3(\alpha_0 + r^2\beta_0)}, \quad C = \frac{8\pi}{3(\alpha_0 + r^2\beta_0)},$$

где α_0 и β_0 определены равенствами (1.7), r – отношение полуосей эллипсоида. Заметим, что $B < C$ при $r < 1$ и $B > C$ при $r > 1$, а для шара (при $r = 1$) $A = B = C = 2\pi$.

§2. О движении уединенной частицы в потоке вязкой несжимаемой жидкости

1. Предположим, что твердая осесимметричная частица малого диаметра d движется в потоке жидкости, невозмущенная скорость которой задана вектор-функцией $u(x, t)$. В виду малости частицы можно считать, что в связанной с ней системе координат частица неподвижна и обтекается потоком жидкости, имеющей на бесконечности скорость $U = u(x(t), t) - v(t)$, где $x(t)$ и $v(t)$ – положение и скорость центра масс частицы.

Тогда, согласно предыдущему параграфу (п. 1, 2), сила, действующая на частицу определяется формулами (1.4), (1.6) (с точностью до $o(d)$). Поэтому уравнение движения центра масс частицы имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = \mu d \left\{ C_{22}[u(x(t), t) - v(t)] + (C_{11} - C_{22})(u(x(t), t) - v(t), \lambda(t))\lambda(t) \right\} + f_{\text{вн}},$$

где $f_{\text{вн}}$ – внешняя сила, действующая на частицу, $m = \rho_{\text{ч}} d^3 \hat{\tau}$ – масса частицы, $x(t)$ – вектор ее центра масс, а C_{11} , C_{22} , $\hat{\tau}$ – безразмерные коэффициенты, зависящие лишь от формы осесимметричной частицы.

Вводя обозначения $C_0 = C_{22} \hat{\tau}^{-1}$, $C_1 = (C_{11} - C_{22}) \hat{\tau}^{-1}$, $g_1 = f_{\text{вн}} m^{-1}$, запишем это уравнение в виде

$$\dot{v} = \frac{\mu}{\rho_{\text{ч}} d^2} [C_0(u - v) + C_1(u - v, \lambda)\lambda] + g_1, \quad (2.1)$$

где μ – динамическая вязкость несущей жидкости, $\rho_{\text{ч}}$ – удельная плотность вещества частицы, d – ее диаметр. Это уравнение будет использовано в главе 6 для замыкания усредненной системы уравнений движения суспензии в режиме фильтрации, когда параметр $R = \frac{\mu}{\rho_{\text{ч}} d^2}$ конечен.

2. Для замыкания усредненных уравнений движения суспензии в режиме «вмороженных частиц» необходимо вывести уравнение, описывающее эволюцию вектора ориентации λ частицы $Q_d(\lambda)$. Пусть частица движется в потоке вязкой несжимаемой жидкости, невозмущенная скоростью которой равна $u(x, t)$. Центр масс $x(t)$ частицы движется со скоростью $v(t) = \dot{x}(t)$, а угловая скорость частицы равна $\omega(t)$. В силу малости частицы, можно считать, что в связанной с ней системе координат она неподвижна и обтекается потоком жидкости, имеющей на бесконечности скорость

$$U(x, t) = u(x, t) + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial u_k(x(t), t)}{\partial x_i} (x_i - x_i(t)) - v(t) - \omega(t)(x - x(t)).$$

Тогда, согласно (1.15), закон сохранения кинетического момента запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [J(t)\omega(t)] = & \mu d^2 D[\lambda(t) \times u(x, t) - v(t)] + \\ & + \mu d^3 \left\{ \frac{C + B}{2} \left[\text{rot } u(x, t) \Big|_{x=x(t)} - 2\omega(t) \right] - \right. \\ & - \frac{2A - B - C}{2} \left[\text{rot } u(x, t) \Big|_{x=x(t)} - 2\omega(t), \lambda(t) \right] \lambda(t) - \\ & \left. - (C - B) [\lambda(t) \times E[u]\lambda(t)] \right\} + M_{\text{вн}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $M_{\text{вн}}$ – внешний момент действующий на частицу, $J(\lambda) = J(Q_d(\lambda))$ – тензор инерции частицы $Q_d(\lambda)$ (см. (1.6)). Компо-

ненты этого тензора в исходной системе координат вычисляются по формуле

$$J_{kl}(\lambda) = \rho_{\text{ч}} \int_{Q_d(\lambda)} \left[|x - x(t)|^2 \delta_{kl} - (x_k - x_k(t))(x_l - x_l(t)) \right] dx$$

откуда вытекает следующее равенство, связывающее $J(\lambda)$ с тензором инерции $J = J(Q)$ тела вращения $Q = Q_1(e^1)$ единичного диаметра с единичной удельной плотностью и с осью вращения направленной по орту e^1 :

$$J(\lambda) = \rho_{\text{ч}} d^5 \left[A(\lambda) J A^{-1}(\lambda) \right],$$

где $A(\lambda)$ – преобразование вращения переводящее λ в e^1 . Отсюда, учитывая, что в исходной системе координат тензор J диагональный с компонентами J_{11} , $J_{22} = J_{33}$, с помощью (3.4.7) получаем

$$J_{kl}(\lambda) = \left[J_{22} \delta_{kl} + (J_{11} - J_{22}) \lambda_k \lambda_l \right] \rho_{\text{ч}} d^5,$$

$$(J^{-1}(\lambda))_{kl} = \left[J_{22}^{-1} \delta_{kl} - (J_{11}^{-1} - J_{22}^{-1}) \lambda_k \lambda_l \right] \rho_{\text{ч}}^{-1} d^{-5}.$$

Пользуясь этими равенствами и учитывая, что $\dot{\lambda} = \omega \times \lambda$, уравнение (2.2) приводим к виду

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & \frac{\mu}{\rho_{\text{ч}} d^3} DJ_0[\lambda \times (u - v)] + \frac{\mu}{\rho_{\text{ч}} d^2} \{ J_1[\text{rot } u - 2\omega] + \\ & + J_2(\text{rot } u - 2\omega, \lambda)\lambda + J_3[\lambda \times E[u]\lambda] \} + J_4[\omega \times \lambda](\omega, \lambda) + \\ & + \frac{1}{\rho_{\text{ч}} d^5} \{ J_0 M_{\text{вн}} + J_5(M_{\text{вн}}, \lambda)\lambda \}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где коэффициенты J_k ($k = 0, \dots, 5$) зависят лишь от формы частицы $Q_d(\lambda)$ и равны соответственно

$$J_0 = J_{22}^{-1}, \quad J_1 = \frac{1}{2}(C + B)J_{22}^{-1}, \quad J_2 = AJ_{11}^{-1} - \frac{1}{2}(C + B)J_{22}^{-1},$$

$$J_3 = (C - B)J_{22}^{-1}, \quad J_4 = 1 - J_{11}J_{22}^{-1}, \quad J_5 = J_{11}^{-1} - J_{22}^{-1}.$$

Дальше будем рассматривать лишь случаи, когда частица имеет плоскость симметрии перпендикулярную оси враще-

ния, т. е. $D = 0$. Предположим, что параметр $R = \frac{\mu}{\rho_ч d^2} \gg 1$, что является условием режима «вмороженных частиц». Тогда, делая естественное предположение, что $\omega(t)$ и $\dot{\omega}(t)$ остаются конечными при $R \rightarrow \infty$, из (2.3) получаем для $\omega(t)$ такое асимптотическое представление

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot } u + \frac{1}{2} J_1^{-1} J_3 [\lambda \times E[u]\lambda] + \frac{1}{2} J_1^{-1} J_0 M + \frac{1}{2} J_1^{-1} \left[J_5 - \frac{1}{2} J_2 (J_1 + J_2)^{-1} (J_0 + J_5) \right] (M, \lambda) \lambda + O\left(\frac{1}{R}\right), \quad (2.4)$$

где $M = \frac{1}{\mu d^3} M_{\text{вн}}$.

Подставляя это выражение в кинематическое равенство $\dot{\lambda} = \omega \times \lambda$, получаем приближенные дифференциальные уравнения для вектора ориентации λ

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} (\text{rot } u \times \lambda) + \frac{C - B}{C + B} [E[u]\lambda - (E[u]\lambda, \lambda)\lambda] + \frac{1}{\mu d^3 (C + B)} M_{\text{вн}} \times \lambda. \quad (2.5)$$

В частном случае, когда частица $Q_d(\lambda)$ – эллипсоид вращения и на нее не действует внешний момент, уравнение (2.5) переходит в известное уравнение Джеффри [73]

$$\dot{\lambda} = \Omega[u]\lambda + \frac{1 - r^2}{1 + r^2} [E[u]\lambda - (E[u]\lambda, \lambda)\lambda],$$

где $r = \frac{b}{a}$ – отношение полуосей эллипсоида, а $\Omega[u] = \{\omega_{kl}(u)\}_{k,l=1}^3$ и $E[u] = \{e_{kl}[u]\}_{k,l=1}^3$ – антисимметричная и симметричная часть тензора ∇u .

§ 3. Уравнение эволюции среднего вектора ориентации

В этом параграфе предполагается, что все частицы одинаковы, осесимметричны и распределены в несущей жидкости

случайно по координатам $x \in \Omega$, скоростям $v \in \mathbf{R}^3$ и ориентациям $\lambda \in S$. Их распределение задается функцией $F(x, v, \lambda, t)$ так, что в момент времени t количество частиц, центры масс которых находятся в элементарном объеме $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ в окрестности точки x , скорости в объеме $dv = dv_1 dv_2 dv_3$ в окрестности точки $v \in \mathbf{R}^3$, а векторы ориентации – в телесном угле $d\lambda = \sin\theta d\theta d\varphi$ в окрестности направления λ ($|\lambda| = 1$), равно $F(x, v, \lambda, t) dx dv d\lambda$.

Функция распределения $F(x, v, \lambda, t) \geq 0$ определена на декартовом произведении $\Omega \times \mathbf{R}^3 \times S \times [0, \infty)$ и при отсутствии столкновений между частицами удовлетворяет уравнению типа Фоккера-Планка ([11],[49])

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (v, \nabla)F + \operatorname{div}_v(\dot{v}F) + \operatorname{div}_\lambda(\dot{\lambda}F) = \sigma \Delta_\lambda F, \quad (3.1)$$

где Δ_λ – оператор Бельтрами-Лапласа на единичной сфере S , σ – параметр характеризующий влияние на ориентацию частиц случайных токов от броуновского движения молекул несущей жидкости.

Замечание. Здесь учитывается влияние броуновского движения только на ориентацию, т.к. тензор инерции частиц значительно меньше их массы – он имеет порядок 5-й степени диаметра частицы (см. § 2).

Как было отмечено в главе 3, функция распределения обладает симметрией $F(x, v, \lambda, t) = F(x, v, -\lambda, t)$, что при формальном определении среднего вектора ориентации частиц дает нулевое значение. Чтобы ввести понятие среднего вектора ориентации будем предполагать, что функция распределения $F(x, v, \lambda, t)$ представима в виде (см. § гл. 3)

$$F(x, v, \lambda, t) = \frac{1}{2}(\tilde{F}(x, v, \lambda, t) + \tilde{F}(x, v, -\lambda, t)),$$

где $\tilde{F}(x, v, \lambda, t)$ некоторая неотрицательная функция, удовле-

творяющая уравнению (3.1), но не обладающая указанной симметрией по λ .

Замечание. Достаточно потребовать, чтобы такое представление выполнялось при $t = 0$, тогда в силу (3.1) оно будет выполняться при всех $t > 0$.

Введем плотность числа частиц в точке x в момент времени t

$$n(x, t) = \iint_{S_{\mathbf{R}^3}} F(x, v, \lambda, t) dv d\lambda = \iint_{S_{\mathbf{R}^3}} \tilde{F}(x, v, \lambda, t) dv d\lambda \quad (3.2)$$

и средний вектор ориентации

$$\tilde{\lambda}(x, t) = \frac{1}{n(x, t)} \iint_{S_{\mathbf{R}^3}} \lambda \tilde{F}(x, v, \lambda, t) dv d\lambda \quad (\neq 0). \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.1) следует, что $n(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(v \cdot n) = 0, \quad (3.4)$$

где $v = v(x, t)$ – средняя скорость центров масс частиц

$$v(x, t) = \frac{1}{n(x, t)} \iint_{S_{\mathbf{R}^3}} v F(x, t, v, \lambda) dv d\lambda.$$

В этом легко убедиться, проинтегрировав (3.1) по $v \in \mathbf{R}^3$ и $\lambda \in S$ и, предположив, что F , \dot{v} , $\dot{\lambda}$ – достаточно гладкие функции от v и λ и достаточно быстро стремятся к нулю при $|v| \rightarrow \infty$. Заметим, что плотность числа частиц $n(x, t)$ и объемная плотность твердой фазы суспензии связаны равенством $c(x, t) = \tau N^{-1} n(x, t)$, где τ – объем одной частицы, а $N = \iiint F(x, v, \lambda, t) dx dv d\lambda$ – их общее число. Следовательно, уравнения (2.4.26) и (3.4) согласованы, если средняя скорость частиц $v(x, t)$ и средняя скорость жидкости $u(x, t)$ одинаковы, что имеет место в режиме «вмороженных частиц». Поэтому дальше всюду вместо $v(x, t)$ будем писать $u(x, t)$.

Перейдем к выводу уравнения для среднего вектора ори-

ентации $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(x, t)$. Умножая уравнение (3.1) на λ_k ($k=1,2,3$) и интегрируя по $v \in \mathbf{R}^3$ и $\lambda \in S$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\lambda}_k}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \tilde{\lambda}_k + \frac{1}{n(x, t)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (n \cdot \langle v'_i, \lambda'_i \rangle) + \\ + \int_S \operatorname{div}_\lambda (\dot{\lambda} \cdot f) \lambda_k d\lambda - \sigma \int_S \Delta_\lambda f \cdot \lambda_k d\lambda = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $v'_i = v_i - u_i(x, t)$, $\lambda'_k = \lambda_k - \tilde{\lambda}_k(x, t)$ – флуктуации скорости и ориентации частиц,

$$\langle v'_i, \lambda'_k \rangle = \int_{S \mathbf{R}^3} v'_i \lambda'_k \tilde{F}(x, v, \lambda, t) dv d\lambda,$$

и

$$f(\lambda, x, t) = \frac{1}{n(x, t)} \int_{\mathbf{R}^3} \tilde{F}(x, v, \lambda, t) dv. \quad (3.6)$$

При этом следует учесть уравнение (3.4) и соленоидальность $v(x, t) = u(x, t)$.

Преобразуем последние два слагаемых в (3.5) с помощью равенства

$$\operatorname{div}\{v(\lambda) \cdot \delta(1-|\lambda|^2)\} = \operatorname{div}_\lambda \{v(\lambda)\} \delta(1-|\lambda|^2), \quad (3.7)$$

где $v(\lambda)$ – вектор в \mathbf{R}^3 , касательный к S и не зависящий от $|\lambda|$ в некотором сферическом слое T_S вокруг S , $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $\operatorname{div}_\lambda v = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$ – операция дивергенции по сфере S .

Для этого продолжим функцию $f(\lambda, x, t)$ по λ с S в \mathbf{R}^3 так, чтобы ее продолжение \tilde{f} было гладкой и финитной в \mathbf{R}^3 по λ , постоянной по $|\lambda|$ в слое T_S . Тогда, используя (3.7), с помощью интегрирования по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \int_S \Delta_\lambda f \lambda_k d\lambda &= \int_S \operatorname{div}[\nabla_\lambda f] \lambda_k d\lambda = \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \operatorname{div}[\nabla_\lambda \tilde{f} \delta(1-|\lambda|^2)] \lambda_k d\lambda = - \int_{\mathbf{R}^3} (\nabla_\lambda \tilde{f}, e^k) \delta(1-|\lambda|^2) d\lambda = \\ &= \int_{\mathbf{R}^3} \tilde{f} \operatorname{div}[e^k(\lambda) \delta(1-|\lambda|^2)] d\lambda = \int_S \operatorname{div}_\lambda [e^k(\lambda)] f d\lambda, \end{aligned}$$

где e^k – орт оси x_k , $e^k(\lambda) = e^k - \frac{\lambda}{|\lambda|^2}(e^k, \lambda)$ – его проекция на плоскость перпендикулярную вектору λ . Нетрудно убедиться, что $\operatorname{div}_\lambda e^k(\lambda) = \operatorname{div} e^k(\lambda)|_{|\lambda|=1} = -2\lambda_k$. Следовательно, в силу (3.3) и (3.6)

$$\int_S \Delta_\lambda f \cdot \lambda_k ds = -2\tilde{\lambda}_k(x, t). \quad (3.8)$$

Аналогично с помощью (3.7) получаем

$$\int_S \operatorname{div}_\lambda [\dot{\lambda} f] \lambda_k d\lambda = - \int_S \dot{\lambda}_k f(\lambda, x, t) d\lambda. \quad (3.9)$$

Если пренебречь внешним моментом ($M_{\text{вн}} = o(\mu d^3)$), то, согласно (2.5), компоненты λ_k вектора ориентации частицы $Q_d(\lambda)$, находящейся в точке x в потоке жидкости, движущейся со скоростью $u(x, t)$, удовлетворяют уравнению

$$\dot{\lambda}_k = \sum_{p=1}^3 \omega_{kp} [u] \lambda_p + \gamma \left\{ \sum_{p=1}^3 e_{kp} [u] \lambda_p - \lambda_k \sum_{p,q=1}^3 e_{pq} [u] \lambda_p \lambda_q \right\}, \quad (3.10)$$

где $\gamma = \frac{C - B}{C + B}$.

Подставляя (3.10) в правую часть (3.9) и учитывая (3.3), (3.6), получаем

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{div}_\lambda [\dot{\lambda} \cdot f] \lambda_k d\lambda &= \sum_{p=1}^3 \omega_{kp} [u] \tilde{\lambda}_p(x, t) + \gamma \sum_{p=1}^3 e_{kp} [u] \tilde{\lambda}_p(x, t) - \\ &- \gamma \int_S \sum_{p,q=1}^3 e_{pq} [u] \lambda_p \lambda_q \lambda_k f(\lambda, x, t) d\lambda. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Последнее слагаемое правой части этого равенства в общем случае не удастся выразить через средний вектор ориентации. Поэтому будем предполагать, что среднее распределение $f(\lambda, x, t)$ имеет такой же вид как в §4 главы 3, т.е. $f(\lambda, x, t) = f(\lambda, |\tilde{\lambda}|)$, где $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(x, t)$ – средний вектор ориентации частиц. Тогда, переходя к системе координат, связанной с $\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(x, t)$, с помощью таких же, как и в §4 главы 3 вычислений, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{S^{n,p=1}}^3 e_{np}[u] \lambda_p \lambda_q \lambda_k f(\lambda, x, t) d\lambda = \\
& = \sum_{p,q=1}^3 e_{np}[u] \frac{\tilde{\lambda}_p \tilde{\lambda}_q \tilde{\lambda}_k}{|\tilde{\lambda}|^3} 2\pi \int_0^\pi \tilde{f}(\theta, |\tilde{\lambda}|) \cos^3 \theta \sin \theta d\theta + \\
& + \left\{ \sum_{p,q=1}^3 e_{pq}[u] \left[\frac{\tilde{\lambda}_p}{|\tilde{\lambda}|} \left(\delta_{kq} - \frac{\tilde{\lambda}_k \tilde{\lambda}_q}{|\tilde{\lambda}|^2} \right) + \frac{\tilde{\lambda}_k}{|\tilde{\lambda}|} \left(\delta_{pq} - \frac{\tilde{\lambda}_p \tilde{\lambda}_q}{|\tilde{\lambda}|^2} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\tilde{\lambda}_q}{|\tilde{\lambda}|} \left(\delta_{kp} - \frac{\tilde{\lambda}_k \tilde{\lambda}_p}{|\tilde{\lambda}|^2} \right) \right] \right\} \pi \int_0^\pi \tilde{f}(\theta, |\tilde{\lambda}|) \cos \theta \sin^3 \theta d\theta.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\operatorname{div} u = 0$, это равенство можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\int_S \sum_{k,p=1}^3 e_{np}[u] \lambda_p \lambda_q \lambda_k f(\lambda, x, t) d\lambda &= q_1(|\tilde{\lambda}|) \sum_{p=1}^3 e_{kp}[u] \tilde{\lambda}_p + \\
&+ q_2(|\tilde{\lambda}|) \sum_{p,q=1}^3 e_{pq}[u] \tilde{\lambda}_p \tilde{\lambda}_q \tilde{\lambda}_k.
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
q_1(|\tilde{\lambda}|) &= \frac{2\pi}{|\tilde{\lambda}|} \int_0^\pi \tilde{f}(\theta, |\tilde{\lambda}|) \sin^3 \theta \cos \theta d\theta, \\
q_2(|\tilde{\lambda}|) &= \frac{\pi}{|\tilde{\lambda}|^3} \int_0^\pi \tilde{f}(\theta, |\tilde{\lambda}|) \cos^3 \theta \sin \theta d\theta - \\
&- \frac{3\pi}{|\tilde{\lambda}|^3} \int_0^\pi \tilde{f}(\theta, |\tilde{\lambda}|) \sin^3 \theta \cos \theta d\theta.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Следовательно, согласно (3.11)

$$\begin{aligned}
\int_S \operatorname{div}_\lambda [\dot{\lambda} \tilde{f}] \lambda_k d\lambda &= \sum_{p=1}^3 \omega_{kp}[u] \tilde{\lambda}_p + \\
&+ g_1(|\tilde{\lambda}|) \tilde{\lambda}_k \sum_{p=1}^3 e_{kp}[u] \tilde{\lambda}_p - g_2(|\tilde{\lambda}|) \tilde{\lambda}_k \sum_{p,q=1}^3 e_{pq}[u] \tilde{\lambda}_p \tilde{\lambda}_q,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$$g_1(|\tilde{\lambda}|) = \gamma[1 - q_1(|\tilde{\lambda}|)], \quad g_2(|\tilde{\lambda}|) = \gamma q_2(|\tilde{\lambda}|). \tag{3.14}$$

Рассмотрим теперь третье слагаемое в (3.5). По аналогии со статистической гидромеханикой, воспользуемся гипотезой Бусинеска-Рейнольдса (см. [37]), согласно которой

$\langle v'_i, \lambda'_k \rangle = -\alpha \frac{\partial \tilde{\lambda}_k(x, t)}{\partial x_i}$, где $\alpha > 0$ – коэффициент переноса. Тогда

получаем

$$\frac{1}{n(x,t)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} [n(x,t) \langle u'_i, \lambda'_k \rangle] = -\frac{\alpha}{c(x,t)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[c(x,t) \frac{\partial \tilde{\lambda}_k}{\partial x_i} \right], \quad (3.15)$$

где $c(x,t) = \frac{\tau \cdot n(x,t)}{N}$ – объемная плотность частиц.

Таким образом, объединяя формулы (3.5), (3.8), (3.13), (3.15), приходим к следующему уравнению для среднего вектора ориентации $\lambda(x,t)$ (здесь и в дальнейшем при его обозначении опускаем волну сверху)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \lambda - \frac{\alpha}{c(x,t)} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[c(x,t) \frac{\partial \lambda}{\partial x_k} \right] + \beta \lambda = \\ = \Omega[u] \lambda + g_1(|\lambda|) E[u] \lambda - g_2(|\lambda|) (E[u] \lambda, \lambda) \lambda, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\beta = 2\sigma$, а функции g_1 и g_2 определены формулами (3.14), (3.12). В случае распределения $f(\lambda, x, t) = f(\theta, |\tilde{\lambda}(x, t)|)$, заданного формулой (3.4.2), эти функции имеют вид

$$\begin{aligned} g_1(|\lambda|) &= \gamma \left(1 + 6\sigma^2 + \frac{2\sigma^2}{|\lambda|} \right), \\ g_2(|\lambda|) &= \gamma \left[\frac{1}{|\lambda|^2} (1 + 15\sigma^4) - \frac{5}{|\lambda|^3} \sigma^2 \right], \end{aligned}$$

где $\sigma = \sigma(|\lambda|)$ связано с $|\lambda|$ равенством $|\lambda| = \frac{1}{\text{th } \sigma^{-2}} - \sigma^2$.

Отметим, что на отрезке $[0, 1]$ – естественной области изменения модуля среднего вектора ориентации, они представимы в виде:

$$g_i(|\lambda|) = \gamma + g_i(|\lambda|)(1 - |\lambda|), \quad (3.17)$$

где $g_i(|\lambda|) \in C^1([0, 1])$. Это равенство будет использовано в §5 при доказательстве глобальной разрешимости замкнутой системы уравнений движения суспензии осесимметричных частиц.

§ 4. Замкнутые системы уравнений, описывающие движение суспензии в режиме замороженных частиц

С помощью формул (3.4.12), (3.4.13) для среднего тензора вязкости и уравнения (3.16) для среднего вектора ориентации, замкнем полученную в главе 2 усредненную систему уравнений (2.4.1), (2.4.26). В результате приходим к следующей системе уравнений движения суспензии в режиме «замороженных частиц»

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] - 2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} \{ a_{npqr}(c, \lambda) e_{np}[u] \} e^q + \nabla p = \rho f, \quad (4.1)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \lambda - \frac{\alpha}{c(x, t)} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(c(x, t) \frac{\partial \lambda}{\partial x_j} \right) + \beta \lambda = \\ = \Omega[u] \lambda + g_1(|\lambda|) E[u] \lambda - g_2(|\lambda|) (E[u] \lambda, \lambda) \lambda, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (u \cdot \nabla) c = 0, \quad (4.4)$$

где $\rho = \rho(x, t)$ – средняя плотность суспензии, связанная с объемной концентрацией твердой фазы $c=c(x, t)$ равенством

$$\rho(x, t) = \rho_{\text{ж}}(1 - c(x, t)) + \rho_{\text{ч}}c(x, t), \quad (4.5)$$

а $\{ a_{npqr}(c, \lambda) \}$ – средний тензор вязкости суспензии, выражающийся через $c=c(x, t)$ и средний вектор ориентации λ , согласно формуле

$$\begin{aligned} a_{npqr}(c, \lambda) = \mu \mathbf{I}_{npqr} + \mu c \left\{ A_{npqr}(|\lambda|) + \frac{B(|\lambda|)}{|\lambda|^2} [\delta_{pr} \lambda_n \lambda_q + \right. \\ \left. + \delta_{nq} \lambda_p \lambda_r + \delta_{pq} \lambda_n \lambda_r + \delta_{nr} \lambda_p \lambda_q] + \frac{C(|\lambda|)}{|\lambda|^2} [\delta_{qr} \lambda_n \lambda_p + \delta_{np} \lambda_q \lambda_r] + \right. \\ \left. + \frac{D(|\lambda|)}{|\lambda|^4} \lambda_n \lambda_p \lambda_q \lambda_r \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Напомним, что через $E[u]$, $\Omega[u]$ обозначаются соответственно симметричная и антисимметричная часть тензора градиента скорости течения, $\rho_{\text{ж}}$, μ – удельная плотность и динамическая вязкость несущей жидкости, $\rho_{\text{ч}}$ – удельная плотность веществ-

ва частиц, α, β – параметры характеризующие стохастичность течения.

Следует отметить, что замкнутая система уравнений (3.18) – (3.23), получена в предположениях §§ 3, 4 главы 3, т.е. когда объемная концентрация частиц мала. Но тогда функции $c(x,t)$, $\rho(x)$, $a_{npqr}(c,\lambda)$ близки соответственно к 0, ρ_j , μ_{npqr} , т.е. данная система является слабым возмущением исходной системы уравнений Навье-Стокса.

Частицы, находящиеся в потоке вязкой несжимаемой жидкости, испытывают как регулярное воздействие со стороны жидкости, так и случайные толчки, обусловленные броуновским движением молекул жидкости. В режиме слабых течений, характеризуемых малой скоростью несущей жидкости, преобладающим фактором является дезориентирующее влияние броуновского движения, в результате чего векторы ориентации частиц могут оказаться распределенными почти равномерно на единичной сфере. Как было показано в главе 3 в этом случае среднее значение тензора вязкости есть изотропный тензор, определенный при малых концентрациях частиц асимптотическим равенством (3.4.14), т. е. влияние большого числа частиц в жидкости проявляется в увеличении эффективной вязкости $\mu_{\text{эф}}$ суспензии, которая согласно формуле (3.4.15) зависит от объемной концентрации $c(x, t)$ частиц или, что то же от средней массовой плотности суспензии $\rho(x,t)$ (4.5).

Таким образом движение суспензии осесимметричных частиц при равномерном распределении ориентаций, описывается следующей замкнутой системой уравнений

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu_{\text{эф}}(\rho) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] + \nabla p = \rho f, \quad (4.7)$$

$$\text{div } u = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = 0, \quad (4.9)$$

где $\mu_{\text{эф}}(\rho)$ – некоторая функция от $\rho(x, t)$, которая при малых объемных концентрациях частиц имеет вид

$$\mu_{\text{эф}}(\rho) = \mu[a + b\rho(x, t)] \quad (4.10)$$

a, b – коэффициенты, зависящие от формы частиц и удельных плотностей $\rho_{\text{ж}}, \rho_{\text{ч}}$ (например, согласно (3.4.16) и (4.5)

$$a = \frac{2\rho_{\text{ч}} - 7\rho_{\text{ж}}}{2(\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{ж}})}, \quad b = \frac{5}{2(\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{ж}})} \text{ в случае шаров).}$$

Система (4.7) – (4.9) известна как модель движения вязкой несжимаемой неоднородной жидкости.

Если пренебречь воздействием на частицы, обусловленным броуновским движением молекул несущей жидкости, то движение суспензии описывается системой уравнений (4.1)–(4.6) при $\alpha=0$ и $\beta=0$. Если, к тому же, дисперсия σ распределения ориентаций частиц в начальный момент равня 0, и, значит, $|\lambda(x,0)|=1$, то из уравнения (4.3) (при $\alpha=\beta=0$) следует, что $|\lambda(x,t)|=1 \quad (\forall t \geq 0)$ и, значит, согласно (3.14) $g_i(|\lambda|) = \gamma = \text{const}$. Тогда система уравнений (4.1)–(4.6) упрощается и приобретает вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_r} \{ a_{npqr}(c, \lambda) e_{np}[u] \} e^q + \nabla p = \rho f, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial \lambda}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \lambda = \Omega[u] \lambda + \gamma E[u] \lambda - \gamma (E[u] \lambda, \lambda) \lambda, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) c = 0, \end{aligned}$$

где $\rho(x, t) = \rho_{\text{ж}}(1 - c(x, t)) + \rho_{\text{ч}}c(x, t)$,

$$\begin{aligned} a_{npqr}(c, \lambda) = \mu \mathbf{I}_{npqr} + \mu c \{ A_{npqr} + B[\delta_{pr} \lambda_n \lambda_q + \delta_{np} \lambda_q \lambda_r + \delta_{pq} \lambda_n \lambda_r + \delta_{nr} \lambda_p \lambda_q] + \\ + C[\delta_{qr} \lambda_n \lambda_p + \delta_{np} \lambda_q \lambda_r] + D \lambda_n \lambda_p \lambda_q \lambda_r \}, \end{aligned}$$

а коэффициенты A_{npqr}, B, C, D определены формулами (3.3.3), (3.5.3).

Ясно, что проведенный выше вывод замкнутых систем уравнений движения суспензии в режиме замороженных частиц не вполне математически обоснован. В связи с этим возникает вопрос о непротиворечивости этих систем, т.е. их совместимости и разрешимости. В некоторой степени этот вопрос проясняется в следующем параграфе, где доказывается существование обобщенных решений начально-краевой задачи для системы (4.1)-(4.6). Разрешимость системы движения неоднородной жидкости (4.7)-(4.9) изучалась в [3], а системы (4.1)-(4.6) – в [30].

§5. О существовании обобщенных решений начально-краевой задачи для замкнутой системы усредненных уравнений движения суспензии осесимметричных частиц

Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^3 с границей $\partial\Omega = S$. Рассмотрим в области $\Omega_T = \Omega \times (0, T) \subset \mathbf{R}^4$ систему уравнений (4.1)-(4.4), где $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ – постоянные параметры, функции $\rho = \rho(c)$, $q_i(|\lambda|)$ ($i=1, 2$) определены равенствами (4.5) и (3.16), а $a_{npqr}(c, \lambda)$ ($n, p, q, r=1, 2, 3$) – непрерывно-дифференцируемые функции относительно аргументов $c \in (0, \infty)$, $\lambda \in S^2$, удовлетворяющие таким условиям симметрии: $a_{npqr}(c, \lambda) = a_{pnqr}(c, \lambda) = a_{qnrp}(c, \lambda)$, $a_{npqr}(c, \lambda) = a_{npqr}(c, -\lambda)$ и неравенству:

$$\sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(c, \lambda) R_{np} R_{qr} \geq \alpha_0 \sum_{n,p=1}^3 R_{np}^2, \quad \alpha_0 > 0. \quad (5.1)$$

Здесь R_{np} – элементы произвольной симметричной матрицы. В частности при малых c $a_{npqr}(c, \lambda)$ определены равенством (4.6).

Дополним систему (4.1)-(4.4) начальными условиями:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u^0(x), \quad c(x, 0) = c^0(x), \quad \lambda(x, 0) = \lambda^0(x), \\ 0 < C_0 \leq c^0(x) \leq 1, \quad |\lambda^0(x)| \leq 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

и граничными условиями вида:

$$u(x,t) = 0, \quad \lambda(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S_T = S \times (0,T). \quad (5.3)$$

Назовем обобщенным решением начально-краевой задачи (4.1)-(4.4), (5.2), (5.3) набор функций $\{u(x,t), c(x,t), \lambda(x,t)\}$, принадлежащих пространствам:

$$\begin{aligned} u(x,t) &\in L_\infty(0,T; J(\Omega)) \cap L_2(0,T; \overset{\circ}{J}^1(\Omega)); \\ c(x,t) &\in L_\infty(\Omega \times [0,T]) \cap C(0,T; L_2(\Omega)): \quad C_0 \leq c(x,t) \leq 1; \\ \lambda(x,t) &\in L_\infty(\Omega \times [0,T]) \cap L_2(0,T; W_2^1(\Omega)): \quad |\lambda| \leq 1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

и удовлетворяющих следующим интегральным тождествам:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ \int_\Omega \rho(u, \xi_t + (u \cdot \nabla)\xi) dx - \int_\Omega \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(c, \lambda) \frac{\partial u_n}{\partial x_p} \frac{\partial \xi_q}{\partial x_r} dx + \right. \\ \left. + \int_\Omega \rho(f, \xi) dx \right\} dt + \int_\Omega \rho^0(u^0, \xi(0)) dx = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $\rho = \rho_{\text{ж}} + (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{ж}})c$, $\rho^0 = \rho_{\text{ж}} + (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{ж}})c^0$;

$$\int_0^T \int_\Omega c(\eta_t + (u \cdot \nabla)\eta) dx dt + \int_\Omega c^0 \eta(0) dx = 0; \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ \int_\Omega c(\lambda, \zeta_t + (u \cdot \nabla)\zeta) dx - \alpha \int_\Omega c(\nabla \lambda, \nabla \zeta) dx - \beta \int_\Omega c(\lambda, \zeta) dx + \right. \\ \left. + \int_\Omega c(\Omega[u]\lambda, \zeta) dx + \int_\Omega c g_1(|\lambda|)(E[u]\lambda, \zeta) dx - \right. \\ \left. - \int_\Omega c g_2(|\lambda|)(E[u]\lambda, \lambda)(\lambda, \zeta) dx \right\} dt + \int_\Omega c^0(\lambda^0, \zeta(0)) dx = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

для любых $\xi(x,t) \in C^1(0,T; \overset{\circ}{J}^1(\Omega))$, $\eta(x,t) \in C^1(0,T; W_2^1(\Omega))$, $\zeta(x,t) \in C^1(0,T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ таких, что $\xi(x,T) = \eta(x,T) = \zeta(x,T) = 0$.

Напомним, что через $E[u]$ и $\Omega[u]$ обозначаются соответственно симметричная и антисимметричная части тензора ∇u .

В силу (5.4) все интегралы в этих тождествах сходятся.

Замечание. Нетрудно убедиться, что любое достаточно гладкое решение начально-краевой задачи (4.1)-(4.4), (5.2), (5.3) удовлетворяет этим тождествам, чем и мотивировано данное определение обобщенного решения.

Сформулируем теперь основной результат этого параграфа.

Теорема 5.1. Пусть $f(x,t) \in L_1(0,T;L_2(\Omega))$, $c^0(x) \in J(\Omega)$: $0 < C_0 \leq c^0(x) < 1$, $\lambda^0(x) \in W_2^1(\Omega)$: $|\lambda^0(x)| \leq 1$ и выполняется неравенство (5.1). Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи (4.1)-(4.4), (5.2), (5.3).

Замечание. Такие обобщенные решения являются аналогами слабых решений класса Хопфа для уравнения Навье-Стокса [17]. Единственность решения такого класса в трехмерном пространстве доказать не удалось.

Доказательство теоремы 5.1 проводится в п. 2-5 методом аналогичным модифицированному методу Галеркина, развитому в [3].

Будем искать приближенные решения $u^N(x,t)$ уравнений (4.1), (4.2) в виде суммы:

$$u^N(x,t) = \sum_{i=1}^k a_i^N(t) \psi^i(x), \quad (5.8)$$

где $a_i^N(t) \in C^1[0,T]$ – неизвестные функции, а $\psi^i(x)$ ($i=1, 2, \dots$) ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$, состоящий из собственных функций задачи

$$\begin{aligned} -\Delta \psi^i(x) + \nabla q^i(x) &= \mu_i \psi^i(x), \quad \operatorname{div} \psi^i(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ \psi^i(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Приближения $c^N(x,t)$, $\lambda^N(x,t)$ для концентрации частиц и вектора ориентации $\lambda(x,t)$ будем находить как решения следующих задач:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c^N}{\partial t} + (u^N \cdot \nabla) c^N &= 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ c^N(x,0) &= c^{0N}(x), \quad x \in \Omega \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

и, соответственно,

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial \lambda^N}{\partial t} + (u^N \cdot \nabla) \lambda^N - \frac{\alpha}{c^N} \operatorname{div}[c^N \nabla \lambda^N] + \beta \lambda^N = \\ & = \Omega[u^N] \lambda^N + g_1(|\lambda^N|) E[u^N] \lambda^N - g_2(|\lambda^N|) (E[u^N] \lambda^N, \lambda^N) \lambda^N, \\ & \qquad \qquad \qquad (x, t) \in \Omega_T, \\ & \lambda^N(x, t) = 0, \quad x \in S_T; \quad \lambda^N(x, 0) = \lambda^{0N}(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

где $c^{0N}(x)$ и $\lambda^{0N}(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемые в Ω функции такие, что $C_0 \leq c^{0N}(x) < 1$, $|\lambda^{0N}| \leq 1$, $\lambda^{0N}(x) = 0$ при $x \in S_T$, и $c^{0N}(x) \rightarrow c^0(x)$, $\lambda^{0N}(x) \rightarrow \lambda^0(x)$ в $L_q(\Omega)$ ($q > 1$) при $N \rightarrow \infty$.

Для определения функций $a_i^N(t)$ потребуем, чтобы тождество (5.5) выполнялось для (u^N, c^N, λ^N) на вектор-функциях $\xi(x, t) = h(t) \psi^j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, N$), где $h(t)$ – произвольные функции такие, что $h(t) \in C^1[0, T]$ и $h(T) = 0$. Тогда, учитывая (5.10), заключаем, что при $\forall t \in [0, T]$ должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho^N [u_t^N + (u^N \cdot \nabla) u^N], \psi^j) dx + \int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(c^N, \lambda^N) \frac{\partial u_n^N}{\partial x_p} \frac{\partial \psi_q^j}{\partial x_r} dx = \\ = \int_{\Omega} (\rho^N f, \psi^j) dx, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где $\rho^N(x, t) = \rho_{ж} + (\rho_{ч} - \rho_{ж}) c^N(x, t)$, а $c^N(x, t)$, $\lambda^N(x, t)$ – решения задач (5.10), (5.11).

В силу (5.8) эти соотношения эквивалентны следующей системе нелинейных дифференциальных уравнений для функций $a_j^N(t)$ ($j=1, \dots, N$):

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{jl}^N \frac{da_j^N}{dt} + \sum_{i,j=1}^N \beta_{ijl}^N a_i^N a_j^N + \sum_{j=1}^N \gamma_{jl}^N a_j^N = F_l^N \quad (l=1, \dots, N), \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{jl}^N &= \int_{\Omega} \rho^N (\psi^j, \psi^l) dx, \quad \beta_{ijl}^N = \int_{\Omega} (\rho^N (\psi^i \cdot \nabla) \psi^j, \psi^l) dx, \\ \gamma_{jl}^N &= \int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(c^N, \lambda^N) \frac{\partial \psi_n^j}{\partial x_p} \frac{\partial \psi_q^l}{\partial x_r} dx, \quad F_l^N = \int_{\Omega} \rho^N (f, \psi^l) dx. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Начальные условия для этой системы полагаем равными:

$$a_j^N(0) = a_j^0 \quad (j=1, \dots, N), \quad (5.15)$$

где a_j^0 – коэффициенты разложения $u^0(x)$ по базису $\psi^j(x)$,

$$\text{т.е. } u^0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j^0 \psi^j(x).$$

Заметим, что коэффициенты α_{jl}^N , β_{ijl}^N , γ_{jl}^N зависят от a_k^N ($k=1, \dots, N$) через посредство ρ^N , c^N и λ^N , где c^N , λ^N – решения задач (5.10), (5.11) при $u^N(x, t) = \sum a_j^N(t) \psi^j(x)$.

Лемма 5.1. *Предположим $a_j^N(t) \in C^1[0, T]$. Тогда при любом $N \in \mathbb{N}$ существуют единственные решения $c^N(x, t)$, $\lambda^N(x, t)$ задач (5.10), (5.11), причем справедливы оценки:*

$$0 < C_0 \leq c^N(x, t) < 1, \quad (5.16)$$

$$|\lambda^N(x, t)| \leq 1, \quad (5.17)$$

$$\|\nabla \lambda^N\|_{L_2(\Omega_T)} \leq C_1 \|\nabla u^N\|_{L_2(\Omega_T)} + C_2, \quad (5.18)$$

где постоянные C_1 и C_2 не зависят от N .

Доказательство. В силу гладкости функций $a_j^N(t)$ и собственных функций $\psi^j(x)$ задачи (5.9) вектор-функции $u^N(x, t)$ согласно (5.8) гладкие в Ω_T и равны нулю на S_T . Начальные данные $c^{0N}(x)$ задачи (5.10) тоже гладкие. Поэтому, согласно [21], существует единственное решение этой задачи и оно представимо в виде:

$$c^N(x, t) = c^{0N}(y^N(0, t, x)), \quad (5.19)$$

где $y^N(\tau, t, x)$ – решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dy^N}{d\tau} = u^N(y^N, \tau), \quad y^N(\tau, t, x) = x \text{ при } \tau = t. \quad (5.20)$$

Из (5.19) и свойств $c^{0N}(x)$ следует оценка (5.16).

Кроме того, так как решение задачи (5.20) дифференцируемо по параметрам x и t [21], то в силу гладкости $c^{0N}(x)$ и

$u^N(x,t)$, решение $c^N(x,t)$ также будет дифференцируемой функцией от x и t с производными удовлетворяющими условию Гельдера.

Обратимся теперь к задаче (5.11), где $c^N(x,t)$ – решение задачи (5.10). В уравнении (5.11) функции определены лишь при $|\lambda| \leq 1$. Доопределим их при $|\lambda| > 1$ так, чтобы представление (3.14) было справедливо при всех $|\lambda| > 0$ с финитными функциями $g_i \in C_0^1(0, \infty)$. Покажем, что при достаточно малых $T = T_1$ существует единственное решение $\lambda^N(x,t)$ задачи (5.11).

Уравнение (5.11) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda^N}{\partial t} + (v^N \cdot \nabla) \lambda^N - \alpha \Delta \lambda^N + \beta \lambda^N = \Omega[u^N] \lambda^N + \\ + g_1(|\lambda^N|) E[u^N] \lambda^N - g_2(|\lambda^N|) (E[u^N] \lambda^N, \lambda^N) \lambda^N, \end{aligned} \quad (5.21)$$

где $v^N = u^N - \alpha \nabla \ln c^N$ – известная вектор-функция, которая в силу свойств гладкости $u^N(x,t)$, $c^N(x,t)$ и неравенства (5.16) дифференцируема в Ω_T и ее производные удовлетворяют условию Гельдера.

Обозначим через $G^N(x,t; y, \tau)$ функцию Грина задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^N}{\partial t} + (v^N \cdot \nabla) G^N - \alpha \Delta G^N = \delta(x-y) \delta(t-\tau), \quad (x,t) \in \Omega_T, y \in \Omega, \tau \leq t, \\ G^N(x,t; y, \tau) = 0, \quad (x,t) \in S_T. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Доказательство существования такой функции и исследования ее свойств приведены в [47]. Отметим два необходимых для дальнейшего свойства $G^N(x,t; y, \tau)$:

$$G^N(x,t; y, \tau) \geq 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, y \in \Omega, \tau \leq t, \quad (5.23)$$

$$\max_{\substack{(x,t) \in \Omega_T \\ \tau \leq t}} \int_{\Omega} G^N(x,t; y, \tau) dy \leq \Lambda^N, \quad (5.24)$$

где постоянная Λ^N зависит от α , $\text{mes } \Omega$ и $\|v^N\|_{C^1}$

Из определения функции Грина $G^N(x,t; y, \tau)$ и уравнения (5.21) следует, что решение $\lambda^N(x,t)$ задачи (5.11) удовлетворя-

ет такому нелинейному интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \lambda^N(x,t) = & \int_{\Omega} G^N(x,t;y,0)\lambda^{0N}(y)dy + \int_0^t \int_{\Omega} G^N(x,t;y,\tau) \{ \Omega[u^N]\lambda^N + \\ & + g_1(|\lambda^N|)E[u^N]\lambda^N - g_2(|\lambda^N|)(E[u^N]\lambda^N, \lambda^N)\lambda^N \} dyd\tau. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Введем метрическое пространство непрерывных вектор-функций $C_{\Lambda}(\Omega_{T_1})$ с нормой $\|\lambda\| = \max_{(x,t) \in \Omega_{T_1}} |\lambda(x,t)|$, не превосходящих 2Λ , где $\Lambda = \Lambda^N$ определено в условии (5.24). Запишем уравнение (5.25) в пространстве $C_{\Lambda}(\Omega_{T_1})$ в операторной форме $\lambda = \mathbf{G}(\lambda)$, где нелинейный оператор \mathbf{G} определен правой частью уравнения (5.25). Учитывая, что функции $g_i(|\lambda|)$ ограничены в $C^1[0, \infty)$, легко показать, что оператор \mathbf{G} переводит пространство $C_{\Lambda}(\Omega_{T_1})$ в себя и при достаточно малом T_1 является сжимающим. При этом величина T_1 зависит от N через посредство $\max_{(x,t) \in \Omega_T} |\nabla u^N|$ и $\Lambda = \Lambda^N$. Следовательно, уравнение (5.25) имеет единственное решение $\lambda^N(x,t) \in C_{\Lambda^N}(\Omega_{T_1})$ и, значит, $\max_{(x,t) \in \Omega_{T_1}} |\lambda^N(x,t)| \leq 2\Lambda^N$.

Применяя обычную технику исследования дифференцирования уравнения (5.25), убеждаемся, что $\lambda^N(x,t)$ является классическим решением задачи (5.11) при $T = T_1$ ($T_1 = T_{1N}$).

Покажем теперь, что для задачи (5.11) справедлив принцип максимума и, значит, $\max_{(x,t) \in \Omega_T} |\lambda^N(x,t)| \leq 1$.

Положим $\varphi^N(x,t) = 1 - |\lambda^N(x,t)|^2$. Нетрудно проверить, что $\varphi^N(x,t)$ является решением начально-краевой задачи (для сокращения записи индекс N опускается)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \varphi - \alpha \Delta \varphi + A(x,t) \varphi = B(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$\varphi(x,t) = 1, \quad (x,t) \in S_T; \quad \varphi(x,0) = \varphi^0(x),$$

где

$$\varphi^0(x) = 1 - |\lambda^0(x)|^2 \geq 0,$$

$$B(x,t) = \alpha \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial \lambda_j^2(x,t)}{\partial x_i} \right)^2 + \beta \geq 0,$$

$$A(x,t) = 2 \frac{(g_1(|\lambda|) - g_2(|\lambda|)) |\lambda|^2}{1 - |\lambda|^2} (E[u]\lambda, \lambda) + \beta.$$

Учитывая гладкость $\lambda^N(x,t)$ и свойства функций $g_i(|\lambda|)$ (см. (3.16)), можно показать, что $A(x,t)$ удовлетворяет условию Гельдера в Ω_T . Следовательно, функции $A_+(x,t) = \frac{1}{2}(|A| + A)$ и $A_-(x,t) = \frac{1}{2}(|A| - A)$ также удовлетворяют условию Гельдера, причем $A_{\pm} \geq 0$.

Представим функцию $\varphi(x,t)$ в виде:

$$\varphi(x,t) = \psi(x,t) + \gamma(x,t), \quad (5.26)$$

где $\psi(x,t)$ и $\gamma(x,t)$ – решения следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \psi - \alpha \Delta \psi + A_+ \psi &= B, \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ \psi(x,t) &= 1, \quad (x,t) \in S_T; \quad \psi(x,0) = \varphi^0(x) \end{aligned} \quad (5.27)$$

и, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \gamma - \alpha \Delta \gamma + A_+ \gamma &= A_- \varphi, \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ \gamma(x,t) &= 0, \quad (x,t) \in S_T; \quad \gamma(x,0) = 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Так как $B(x,t) \geq 0$, $A_+(x,t) \geq 0$ и $\varphi^0(x) \geq 0$, то в силу принципа максимума [19] решение $\psi(x,t)$ задачи (5.27) неотрицательно.

Обозначим $G_+(x,t; y, \tau)$ функцию Грина задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_+}{\partial t} + (v \cdot \nabla) G_+ - \alpha \Delta G_+ + A_+(x,t) G_+ &= \delta(x-y) \delta(t-\tau), \quad (x,t) \in \Omega_T, \\ G_+(x,t; y, \tau) &= 0, \quad (x,t) \in S_T, y \in \Omega_T, \tau \leq t. \end{aligned}$$

Согласно [47] такая функция существует, удовлетворяет неравенствам (5.23), (5.24) и решение задачи (5.27) может быть представлено с помощью $G_+(x,t; y, \tau)$ в виде:

$$\gamma(x,t) = \int_0^t \int_{\Omega} G_+(x,t;y,\tau) A_-(y,\tau) \varphi(y,\tau) dy d\tau.$$

Отсюда, учитывая (5.23), получаем для функции $\varphi(x,t)$ интегральное уравнение, которое запишем в операторной форме:

$$\varphi - \hat{G}_+ \varphi = \psi, \quad (5.29)$$

где \hat{G}_+ – линейный оператор ($\hat{G}_+ : C(\Omega_{T_1}) \rightarrow C(\Omega_{T_1})$), определенный формулой:

$$\hat{G}_+[\varphi(x,t)] = \int_0^t \int_{\Omega} G_+(x,t;y,\tau) A_-(y,\tau) \varphi(y,\tau) dy d\tau.$$

Из свойств $G_+(x,t;y,\tau)$, $A_-(y,\tau)$ следует, что при достаточно малых T_1' ($T_1' \leq T_1$) $\|\hat{G}_+\|_{C(\Omega_{T_1}) \rightarrow C(\Omega_{T_1})} < 1$, причем T_1' зависит только от Λ^N , $\max_{(x,t) \in \Omega_T} |\nabla u^N|$, $\max_{|\lambda| \in [0,1]} \{g_i(|\lambda|), g_i'(|\lambda|)\}$. Поэтому уравнение (5.29) в пространстве $C(\Omega_{T_1'})$ можно решить методом последовательных приближений. Тогда, учитывая, что $\psi(x,t) \geq 0$, $G_+(x,t;y,\tau) \geq 0$ и $A_-(x,t) \geq 0$, заключаем, что $\varphi(x,t) \geq 0$. Таким образом $|\lambda^N(x,t)|^2 = 1 - \varphi(x,t) \leq 1$.

Теперь рассмотренный выше процесс построения решения задачи (5.11) повторим на отрезке $[T_1', T_2']$ с начальными данными при $t = T_1'$, $|\lambda^N(x, T_1')| \leq 1$. Ясно, что при этом длина отрезка $[T_1', T_2']$ не уменьшится. Этот процесс можно продолжить и таким образом построить решение $\lambda^N(x,t)$ задачи (5.11) на любом отрезке $[0, T]$, причем $|\lambda^N(x,t)| \leq 1$.

Остается получить оценку (5.18). Учитывая (5.10), запишем уравнение (5.11) в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [c^N \cdot \lambda^N] + (u^N \cdot \nabla)(c^N \cdot \lambda^N) - \alpha \operatorname{div}[c^N \nabla \lambda^N] + \beta c^N \lambda^N = \\ & = c^N \left\{ \Omega[u^N] \lambda^N + g_1(|\lambda^N|) E[|\lambda^N|] \lambda^N - g_2(|\lambda^N|) (E[|\lambda^N|] \lambda^N, \lambda^N) \lambda^N \right\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Умножим это уравнение скалярно на λ^N , а (5.11) на $c^N \lambda^N$,

полученные равенства сложим и проинтегрируем по области Ω . Тогда, учитывая антисимметричность матрицы $\Omega[u]$, солёноидальность $u^N(x,t)$ и граничное условие в (5.11), с помощью интегрирования по частям, получаем при $\forall t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} c^N |\lambda^N|^2 dx + 2\alpha \int_{\Omega} c^N |\nabla \lambda^N|^2 dx + 2\beta \int_{\Omega} c^N |\lambda^N|^2 dx = \\ & = 2 \int_{\Omega} c^N \{g_1(|\lambda^N|) - g_2(|\lambda^N|) |\lambda^N|^2\} (E[u^N] \lambda^N, \lambda^N) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу (5.16), (5.17) и ограниченности функций g_i ($i=1,2$), следует неравенство:

$$\begin{aligned} & C_0 \int_{\Omega} |\lambda^N(x,0)|^2 dx + 2\alpha C_0 \int_{\Omega_T} |\lambda^N|^2 dxdt + 2\beta C_0 \int_{\Omega_T} |\lambda^N|^2 dxdt \leq \\ & \leq C_1 \|\nabla u^N\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \int_{\Omega} |\lambda^N(x,0)|^2 dx, \end{aligned}$$

где постоянная C_1 не зависит от N . Из этого неравенства, в силу положительности α и равномерной по N ограниченности начальной вектор-функции $\lambda^N(x,0) = \lambda^{0N}(x)$, следует оценка (5.18). Лемма 5.1 доказана.

3. Рассмотрим теперь задачу (5.8), (5.10), (5.11), (5.13)-(5.15) в целом. Для ее решения $\{u^N, c^N, \lambda^N\}$ справедлива следующая

Лемма 5.2. *При любом $N \in \mathbb{N}$ существует единственное решение $\{u^N, c^N, \lambda^N\}$, причем выполняются равномерные по N оценки (5.16), (5.17) и*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u^N(t)\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla u^N\|_{L_2(\Omega_T)} \leq C_2, \quad (5.31)$$

$$\|\nabla \lambda^N\|_{L_2(\Omega_T)} \leq C_3, \quad (5.32)$$

где C_2, C_3 не зависят от N .

Доказательство. Прежде всего, заметим, что априорные оценки (5.16), (5.17) установлены в лемме 5.1.

Умножим равенство (5.12) на $a_j^N(t)$, просуммируем по j ($j=1, \dots, N$) и проинтегрируем по области Ω . Тогда, учитывая

(5.8), (5.10), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho^N |u^N|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(c^N, \lambda^N) \frac{\partial u_n^N}{\partial x_p} \frac{\partial u_q^N}{\partial x_r} = \\ = \int_{\Omega} (\rho^N f, u^N) dx. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Проинтегрируем это равенство по t от 0 до $T' \leq T$ и оценим правую часть с помощью неравенств Коши и Юнга. Тогда, с учетом положительной определенности тензора $\{a_{npqr}(c^N, \lambda^N)\}$ (см. 5.1), приходим к неравенству:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho^N(x, T') |u^N(x, T')|^2 dx + 2a_0 \int_{\Omega_T'} |\nabla u^N|^2 dx dt \leq \\ \leq \int_{\Omega} \rho^N(x, 0) |u^N(x, 0)|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega_T'} |u^N|^2 dx dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_T'} (\rho^N)^2 |f|^2 dx dt, \end{aligned}$$

где ε – произвольное положительное число.

Отсюда, учитывая, что в силу (5.16) $\rho_1 \leq \rho^N(x, t) \leq \rho_2$, где

$\rho_1 = \min(\rho_{ж}, \rho_{ч})$, $\rho_2 = \max(\rho_{ж}, \rho_{ч})$, и полагая $\varepsilon = \frac{\rho_1}{\alpha T}$, получаем:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t \leq T} \|u^N(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \frac{2\rho_2}{\rho_1} \|u^N(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{4\rho_2^2}{\rho_1} \|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2; \\ \|\nabla u^N\|_{L_2(\Omega_T)}^2 &\leq \frac{\rho_2}{2a_0} \|u^N(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{T\rho_2^2}{a_0} \|f\|_{L_2(\Omega_T)}^2. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Согласно (5.8), (5.15)

$$\|u^N(0)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^N |a_j^0|^2 \leq \int_{\Omega} |u^0|^2 dx.$$

и, значит, неравенства (5.34) приводят к оценке (5.31). Оценка (5.32) теперь следует из (5.18), (5.31).

С помощью полученных априорных оценок (5.16), (5.17), (5.31), (5.32) докажем существование решения $\{u^N, c^N, \lambda^N\}$ задачи (5.8), (5.10), (5.11), (5.13)-(5.15). Рассмотрим пространство $C[0, T]$ N -компонентных вектор-функций с нормой

$\|v^N\| = \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \sum_{i=1}^N |v_i^N(t)|^2 \right\}^{1/2}$. Введем оператор A , сопоставляющий

любой вектор-функции $a'^N(t) = \{a_1'^N, \dots, a_N'^N\} \in C[0, T]$ решение $a''^N(t) = \{a_1''^N, \dots, a_N''^N\}$ следующей линейной системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{jl}'^N \frac{da_j''^N}{dt} + \sum_{i,j=1}^N \beta_{ijl}'^N a_i''^N a_j''^N + \sum_{j=1}^N \gamma_{jl}'^N a_j''^N = F_l'^N \quad (l=1, \dots, N) \quad (5.35)$$

с начальными условиями $a_j''^N(0) = a_j^0$ (5.15).

Коэффициенты $\alpha_{jl}'^N$, $\beta_{ijl}'^N$, $\gamma_{jl}'^N$ и $F_l'^N$ вычисляются по формулам (5.14), где $c^N = c'^N$, $\lambda^N = \lambda'^N$ являются решениями задач (5.10), (5.11), в которых $u'^N = \sum_{j=1}^N a_j'^N(t) \psi^j(x)$. Матрицы $\alpha_{jl}'^N$ невырождены в силу линейной независимости системы $\{\psi^j(x)\}$ и, следовательно, линейная задача Коши для уравнения (5.33) имеет единственное решение $\{a_j''^N(t), j=1, \dots, N\}$, причем $\frac{da''^N}{dt} \in C[0, T]$. Полагая $u''^N = \sum_{j=1}^N a_j''^N \psi^j$, получаем из (5.35) систему интегральных тождеств:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\rho'^N [u_i''^N + (u''^N \cdot \nabla) u''^N], \psi^j) dx + \int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}'^N(c'^N, \lambda'^N) \frac{\partial u_n''^N}{\partial x_p} \frac{\partial \psi^j}{\partial x_r} dx = \\ = \int_{\Omega} (\rho'^N f, \psi^j) dx, \quad j=1, \dots, N. \end{aligned}$$

Эта система подобна (5.12) и, следовательно, для u''^N справедливо равенство, аналогичное (5.33):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho'^N |u''^N|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}'^N(c'^N, \lambda'^N) \frac{\partial u_n''^N}{\partial x_p} \frac{\partial u_q''^N}{\partial x_r} = \\ = \int_{\Omega} (\rho'^N f, u''^N) dx, \end{aligned}$$

из которого для u''^N следуют оценки (5.34).

Пользуясь равенством Парсеваля, из первой оценки (5.34) получаем:

$$\|a''^N\|^2 = \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{j=1}^N |a_j''^N(t)|^2 = \max_{0 \leq t \leq T} \|u''^N(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq m_0, \quad (5.36)$$

где постоянная m_0 не зависит от u'^N .

Обозначим через $G(m_0)$ выпуклое замкнутое множество в $L_2[0, T]$, состоящее из вектор-функций $a^N(t)$, удовлетворяющих условиям: $a_j^N(0) = a_j^0$ ($j=1, \dots, N$) и $\|a^N\| \leq m_0$. Из приведенных рассуждений и оценки (5.36) следует, что оператор A переводит множество $G(m_0)$ в себя. Докажем, что это множество компактно в $C[0, T]$. Для этого равенство (5.35) умножим на $\frac{da_l^{nN}}{dt}$ и просуммируем по l от 1 до N :

$$\begin{aligned} \sum_{j,l=1}^N \alpha'_{jl} \frac{da_j^{nN}}{dt} \frac{da_l^{nN}}{dt} + \sum_{i,j,l=1}^N \beta'_{ijl} a_i^{nN} a_j^{nN} \frac{da_l^{nN}}{dt} + \\ + \sum_{j,l=1}^N \gamma'_{jl} a_j^{nN} \frac{da_l^{nN}}{dt} = \sum_{l=1}^N F_l^{nN} \frac{da_l^{nN}}{dt}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Учитывая (5.8), (5.11), (5.16), получаем оценку снизу для первого слагаемого в (5.37):

$$\begin{aligned} \sum_{j,l=1}^N \alpha'_{jl} \frac{da_j^{nN}}{dt} \frac{da_l^{nN}}{dt} &= \int_{\Omega} \rho^{nN} \left| \frac{\partial u^{nN}}{\partial t} \right|^2 dx \geq \\ &\geq \rho_1 \left\| \frac{\partial u^{nN}}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 = \rho_1 \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial a_j^{nN}}{\partial t} \right|^2 \quad (\rho_1 = \min\{\rho_{ж}, \rho_{ч}\}). \end{aligned}$$

Все другие слагаемые оценим сверху с помощью неравенств Коши и Юнга. В результате, учитывая (5.14), приходим к неравенству:

$$\rho_1 \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial a_j^{nN}}{\partial t} \right|^2 \leq \varepsilon \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial a_j^{nN}}{\partial t} \right|^2 + \frac{A(m_0, N)}{\varepsilon} \sum_{j=1}^N |a_j^{nN}|^2,$$

где ε – любое положительное число и $A(m_0, N) = const$.

Отсюда, в силу (5.36), следует, что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial a_j^{nN}}{\partial t} \right|^2 \leq C(N).$$

Это неравенство вместе с (5.36) означает, что при любом фиксированном N вектор-функции из $G(m_0)$ равномерно непрерывны и равномерно ограничены на $[0, T]$. Поэтому, в

силу теоремы Арцела, множество $G(m_0)$ компактно в $C[0, T]$.

Наконец заметим, что оператор A непрерывен в $C[0, T]$. Это следует из непрерывной зависимости решений задачи Коши (5.35) (5.14) и начально-краевых задач (5.10), (5.11) от коэффициентов и гладкости функций $a_{npqr}(c'^N, \lambda'^N)$.

Таким образом установлено, что отображение $A: G(m_0) \rightarrow G(m_0)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Шаудера ([16], [76]) и, следовательно, оно имеет на множестве $G(m_0)$ хотя бы одну неподвижную точку $a^N(t) = \{a_1^N(t), \dots, a_N^N(t)\}$, которая и дает решение $\{u^N, c^N, \lambda^N\}$ задачи (5.8)-(5.13), (5.10), (5.11), удовлетворяющее оценкам (5.16)-(5.18), (5.31), (5.32). Эти оценки позволяют выделить подпоследовательность $\{u^{N_k}, c^{N_k}, \lambda^{N_k}\}$ сходящуюся при $N_k \rightarrow \infty$ к $\{u, c, \lambda\}$ в следующем смысле: u^{N_k} сходится к u *-слабо в $L_\infty(0, T; J(\Omega))$ и слабо в $L_2(0, T; J^1(\Omega))$; c^{N_k} сходится к c *-слабо в $L_\infty(\Omega_T)$; λ^{N_k} сходится к λ слабо в $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ и *-слабо в $L_\infty(\Omega_T)$. Но, в виду нелинейности задачи, этого оказывается недостаточно, чтобы показать, что $\{u, c, \lambda\}$ удовлетворяет интегральным тождествам (5.5)-(5.7). Для этого нужно установить более сильную компактность приближений $\{u^N, c^N, \lambda^N\}$.

Лемма 5.3. *Для любого δ ($0 \leq \delta \ll T$) справедливы оценки:*

$$\int_0^{T-\delta} \|\lambda^N(\tau + \delta) - \lambda^N(\tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau \leq C\delta,$$

$$\int_0^{T-\delta} \|u^N(\tau + \delta) - u^N(\tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau \leq C\delta,$$

где C не зависит от N и δ .

Доказательство. Зафиксируем $\delta \in (0, T)$ и $\tau \in [0, T - \delta]$. Умножим уравнение (5.30) на $\lambda^N(x, \tau)$ и проинтегрируем по

$x \in \Omega$ и по $t \in [\tau, \tau + \delta]$. В результате, после нескольких преобразований, с учетом уравнения (5.10), соленоидальности $u^N(x, t)$ и граничного условия (5.11'), получаем:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} c^N(x, \tau + \delta) |\lambda^N(x, \tau + \delta) - \lambda^N(x, \tau)|^2 dx = \\
& = - \int_{\tau}^{\tau + \delta} \int_{\Omega} c^N(x, t) ((u^N(x, t) \cdot \nabla) \lambda^N(x, \tau), \lambda^N(x, \tau + \delta) - \lambda^N(x, \tau)) dx dt - \\
& \quad - \beta \int_{\tau}^{\tau + \delta} \int_{\Omega} c^N(x, t) (\lambda^N(x, t), \lambda^N(x, \tau + \delta) - \lambda^N(x, \tau)) dx dt + \quad (5.38) \\
& \quad + \int_{\tau}^{\tau + \delta} \int_{\Omega} c^N(x, t) (\lambda^N(x, \tau + \delta) - \lambda^N(x, \tau), \Phi(\lambda^N(x, t), u^N(x, t))) dx dt - \\
& \quad - \alpha \int_{\tau}^{\tau + \delta} \int_{\Omega} (\nabla \lambda^N(x, t), \nabla [\lambda^N(x, \tau + \delta) - \lambda^N(x, \tau)]) dx dt = \sum_{k=1}^4 I_k^N(\tau),
\end{aligned}$$

где через $\Phi(\lambda^N, u^N)$ обозначено выражение в фигурных скобках в правой части (5.30), которое в силу (5.17) имеет оценку $|\Phi(\lambda^N, u^N)| \leq C |\nabla u^N|$ с постоянной C , не зависящей от N .

Проинтегрируем теперь равенство (5.38) по τ от 0 до $T - \delta$. Тогда, с учетом (5.16), получаем:

$$C_0 \int_0^{T-\delta} \|\lambda^N(\tau + \delta) - \lambda^N(\tau)\|_{L_2(\Omega)}^2 d\tau \leq \sum_{k=1}^4 \hat{I}_k^N, \quad (5.39)$$

где обозначено

$$\hat{I}_k^N = \int_0^{T-\delta} |I_k^N| d\tau.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части (5.39). Очевидно, из (5.16) и (5.17) следует:

$$\hat{I}_2^N \leq C\delta. \quad (5.40)$$

Далее, меняя порядок интегрирования по t и τ в слагаемых \hat{I}_1^N и \hat{I}_3^N , и пользуясь неравенством Коши, (5.16), (5.17), (5.31), (5.32), получаем

$$\hat{I}_1^N + \hat{I}_3^N \leq C\delta. \quad (5.41)$$

Наконец с помощью неравенства Коши оцениваем и по-

следнее слагаемое в (5.39):

$$\begin{aligned} \hat{I}_4^N &\leq 2\alpha \int_0^T \int_{\tau}^{\tau+\delta} \|\nabla \lambda^N(t)\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \lambda^N(\tau)\|_{L_2(\Omega)} dt d\tau \leq \\ &\leq 2\alpha \delta^{1/2} \int_0^T \left(\int_{\tau}^{\tau+\delta} \|\nabla \lambda^N(t)\|^2 dt \right)^{1/2} \|\nabla \lambda^N(\tau)\| d\tau \leq \\ &\leq 2\alpha \delta^{1/2} \left(\int_0^T \|\nabla \lambda^N(\tau)\|^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\tau}^{\tau+\delta} \|\nabla \lambda^N(t)\|^2 dt d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования по t и τ во втором сомножителе и учитывая (5.32), получаем

$$\hat{I}_4^N \leq C\delta. \quad (5.42)$$

Всюду здесь постоянные C не зависят от N и δ .

Из (5.39)-(5.42) вытекает требуемое неравенство для $\lambda^N(x,t)$. Соответствующее неравенство для $u^N(x,t)$ можно получить аналогично, исходя из равенства (5.12), в котором полагаем $\psi^j = u^N(x, \tau + \delta) - u^N(x, \tau)$. Таким образом, лемма 5.3 доказана.

Из этой леммы и неравенств (5.17), (5.31), (5.32) вытекает компактность последовательностей $\{u^N(x,t)\}$ и $\{\lambda^N(x,t)\}$ в $L_2(\Omega_T)$ (см., например, [17]).

Докажем теперь компактность последовательности $\{c^N(x,t)\}$.

Лемма 5.4. Пусть последовательность решений $\{c^N(x,t)\}$ задачи (5.10) сходится к $c(x,t)$ слабо в $L_2(\Omega_T)$. Тогда она сходится к $c(x,t)$ сильно в $L_q(\Omega_T)$ при любом $q \geq 1$ и $c(x,t) \in C(0,T;L_q(\Omega))$.

Доказательство. Решение $c^N(x,t)$ задачи (5.10), удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\int_0^T \int_{\Omega} c^N [\eta_t + (u^N \cdot \nabla) \eta] dx dt + \int_{\Omega} c^{0N} \eta(0) dx = 0 \quad (5.43)$$

для любой функции $\eta(x,t) \in C^1(0,T;W_2^1(\Omega))$, $\eta(x,T) = 0$.

Выше было показано, что последовательность $\{u^N(x,t)\}$ слабо компактна в $L_2(0,T;J^1(\Omega))$ и сильно компактна в $L_2(\Omega_T)$. Поэтому можно выделить подпоследовательность сходящуюся в $L_2(\Omega_T)$ к некоторой вектор-функции $u(x,t) \in L_2(0,T;J^1(\Omega))$. Переходя по этой подпоследовательности к пределу и учитывая, что $c^N(x,t)$ сходится слабо в $L_2(\Omega_T)$ к $c(x,t)$, получаем тождество:

$$\int_0^T \int_{\Omega} c[\eta_t + (u \cdot \nabla)\eta] dx dt + \int_{\Omega} c^0 \eta(0) dx = 0,$$

где $c^0 = c^0(x)$ – сильный предел $c^{0N}(x)$ в $L_q(\Omega)$ ($q \geq 1$).

Как показано в [3], функция $c(x,t)$, удовлетворяющая такому тождеству для любой $\eta(x,t) \in C^1(0,T;W_2^1(\Omega))$, $\eta(x,T) = 0$ непрерывна по t в норме $L_q(\Omega)$ ($q \geq 1$) и для любого $t \in [0,T]$ справедливо равенство: $\|c(t)\|_{L_q(\Omega)} = \|c^0\|_{L_q(\Omega)}$. Аналогично, с помощью (5.11), получаем $\|c^N(t)\|_{L_q(\Omega)} = \|c^{0N}\|_{L_q(\Omega)} \quad \forall t \in [0,T]$. Поскольку при $N \rightarrow \infty$ $c^{0N} \rightarrow c^0$ в $L_q(\Omega)$, из этих равенств следует, что при $\forall t \in [0,T]$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|c^N(t)\|_{L_q(\Omega)} = \|c(t)\|_{L_q(\Omega)}.$$

Отсюда, учитывая слабую сходимую $c^N(x,t)$ к $c(x,t)$ в $L_2(\Omega_T)$ заключаем, что $c^N(x,t)$ сходится к $c(x,t)$ сильно в $L_2(\Omega_T)$ [44], а так как $c^N(x,t)$ равномерно по N ограничена (см. (5.16)), то $c^N(x,t)$ сходится к $c(x,t)$ в $L_q(\Omega_T)$ при $q \geq 1$, причем $c(x,t) \in C(0,T;L_q(\Omega))$. Лемма 5.4 доказана.

4. Из (5.8)-(5.12), (5.15) и (5.10), (5.11) следует, что построенное приближенное решение $\{u^N, c^N, \lambda^N\}$ удовлетворяет следующей системе интегральных тождеств:

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Omega} \rho^N (u^N, \xi_t^n + (u^N \cdot \nabla) \xi^n) dx - \int_{\Omega} \sum_{i,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(c^N, \rho^N) \frac{\partial u_i^N}{\partial x_p} \frac{\partial \xi_q^n}{\partial x_r} dx + \right. \\ \left. + \int_{\Omega} (\rho^N f, \xi^n) dx \right\} dt + \int_{\Omega} \rho^{0N} (u^{0N}, \xi^n(0)) dx = 0, \quad (5.44)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} c^N [\eta_t + (u^N \cdot \nabla) \eta] dx dt + \int_{\Omega} c^{0N} \eta(0) dx = 0, \quad (5.45)$$

$$\int_0^T \left\{ \int_{\Omega} c^N (\lambda^N, \zeta_t + (u^N \cdot \nabla) \zeta) dx - \alpha \int_{\Omega} c^N (\nabla \lambda^N, \nabla \zeta) dx - \right. \\ \left. - \beta \int_{\Omega} c^N (\lambda^N, \zeta) dx + \int_{\Omega} c^N (\Omega [u^N] \lambda^N, \zeta) dx + \int_{\Omega} c^N g_1(|\lambda^N|)(E[u^N] \lambda^N, \zeta) dx - \right. \\ \left. - \int_{\Omega} c^N g_2(|\lambda^N|)(E[u^N] \lambda^N, \lambda^N)(\lambda, \zeta) dx \right\} dt + \int_{\Omega} c^{0N} (\lambda^{0N}, \zeta(0)) dx = 0, \quad (5.46)$$

где $\rho^N = \rho_a + (\rho_{\dot{z}} - \rho_a) c^N$, $\rho^{0N} = \rho_a + (\rho_{\dot{z}} - \rho_a) c^{0N}$;

$$\xi^n(x, t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) \psi^i(x), \quad h_i(t) \in C^1[0, T], \quad h_i(T) = 0, \quad \forall n \leq N;$$

$$\eta(x, t) \in C^1[0, T; W_2^1(\Omega)], \quad \eta(x, T) = 0;$$

$$\zeta(x, t) \in C^1[0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)], \quad \zeta(x, T) = 0.$$

Выше было показано, что последовательности $\{u^N(x, t)\}$, $\{c^N(x, t)\}$, $\{\lambda^N(x, t)\}$ компактны в $L_2(\Omega_T)$. Кроме того, последовательности $\{u^N(x, t)\}$ и $\{\lambda^N(x, t)\}$ слабо компактны в $L_2(0, T; \overset{\circ}{J}^1(\Omega))$ и $L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ соответственно, а последовательности $\{c^N(x, t)\}$ и $\{\lambda^N(x, t)\}$ ограничены в $L_{\infty}(\Omega_T)$, причем $C_0 \leq c^N(x, t) < 1$, $|\lambda^N(x, t)| \leq 1$. Выделим подпоследовательность $\{N = N_k, k = 1, 2, \dots\}$ такую, что при $N_k \rightarrow \infty$ $u^{N_k} \rightarrow u$ в $L_2(\Omega)$ и слабо в $L_2(0, T; \overset{\circ}{J}^1(\Omega))$, $\lambda^{N_k} \rightarrow \lambda$ в $L_2(\Omega)$ и слабо в $L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$, $c^{N_k} \rightarrow c$ в $L_2(\Omega_T)$. Ясно, что $u \in L_2(0, T; \overset{\circ}{J}^1(\Omega))$, $\lambda \in L_2(0, T; \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega))$ и, в силу леммы 5.4, $c \in C(0, T; L_2(\Omega))$, $|\lambda| \leq 1$, $C_0 < c < 1$.

В силу указанных свойств, последовательностей $\{u^{N_k}\}$, $\{c^{N_k}\}$, $\{\lambda^{N_k}\}$, с учетом гладкости функций g_i и a_{npqr} , можно перейти к пределу в равенствах (5.44)-(5.46) при $N_k \rightarrow \infty$ и при фиксированных ξ^n , η , ζ . Тогда для $\{u, c, \lambda\}$ получим тождества (5.5)-(5.7) с тестовыми функциями ξ^n , η , ζ . Так как множество вектор-функций ξ^n , $n \in \mathbb{N}$ плотно в $C^1[0, T; \overset{\circ}{J}^1(\Omega)]$, то отсюда следует, что $\{u, c, \lambda\}$ – обобщенное решение задачи (4.1)-(4.4). Теорема 5.1 доказана.

Замечание. Можно показать, что построенное обобщенное решение удовлетворяет начальным условиям (5.2) в следующем смысле:

$$c(x, t) \rightarrow c^0(x), \quad u(x, t) \rightarrow u^0(x), \quad \lambda(x, t) \rightarrow \lambda^0(x) \quad \text{в } L_2(\Omega) \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

Глава 5

Гидродинамика суспензии в сильных внешних полях

В этой главе рассматриваются концентрированные ($\alpha = 1$) и слабо концентрированные ($1 < \alpha < 3$) суспензии поляризующихся (или намагничивающихся) частиц во внешних электрических (магнитных) полях. При движении таких суспензий на частицы действуют моменты сил как со стороны несущей жидкости, так и со стороны внешнего поля и учет этих моментов приводит к более сложным (чем в главах 2, 4) усредненным уравнениям движения суспензии. При выводе этих уравнений используется модельная задача С, усреднению которой посвящен §1.

Особый интерес представляет случай, когда частицы сильно вытянуты (сплюснуты) и находятся в столь сильном внешнем поле, что они движутся жестко фиксированными по полю (или перпендикулярно полю) (см. [24]). Тогда усредненные уравнения движения суспензии приобретают качественно новый вид – они представляют собой нестандартную модель гидродинамики, в которой тензор напряжений зависит не только от тензора скоростей деформаций (как в классической механике сплошной среды), но и от тензора завихренности жидкости.

§ 1. Исследование асимптотического поведения решений модельной задачи С

Модельная задача С (см. (1.3.7)) состоит в минимизации функционала

$$\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] = \int_\Omega \left\{ \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_\varepsilon] + (\tilde{f}_\varepsilon, v_\varepsilon) \right\} dx \quad (1.1)$$

в классе $J_{\varepsilon C}^\circ(\Omega)$ соленоидальных вектор-функций $v_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$

равных $a_\varepsilon^i + (P_\varepsilon c_\varepsilon^i + P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^i) \times (x - x_\varepsilon^i)$, где a_ε^i , b_ε^i – произвольные постоянные векторы в \mathbf{R}^3 , $c_\varepsilon^i \in \mathbf{R}^3$ – заданные векторы, P_ε и P_ε^\perp – ортопроекторы на фиксированное подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^3$ и его ортогональное дополнение.

При любых $c_\varepsilon^i \in \mathbf{R}^3$ и $f_\varepsilon(x) \in L_2(\Omega)$ существует единственное решение $u_\varepsilon(x) \in J_{\varepsilon C}^\circ(\Omega)$ этой задачи, что следует из непустоты и замкнутости $J_{\varepsilon C}^\circ(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$. Цель данного параграфа – описать асимптотическое поведение $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Будем предполагать, что выполняются условия (i) – (iii) (см. § 1, глава 2) и что векторы c_ε^i определяются равенством $c_\varepsilon^i = \theta(x_\varepsilon^i)$, где $\theta(x)$ заданное непрерывное векторное поле в Ω , а x_ε^i – центры масс частиц Q_ε^i . Введем мезоскопическую характеристику задачи C – аналог среднего тензора вязкости (см. главу 2). Пусть $K_h^\xi = K(h, \xi)$ – куб с центром в точке $\xi \in \Omega$ и ребрами длины h ($\varepsilon \ll h \ll 1$) фиксированной ориентации, а $\theta = \theta(\xi)$ – заданный постоянный вектор в K_h^ξ . Обозначим через $J(\varepsilon, h, \xi; \theta)$ множество соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(K_h^\xi)$ равных $a_\varepsilon^i + (P_\varepsilon \theta + P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^i) \times (x - x_\varepsilon^i)$ на Q_ε^i , где a_ε^i , b_ε^i – произвольные постоянные векторы. Рассмотрим в K_h^ξ задачу минимизации в классе $J(\varepsilon, h, \xi; \theta)$ следующего функционала

$$\Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_\varepsilon) = \frac{\mu}{h^3} \int_{K(\xi, h)} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[v_\varepsilon] + h^{-2-\gamma} \left| v_\varepsilon - \sum_{i,k=1}^3 \psi^{ik}(x - \xi) R_{ik} \right|^2 \right\} dx \quad (1.2)$$

где $R = \{R_{ik}\}_{i,k=1}^3$ – симметричный тензор 2-го ранга в \mathbf{R}^3 , $0 < \gamma < 2$, вектор-функция ψ^{ik} определена равенством (2.1.2).

Существует единственная вектор-функция $v_{\varepsilon h} \in J(\varepsilon, h, \xi; \theta)$ доставляющая минимум функционалу (1.2), причем она явля-

ются решением краевой задачи

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} -\Delta v_{eh} + 2h^{-2-\gamma} v_{eh} + \nabla p_{eh} &= 2h^{-2-\gamma} \sum_{p,q=1}^3 \psi^{pq}(x-\xi) R_{pq}, \\ \operatorname{div} v_{eh} &= 0, \end{aligned} \right\} x \in K_h^\xi \cap \Omega_\varepsilon \\
& v_{eh}(x) = a_\varepsilon^i + (P_\varepsilon \theta + P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^i) \times (x - x_\varepsilon^i), \quad x \in K_h^\xi \cap Q_\varepsilon^i, \\
& \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma[v_{eh}] dS - 2h^{-2-\gamma} \left(\int_{Q_\varepsilon^i} \sum_{n,q=1}^3 \psi^{nq}(x-\xi) R_{nq} dx - \rho_\varepsilon^{-1} m_\varepsilon^i a_\varepsilon^i \right) = 0, \\
& P_\varepsilon^\perp \left\{ \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma[v_{eh}] \times (x - x_\varepsilon^i) dS - \right. \\
& \left. - 2h^{-2-\gamma} \int_{Q_\varepsilon^i} \sum_{n,q=1}^3 \psi^{nq}(x-\xi) R_{nq} \times (x - x_\varepsilon^i) dx - \rho_\varepsilon^{-1} J_\varepsilon^i P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^i \right\} = 0, \\
& \sigma[v_{eh}] = 0, \quad x \in \partial K_h^\xi,
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где m_ε^i , J_ε^i – масса и тензор инерции (см. (1.1.6)) частицы Q_ε^i соответственно, ρ_ε – плотность материала частиц.

Учитывая линейность этой задачи, $v_{eh}(x)$ можно представить в виде

$$v_{eh}(x) = \sum_{n,q=1}^3 R_{nq} v_{eh}^{nq}(x) + \sum_{m=1}^3 \theta_m v_{eh}^m(x), \tag{1.4}$$

где R_{nq} и θ_m – соответственно компоненты тензора R и вектора θ , а $v_{eh}^{nq}(x)$ и $v_{eh}^m(x)$ – решения следующих двух краевых задач – частных случаев задачи (1.3). В первой из них тензор $R = \{R_{ik}\}_{i,k=1}^3$ полагаем равным $\frac{1}{2}(e^n \otimes e^q + e^q \otimes e^n)$, а вектор $\theta = 0$:

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned} -\Delta v_{eh}^{nq} + 2h^{-2-\gamma} v_{eh}^{nq} + \nabla p_{eh}^{nq} &= 2h^{-2-\gamma} \psi^{nq}(x-\xi), \\ \operatorname{div} v_{eh}^{nq} &= 0, \end{aligned} \right\} x \in K_h^\xi \cap \Omega_\varepsilon \\
& v_{eh}^{nq}(x) = a_\varepsilon^{inq} + P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^{inq} \times (x - x_\varepsilon^i), \quad x \in K_h^\xi \cap Q_\varepsilon^i, \\
& \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma[v_{eh}^{nq}] dS - 2h^{-2-\gamma} \left[\int_{Q_\varepsilon^i} \psi^{nq}(x-\xi) dx - \rho_\varepsilon^{-1} m_\varepsilon^i a_\varepsilon^{inq} \right] = 0, \\
& P_\varepsilon^\perp \left\{ \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma[v_{eh}^{nq}] \times (x - x_\varepsilon^i) dS - 2h^{-2-\gamma} \int_{Q_\varepsilon^i} \psi^{nq}(x-\xi) \times (x - x_\varepsilon^i) dx - \rho_\varepsilon^{-1} J_\varepsilon^i P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^{inq} \right\} = 0, \\
& \sigma[v_{eh}^{nq}] = 0, \quad x \in \partial K_h^\xi,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Во второй задаче полагаем $R=0$ и $\theta = e^m$ ($m=1,2,3$)

$$\begin{aligned} -\Delta v_{\varepsilon h}^m + 2h^{-2-\gamma} v_{\varepsilon h}^m + \nabla p_{\varepsilon h}^m &= 0, \quad \operatorname{div} v_{\varepsilon h}^m = 0, \quad x \in K_h^\xi \cap \Omega_\varepsilon \\ v_{\varepsilon h}^m(x) &= a_\varepsilon^{im} + (P_\varepsilon e^m + P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^{im}) \times (x - x_\varepsilon^i), \quad x \in K_h^\xi \cap Q_\varepsilon^i, \\ \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma[v_{\varepsilon h}^m] dS - 2h^{-2-\gamma} \rho_\varepsilon^{-1} m_\varepsilon^i a_\varepsilon^{im} &= 0, \\ P_\varepsilon^\perp \left\{ \int_{\partial Q_\varepsilon^i} \sigma[v_{\varepsilon h}^m] \times (x - x_\varepsilon^i) dS - 2h^{-2-\gamma} \rho_\varepsilon^{-1} J_\varepsilon^i P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^{im} \right\} &= 0, \\ \sigma[v_{\varepsilon h}^m] &= 0, \quad x \in \partial K_h^\xi, \end{aligned} \quad (1.6)$$

С помощью (1.2) и (1.4) заключаем, что минимальное значение функционала (1.2), которое он принимает в классе вектор-функций $J(\theta)=J(\varepsilon, h, \xi; \theta)$ равно:

$$\begin{aligned} \min_{v_{\varepsilon h} \in J(\theta)} \Gamma(\varepsilon, h, \xi, R; v_{\varepsilon h}) &= \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi) R_{np} R_{qr} + \\ + 2 \sum_{n,p,q=1}^3 b_{npq}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi) R_{np} \theta_q &+ \sum_{n,m=1}^3 c_{nm}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi) \theta_n \theta_m. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь функции от $\xi \in \Omega$ $a_{npqr}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi)$, $b_{npq}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi)$, $c_{nm}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi)$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} a_{npqr}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi) &= \frac{\mu}{h^3} \int_{K_h^\xi} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{np}] e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{qr}] + h^{-2-\gamma} (v_{\varepsilon h}^{np} - \psi^{np}(x-\xi), v_{\varepsilon h}^{qr} - \psi^{qr}(x-\xi)) \right\} dx, \\ b_{npq}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi) &= \frac{\mu}{h^3} \int_{K_h^\xi} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{np}] e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{qr}] + h^{-2-\gamma} (v_{\varepsilon h}^{np} - \psi^{np}(x-\xi), v_{\varepsilon h}^q) \right\} dx, \\ c_{nm}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi) &= \frac{\mu}{h^3} \int_{K_h^\xi} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[v_{\varepsilon h}^n] e_{ik}[v_{\varepsilon h}^m] + h^{-2-\gamma} (v_{\varepsilon h}^n, v_{\varepsilon h}^m) \right\} dx. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из (1.5) – (1.8) и свойств вектор-функции $\psi^{np}(x)$ следует, что при $\forall \varepsilon, h$ ($h \gg \varepsilon > 0$) и $\forall \xi \in \Omega$ системы чисел $\{a_{npqr}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi)\}_{n,p,q,r=1}^3$, $\{b_{npq}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi)\}_{n,p,q=1}^3$, $\{c_{nm}^\varepsilon(\varepsilon, h, \xi)\}_{n,m=1}^3$ образуют тензоры в \mathbf{R}^3 соответственно 4-го, 3-го и 2-го порядка, обладающими такими симметриями:

$$a_{npqr}^\varepsilon = a_{qmrp}^\varepsilon = a_{pnqr}^\varepsilon = a_{nrpq}^\varepsilon, \quad b_{npq}^\varepsilon = b_{pnq}^\varepsilon, \quad c_{nm}^\varepsilon = c_{mn}^\varepsilon.$$

Справедлива следующая теорема об усреднении модельной задачи С (аналог теоремы 2.1.1).

Теорема 1.1. Пусть $\alpha=1$ и при $\forall x \in \Omega$ существуют пределы:

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{npqr}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{npqr}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x)} = a_{npqr}^{\varepsilon}(x),$
2. $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{npq}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{npq}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x)} = b_{npq}^{\varepsilon}(x),$
3. $\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{nm}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{nm}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x)} = c_{nm}^{\varepsilon}(x),$
4. $\tilde{f}_{\varepsilon}(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $L_2(\Omega)$,

где $a_{npqr}^{\varepsilon}(x), b_{npq}^{\varepsilon}(x), c_{nm}^{\varepsilon}(x) \in L_{\infty}(\Omega)$, $\tilde{f}(x) \in L_2(\Omega)$.

Тогда вектор-функция $u_{\varepsilon}(x)$, минимизирующая функционал Φ_{ε}

в классе $J_{\varepsilon\theta}^{\circ}$ (т.е. при $c_{\varepsilon}^j = \theta(x^j)$), сходится сильно в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $u(x)$ минимизирующей функционал

$$\begin{aligned} \Phi[u] = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^{\varepsilon} e_{np}[u] e_{qr}[u] + 2 \sum_{n,p,q=1}^3 b_{npq}^{\varepsilon} e_{np}[u] \left[\theta - \frac{1}{2} \text{rot } u \right]_q + \right. \\ \left. + \sum_{n,m=1}^3 c_{nm}^{\varepsilon} \left[\theta - \frac{1}{2} \text{rot } u \right]_n \left[\theta - \frac{1}{2} \text{rot } u \right]_m \right\} dx + \int_{\Omega} \tilde{f} u dx \end{aligned} \quad (1.9)$$

в классе $J(\Omega)$ соленоидальных вектор-функций из $\dot{W}_2^1(\Omega)$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.1.1. Главная его часть состоит в получении для функционала (1.1) оценок сверху (типа (2.1.11)) и снизу (типа (2.1.12)) через значения функционала (1.9).

1. Для получения оценки сверху построим пробную вектор-функцию $w_{\varepsilon h}(x)$ из класса $J_{\varepsilon\theta}^{\circ}(x)$, в котором имеется минимум функционала (1.1). Пусть $w(x)$ – произвольная вектор-функция класса $\dot{J}(\Omega) \cap C^2(x)$ с компактным носителем в Ω . Так же как в главе 2 покроем область Ω кубами $K(x^j, h)$ с центрами в точках x^j и сторонами длины $h > 0$ и определим $w_{\varepsilon h}(x)$ с помощью формулы:

$$\begin{aligned}
w_{\varepsilon h}(x) &= \sum_j \left\{ w(x^j) + \sum_{n,p=1}^3 (e_{np}[w](x^j) v_{\varepsilon h}^{np,j}(x) + g^{np,j}(x)) + \right. \\
&+ \left. \sum_{m=1}^3 \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \right]_{\underline{m}} v_{\varepsilon h}^{m,j}(x) \right\} \varphi_{\varepsilon h}^j(x) + \zeta_{\varepsilon h}(x) + \eta_{\varepsilon h}(x) = (1.10) \\
&= Z_{\varepsilon h}(x) + \zeta_{\varepsilon h}(x) + \eta_{\varepsilon h}(x).
\end{aligned}$$

Здесь $v_{\varepsilon h}^{np,j}(x)$ и $v_{\varepsilon h}^{m,j}(x)$ – решения задач (1.5) и (1.6) в кубе $K(x^j, h)$ (т.е. при $\xi = x^j$); $g_{\varepsilon h}^{np,j}(x)$ – вектор-функция, определенная формулой (2.1.29); $\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$ – специальное разбиение единицы, связанное с покрытием $\Omega \subset \bigcup_j K(x^j, h)$ (см. лемму 2.1.2); $\zeta_{\varepsilon h}(x)$ – вектор-функция из $W_2^1(\Omega)$, определенная в лемме 2.1.3 при $\psi_{\varepsilon h}(x) = -\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}(x)$ и, значит, удовлетворяющая условиям $\operatorname{div} \zeta_{\varepsilon h}(x) = -\operatorname{div} Z_{\varepsilon h}(x)$ при $x \in \Omega$ и $\zeta_{\varepsilon h}(x) = a_\varepsilon^i = \operatorname{const}$ при $x \in Q_\varepsilon^i$; $\eta_{\varepsilon h}(x)$ – вектор-функция из $W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая условиям: $\operatorname{div} \eta_{\varepsilon h}(x) = 0$ при $x \in \Omega$ и $\eta_{\varepsilon h}(x) = P_{\mathcal{L}}[\theta(x_\varepsilon^i) - \sum \theta(x^j) \varphi_{\varepsilon h}^j(x)] \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $x \in Q_\varepsilon^i$ (для определенности выбираем $\eta_{\varepsilon h}(x)$ так, чтобы она имела минимальную норму $W_2^1(\Omega)$ в классе вектор-функций, удовлетворяющих этим условиям). Учитывая свойства вектор-функций $v_{\varepsilon h}^{np,j}(x)$, $v_{\varepsilon h}^{m,j}(x)$, $g^{np,j}(x)$, $\zeta_{\varepsilon h}(x)$ и $\eta_{\varepsilon h}(x)$, а также свойства разбиения единицы $\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$, нетрудно убедиться, что $w_{\varepsilon h}(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\operatorname{div} w_{\varepsilon h}(x) = 0$ при $x \in \Omega$ и $w_{\varepsilon h}(x) = a_\varepsilon^i + (P_{\mathcal{L}} \theta(x_\varepsilon^i) + P_{\mathcal{L}}^\perp b_\varepsilon^i) \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $x \in Q_\varepsilon^i$, где a_ε^i и b_ε^i – некоторые постоянные векторы. При этом следует воспользоваться равенством

$$\sum_{n,p=1}^3 g^{np,j}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \times (x - x^j) \equiv a_\varepsilon^{ij} + \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \times (x - x_\varepsilon^j), \quad a_\varepsilon^{ij} = \operatorname{const}$$

Таким образом, $w_{\varepsilon h}(x)$ принадлежит классу $J_{\varepsilon\theta}^{\mathcal{L}}(\Omega)$ и, следо-

вательно

$$\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[w_{\varepsilon h}], \quad (1.11)$$

где u_ε вектор-функция, доставляющая минимум функционалу $\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon]$ (1.1) в классе $J_{\varepsilon\theta}^{\circ}(\Omega)$ (т.е. при $c_\varepsilon^i = \theta(x_\varepsilon^i)$). Оценим правую часть этого неравенства при малых ε и h ($\varepsilon \ll h \ll 1$). Для этого нам понадобятся некоторые оценки вектор-функций $v_{\varepsilon h}^{np,j}(x)$, $v_{\varepsilon h}^{m,j}(x)$, $\zeta_{gh}(x)$ и $\eta_{gh}(x)$, входящих в конструкцию $w_{gh}(x)$ (см. (1.10)).

Лемма 1.1. *Если выполняются условия 1 и 3 теоремы 1.1, то при достаточно малых h и $\varepsilon \leq \hat{\varepsilon}(h)$ справедливы оценки:*

$$\begin{aligned} & \int \sum_{K^j} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_{\varepsilon h}^{np,j}] dx + \int \sum_{K^j} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_{\varepsilon h}^{m,j}] dx = O(h^3), \\ & \int \sum_{K^j} \sum_{k,l=1}^3 |v_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi^{np,j}|^2 dx + \int \sum_{K^j} \sum_{k,l=1}^3 |v_{\varepsilon h}^{m,j} - \psi^{mp,j}|^2 dx = O(h^{5+\gamma}), \\ & \int_{K^j \setminus K_1^j} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_{\varepsilon h}^{np,j}] dx + \int_{K^j \setminus K_1^j} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_{\varepsilon h}^{m,j}] dx = o(h^3), \\ & \int_{K^j \setminus K_1^j} \sum_{k,l=1}^3 |v_{\varepsilon h}^{np,j} - \psi^{np,j}|^2 dx + \int_{K^j \setminus K_1^j} \sum_{k,l=1}^3 |v_{\varepsilon h}^{m,j} - \psi^{mp,j}|^2 dx = o(h^{5+\gamma}), \end{aligned}$$

где $\psi^{np,j} = \psi^{np}(x - x^j)$, $K^j = K(x^j, h)$, $K_1^j = K(x^j, h_1)$ – куб с ребрами $h_1 = h - 2\delta$, $\delta = o(h)$.

Доказательство этой леммы проводится так же как и доказательство леммы 2.1.1. При этом следует воспользоваться тем, что решение $v_{\varepsilon h}^{np}(x)$ задачи (1.5) минимизирует функционал

$$\int_{K_h^\xi} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[v_{\varepsilon h}^{np}] + h^{-2-\gamma} |v_{\varepsilon h}^{np} - \psi^{np}(x - \xi)|^2 \right\} dx$$

в классе соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{W}_2^1(K_h^\xi)$ равных $a_\varepsilon^i + (P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^i) \times (x - x_\varepsilon^i)$ на $Q_\varepsilon^i \cap K_h^\xi$, а решение $v_{\varepsilon h}^m(x)$ задачи (1.6) минимизирует функционал

$$\int_{K_h^\varepsilon} \left\{ \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [v_{\varepsilon h}^m] + h^{-2-\gamma} |v_{\varepsilon h}^m|^2 \right\} dx$$

в классе соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(K_h^\varepsilon)$, равных $a_\varepsilon^i + (P_\varepsilon e^m + P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^j) \times (x - x_\varepsilon^i)$ на $Q_\varepsilon^i \cap K_h^\varepsilon$. Здесь всюду a_ε^i , b_ε^i – произвольные постоянные векторы.

Лемма 1.2. *Справедливы предельные равенства:*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\zeta_{\varepsilon h}\|_{W_2^1(\Omega)} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\eta_{\varepsilon h}\|_{W_2^1(\Omega)} = 0$$

Доказательство. Первое из этих равенств доказывается так же как лемма 2.1.4 с использованием формулы (1.10) и оценок леммы 1.1. Для доказательства второго равенства рассмотрим вектор-функцию

$$\hat{\eta}_{\varepsilon h}(x) = \text{rot} \left\{ \sum_{i,j} \hat{\theta}_\varepsilon^{ji}(x) \varphi_{\varepsilon h}^j(x) \beta_\varepsilon^i(x) \right\}, \quad (1.12)$$

где

$$\hat{\theta}_\varepsilon^{ji}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 P_\varepsilon \left[\theta_k(x^j) - \theta_k(x_\varepsilon^i) \right] (|x - x_\varepsilon^i|^2 - |x_k - x_{\varepsilon k}^i|^2) e^k, \quad (1.13)$$

$\{\varphi_{\varepsilon h}^j(x)\}$ – специальное разбиение единицы, построенное в лемме 2.1.2, а $\beta_\varepsilon^i(x)$ – срезающие функции, введенные в этой же лемме, т.е. $\beta_\varepsilon^i(x) \in C_0^2(\Omega)$, $\beta_\varepsilon^i(x) = 1$ при $x \in B(Q_\varepsilon^i)$, $\beta_\varepsilon^i(x) = 0$ при $x \in \bigcup_{j \neq i} B(Q_\varepsilon^j)$, $|\nabla \beta_\varepsilon^i(x)| \leq C(d_\varepsilon^i)^{-1}$.

Легко убедиться в справедливости равенства

$$\text{rot} \hat{\theta}_\varepsilon^{ij}(x) = P_\varepsilon \left[\theta(x_\varepsilon^i) - \theta(x^j) \right] \times (x - x_\varepsilon^i), \quad (1.14)$$

с помощью которого, учитывая (1.12) и свойства функций $\varphi_{\varepsilon h}^j(x)$ и $\beta_\varepsilon^i(x)$ заключаем, что $\hat{\eta}_{\varepsilon h}(x)$ удовлетворяет тем же условиям, что и вектор-функция $\eta_{\varepsilon h}(x)$ из (1.10), т.е. принадлежит тому же классу. Кроме того, пользуясь равенствами (1.12), (1.13) и свойствами функций $\varphi_{\varepsilon h}^j(x)$, $\beta_\varepsilon^i(x)$ и учитывая гладкость векторного поля $\theta(x)$, нетрудно оценить норму

$\hat{\eta}_{\varepsilon h}(x)$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$:

$$\|\hat{\eta}_{\varepsilon h}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq Ch^2, \quad (1.15)$$

где C не зависит от $h \ll 1$ и $\varepsilon \leq \hat{\varepsilon}(h)$.

Так как в (1.10) вектор-функция $\eta_{\varepsilon h}(x)$ выбирается так, чтобы она имела минимальную норму в рассматриваемом классе вектор-функций, то из (1.15) следует второе равенство леммы 1.2.

Перейдем непосредственно к оценке правой части неравенств (1.11). Пользуясь равенствами (1.10) и (2.1.35), аналогично (2.1.37) – (2.1.40), получаем

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon h}(x) = w(x) + \sum_j \left\{ \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^j)(v_{\varepsilon h}^{np,j}(x) - \psi^{np,j}(x)) - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^3 \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \right]_m v_{\varepsilon h}^{m,j}(x) - \sigma^j(x) \right\} \varphi_{\varepsilon h}^j + \zeta_{\varepsilon h}(x) + \eta_{\varepsilon h}(x) \end{aligned} \quad (1.16)$$

и

$$\begin{aligned} e_{ik}[w_{\varepsilon h}(x)] = \\ = \sum_j \left\{ \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^j) e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{np,j}] + \sum_{m=1}^3 \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \right] e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{m,j}] \right\} \varphi_{\varepsilon h}^j(x) \\ + \delta_{\varepsilon h}^{ik}(x) + e_{ik}[\zeta_{\varepsilon h}(x)] + e_{ik}[\eta_{\varepsilon h}(x)] \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь $\sigma^j(x)$ – вектор-функция, введенная в (2.1.35), а $\delta_{\varepsilon h}^{ik}(x)$ – линейные функции от $\nabla \varphi_{\varepsilon h}^j(x)$ с коэффициентами линейно зависящими от $v_{\varepsilon h}^{np,j}(x) - \psi^{np,j}(x)$, $e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{np,j}(x)]$ и $\sigma^j(x)$. Поэтому, в силу лемм 1.1, 2.1.2 и оценки (2.1.36)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\delta_{\varepsilon h}^{ik}\|_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (1.18)$$

С помощью равенств (1.13) и (1.15), учитывая, что $\operatorname{supp} \{ \varphi_{\varepsilon h}^j(x) \varphi_{\varepsilon h}^l(x) \} \subset K^j \cap K^l$ ($K^j = K(x^j, h)$) представим функционал (1.1) в виде:

$$\begin{aligned}
& \Phi_\varepsilon(w_{\varepsilon h}) = \\
& = \mu \sum_j \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w](x^j) e_{qr}[w](x^j) \int \sum_{K^j i,k=1}^3 e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{np,j}] e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{qr,j}] dx + \right. \\
& + 2 \sum_{n,p,m=1}^3 e_{np}[w](x^j) \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \right]_m \int \sum_{K^j i,k=1}^3 e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{np,j}] e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{m,j}] dx + \\
& + \sum_{m,l=1}^3 \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \right]_m \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \right]_l \times \\
& \left. \times \int \sum_{K^j i,k=1}^3 e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{m,j}] e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{l,j}] dx \right\} - \int_\Omega (f_\varepsilon, w) dx + \Delta(\varepsilon, h)
\end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь через $\Delta(\varepsilon, h)$ обозначены остальные слагаемые – интегралы по области Ω , в подинтегральных выражения которых входят линейные и квадратичные комбинации $\delta_{\varepsilon h}^{ik}(x)$, $e_{ik}[\zeta_{\varepsilon h}]$, $e_{ik}[\eta_{\varepsilon h}]$, $\zeta_{\varepsilon h}$, $\eta_{\varepsilon h}$, а также интегралы по области $\Omega \cap \sum_{\substack{j,l \\ j \neq l}} K^j \cap K^l$ от

линейных и квадратичных комбинаций $v_{\varepsilon h}^{np,j}(x) - \psi^{np,j}(x)$, $v_{\varepsilon h}^{m,j}(x)$, $e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{np,j}]$, $e_{ik}[v_{\varepsilon h}^{m,j}]$. Оценивая их с помощью (1.18) и лемм 1.1, 1.2, 2.1.1 так же как в главе 2 (см. (2.1.43), (2.1.45)), получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(\varepsilon, h) = 0 \quad (1.20)$$

Из формулы (1.8) следует, что выражение в фигурных скобках равенства (1.19) не превосходит такой суммы

$$\begin{aligned}
& \sum_{n,p,q,r=1}^3 h^3 a_{npqr}^L(\varepsilon, h, x^j) e_{np}[w](x^j) e_{qr}[w](x^j) + \\
& + 2 \sum_{n,p,m=1}^3 b_{npm}^L(\varepsilon, h, x^j) e_{np}[w](x^j) \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \right]_m + \\
& + \sum_{m,l=1}^3 c_{ml}^L(\varepsilon, h, x^j) \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \right]_m \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} w(x^j) \right]_l
\end{aligned}$$

Заменяя его этой суммой и учитывая условия 1–4 теоремы 1.1, гладкость вектор-функций $\theta(x)$ и $w(x)$ и равенство (1.20), получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[w_{\varepsilon h}] \leq \Phi[w],$$

где функционал $\Phi[w]$ определен формулой (1.9). Отсюда в силу (1.11) следует требуемая оценка сверху

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \leq \Phi[w]. \quad (1.21)$$

Здесь $u_\varepsilon(x)$ – минимизант функционала (1.1), а $w(x)$ – произвольная вектор-функция из $\overset{\circ}{J}(\Omega)$.

2. Теперь оценим функционал (1.1) снизу, т.е. получим неравенство типа (2.1.12). При этом мы будем пользоваться следующим аналогом леммы 2.1.6.

Лемма 1.3. Пусть $w(x)$ – произвольная вектор-функция класса $\overset{\circ}{J}(\Omega)$. Если выполняются условия (i), (ii) (см. главу 2) и условия 1, 2 теоремы 1.1, то существует последовательность вектор-функций $\{w_\varepsilon(x), \varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ класса $J_{\varepsilon 0}^\varepsilon(\Omega) = J_{\varepsilon \theta}^\varepsilon(\Omega)$ (при $\theta(x) \equiv 0$), которая сходится к $w(x)$ слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ (и сильно в $L_2(\Omega)$) и такая, что при достаточно малых $\varepsilon < \hat{\varepsilon}(w)$ выполняется неравенство

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \|w\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где постоянная C не зависит от w и ε .

Доказательство этой леммы проводится точно так же как и леммы 2.1.6, поэтому здесь мы его опускаем.

Пусть $u(x)$ – слабый предел в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ решений задачи минимизации функционала (1.1) в классе $J_{\varepsilon 0}^\varepsilon(\Omega)$ по некоторой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$. Аппроксимируем $u(x)$ гладкой вектор-функцией $u^\delta(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ так, что

$$\|u - u^\delta\|_{W_2^1(\Omega)} < \delta \quad (\delta > 0). \quad (1.22)$$

Обозначим $w^\delta(x) = u(x) - u^\delta(x)$. Согласно лемме 1.3 существует подпоследовательность $w_{\varepsilon_k}^\delta(x) \in J_{\varepsilon \theta}^\varepsilon(\Omega)$ сходящаяся к $w^\delta(x)$ при

$\varepsilon'_k \rightarrow 0$ (далее в обозначениях штрих опускается).

Положим $u_\varepsilon^\delta(x) = u_\varepsilon(x) - w_\varepsilon^\delta(x)$. Ясно, что $u_\varepsilon^\delta(x) \in J_{\varepsilon\theta}^\delta(\Omega)$ и при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ $u_\varepsilon^\delta(x)$ сходится слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ к $u^\delta(x)$ и в силу леммы 1.3 и (1.22) при достаточно малых $\varepsilon = \varepsilon_k$

$$\|u_\varepsilon - u_\varepsilon^\delta\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\delta \quad (C > 0). \quad (1.23)$$

Разрежем область Ω на кубы $K^j = K(x^j, h)$ с центрами в точках $x^j \in \Omega$ и ребрами длины h ($\varepsilon \ll h \ll 1$). В каждом таком кубе рассмотрим вектор-функции

$$\eta_\varepsilon^j(x) = \text{rot} \left\{ \sum_{i \in K^j} \hat{\theta}_\varepsilon^{ji}(x) \beta_\varepsilon^i(x) \right\}, \quad (1.24)$$

где $\hat{\theta}_\varepsilon^{ji}(x)$ – вектор-функция, определенная выше формулой (1.13), $\beta_\varepsilon^i(x)$ – срезающая функция, введенная в лемме 2.1.2, суммирование проводится по таким i , что $Q_\varepsilon^i \cap K^j \neq \emptyset$.

Пользуясь равенствами (1.23) – (1.14) и свойствами функции $\beta_\varepsilon^i(x)$, заключаем, что $\text{div} \eta_\varepsilon^j(x) = 0$, $\eta_\varepsilon^j = (\theta(x^j) - \theta(x_\varepsilon^i)) \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $x \in Q_\varepsilon^i \cap K^j$ и справедливы оценки

$$\|\eta_\varepsilon^j\|_{W_2^1(K^j)}^2 \leq Ch^5, \quad \|\eta_\varepsilon^j\|_{L_2(K^j)}^2 \leq Cd_\varepsilon^2 h^5. \quad (1.25)$$

Теперь в каждом кубе K^j рассмотрим вектор-функцию

$$v_\varepsilon^\delta(x) = u_\varepsilon^\delta(x) - u^\delta(x^j) - \frac{1}{2} \text{rot} u^\delta(x^j) \times (x - x^j) + \eta_\varepsilon^j(x). \quad (1.26)$$

Из построений $u_\varepsilon^\delta(x)$ и $\eta_\varepsilon^j(x)$ следует, что $\text{div} v_\varepsilon^\delta(x) = 0$ в K^j и $v_\varepsilon^\delta(x) = a_\varepsilon^i + (P_\varepsilon l^j + P_\varepsilon^\perp b_\varepsilon^i) \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $x \in Q_\varepsilon^i \cap K^j$, где $l^i = \theta(x^i) - \frac{1}{2} \text{rot} u_\varepsilon^\delta(x^j)$, а a_ε^i , b_ε^i – некоторые постоянные векторы, точные значения которых не имеет смысла приводить. Важно лишь заметить, что v_ε^δ принадлежит классу $J(\varepsilon, h, x^j, l^i)$ в котором ищется минимум функционала $\Gamma(\varepsilon, h, x^j, R; v_\varepsilon)$ (1.2). Положим в этом функционале тензор $R = \{e_{ik}[u^\delta](x^j)\}_{i,k=1}^3$ и вычислим его значе-

ние на вектор-функции v_ε^δ . Тогда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{h^3} \int_{K^j} \sum \left\{ e_{ik}^2 [v_\varepsilon^\delta] + h^{-2-\gamma} |v_\varepsilon^\delta(x) - \sum_{n,p=1}^3 \psi^{np}(x-x^j) e_{np}[v^\delta](x^j)|^2 \right\} dx \geq \\ \geq \inf_v \Gamma(\varepsilon, h, x^j, \{e_{ik}[u^\delta](x^j)\}) \quad (v \in J(\varepsilon, h, x^j, l^j)) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Пользуясь равенством (1.26), запишем

$$\begin{aligned} \int_{K^j} |v_\varepsilon^\delta(x) - \sum e_{np}[u^\delta](x^j) \psi^{np,j}(x)|^2 dx \leq \\ \leq 2 \int_{K^j} |u_\varepsilon^\delta(x) - u^\delta(x)|^2 dx + 4 \int_{K^j} \{ |\sigma_\varepsilon^j(x)|^2 + |\eta_\varepsilon^j(x)|^2 \} dx, \end{aligned}$$

где $\sigma_\varepsilon^j(x)$ определяется в формуле (2.1.35) для $w(x) \equiv u^\delta(x)$.

Первый интеграл в правой части этого неравенства стремится к 0 при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, а второй – при любом фиксированном $\delta > 0$, в силу гладкости $u^\delta(x)$ и оценок (1.25) и (2.1.36) есть величина порядка $O(h^7)$, следовательно

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{K^j} |v_\varepsilon^\delta - \sum e_{np}[u^\delta](x^j) \psi^{np,j}|^2 dx = O(h^7). \quad (1.28)$$

Далее, пользуясь равенством (1.26), запишем

$$\int_{K^j} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [v_\varepsilon^\delta] dx \leq \int_{K^j} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon^\delta] + 2 \|u_\varepsilon^\delta\|_{W_2^1(K^j)} \|\eta_\varepsilon^j\|_{W_2^1(K^j)} + \|\eta_\varepsilon^j\|_{W_2^1(K^j)}^2. \quad (1.29)$$

Из (1.27) – (1.29), (1.24) и (1.7) (при $\theta = l^j \theta(x^j) + \frac{1}{2} \text{rot } u^\delta(x^j)$)

вытекает неравенство:

$$\begin{aligned} \mu \int_{K^j} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_\varepsilon^\delta] dx \geq h^2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^L(\varepsilon, h, x^j) e_{np}[u^\delta](x^j) e_{qr}[u^\delta](x^j) + \\ + 2h^3 \sum_{n,p,q=1}^3 b_{np,q}(\varepsilon, h, x^j) e_{np}[u^\delta](x^j) \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \text{rot } u^\delta(x^j) \right]_q + \\ + h^3 \sum_{m,l=1}^3 c_{ml}(\varepsilon, h, x^j) \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \text{rot } u^\delta(x^j) \right]_m \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \text{rot } u^\delta(x^j) \right]_l - \\ - O(h^{5/2}) \|u_\varepsilon^\delta\|_{W_2^1(K^j)} + O(h^{5-\gamma}). \end{aligned}$$

Суммируя его по j и учитывая, что число кубов K^j , покрывающих область Ω имеет порядок $O(h^{-3})$, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left\{ \mu \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2 [u_{\varepsilon}^{\delta}] - (f_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}^{\delta}) \right\} dx \geq \\
& \geq \sum_j h^3 \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}^{\mathcal{L}}(\varepsilon, h, x^j) e_{np}[u^{\delta}](x^j) e_{qr}[u^{\delta}](x^j) \right\} + \\
& + 2 \sum_j h^3 \left\{ \sum_{n,p,q=1}^3 b_{npq}^{\mathcal{L}}(\varepsilon, h, x^j) e_{np}[u^{\delta}](x^j) \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} u^{\delta}(x^j) \right]_q \right\} + \\
& \sum_j h^3 \left\{ \sum_{m,l=1}^3 c_{ml}^{\mathcal{L}}(\varepsilon, h, x^j) \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} u^{\delta}(x^j) \right]_m \left[\theta(x^j) - \frac{1}{2} \operatorname{rot} u^{\delta}(x^j) \right]_l \right\} - \\
& - \int_{\Omega} (f_{\varepsilon}, u_{\varepsilon}^{\delta}) dx - O(h) \|u_{\varepsilon}^{\delta}\|_{W_2^1(\Omega)} - O(h^{2-\gamma}) \quad (0 < \gamma < 2).
\end{aligned}$$

Перейдем здесь к пределу сначала по $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, а затем по $h \rightarrow 0$ (при фиксированном $\delta > 0$). Тогда, учитывая условия 1 – 4 теоремы 1.1, непрерывность $a_{npqr}^{\mathcal{L}}(x)$, $b_{npq}^{\mathcal{L}}(x)$, $c_{ml}^{\mathcal{L}}(x)$, $\theta(x)$ и $u^{\delta}(x)$, слабую сходимость $u_{\varepsilon}^{\delta}(x)$ к $u^{\delta}(x)$ в $W_2^1(\Omega)$, приходим к неравенству

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}[u_{\varepsilon}^{\delta}] \geq \Phi[u^{\delta}] \quad \forall \delta > 0,$$

где функционалы Φ_{ε} и Φ определены соответственно равенствами (1.1) и (1.9).

Теперь перейдем к пределу по $\delta \rightarrow 0$. Тогда, пользуясь неравенствами (1.22), (1.23), получаем требуемую оценку снизу

$$\varliminf_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}[u_{\varepsilon}] \geq \Phi[u]. \quad (1.30)$$

Напомним, что здесь u_{ε} минимизант функционала Φ_{ε} в классе $J_{\varepsilon\theta}^{\mathcal{L}}(\Omega)$, а u слабый предел u_{ε} при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ в $W_2^1(\Omega)$.

3. Теперь нетрудно закончить доказательство теоремы 1.1. Пусть $u_{\varepsilon} \in J_{\varepsilon\theta}^{\mathcal{L}}(\Omega)$ – минимизант функционала (1.1). В качестве представителя класса $J_{\varepsilon\theta}^{\mathcal{L}}(\Omega)$ можно взять вектор-функцию

$$\eta_{\varepsilon}(x) = \operatorname{rot} \sum_i \hat{\theta}_{\varepsilon}^i(x) \beta_{\varepsilon}^i(x), \quad (1.31)$$

где $\beta_{\varepsilon}^i(x)$ – те же срезающие функции, что и в (1.12), а $\hat{\theta}_{\varepsilon}^i(x)$ –

определяется равенством (1.13) с заменой $\theta_k(x^j) - \theta_k(x_\varepsilon^i)$ на $\theta_k(x_\varepsilon^i)$. Таким же образом, как и выше, убеждаемся, что $\eta_\varepsilon(x)$ принадлежит классу $J_{\varepsilon\theta}^{\circ}(\Omega)$ и, следовательно

$$\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[\eta_\varepsilon].$$

Отсюда, с помощью (1.31) и неравенства Корна, учитывая свойства функций $\beta_\varepsilon^i(x)$ и ограниченность $f_\varepsilon(x)$ в $L_2(\Omega)$, получаем

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C, \quad (1.32)$$

где постоянная C не зависит от ε .

Из этой оценки следует, что множество минимизантов $\{u_\varepsilon(x), \varepsilon > 0\}$ функционала (1.1) слабо компактно в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}(\Omega)$ и, значит, можно выделить подпоследовательность $\{u_{\varepsilon_k}(x), \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ сходящуюся слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и сильно в $L_2(\Omega)$ к некоторой вектор-функции $u \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$. В силу полученных выше оценок (1.21) и (1.30), эта вектор-функция удовлетворяет неравенству $\Phi[u] \leq \Phi[w], \forall w \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$, т.е. минимизирует функционал (1.9) в классе $\overset{\circ}{J}(\Omega)$. Покажем, что этот функционал имеет не более одного минимизанта $u(x)$. Из этого в силу (1.32) будет следовать, что $u_{\varepsilon_k}(x)$ сходится к $u(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нетрудно убедиться, что минимизант $u(x)$ функционала (1.9) удовлетворяет интегральному тождеству:

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 A_{npqr}(x) \frac{\partial u_n}{\partial x_p} \frac{\partial \zeta_q}{\partial x_r} \right\} dx = \\ & = \int_{\Omega} \left\{ (\tilde{f}, \zeta) - 2 \sum_{n,p,q,r=1}^3 B_{npq}(x) \theta_q(x) \frac{\partial \zeta_n}{\partial x_p} \right\} dx, \quad \forall \zeta \in \overset{\circ}{J}(\Omega), \end{aligned}$$

где тензоры $\{A_{npqr}(x)\}, \{B_{npq}(x)\}$ – определены равенствами

$$\begin{aligned}
A_{npqr}(x) &= a_{npqr}^{\mathcal{L}}(x) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 \{b_{npl}^{\mathcal{L}}(x)\varepsilon_{lqr} + b_{qrl}^{\mathcal{L}}(x)\varepsilon_{lnp}\} + \frac{1}{2} \sum_{m,l=1}^3 c_{ml}^{\mathcal{L}}(x)\varepsilon_{mp}\varepsilon_{lqr}, \\
B_{npq}(x) &= b_{npq}^{\mathcal{L}}(x) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 c_{ql}^{\mathcal{L}}(x)\varepsilon_{lnp}, \quad \{\varepsilon_{lnp}\} - \text{òáí çî ð Ëââè-×ââèòà.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Поэтому, если существуют два минимизанта $u^1, u^2 \in J(\Omega)$, то их разность $w(x) = u^1(x) - u^2(x)$ должна удовлетворять тождеству

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 A_{npqr}(x) \frac{\partial w_n}{\partial x_p} \frac{\partial \zeta_q}{\partial x_r} \right\} dx = 0, \quad \forall \zeta \in J(\Omega).$$

Полагая в нем $\zeta(x) = w(x)$ и учитывая (1.33), получаем

$$0 = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 A_{npqr}(x) \frac{\partial w_n}{\partial x_p} \frac{\partial w_q}{\partial x_r} \right\} dx = \Phi_0[w], \tag{1.34}$$

где через $\Phi_0[w]$ обозначен функционал (1.9) при $\tilde{f} \equiv 0$ и $\theta(x) \equiv 0$.

По вектор-функции $w(x)$ так же как в лемме 1.3 построим вектор-функцию $w_{\varepsilon}(x)$ класса $J_{\varepsilon 0}^{\mathcal{L}}(\Omega)$, сходящуюся при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ к $w(x)$. В силу неравенств Корна

$$C \|w_{\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \mu \int_{\Omega} e_{ik}^2[w_{\varepsilon}] dx \quad (C > 0),$$

откуда с помощью оценки сверху (1.21) (при $\tilde{f}(x) = 0$ и $\theta = 0$), с учетом (1.34), получаем

$$C \|w\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w_{\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \Phi_{\varepsilon}[w_{\varepsilon}] = 0, \quad C > 0.$$

Таким образом, $w(x) \equiv 0$ и, значит, функционал (1.9) не может иметь более одного минимизанта в классе $J(\Omega)$. Тем самым теорема 1.1 доказана.

Замечание. Предельный функционал (1.9) на самом деле зависит только от составляющей $P_{\mathcal{L}}\theta(x)$ векторного поля $\theta(x)$, поскольку из (1.6), (1.8) и условий 2 и 3 теоремы 1.1 следует, что

$$\sum_{q=1}^3 b_{npq}(x)\zeta_q = 0, \quad \sum_{m=1}^3 c_{nm}(x)\zeta_m = 0, \quad \forall \zeta = (E - P_{\mathcal{L}})\theta.$$

4. Проверка выполнения условий 1 – 3 теоремы 1.1 в общей ситуации является сложной задачей. Поэтому приведем один конкретный случай, когда они заведомо выполняются и вычислим предельные тензоры $a_{npqr}^{\mathcal{L}}(x)$, $b_{npq}^{\mathcal{L}}(x)$, $c_{nm}^{\mathcal{L}}(x)$ через решения ячеечных задач.

А именно, предположим, что Q_{ε}^i располагаются в Ω так, как описано в § 1 главы 3, т.е. при каждом ε образуют структуру близкую к периодической с ячейкой периодов $\Pi_{\varepsilon}^i \setminus \overline{Q_{\varepsilon}^i}$ порядка ε , медленно меняющуюся в пространстве. Будем придерживаться обозначений принятых в § 1 главы 3.

Рассмотрим в растянутой ячейке $\Pi \setminus \overline{Q^y}$ следующие две ячейечные краевые задачи (зависящие от параметров $y \in \Omega$ и $q, r, m=1,2,3$):

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u^{qr} + \nabla p^{qr} &= 0, \quad \operatorname{div} u^{qr} = 0, \quad x \in \Pi \setminus Q^y, \\ u^{qr} &= -\psi^{qr} + (P_L^{\perp} b^{qr}) \times x, \quad x \in Q^y, \\ P_{\mathcal{L}}^{\perp} \left\{ \int_{\partial Q^y} \sigma[u^{qr}] \times x dS \right\} &= 0, \\ u^{qr} \text{ и } \sigma[u^{qr}] &\text{ – } \Pi\text{-периодичны} \end{aligned} \right\} \quad (1.35)$$

и

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u^m + \nabla p^m &= 0, \quad \operatorname{div} u^m = 0, \quad x \in \Pi \setminus Q^y, \\ u^m &= (P_L e^m + P_L^{\perp} b^m) \times x, \quad x \in Q^y, \\ P_{\mathcal{L}}^{\perp} \left\{ \int_{\partial Q^y} \sigma[u^m] \times x dS \right\} &= 0, \\ u^m \text{ и } \sigma[u^m] &\text{ – } \Pi\text{-периодичны.} \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Здесь ψ^{qr} – вектор-функция, определенная формулой (2.1.2), e^m – орт оси x_m , b^{qr} и b^m – некоторые постоянные векторы; Π -периодичность означает, что выполняются условия (3.1.4), (3.1.5).

Так же как в лемме 3.1.1 доказывається, что решения этих

задач существуют и определены однозначно с точностью до аддитивной постоянной в давлении, причем их можно периодически продолжить на все пространство \mathbf{R}^3 . Через них выражаются коэффициенты $a_{npqr}^\varepsilon(x)$, $b_{npq}^\varepsilon(x)$, $c_{nm}^\varepsilon(x)$ предельного функционала в теореме 1.1. А именно, справедлива следующий аналог теоремы 3.5.1.

Теорема 1.2. *Для рассматриваемого расположения частиц Q_ε^i , выполняются условия 1 – 3 Теоремы 1.1, причем компоненты предельных тензоров вычисляются по формулам*

$$a_{npqr}^\varepsilon(y) = \mu \mathbf{I}_{npqr} + \frac{\mu}{|\Pi|} \int_{\Pi} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[u^{np}(x,y)] e_{ik}[u^{qr}(x,y)] dx,$$

$$b_{npq}^\varepsilon(y) = \frac{\mu}{|\Pi|} \int_{\Pi} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[u^{np}(x,y)] e_{ik}[u^q(x,y)] dx,$$

$$c_{mm}^\varepsilon(y) = \frac{\mu}{|\Pi|} \int_{\Pi} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}[u^m(x,y)] e_{ik}[u^m(x,y)] dx,$$

где $|\Pi|$ – объем параллелепипеда Π .

Доказательство этой теоремы проводится таким же образом, как и теоремы 3.5.1.

§2. Асимптотическое поведение решения модельной задачи А при заданных внешних моментах

Модельная задача А (см. (2.1.1)) была исследована в Главе 2 (§ 1) в случае, когда внешние моменты M_ε^i малы, а именно $M_\varepsilon^i = o(\text{mes } Q_\varepsilon^i)$ так, что их влияние в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ исчезает. Но, если суспензия находится в сильном внешнем поле (электрическом, или магнитном) и материал твердых частиц Q_ε^i в ней поляризующийся, или намагничивающийся, то на частицы Q_ε^i со стороны поля действуют моменты пропорциональные их объемам: $|M_\varepsilon^i| = C \text{mes } Q_\varepsilon^i$ ($C > 0$). В этом случае внешние моменты в пределе оказывают существенное влияние на движение суспензии, но его описание наталкивается

на большие трудности, связанные с невозможностью контролировать поведение угловых скоростей b_ε^i в задаче A . В общей ситуации эти скорости изменяются довольно резко при переходе от частицы к частице. Поэтому мы будем рассматривать здесь только локально-периодическое расположение частиц Q_ε^i в Ω (описанное в § 1 главы 3) и будем предполагать, что внешние моменты M_ε^i плавно изменяются при переходе от частицы к частице, а именно, они определяются равенством

$$M_\varepsilon^i = M(x_\varepsilon^i) \text{mes } Q_\varepsilon^i, \quad (2.1)$$

где $M(x)$ – гладкая вектор-функция в Ω . Тогда можно ожидать, что угловые скорости b_ε^i частиц будут в некотором смысле плавно зависеть от их координат x_ε^i . Точнее, пусть выполняются такие равенства

$$b_\varepsilon^i = b(x_\varepsilon^i) + \tilde{b}_\varepsilon^i, \quad i = 1, \dots, N_\varepsilon, \quad (2.2)$$

где $b(x)$ – некоторая непрерывная вектор-функция в Ω , а добавки \tilde{b}_ε^i – постоянные векторы, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |\tilde{b}_\varepsilon^i|^2 \text{mes } Q_\varepsilon^i \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

При этих условиях опишем асимптотическое поведение решения $u_\varepsilon(x)$ модельной задачи A при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого воспользуемся модельной задачей C , в которой подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbf{R}^3$ выберем совпадающим со всем пространством \mathbf{R}^3 . Обозначим через $c_\varepsilon = \{c_\varepsilon^i, i = 1, \dots, N_\varepsilon\}$ конечный (при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$) набор постоянных векторов $c_\varepsilon^i \in \mathbf{R}^3$, а через $J_{c_\varepsilon}^\circ(\Omega)$ класс соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(\Omega)$, равных $a_\varepsilon^i + c_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на частицах $Q_\varepsilon^i \subset \Omega$ ($i = 1, \dots, N_\varepsilon$), где a_ε^i – произвольные постоянные векторы, а c_ε^i – векторы из фик-

сированного набора c_ε . Пусть G_ε – множество всевозможных наборов c_ε . Нетрудно показать, что имеет место равенство:

$$\inf_{v_\varepsilon \in J_{\varepsilon A}(\Omega)} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] = \inf_{c_\varepsilon \in G_\varepsilon} \inf_{v_\varepsilon \in J_{c_\varepsilon}(\Omega)} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon], \quad (2.4)$$

причем нижние грани в левых и правых частях равенства достигаются на одном и том же элементе $u_\varepsilon \in J_{c_\varepsilon}^\circ(\Omega) \subset J_{\varepsilon A}^\circ(\Omega)$ ($\exists c_\varepsilon \in G_\varepsilon$). Здесь $\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon]$ – функционал определенный равенством (2.1.1).

Равенство (2.4) устанавливает соответствие между модельными задачами A и C (при $\mathcal{L}=\mathbf{R}^3$), что позволяет исследовать асимптотическое поведение решения $u_\varepsilon(x)$ задачи A (при заданных моментах M_ε^i) с помощью задачи C . Для этого предположим, что заданные угловые скорости c_ε^i в задаче C при $\varepsilon \rightarrow 0$ ведет себя следующим образом:

$$c_\varepsilon^i = \theta(x_\varepsilon^i) + \tilde{c}_\varepsilon^i, \quad (2.5)$$

где $\theta(x)$ – произвольная непрерывная вектор-функция, а постоянные векторы \tilde{c}_ε^i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} |\tilde{c}_\varepsilon^i| \text{mes } Q_\varepsilon^i \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Замечание. Согласно сделанному предположению (2.2), (2.3) таким же образом ведут себя неизвестные угловые скорости в задаче A .

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] = \int_{\Omega} \left\{ \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_\varepsilon] + (\tilde{f}_\varepsilon, v_\varepsilon) \right\} dx + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (M_\varepsilon^i, c_\varepsilon^i). \quad (2.7)$$

в классе вектор-функций $J_{c_\varepsilon}^\circ(\Omega)$, предполагая, что набор постоянных векторов $c_\varepsilon = \{c_\varepsilon^i, i=1, \dots, N_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ удовлетворяет условиям (2.5), (2.6).

Теорема 2.1. *Предположим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняются условия 1 – 3 (при $\mathcal{L} = \mathbf{R}^3$) и условие 4 Теоремы 2.1.1, а также условия (2.1) и (2.5), (2.6).*

Тогда вектор-функция $u_\varepsilon(x)$, минимизирующая функционал (2.7) в классе $J_{c_\varepsilon}^\circ(\Omega)$, сходится слабо в $J^\circ(\Omega)$ к вектор-функции $u(x)$ минимизирующей функционал

$$\Phi_\theta[u] = \Phi'_\theta[u] - \int_{\Omega} M(x)\tau(x)\theta(x)dx, \quad (2.8)$$

где $\tau(x)$ – предельная объемная плотность множества твердых частиц, а функционал $\Phi'_\theta[u]$ определен в теореме 1.1 равенством (1.9), при $\mathcal{L} = \mathbf{R}^3$.

В случае локально-периодического распределения частиц $\tau(x) = \frac{|Q^x|}{|\Pi|}$, а коэффициенты функционала $\Phi'_\theta[u]$ вычисляются по формулам теоремы 1.2 при $\mathcal{L} = \mathbf{R}^3$.

Доказательство теоремы 2.1. проводится точно таким же образом, как и теоремы 1.1.

Так как, согласно предположению (2.2), (2.3), угловые скорости b_ε^i частиц Q_ε^i в задаче A при $\varepsilon \rightarrow 0$ ведут себя так же, как заданные векторы c_ε^i в задаче C , то из (2.4) и теоремы 2.1 следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\inf_{v_\varepsilon \in J_{\varepsilon A}^\circ(\Omega)} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \rightarrow \inf_{\theta \in C(\Omega)} \inf_{v \in J^\circ(\Omega)} \Phi_\theta[v] = \inf_{\substack{v \in J^\circ(\Omega) \\ \theta \in C(\Omega)}} \Phi[v, \theta],$$

где функционал $\Phi[v, \theta] = \Phi_\theta[v]$ определен равенством (2.8).

Учитывая это, нетрудно убедиться, что решение $u_\varepsilon(x)$ задачи A для функционала (2.1.1) сходится слабо в $J^\circ(\Omega)$ (и сильно в $L_2(\Omega)$) к вектор-функции $u(x) \in J^\circ(\Omega)$ такой, что пара $\left\{ u \in J^\circ(\Omega), \theta \in C(\Omega) \right\}$ является минимизантом функционала

$\Phi[v, \theta]$. Полагая вариацию этого функционала по θ равной нулю, получаем связь между компонентами $u(x)$ и $\theta(x)$ этого минимизанта:

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} u - (c')^{-1} \left[\sum_{n,p,q=1}^3 b'_{npq} e_{np}[u] e^q \right] - \frac{\tau}{2} (c')^{-1} M. \quad (2.9)$$

Здесь и всюду ниже штрихом обозначаются функции, определенные условиями 1 – 3 теоремы 1.1 при $\mathcal{L} = \mathbf{R}^3$, $(c')^{-1}$ – матрица обратная матрице $c' = \{c'_{kl}(x)\}_{k,l=1}^3$.

Из (2.8), (1.9) и (2.9) следует, что вектор-функция $u(x)$ минимизирует в классе $J(\Omega)$ следующий функционал:

$$\Phi_M[u] = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 \left(a'_{npqr} - \sum_{k,l=1}^3 (c')_{kl}^{-1} b'_{npk} b'_{qrl} \right) e_{np}[u] e_{qr}[u] + (\tilde{f}_M, u) \right\} dx, \quad (2.10)$$

где вектор-функция \tilde{f}_M определена равенством

$$\tilde{f}_M = \tilde{f} + \frac{1}{2} \operatorname{rot}(M\tau) + \frac{1}{2} \operatorname{div}(\tilde{M}'\tau), \quad (2.11)$$

в котором через \tilde{M}' обозначен такой тензор 2-го ранга

$$\tilde{M}' = \left\{ \sum_{r,q=1}^3 (c')_{rs}^{-1} b'_{nps} M_r \right\}_{n,p=1}^3 \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь локально-периодическое расположение частиц.

Лемма 2.1. *Справедливы следующие равенства:*

$$a_{npqr} = a'_{npqr} - \sum_{k,l=1}^3 (c')_{kl}^{-1} b'_{npk} b'_{qrl}, \quad (2.13)$$

где функции a_{npqr} определены в теореме 3.1.1, а a'_{npqr} , b'_{npq} , c'_{kl} – в теореме 1.2.

Доказательство. Согласно теореме 3.1.1, функции a_{npqr} вычисляются с помощью решения u^{rs} задачи (3.1.1) – (3.1.5). Это решение минимизирует функционал:

$$\Psi[u] = \int_{\Pi} \sum_{i,k=1}^3 e_{ik}^2[u] dx \quad (2.14)$$

в классе J_{Π} соленоидальных Π -периодических вектор-функций, равных $-\psi^{rs} + \omega^{rs} \times x$ на $Q \subset \Pi$, где ω^{rs} – произвольный постоянный вектор.

Рассмотрим вектор-функцию

$$w^{rs} = v^{rs} + \sum_{m=1}^3 \theta_m v^m, \quad (2.15)$$

где v^{rs} и v^m – решения задач (1.35) и (1.36) при $\mathcal{L} = \mathbf{R}^3$, а $\theta = \{\theta_m\}$ – некоторый постоянный вектор.

Нетрудно убедиться, что w^{rs} минимизирует функционал (2.14) в классе J_{Π}^{θ} соленоидальных Π -периодических вектор-функций, равных $-\psi^{rs} + \theta \times x$ на $Q \subset \Pi$, где θ – заданный постоянный вектор. Поскольку $J_{\Pi}^{\theta} \subset J_{\Pi}$, отсюда следует, что

$$\min_{u \in J_{\Pi}} \Psi[u] = \min_{\theta} \min_{w \in J_{\Pi}^{\theta}} \Psi[w], \quad (2.16)$$

причем минимальные значения в левой и правой частях этого равенства достигаются на одной и той же вектор-функции

$$u^{rs} = v^{rs} + \sum_{m=1}^3 \hat{\theta}_m^{rs} v^m. \quad (2.17)$$

Для нахождения $\hat{\theta}_m^{rs}$ подставим в правую часть (2.16) w вида (2.15) и приравняем нулю ее вариацию по θ . Тогда, учитывая представление для функций a'_{npqr} , b'_{npq} , c'_{kl} , данные в теореме 1.2, получаем

$$\hat{\theta}_m^{rs} = - \sum_{q=1}^3 (c')_{mq}^{-1} b'_{rsq}. \quad (2.18)$$

Подставляя (2.17), (2.18) в формулу для a_{npqr} , данную в теореме 3.1.1, и снова воспользовавшись представлениями для a'_{npqr} , b'_{npq} , c'_{kl} , данными в теореме 1.2, получаем требуемое равенство (2.13). Лемма 1.2 доказана.

Учитывая эту лемму, полученный выше результат об

асимптотическом поведении при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $u_\varepsilon(x)$ задачи A для функционала (2.1.1) при заданных моментах M_ε^i , можно сформулировать в следующем виде:

Теорема 2.2. Пусть частицы Q_ε^i расположены в области Ω локально-периодически (точное определение см. §1 глава 3). Пусть силы $f_\varepsilon(x)$ и моменты M_ε^i , действующие на частицы, удовлетворяют условию 2 теоремы 2.1.1 и условию (2.1), соответственно.

Тогда, если угловые скорости b_ε^i частиц удовлетворяют условиям (2.2), (2.3), то решение $u_\varepsilon(x)$ задачи A для функционала (2.1.1) сходится слабо в $J(\Omega)$ (и сильно в $L_2(\Omega)$) к вектор-функции $u(x)$, минимизирующей в классе $J(\Omega)$ функционал

$$\Phi_M[u] = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr} e_{np}[u] e_{qr}[u] + (\tilde{f}_M, u) \right\} dx,$$

где a_{npqr} – определены в теореме 3.1.1, а $\tilde{f}_M(x)$ – определена равенствами (2.11), (2.12).

Замечание. Ясно, что из-за предположения (2.2), (2.3) эта теорема носит условный характер.

§ 3. Нестандартная модель гидродинамики суспензии ориентированных частиц

Предположим, что твердая фаза суспензии состоит из намагничивающихся (поляризующихся) частиц, которые имеют форму вытянутых тел вращения. Пусть суспензия находится в очень сильном однородном внешнем магнитном (электрическом) поле. Тогда оси вращения частиц будут ориентированы по направлению поля и под действием гидродинамических и гравитационных сил частицы будут двигаться поступательно и вращаться вокруг этих осей (рис.2), причем такая идеализированная картина движения будет тем точнее, чем больше внешнее поле H (т.е. в пределе $|H| \rightarrow \infty$).

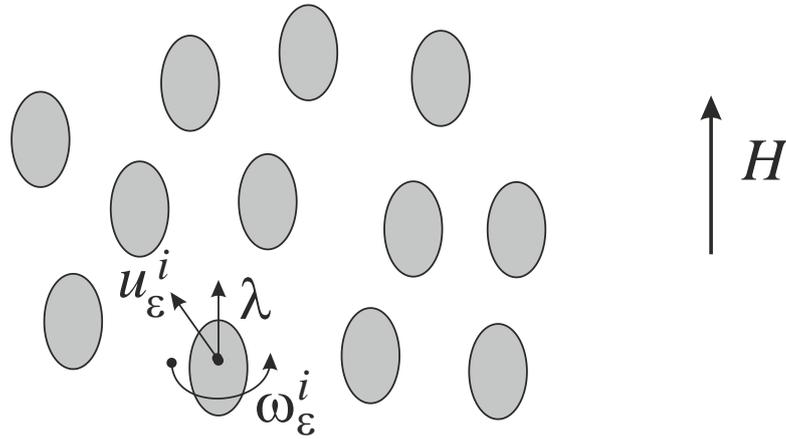


Рис.2

Такое движение суспензии описывается следующей системой уравнений (аналогичной системе (1.1.1) – (1.1.5))

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\text{ж}} \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \right] - \mu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \rho_{\text{ж}} f_\varepsilon \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \end{aligned} \right\} (x, t) \in \Omega_{\varepsilon T}, \quad (3.1)$$

$$u_\varepsilon(x, t) = u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i(t)), \quad (x, t) \in Q_\varepsilon^i, \quad (3.2)$$

$$m_\varepsilon^i \dot{u}_\varepsilon^i(t) = - \int_{\partial Q_\varepsilon^i(t)} \sigma[u_\varepsilon] dS + \rho_{\text{ч}\varepsilon} \int_{Q_\varepsilon^i(t)} f_\varepsilon(x, t) dx, \quad (3.3)$$

$$J_\varepsilon^i \dot{\omega}_\varepsilon^i(t) = P_\lambda \left\{ - \int_{\partial Q_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i(t)) \times \sigma[u_\varepsilon] dS + \rho_{\text{ч}\varepsilon} \int_{Q_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i(t)) \times f_\varepsilon(x, t) dx \right\} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon^i(t) = \\ = \left\{ x(t) \in \Omega : \dot{x}(t) = u_\varepsilon^i(t) + \omega_\varepsilon^i(t) \times (x(t) - x_\varepsilon^i(t)), \dot{x}_\varepsilon^i(t) = u_\varepsilon^i(t), x(0) = Q_\varepsilon^i(0) \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\omega_\varepsilon^i(t)$, J_ε^i – соответственно угловая скорость и момент инерции частицы Q_ε^i , относительно ее оси вращения, направленной вдоль внешнего поля H , P_λ – оператор ортогонального проектирования на одномерное подпространство I_λ , порожденное единым вектором $\lambda = \frac{H}{|H|}$, все остальные обозначения те же, что и в (1.1.1) – (1.1.5).

Дополним эту систему краевыми и начальными условиями вида:

$$u_\varepsilon(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.6)$$

$$u_\varepsilon(x, 0) = U_\varepsilon^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.7)$$

где $U_\varepsilon^0(x)$ – соленоидальная вектор-функция из $W_2^1(\Omega)$, равная $u_\varepsilon^{i0} + \omega_\varepsilon^{i0} \times (x - x_\varepsilon^i(0))$ при $x \in Q_\varepsilon^i(0) \subset \Omega$, где u_ε^{i0} и ω_ε^{i0} – постоянные векторы, причем $\omega_\varepsilon^{i0} \in I_\lambda$.

Так же как в § 1 главы 1, введем обобщенное решение $\{\rho_\varepsilon(x, t), u_\varepsilon(x, t)\}$ задачи (3.1) – (3.7) с помощью равенств (1.1.10) – (1.1.12), в которых $M_\varepsilon^i = 0$ и класс вектор-функций $J(\Omega, \chi_\varepsilon(\cdot, t))$ определен не для произвольных угловых скоростей $b(t)$, а для угловых скоростей фиксированного направления $\lambda = \frac{H}{|H|}$.

Имеет место аналог теоремы 1.1.1 о существовании обобщенного решения задачи (3.1) – (3.2) на интервале $[0, T_\varepsilon]$, где время T_ε соответствует первому столкновению между частицами, или между частицами и границей $\partial\Omega$. Так же как в работе [70] это решение можно продолжить на весь интервал $[0, T]$ (см. § 1 глава 1).

В данном параграфе дается описание асимптотического поведения этого решения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого будем предполагать, что выполняются неравенства (1.2.1) – (1.2.3), а также условия (j) – (jjj) из § 3 главы 2.

Введем при каждом $t \in [0, T]$ мезоскопические характеристики суспензии – тензоры $\{a_{npqr}^\mathcal{L}(\varepsilon, h, x, t)\}_{n,p,q,r=1}^3$, $\{b_{npq}^\mathcal{L}(\varepsilon, h, x, t)\}_{n,p,q=1}^3$, $\{c_{mn}^\mathcal{L}(\varepsilon, h, x, t)\}_{m,n=1}^3$, определяемые формулами (1.5) – (1.8), где \mathcal{L} – двумерное подпространство в \mathbf{R}^3 , ортогональное направлению λ . Определим также плотность суспензии $\rho_\varepsilon(x, t)$ формулой (1.1.10).

Справедлива следующая теорема (аналог теоремы 2.4.1)

Теорема 3.1. Пусть при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняются такие условия:

1. существуют пределы ($\forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T], n, p, q, r = 1, 2, 3$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{npqr}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{npqr}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x, t)} = a_{npqr}^{\varepsilon}(x, t),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{npq}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_{npq}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x, t)} = b_{npq}^{\varepsilon}(x, t),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{qr}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} c_{qr}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x, t)} = c_{qr}^{\varepsilon}(x, t),$$

2. $\rho_{\varepsilon}(x, 0) \rightarrow \rho^0$ слабо в $L_2(\Omega)$,

3. $f_{\varepsilon}(x, t) \rightarrow f(x, t)$ слабо в $L_2(\Omega \times [0, T])$,

4. $U_{\varepsilon}^0 \rightarrow U^0$ в $L_2(\Omega)$.

Тогда решение $\{\rho_{\varepsilon}(x, t), u_{\varepsilon}(x, t)\}$ задачи (3.1) – (3.7) сходится к решению $\{\rho(x, t), u(x, t)\}$ задачи

$$\left. \begin{aligned} & \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] - \\ & - 2 \sum_{n, p, q, r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ a_{npqr}^D e_{qr}[u] + a_{npqr}^R \omega_{qr}[u] \right\} e^n + \nabla p = \rho f, \\ & \operatorname{div} u = 0, \\ & \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \rho = 0 \end{aligned} \right\} (x, t) \in \Omega_T, \quad (3.8)$$

$$\rho(x, 0) = \rho^0(x), \quad u(x, 0) = U^0(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.9)$$

$$u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (3.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} e_{np}[u] &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p}{\partial x_n} \right), \quad \omega_{np}[u] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_p} - \frac{\partial u_p}{\partial x_n} \right), \\ a_{npqr}^D(x, t) &= a_{npqr}^{\varepsilon}(x, t) - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 b_{qrl}^{\varepsilon}(x, t) \varepsilon_{lp}, \\ a_{npqr}^R(x, t) &= \frac{1}{4} \sum_{l, m=1}^3 c_{lm}^{\varepsilon}(x, t) \varepsilon_{lp} \varepsilon_{mqr} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^3 b_{npl}^{\varepsilon}(x, t) \varepsilon_{lqr}. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Сходимость понимается в следующем смысле:

$$u_{\varepsilon}(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ в } L_2(\Omega_T), \quad \rho_{\varepsilon}(x, t) \rightarrow \rho(x, t) \text{ слабо в } L_2(\Omega_T),$$

Доказательство этой теоремы проводится таким же образом, как и доказательство теоремы 2.4.1 (и уравнения

(2.4.26)). Но при этом, вместо теоремы 2.1.1, главную роль играет теорема 1.1., в которой полагаем $\theta \equiv 0$ и $L = \mathbf{R}^3$. С ее помощью доказывается сходимость резольвент краевых задач, соответствующих рассматриваемым вариационным задачам для функционалов (1.1) и (1.9), а дальше все рассуждения проводятся так же как в главе 2.

Полученная усредненная система (3.8) является незамкнутой, т.к. она содержит тензоры $A^D = \{a_{npqr}^D(x, t)\}_{n,p,q,r=1}^3$ и $A^R = \{a_{npqr}^R(x, t)\}_{n,p,q,r=1}^3$, которые согласно (3.11) и условия 1 теоремы 3.1, зависят от расположения частицы в момент времени $t \in [0, T]$ в окрестности точки $x \in \Omega$, и значит, «а priori» неизвестны. В общем случае описать их эволюцию во времени не представляется возможным. Однако, если диаметры частиц малы по сравнению с расстояниями между ними, то тензоры $A^D(x, t)$ и $A^R(x, t)$ также малы и в этом случае они удовлетворяют (асимптотически) такому уравнению переноса:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (u \cdot \nabla) A = 0, \quad A = (A^D, A^R). \quad (3.12)$$

Наметим схему доказательства, предполагая для простоты, что каждая частица Q_ε^i является сжатием с последующим поворотом одного и того же тела вращения Q единичного диаметра и с осью симметрии, направленной вдоль оси x_1 (напомним, что оси вращения всех частиц Q_ε^i направлены по вектору $\lambda = |H|^{-1} H$).

Обозначим через $\tau_\varepsilon = \sum_{x \in \mathcal{L}} h^{-3} |Q_\varepsilon^i|$ – полный относительный объем всех частиц, попавших в куб $K(x, h') \subset K(x, h)$ ($h' = h - 2h^\kappa$, $\kappa > 1$). Таким же образом как в §3 главы 3, получаем асимптотическую формулу при $\mathcal{L} = \mathbf{R}^3 \ominus I_\lambda$ (см. (3.3.1))

$$a_{npqr}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x) = \mu I_{npqr} + \mu \tau_{\varepsilon} \left[A_{npqr} + B(\lambda_n \lambda_q \delta_{pr} + \lambda_r \lambda_n \delta_{qp} + \lambda_p \lambda_r \delta_{nq} + \lambda_q \lambda_p \delta_{rn}) + \right. \\ \left. + C(\lambda_n \lambda_p \delta_{qr} + \lambda_q \lambda_r \delta_{np}) + D \lambda_n \lambda_p \lambda_q \lambda_r \right] + o(\tau_{\varepsilon}), \quad (3.13)$$

где A , B , C , D вычисляются по формулам (3.3.53), (3.3.33), (3.3.20), и с помощью решения $w^{qr}(x)$ краевой задачи:

$$\Delta w^{qr} = \nabla p^{qr}, \quad \operatorname{div} w^{qr} = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus Q, \\ w^{qr} = \frac{1}{2}(x_q e^r + x_r e^q) - \frac{\delta_{qr}}{3} \sum_{k=1}^3 x_k e^k + a^{qr} + b^{qr} \times x, \quad x \in \partial\Omega, \\ \int_{\partial Q} \sigma[w^{qr}] dS = P_1 \int_Q \sigma[w^{qr}] \times x dx = 0,$$

$$w^{qr}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad p^{qr}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^3}\right) \quad x \rightarrow \infty,$$

где a^{qr} , b^{qr} – постоянные векторы, $b^{qr} = |b^{qr}| e^1$ направлен по единичному вектору e^1 , P_1 – ортогональный проектор на подпространство, порожденное вектором e^1 .

Аналогично, с учетом симметрии и ориентации тела Q , выводятся асимптотические формулы

$$c_{qr}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x) = \mu \tau_{\varepsilon} \left[c_{22} \delta_{qr} + (c_{11} - c_{22}) \lambda_q \lambda_r \right] + o(\tau_{\varepsilon}), \quad (3.14)$$

$$b_{npq}^{\varepsilon}(\varepsilon, h, x) = \mu \tau_{\varepsilon} B_{123} (\lambda_n \lambda_l \varepsilon_{lpq} + \lambda_p \lambda_l \varepsilon_{lnq}) + o(\tau_{\varepsilon}), \quad (3.15)$$

где $\{\varepsilon_{lqr}\}$ – тензор Леви-Чевита, а коэффициенты C_{kk} и B_{123} определяются по формулам

$$C_{kk} = \frac{1}{|Q|} \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}^2[v^k] dx,$$

$$B_{123} = \frac{1}{|Q|} \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}[w^{12}] e_{ij}[v^3] dx.$$

Здесь $v^k(x)$ есть решение краевой задачи

$$\Delta v^k = \nabla p^k, \quad \operatorname{div} v^k = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus Q, \\ v^k = e^k x_k + a^k + b^k \times x, \quad x \in \partial Q, \\ \int_{\partial Q} \sigma[v^k] dS = P_1 \int_Q \sigma[v^k] \times x dx = 0,$$

$$v^k = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad p^k = O\left(\frac{1}{|x|^3}\right),$$

где a^k и b^k – постоянные векторы, причем $b^k = |b^k| e^1$.

Из (3.13)–(3.15), условий теоремы 3.1 и (3.11) для $\{a_{npqr}^D(x,t)\}_{n,p,q,r=1}^3$, $\{a_{npqr}^R(x,t)\}_{n,p,q,r=1}^3$ вытекают такие асимптотические формулы:

$$a_{npqr}^D(x,t) = \mu \mathbf{I}_{npqr} + \mu \hat{a}_{npqr}^D(\lambda) \frac{\rho(x,t) - \rho_{\infty}}{\rho_{\infty} - \rho_{\infty}}, \quad (3.16)$$

$$a_{npqr}^R(x,t) = \mu \hat{a}_{npqr}^R(\lambda) \frac{\rho(x,t) - \rho_{\infty}}{\rho_{\infty} - \rho_{\infty}}, \quad (3.17)$$

где $\rho(x,t)$ – предельная массовая плотность суспензии ($\rho_{\infty}(x,t) \rightarrow \rho(x,t)$), а $\{\hat{a}_{npqr}^D(\lambda)\}$ и $\{\hat{a}_{npqr}^R(\lambda)\}$ – постоянные тензоры

$$\begin{aligned} \hat{a}_{npqr}^D(\lambda) = & A_{npqr} + \left(B + \frac{B_{123}}{2}\right) (\lambda_p \lambda_q \delta_m + \lambda_p \lambda_r \delta_{qm}) + \left(B - \frac{B_{123}}{2}\right) (\lambda_n \lambda_q \delta_{pr} + \lambda_n \lambda_r \delta_{pq}) + \\ & + C(\lambda_n \lambda_p \delta_{qr} + \lambda_q \lambda_r \delta_{np}) + D \lambda_n \lambda_p \lambda_q \lambda_r \\ \hat{a}_{npqr}^R(\lambda) = & \frac{1}{4} \left[C_{22} (\delta_{nq} \delta_{pr} - \delta_{nr} \delta_{pq}) + (C_{11} - C_{22}) \sum_{l,m=1}^3 \lambda_l \lambda_m \varepsilon_{mqr} \varepsilon_{lqp} \right] + \\ & + \frac{B_{123}}{2} (\lambda_n \lambda_q - \lambda_n \lambda_r + \lambda_p \lambda_q - \lambda_p \lambda_r) \end{aligned}$$

Из (3.16) и (3.17) следует, что главные члены асимптотики тензоров $\{\hat{a}_{npqr}^D(\lambda)\}$ и $\{\hat{a}_{npqr}^R(\lambda)\}$ удовлетворяют уравнению (3.12), поскольку этому уравнению удовлетворяет плотность $\rho(x,t)$.

Систему (3.8), замкнутую с помощью соотношений (3.16), (3.17) запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] - \operatorname{div} T(\rho, u, p) &= \rho f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u \cdot \nabla) \rho &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

где

$$T(\rho, u, p) = A^D(\rho) E[u] + A^R(\rho) \Omega[u] - E p \quad (3.19)$$

– тензор напряжений.

Отсюда заключаем, что усредненная модель гидродинамики суспензии с ориентированными частицами (3.18), (3.19) является нестандартной моделью сплошной среды. В ней тензор напряжений зависит не только от тензора скоростей деформаций $E[u]$ и от давления p (как в обычной гидродинамике), но также от тензора вращений $\Omega[u]$. Тензоры 4-го ранга A^D и A^R естественно поэтому назвать соответственно тензорами деформационной и вращательной вязкости. Такие нестандартные модели гидродинамики суспензий в сильных внешних полях отмечались ранее в ряде физических работ ([4], [50]).

Глава 6

Усредненные уравнения движения в режиме фильтрующихся частиц

В этой главе рассматриваются сильно разбавленные суспензии, когда диаметры твердых частиц имеют порядок ε^α , где $\alpha = 3$, а ε – порядок расстояний между соседними частицами. Это критическое соотношение между размерами частиц и расстояниями между ними, при котором частицы могут двигаться со скоростями отличными от скорости окружающей их жидкости (как бы фильтруясь сквозь нее), но при этом существенно возмущая ее движение. При меньших размерах частиц ($\alpha > 3$) такое возмущение незначительно и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ исчезает.

Вывод усредненных уравнений, описывающих динамику суспензии в таком режиме фильтрации частиц, основывается на исследовании асимптотического поведения модельной задачи В (см. главу 1) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это исследование проводится в §1. Полученные результаты применяются в §§ 2,3 для вывода усредненной системы уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, возмущенной движущимися в ней твердыми частицами с заданной функцией распределения их по координатам, скоростям, ориентациям и размерам. Эта система оказывается незамкнутой, т.к. содержит неизвестную функцию распределения частиц. Ее замыкание проводится в §4, путем присоединения кинетических уравнений (типа Лиувилля, или Фоккера-Планка) для функции распределения. В результате мы получаем замкнутую систему уравнений, описывающую движение суспензии в режиме фильтрующихся частиц. В § 5 изучается вопрос о разрешимости замкнутой системы.

§1 Исследование асимптотического поведения решения модельной задачи В

Рассмотрим вариационную задачу (1.3.5), (1.3.6), являющуюся модельной задачей В, соответствующей движению суспензии в режиме фильтрующихся частиц. Запишем ее в виде

$$\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon) = \int_{\Omega} \left\{ \mu |\nabla u_\varepsilon|^2 + 2(\tilde{f}_\varepsilon, u_\varepsilon) \right\} dx = \inf_{u_\varepsilon \in J_{\varepsilon B}(\Omega)} , \quad (1.1)$$

где используется обозначение

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 = \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial u_{\varepsilon i}}{\partial x_j} \right)^2.$$

Напомним, что в этой задаче минимум функционала $\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon]$ ищется в классе $J_{\varepsilon B}^\circ(\Omega)$ соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(\Omega)$, равных $v_\varepsilon^i + \omega_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на частицах Q_ε^i , причем положения частиц $Q_\varepsilon^i \subset \Omega$, постоянные векторы v_ε^i , ω_ε^i и вектор-функции $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ считаются заданными.

При любых $Q_\varepsilon^i \subset \Omega$, v_ε^i , $\omega_\varepsilon^i \in \mathbf{R}^3$ ($i = 1, \dots, N_\varepsilon$) и $\tilde{f}_\varepsilon(x) \in W_2^{-1}(\Omega)$ существует единственное решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.1). Цель этого параграфа состоит в изучении его асимптотического поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Для формулировки основного результата введем специальную тензорную характеристику твердых частиц – тензор второго ранга $\{C_{kl}(Q_\varepsilon^i)\}_{kl=1}^3$, характеризующий влияние частиц Q_ε^i на набегающий поток жидкости (т.е. возмущение потока частицей Q_ε^i).

Пусть Q – произвольное ограниченное замкнутое множество в \mathbf{R}^3 с гладкой границей ∂Q , гомеоморфной сфере $S^2 \subset \mathbf{R}^3$. Рассмотрим в области $\mathbf{R}^3 \setminus Q$ краевую задачу

$$\left. \begin{aligned} \Delta v(x) = \nabla p(x), \quad \operatorname{div} v(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus Q; \\ v(x) = e^k, \quad x \in \partial Q; \\ v(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad x \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где e^k – орт оси x_k ($k=1,2,3$).

Существует единственное решение $(v^k(x), p^k(x))$ этой задачи, причем

$$\|\nabla v^k\|_{L_2(\mathbf{R}^3 \setminus Q)} < \infty.$$

В дальнейшем решением будем называть только вектор-функцию скорости $v^k(x)$.

Положим

$$C_{kl}(Q) = \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_j^k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i^l}{\partial x_j} dx \equiv \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} (\nabla v^k, \nabla v^l) dx. \quad (1.3)$$

Из вариационного принципа Дирихле и линейности задачи (1.2) следует, что

$$\sum C_{kl}(Q) \xi_k \xi_l = \min_{w \in J_\xi(Q)} \int_{\mathbf{R}^3} |\nabla w|^2 dx, \quad \forall \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \in \mathbf{R}^3,$$

где минимум берется в классе $J_\xi(Q)$ соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(\mathbf{R}^3)$, равных постоянному вектору $\xi = \sum \xi_k e^k$ на множестве Q . Отсюда нетрудно получить неравенство

$$4\pi r^-(Q) \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 \leq \sum_{k,l=1}^3 C_{kl}(Q) \xi_k \xi_l \leq 6\pi r^+(Q) \sum_{i=1}^3 \xi_i^2, \quad (1.4)$$

где $r^+(Q)$ и $r^-(Q)$ – радиусы соответственно описанного вокруг Q и вписанного в Q шаров (в более точном неравенстве $4\pi r^-(Q)$ можно заменить ньютоновской емкостью $C(Q)$ множества Q).

Таким образом, матрица $\{C_{kl}(Q)\}_{k,l=1}^3$ симметрична и положительно определена. Она инвариантна относительно сдвигов множества Q , а при поворотах Q (или поворотах системы координат), она преобразуется, как тензор второго ранга в \mathbf{R}^3 :

$$C_{kl}(\Pi Q) = \sum_{i,j=1}^3 C_{ij}(Q) \Pi_{ik} \Pi_{jl},$$

где $\Pi = \{\Pi_{ik}\}_{i,k=1}^3$ – оператор (матрица) поворота.

Будем называть тензор 2-го ранга $\{C_{kl}(Q_\varepsilon^i)\}_{k,l=1}^3 \subset \mathbf{T}^3$ тензором гидродинамического влияния твердой частицы Q_ε^i на поток жидкости в режиме фильтрации частиц. Через этот тензор выражается также сила, с которой поток жидкости действует на частицу (или сила сопротивления, см. формулы (4.1.4), (4.1.5) главы 4 §1).

Введем также обобщенные функции

$$C_\varepsilon(x) = \left\{ \mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} C_{kl}(Q_\varepsilon^i) \delta(x - x_\varepsilon^i) \right\}_{k,l=1}^3 \in D'(\Omega, \mathbf{T}^3), \quad (1.5)$$

$$V_\varepsilon(x) = \mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k,l=1}^3 C_{kl}(Q_\varepsilon^i) v_\varepsilon^i e^k \delta(x - x_\varepsilon^i) \in D'(\Omega, \mathbf{R}^3), \quad (1.6)$$

где $\delta(x)$ – δ -функция Дирака, x_ε^i – центр масс частицы Q_ε^i , а v_ε^i – его скорость.

Первая из этих функций принимает значения в множестве \mathbf{T}^3 тензоров второго ранга в \mathbf{R}^3 , а вторая – в множестве векторов из \mathbf{R}^3 .

Обозначим через d_ε^i – диаметр частицы Q_ε^i , а через r_ε^i – расстояние от минимального шара $B(Q_\varepsilon^i)$, содержащего частицу Q_ε^i до множества $\bigcup_{j \neq i} B(Q_\varepsilon^j) \cup \partial\Omega$.

Теорема 1.1. Пусть при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняются такие условия

1. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_i d_\varepsilon^i = 0$,
2. $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(d_\varepsilon^i)^\kappa}{(r_\varepsilon^i)^{3(\kappa-1)}} < \infty \quad (\exists \kappa > \frac{3}{2})$,
3. $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_i |v_\varepsilon^i| < \infty$, $\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_i |\omega_\varepsilon^i| < \infty$,
4. обобщенные функции (1.5) и (1.6) сходятся в смысле рас-

пределений:

$$C_\varepsilon(x) \rightarrow C(x) \quad \hat{a} \quad D'(\Omega, \mathbf{T}^3),$$

$$V_\varepsilon(x) \rightarrow V(x) \quad \hat{a} \quad D'(\Omega, \mathbf{R}^3),$$

где $C(x)$ и $V(x)$ некоторые функции из $C(\Omega, \mathbf{T}^3)$ и $C(\Omega, \mathbf{R}^3)$ соответственно.

5. $f_\varepsilon(x) \rightarrow g(x)$ слабо в $L_2(\Omega)$ (или $f_\varepsilon(x) \rightarrow g(x)$ по норме $W_2^{-1}(\Omega)$).

Тогда решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.1) сходится слабо в $W_2^1(\Omega)$ (сильно в $L_2(\Omega)$) к соленоидальной вектор-функции $u(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$, доставляющей минимум функционалу

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \left\{ \mu |\nabla u|^2 + (Cu, u) + 2(g - V, u) \right\} dx \quad (1.7)$$

в классе $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Перед тем как приступить к доказательству этой теоремы, установим некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1.1. Пусть точка $x \in \mathbf{R}^3$ находится на расстоянии $\rho = \rho(x)$ от минимального шара $B(Q)$, содержащего множество Q , причем $\rho \geq Cd$, где d – диаметр Q , $C > 0$. Тогда для решения $v^k(x)$ задачи (1.2) в этой точке справедлива оценка

$$|D^\alpha v^k(x)| \leq A \frac{d}{\rho^{1+|\alpha|}}, \quad |\alpha| = 0, 1, 2,$$

где постоянная A не зависит от Q , ρ и α , α – целочисленный мультииндекс $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_3)$, $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i$.

Доказательство. Пусть вектор-функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ и функции $p=p(x)$, $q=q(x)$ удовлетворяют условиям $\operatorname{div} u=0$, $\operatorname{div} v=0$, $u, v \in C^2(\mathbf{R}^3 \setminus Q)$, $p, q \in C^2(\mathbf{R}^3 \setminus Q)$ и при $|x| \rightarrow \infty$

$$|D^\alpha u(x)|, \quad |D^\alpha v(x)| = O(|x|^{-(1+|\alpha|)}),$$

$$|D^\alpha p(x)|, \quad |D^\alpha q(x)| = O(|x|^{-(2+|\alpha|)}), \quad |\alpha| = 0, 1, 2.$$

Тогда справедливы следующие формулы Грина [17]

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} (\Delta v - \Delta p, u) dx = - \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} (\nabla v, \nabla u) dx + \int_{\partial Q} \left(\frac{\partial v}{\partial n} - pn, u \right) dS, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} \{(\Delta v - \Delta p, u) - (\Delta u - \Delta q, v)\} dx = \\ & = \int_{\partial Q} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial n} - pn, u \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial n} - qn, v \right) \right\} dS, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $n = n(x)$ – внешняя нормаль к границе ∂Q области $\mathbf{R}^3 \setminus Q$.

Обозначим через $\{G_i^j(x, \xi), q^j(x, \xi)\}$ ($i, j = 1, 2, 3$) фундаментальные решения системы уравнений

$$\Delta_x G_i^j - \nabla_x q^j(x, \xi) = \delta(x - \xi) \delta_{ij}, \quad \operatorname{div} G_i^j(x, \xi) = 0 \quad (1.10)$$

стремящиеся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

Справедливы следующие формулы [17]

$$G_i^j(x, \xi) = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta_{ij}}{|x - \xi|} - \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{|x - \xi|^3} \right), \quad q^j(x, \xi) = -\frac{x_j - \xi_j}{4\pi|x - \xi|^3}$$

из которых следует, что каждый вектор столбец $G_i^j(x, \xi)$ матрицы $\{G_i^j(x, \xi)\}_{i,j=1}^3$ представим в виде

$$G^j(x, \xi) = \operatorname{rot}_x \tilde{G}^j(x, \xi), \quad (1.11)$$

где

$$\tilde{G}^j(x, \xi) = \operatorname{rot}_x \left(\frac{1}{8\pi} |x - \xi| e^j \right), \quad e^j - \text{орт оси } x_j.$$

Нетрудно убедиться, что компоненты векторов $\tilde{G}^j(x, \xi)$ при $x \neq \xi$ имеют непрерывные производные вида:

$$D_x^\alpha D_\xi^\beta G_i^j(x, \xi) = \frac{B_{ij}^{\alpha\beta}(x, \xi)}{|x - \xi|^{\alpha+\beta}} \quad (|\alpha|, |\beta| = 1, 2, \dots), \quad (1.12)$$

где $B_{ij}^{\alpha\beta}(x, \xi)$ – ограниченные функции в $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$. Положим в (1.9) $v(x) = v^k(x)$, $p(x) = p^k(x)$, $u = G^j(x, \xi)$, $q = q^j(x, \xi)$, где $\{v^k, p^k\}$ – решение задачи (1.2), а $\{G^j(x, \xi), q^j(x, \xi)\}$ – решение задачи (1.10) при фиксированном $\xi \in \mathbf{R}^3 \setminus Q$. Тогда для j -компоненты $v^k(x)$ получаем

$$v_j^k(\xi) = \int_{\partial Q} \left(\frac{\partial v^k(x)}{\partial n} - p^k(x)n(x), G^j(x, \xi) \right) dS_x - \\ - \int_{\partial Q} \left(\frac{\partial G^j(x, \xi)}{\partial n_x} - q^j(x, \xi)n(x), e^k \right) dS_x.$$

Последний интеграл здесь равен нулю, что вытекает из формулы Грина (1.8), если ее применить к области $Q \setminus \partial Q$ и положить в ней $u(x) = e^k$, $v(x) = G^j(x, \xi)$, $p(x) = q^j(x, \xi)$ ($x \notin Q$).

Таким образом, при любых $\xi \in \mathbf{R}^3 \setminus Q$ и $|\alpha| = 0, 1, 2$

$$D_\xi^\alpha v_j^k(\xi) = \int_{\partial Q} \left(\frac{\partial v^k}{\partial n}(x, \xi) - p^k(x)n(x), D_\xi^\alpha G^j(x, \xi) \right) dS_x. \quad (1.13)$$

Введем вектор-функцию

$$u^{j\alpha}(x, \xi) = \operatorname{rot}_x \left\{ \varphi_d(x) \left[D_\xi^\alpha \tilde{G}^j(x, \xi) - D_\xi^\alpha \tilde{G}^j(x^0, \xi) \right] \right\}, \quad (1.14)$$

где $\varphi_d(x) = \varphi\left(\frac{r-r_0}{d}\right)$, $\varphi(s)$ бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 при $s = 0$ и 0 $s \geq C/2$, $r = r(x)$ – расстояние от точки x до центра x^0 , минимального шара $B(Q)$ радиусом $r^0 = r^+(Q)$, вектор-функция $\tilde{G}^j(x, \xi)$ определена равенством (1.11).

Очевидно, при $x \in \partial Q \subset B(Q)$

$$u^{j\alpha}(x, \xi) = D_\xi^\alpha G^j(x, \xi) \quad (1.15)$$

и, если точка ξ находится на расстоянии $\rho > Cd$ от $B(Q)$, то вектор-функция $u^{j\alpha}(x, \xi)$ бесконечно дифференцируема по x всюду и равна нулю при $r(x) \geq r_0 + C \frac{d}{2}$. Полагая в формуле

(1.8) $u(x) = u^{j\alpha}(x, \xi)$, $v(x) = v^k(x)$, $p(x) = p^k(x)$ ($\{v^k, p^k\}$ – решение задачи (1.2)) и, учитывая равенства (1.13), (1.15), получаем

$$D_\xi^\alpha v_j^k(\xi) = \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} (\nabla v^k(x), \nabla u^{j\alpha}(x)) dx$$

и, следовательно

$$|D_\xi^\alpha v_j^k(\xi)| \leq \left\{ \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} |\nabla v^k(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \left\{ \int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} |\nabla_x u^{j\alpha}(x, \xi)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (1.16)$$

Оценим сначала второй сомножитель в (1.16). В силу свойств функции $\varphi_d(x)$ соответствующий интеграл распространяется лишь на те x , которые находятся на расстоянии $\rho(x) \leq \frac{C}{2}d$, то $|x - \xi| \geq \rho(\xi) - \rho(x) \geq \frac{1}{2}\rho(\xi) = \frac{\rho}{2}$. Поэтому, учитывая (1.12), (1.14) получаем

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} |\nabla u^{j\alpha}(x, \xi)|^2 dx \leq A \left\{ \sum_{k=0}^1 \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\rho^{2(|\alpha|+2-k)}} \int_{r < r_0 + \frac{C}{2}d} |D^\beta \varphi_d(x)|^2 dx + \frac{d^2}{\rho^{2(|\alpha|+1)}} \sum_{|\beta|=2} \int_{r < r_0 + \frac{C}{2}d} |D^\beta \varphi_d(x)|^2 dx \right\}.$$

Поскольку $\int_{r < r_0 + \frac{C}{2}d} |D^\beta \varphi_d(x)|^2 dx \leq d^{3-2|\beta|}$ и $\rho > Cd$, откуда следует

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} |\nabla u^{j\alpha}(x, \xi)|^2 dx < A \frac{d}{\rho^{2(1+|\alpha|)}}, \quad (1.17)$$

где через A обозначена постоянная, не зависящая от d и $\rho = \rho(\xi)$.

Для оценки первого слагаемого в (1.16) воспользуемся вариационным принципом, согласно которому решение $v^k(x)$ задачи (1.2) доставляет минимум функционалу

$$\Phi(v) = \|\nabla v\|_{L_2(\mathbf{R}^3 \setminus Q)}^2$$

в классе $J_k(\mathbf{R}^3)$ соленоидальных вектор-функций равных e^k на ∂Q и стремящихся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Рассмотрим вектор-функцию

$$w^k(x) = \text{rot}(\varphi_d(x) \tilde{e}^k(x - x^0)),$$

где x^0 – центр шара $B(Q)$, а вектор-функция $\tilde{e}^k(x)$ ($k=1,2,3$) определена равенствами: $\tilde{e}^1(x) = x_2 e^3$, $\tilde{e}^2(x) = x_3 e^1$, $\tilde{e}^3 = x_1 e^2$, т.е. $\text{rot} \tilde{e}^k = e^k$.

Нетрудно убедиться, что $w^k(x)$ принадлежит классу $J_k(\mathbf{R}^3 \setminus Q)$ и, следовательно

$$\|\nabla v^k\|_{L_2(\mathbf{R}^3 \setminus Q)}^2 \leq \|\nabla w^k\|_{L_2(\mathbf{R}^3 \setminus Q)}^2.$$

Отсюда, учитывая вид $w^k(x)$, получаем

$$\int_{\mathbf{R}^3 \setminus Q} |\nabla v^k|^2 dx \leq Ad. \quad (1.18)$$

Из неравенств (1.16)–(1.18) вытекает утверждение леммы 1.1.

Дальше будем продолжать решение $v^k(x)$ задачи (1.2) на множество Q равенством $v^k(x)=e^k$, оставляя за продолжением обозначение $v^k(x)$.

Лемма 1.2. Пусть B_a – шар радиуса $a > 2d$, концентрический с $B(Q)$. Справедливы неравенства

$$\int_{B_a} |D^\alpha v^k|^2 dx \leq A(d^2 a^{1-2|\alpha|} + d^{3-2|\alpha|}) \quad (|\alpha|=0,1,2).$$

Доказательство. При $|\alpha|=1$ неравенство следует из (1.18) и вида продолжения v^k на Q . При $|\alpha|=0$ разобьем шар B_a на две части: $B_a = \{0 < r < \delta\} \cup \{\delta \leq r \leq a\}$, где $\delta=2d$, $r=|x-x^0|$ – расстояние от точки x до центра x^0 шара B_a . Поскольку $\delta - r_0 > d$, интеграл по области $\{\delta < r < a\}$ можно оценить непосредственно с помощью леммы 1.1

$$\int_{\delta < r < a} |v^k|^2 dx \leq A_1 d^2 a. \quad (1.19)$$

Если $r=|x-x^0| < \delta$, то вводя обозначение $x^s = x^0 + (x-x^0)\frac{s}{r}$, запишем

$$v^k(x) = v^k(x^\delta) - \int_r^\delta \frac{\partial v^k(x^s)}{\partial s} ds,$$

откуда следует, что

$$|v^k(x)|^2 \leq 2|v^k(x^\delta)|^2 + \frac{2}{r} \int_0^\delta \left| \frac{\partial v^k}{\partial s} \right|^2 s^2 ds.$$

Интегрируя это равенство по $x \in B_\delta = \{r \leq \delta = 2d\}$ и оценивая первое слагаемое в правой части с помощью леммы 1.1, а второе – с помощью неравенства (1.18), получаем

$$\int_{r<\delta} |\sigma^k(x)|^2 dx \leq A_2 d^3,$$

что вместе с (1.19) дает требуемое неравенство леммы 1.2 при $|\alpha|=0$. Лемма доказана.

Приведем еще известную теорему о представлении соленоидальных вектор-функций [10]

Теорема 1.2. Пусть G – область в \mathbf{R}^3 , являющаяся диффеоморфным образом шара, а $J(G)$ – замыкание в $L_2(G)$ множества гладких соленоидальных вектор-функций в области G .

Тогда $\forall u(x) \in J(G)$ справедливо представление $u(x) = \text{rot} \tilde{u}(x)$, где вектор-функция $\tilde{u}(x) \in W_2^1(G)$ соленоидальна и имеет нулевую нормальную компоненту на границе ∂G . Этим условием $\tilde{u}(x)$ определяется однозначно. При этом, если $u(x) \in J(G) \cap W_2^m(G)$, то $\tilde{u}(x) \in J(G) \cap W_2^{m+1}(G)$ и справедливо неравенство

$$\|\tilde{u}\|_{W_2^{m+1}(G)} \leq C \|u\|_{W_2^m(G)} \quad (m=0,1)$$

с постоянной C зависящей только от области G .

Пусть $G = B_a$ – шар радиусом a и $u(x) \in J(B_a) \cap W_2^m(B_a)$. Тогда, пользуясь этой теоремой и соображениями подобия, для вектор-функции $\tilde{u}(x)$ ($u(x) = \text{rot} \tilde{u}(x)$) получаем оценки

$$\|\tilde{u}\|_{L_2(B_a)} \leq Ca \|u\|_{L_2(B_a)}, \quad (1.20)$$

$$\|D^\alpha \tilde{u}\|_{L_2(B_a)} \leq C \left(a^{1-|\alpha|} \|u\|_{L_2(B_a)} + \sum_{|\beta|=|\alpha|-1} \|D^\beta u\|_{L_2(B_a)} \right), \quad (1.21)$$

где $|\alpha|=1, 2$, а постоянные C не зависят от a и $u(x)$.

2. Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.1. Оценим сначала функционал $\Phi_\varepsilon(u_\varepsilon)$ в задаче (1.1). Для этого построим пробную вектор-функцию $\hat{u}_\varepsilon(x) \in J_{\varepsilon B}^\circ(\Omega)$. Обозначим через B_ε^i – шары, концентрические с минимальными шарами $B(Q_\varepsilon^i)$, с радиусами $a_\varepsilon^i = b_\varepsilon^i + \frac{d_\varepsilon^i}{2}$, где b_ε^i – радиус $B(Q_\varepsilon^i)$, d_ε^i – диаметр Q_ε^i .

Поскольку, в силу условия 2) теоремы 1.1 $d_\varepsilon^i \leq r_\varepsilon^i$, эти шары не пересекаются между собой и с границей $\partial\Omega$.

Пусть v_ε^i и ω_ε^i – постоянные векторы определяющие класс $J_{\varepsilon B}^\circ(\Omega)$ (т.е. v_ε^i – скорость центра массы x_ε^i частицы Q_ε^i , а ω_ε^i – ее угловая скорость). Так как $\operatorname{div}[v_\varepsilon^i + \omega_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)] = 0$, то, согласно теореме 1.2, в каждом шаре B_ε^i существует вектор-функция \tilde{w}_ε^i такая, что

$$v_\varepsilon^i + \omega_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i) = \operatorname{rot} \tilde{w}_\varepsilon^i(x), \quad x \in B_\varepsilon^i \quad (1.22)$$

и для нее выполняются неравенства (1.20), (1.21). Положим

$$\hat{u}_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{rot} [\tilde{w}_\varepsilon^i(x) \varphi_\varepsilon^i(x)], \quad (1.23)$$

где $\varphi_\varepsilon^i(x)$ – функция, удовлетворяющая условиям: $\varphi_\varepsilon^i(x) \in C_0^2(\Omega)$, $\varphi_\varepsilon^i = 1$ при $x \in B(Q_\varepsilon^i)$, $\varphi_\varepsilon^i(x) = 0$ при $x \notin B_\varepsilon^i$, $|D^\alpha \varphi_\varepsilon^i(x)| \leq C(d_\varepsilon^i)^{-|\alpha|}$ ($|\alpha|=1, 2$). Такие функции можно определить, например, формулой

$$\varphi_\varepsilon^i(x) = \varphi\left(\frac{r^i(x) - b_\varepsilon^i}{d_\varepsilon^i}\right), \quad (1.24)$$

где $r^i(x)$ – расстояние от точки x до центра минимального шара $B(Q_\varepsilon^i)$, а $\varphi(s)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая что $\varphi(s)=1$, при $s \leq \frac{1}{4}$ и $\varphi(s)=0$ при $s \geq \frac{1}{2}$.

Нетрудно убедиться, что $\hat{u}_\varepsilon(x) \in J_{\varepsilon B}^\circ(\Omega)$ и, значит, решение u_ε задачи (1.1) удовлетворяет неравенству

$$\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[\hat{u}_\varepsilon]. \quad (1.25)$$

Оценивая $\Phi_\varepsilon[\hat{u}_\varepsilon]$ с помощью (1.1), (1.23) и учитывая свойства функций $\varphi_\varepsilon^i(x)$ и неравенства (1.20), (1.21) для функций $\tilde{w}_\varepsilon^i(x)$, получаем

$$\begin{aligned}
|\Phi_\varepsilon[\hat{u}_\varepsilon]| \leq & C_1 \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(|v_\varepsilon^i|^2 + |\omega_\varepsilon^i|^2 |a_\varepsilon^i|^2 \right) \frac{(a_\varepsilon^i)^5}{(d_\varepsilon^i)^4} + \\
& + C_2 \|f_\varepsilon\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(|v_\varepsilon^i|^2 + |\omega_\varepsilon^i|^2 |a_\varepsilon^i|^2 \right) \frac{(a_\varepsilon^i)^5}{(d_\varepsilon^i)^4} \right\}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Из условия 3) теоремы 1.1 следует неравенство

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d_\varepsilon^i \leq \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(d_\varepsilon^i)^\kappa}{(r_\varepsilon^i)^{3(\kappa-1)}} \right\}^{1/\kappa} \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (r_\varepsilon^i)^3 \right\}^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} < C, \tag{1.27}$$

где C не зависит от ε . Здесь второй множитель ограничен равномерно по ε , поскольку шары, концентрические с $B(Q_\varepsilon^i)$, с радиусами $b_\varepsilon^i + \frac{r_\varepsilon^i}{2}$ не пересекаются и принадлежат некоторому фиксированному шару B , содержащему область $\Omega \subset B$ и, значит,

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (r_\varepsilon^i)^3 \leq 2^3 \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(b_\varepsilon^i + \frac{r_\varepsilon^i}{2} \right)^3 \leq \frac{2}{\pi} |B|. \tag{1.28}$$

Так как $a_\varepsilon^i \leq 2d_\varepsilon^i$, то из (1.26), (1.27) и условий 2) и 5) теоремы 1.1 следует, что

$$|\Phi_\varepsilon[\hat{u}_\varepsilon]| < A, \tag{1.29}$$

где постоянная A не зависит от ε .

Учитывая вид функционала Φ_ε (см (1.1)), с помощью (1.25), (1.29) получаем неравенство

$$\mu \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dx \leq A + 2 \|f_\varepsilon\|_{W_2^{-1}(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)},$$

из которого, пользуясь неравенством Фридрихса для $u_\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$, заключаем, что

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C,$$

где C не зависит от ε .

Таким образом, множество решений задачи (1.1)

$\left\{ u_\varepsilon(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \varepsilon > 0 \right\}$ ограничено и, значит, слабо компактно в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Выделим подпоследовательность $\{\varepsilon' \rightarrow 0\} \subset \{\varepsilon \rightarrow 0\}$ такую, что $u_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$ сходится слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ (и сильно в $L_2(\Omega)$) к некоторой вектор-функции $u(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, причем так как $u_\varepsilon(x) \in J(\Omega)$, то и $u(x) \in J(\Omega)$.

Уточним выбор подпоследовательности $\{\varepsilon' \rightarrow 0\}$. Поскольку из неравенств (1.4), (1.27) и условия 3) теоремы 1.1 следует, что числа

$$D_\varepsilon = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k,l=1}^3 \mu C_{kl}(Q_\varepsilon^i) v_{\varepsilon k}^i v_{\varepsilon l}^i, \quad \varepsilon > 0 \quad (1.30)$$

ограничены равномерно по ε , то эту подпоследовательность можно выбрать так, что $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$ и существует предел

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0} D_\varepsilon = D < \infty. \quad (1.31)$$

Докажем, что предельная вектор-функция $u(x)$ доставляет минимум функционалу (1.7) в классе $J(\Omega)$. Так как в силу неотрицательности матрицы $C(x)$, решение такой задачи минимизации единственно, то отсюда будет следовать, что $u_\varepsilon(x)$ сходится к $u(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, что и утверждается в теореме 1.1.

Наметим сначала схему доказательства, которое состоит из двух частей. В первой части (п.2.1) по произвольной вектор-функции $w(x) \in J(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$ строится специальная пробная вектор-функция $w_\varepsilon(x)$ принадлежащая классу $J_{\varepsilon B}(\Omega)$. Так как $u_\varepsilon(x)$ минимизирует функционал $\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon]$ в этом классе, то справедливо неравенство

$$\Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[w_\varepsilon]. \quad (1.32)$$

Правая часть этого неравенства с помощью явной конструкции для $w_\varepsilon(x)$ оценивается следующим образом

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon' \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[w_\varepsilon] = \Phi[w] + D, \quad (1.33)$$

где функционал $\Phi[w]$ определен формулой (1.7), а число D – формулой (1.29).

Во второй части (п. 2.2) доказываем, что если $u(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ есть слабый предел в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ решений $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.1) по подпоследовательности $\{\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0\}$, то справедливо такое неравенство

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon' \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[u_\varepsilon] \geq \Phi[u] + D. \quad (1.34)$$

Из (1.32)–(1.34) следует, что $\Phi[u] \leq \Phi[w]$ для любой $w \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ и, значит, $u(x)$ минимизирует функционал $\Phi[u]$ в классе $\overset{\circ}{J}(\Omega)$.

2.1. Перейдем к построению $w_\varepsilon(x)$ и выводу неравенства (1.32). Пусть $w(x)$ – произвольная вектор-функция класса $\overset{\circ}{J}(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$, а $v_\varepsilon^{ik}(x)$ – решение задачи (1.2), соответствующее области $Q = Q_\varepsilon^i$ и продолженное на Q_ε^i равенством $v_\varepsilon^{ik}(x) = e^k$.

Обозначим через $B_{1\varepsilon}^i$ и $B_{2\varepsilon}^i$ шары с радиусами $a_{1\varepsilon}^i = b_\varepsilon^i + \frac{r_\varepsilon^i}{2}$, $a_{2\varepsilon}^i = b_\varepsilon^i + \frac{d_\varepsilon^i}{2}$ концентрическими с минимальным шаром $B(Q_\varepsilon^i)$ ($Q_\varepsilon^i \subset B(Q_\varepsilon^i)$) с радиусом b_ε^i . В соответствии с теоремой 1.2 введем вектор-функции $\tilde{v}_\varepsilon^{ik}(x)$ и $\tilde{\delta}_\varepsilon^i(x)$ такие, что

$$\begin{aligned} \tilde{v}_\varepsilon^{ik}(x) &= \text{rot} \tilde{\delta}_\varepsilon^{ik}(x), \quad x \in B_{1\varepsilon}^i, \\ \tilde{\delta}_\varepsilon^i(x) &= \text{rot} \tilde{\delta}_\varepsilon^i(x), \quad x \in B_{2\varepsilon}^i, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где

$$\tilde{\delta}_\varepsilon^i(x) = w(x) - w(x_\varepsilon^i) + \omega_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i). \quad (1.36)$$

Теперь определим пробную вектор-функцию $w_\varepsilon(x)$ для ва-

риационной задачи (1.1) следующим образом

$$w_\varepsilon(x) = w(x) + \operatorname{rot} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 (v_{\varepsilon k}^i - w_k^i) \tilde{v}_\varepsilon^{ik}(x) \psi_\varepsilon^i(x) - \operatorname{rot} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \tilde{\delta}_\varepsilon^i(x) \varphi_\varepsilon^i(x), \quad (1.37)$$

где $w_k^i = w_k(x_\varepsilon^i)$, нижним индексом k обозначаются k -компоненты векторов, функции $\varphi_\varepsilon^i(x)$ введены ранее формулой (1.24), а функции $\psi_\varepsilon^i(x)$ определяется аналогично

$$\psi_\varepsilon^i(x) = \varphi \left(\frac{r^i(x) - b_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i} \right)$$

с той же срезающей функцией $\varphi(s)$. Ясно, что носители функций $\psi_\varepsilon^i(x)$ не пересекаются между собой и с границей $\partial\Omega$, а $|D^\alpha \psi_\varepsilon^i| \leq C(r_\varepsilon^i)^{-|\alpha|}$ ($|\alpha|=1,2$).

Оценим значения функционала $\Phi_\varepsilon[w_\varepsilon]$ в задаче (1.1) на пробной вектор-функции $w_\varepsilon(x)$ (1.36). Для этого представим ее в виде

$$w_\varepsilon(x) = w(x) + V_\varepsilon(x) - W_\varepsilon(x) + \Delta_\varepsilon^{(1)}(x) + \Delta_\varepsilon^{(2)}(x), \quad (1.38)$$

где

$$V_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 v_{\varepsilon k}^i(x) v_\varepsilon^{ik}(x) \psi_\varepsilon^i(x), \quad (1.39)$$

$$W_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} w_k^i v_\varepsilon^{ik}(x) \psi_\varepsilon^i(x), \quad (1.40)$$

$$\Delta_\varepsilon^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 (v_{\varepsilon k}^i - w_k^i) \tilde{v}_\varepsilon^{ik}(x) \times \nabla \psi_\varepsilon^i(x), \quad (1.41)$$

$$\Delta_\varepsilon^{(2)}(x) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \tilde{\delta}_\varepsilon^i(x) \varphi_\varepsilon^i(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \tilde{\delta}_\varepsilon^i(x) \times \nabla \varphi_\varepsilon^i(x). \quad (1.42)$$

Учитывая, что $w(x) \in C_0^2(\Omega)$ и свойства функций $\varphi_\varepsilon^i(x)$ и $\psi_\varepsilon^i(x)$, с помощью (1.41), (1.42), (1.35), (1.36), неравенств (1.20), (1.21) и леммы 1.2 получаем

$$\begin{aligned} \|\Delta_\varepsilon^{(1)}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 &\leq C \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(|v_\varepsilon^i|^2 + |w_\varepsilon^i|^2 \right) \frac{(a_{1\varepsilon}^i)^2 (d_\varepsilon^i)^2}{(r_\varepsilon^i)^3}, \\ \|\Delta_\varepsilon^{(2)}\|_{W_2^1(\Omega)}^2 &\leq C \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left(|w_\varepsilon^i|^2 + |Dw_\varepsilon^i|^2 \right) \left[(a_{2\varepsilon}^i)^3 + \frac{(a_{2\varepsilon}^i)^7}{(d_\varepsilon^i)^4} \right], \end{aligned} \quad (1.43)$$

где через $|\cdot|_\infty$ обозначена норма в $L_\infty(\Omega)$, а постоянные C не зависят от ε .

Из условия 2) теоремы 1.1 вытекает неравенство $(r_\varepsilon^i)^{-1} \leq C(d)^{-\frac{\kappa}{3(\kappa-1)}}$ и, значит, согласно (1.27)

$$\sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(d_\varepsilon^i)^2}{r_\varepsilon^i} \leq \max_i \frac{d_\varepsilon^i}{r_\varepsilon^i} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d_\varepsilon^i \leq C \max_i (d_\varepsilon^i)^{\frac{2\kappa-3}{3(\kappa-1)}}, \quad (1.44)$$

где $\kappa > \frac{3}{2}$ и C не зависят от ε .

Так как $a_{2\varepsilon}^i \leq 2d_\varepsilon^i$ и $a_{1\varepsilon}^i \leq 2r_\varepsilon^i$, то из неравенств (1.43), (1.27), (1.44) и условия 1) теоремы 1.1 следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\Delta_\varepsilon^{(k)}\|_{W_2^1(\Omega)} = 0 \quad (k=1,2). \quad (1.45)$$

Чтобы оценить вклад в функционал $\Phi_\varepsilon(w_\varepsilon)$ от слагаемых $W_\varepsilon(x)$ и $V_\varepsilon(x)$ в (1.38), воспользуемся равенством

$$\int_{\Omega} \left(\nabla [v_\varepsilon^{ik} \psi_\varepsilon^i], \nabla [v_\varepsilon^{jl} \psi_\varepsilon^j] \right) dx = \delta_{ij} \left[C_{kl}(Q_\varepsilon^i) + O\left(\frac{|d_\varepsilon^i|^2}{r_\varepsilon^i} \right) \right],$$

в котором легко убедиться, учитывая свойства функции $\psi_\varepsilon^i(x)$, лемму 1.1 и формулу (1.3) при $Q = Q_\varepsilon^i$. Тогда из (1.39), (1.40), учитывая, что $w \in C_0^2(\Omega)$ и условия 2) теоремы 1.1, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla V_\varepsilon|^2 dx &= \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} C_{kl}(Q_\varepsilon^i) v_{\varepsilon k}^i v_{\varepsilon l}^i + \delta_\varepsilon^{(1)}, \\ \int_{\Omega} |\nabla W_\varepsilon|^2 dx &= \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} C_{kl}(Q_\varepsilon^i) w_k^i w_l^i + \delta_\varepsilon^{(2)}, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} (\nabla V_{\varepsilon}, \nabla W_{\varepsilon}) dx = \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} C_{kl} (Q_{\varepsilon}^i) v_{\varepsilon k}^i w_{\varepsilon l}^i + \delta_{\varepsilon}^{(3)},$$

где числа $\delta_{\varepsilon}^{(j)}$ удовлетворяют неравенствам

$$|\delta_{\varepsilon}^{(j)}| \leq C \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \frac{|d_{\varepsilon}^i|^2}{r_{\varepsilon}^i} \quad (j=1,2,3).$$

Поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$ и учитывая (1.5), (1.6), (1.30), (1.31), (1.44) и условия 1) и 4) теоремы 1.1, находим

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\varepsilon=\varepsilon' \rightarrow 0} \mu \int_{\Omega} |\nabla V_{\varepsilon}|^2 dx &= D, \\ \lim_{\varepsilon=\varepsilon' \rightarrow 0} \mu \int_{\Omega} |\nabla W_{\varepsilon}|^2 dx &= \int_{\Omega} (Cw, w) dx, \\ \lim_{\varepsilon=\varepsilon' \rightarrow 0} \mu \int_{\Omega} (\nabla V_{\varepsilon}, \nabla W_{\varepsilon}) dx &= \int_{\Omega} (V, w) dx. \end{aligned} \right\} \quad (1.46)$$

Наконец, с помощью равенств (1.39), (1.40), леммы 1.2, с учетом (1.27) и условий 1) и 2) заключаем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|V_{\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|W_{\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (1.47)$$

Так как $V_{\varepsilon}(x)$ и $W_{\varepsilon}(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, то из (1.46) и (1.47) следует, что

$V_{\varepsilon}(x)$ и $W_{\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$ сходятся к нулю слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Учитывая это, а также предельные равенства (1.45) – (1.47) и условие 1) теоремы 1.1 и пользуясь видом функции $\Phi_{\varepsilon}(w_{\varepsilon})$ и равенством (1.38), приходим к равенству (1.33). Следовательно, согласно (1.32) имеет место такая оценка сверху

$$\overline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon' \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \leq \Phi(w) + D \quad \forall w \in J(\Omega) \cap C_0^2(\Omega), \quad (1.48)$$

где функционал $\Phi(w)$ определен формулой (1.7), а число D формулой (1.31). В силу непрерывности функционала $\Phi(w)$ в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и плотности $J(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$ в $J(\Omega)$, эта оценка справедлива при $\forall w \in J(\Omega)$.

2.2. Получим теперь оценку снизу (1.34). Мы воспользуем-

ся следующей леммой.

Лемма 1.3. Для $\forall w \in J(\Omega)$ и $\forall \varepsilon > 0$ существует вектор-функция $w_\varepsilon(x) \in J(\Omega)$ такая, что $w_\varepsilon(x) = 0$ при $x \in Q = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon^i$ и $w_\varepsilon(x) \rightarrow w$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $w(x) \in J(\Omega)$. Построим последовательность вектор-функций $\left\{ w^{(n)}(x) \in J(\Omega) \cap C_0^2(\Omega), n = 1, 2, \dots \right\}$ таких, что

$$\|w - w^{(n)}\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \frac{1}{n}. \quad (1.49)$$

Для каждой такой вектор-функции определим вектор-функцию $w_\varepsilon^{(n)}(x)$ формулами (1.37), (1.35), в которых полагаем $w = w^{(n)}$, $v_\varepsilon^i = 0$, $\omega_\varepsilon^i = 0$. Таким же образом, как в п. 2.1 показываем, что $w_\varepsilon^{(n)}(x)$ обладает требуемыми свойствами по отношению к $w^{(n)}$. Отсюда, в частности, следует, что $w_\varepsilon^{(n)}(x)$ ограничена в $W_2^1(\Omega)$ равномерно по n и ε и существуют числа $\varepsilon(n)$ такие, что $\varepsilon(n) < \varepsilon(n+1)$ и

$$\|w_\varepsilon^{(n)} - w^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{1}{n}, \text{ если } \varepsilon \geq \varepsilon(n). \quad (1.50)$$

Теперь из множества вектор-функций $\{w_\varepsilon^{(n)}(x), \varepsilon > 0, n = 1, 2, \dots\}$ выберем подмножество $\{w_\varepsilon(x), \varepsilon > 0\}$, полагая $w_\varepsilon(x) = w_\varepsilon^{(n)}(x)$ при $\varepsilon(n) \leq \varepsilon < \varepsilon(n+1)$.

Тогда, учитывая (1.49), (1.50), заключаем, что $w_\varepsilon(x)$ удовлетворяет всем требуемым свойствам по отношению к $w(x)$. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к выводу оценки (1.34). Пусть $w(x) \in J(\Omega)$ – слабый предел в $W_2^1(\Omega)$ решений $u_\varepsilon(x)$ задачи

(1.1) при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$, а $u^\nu(x)$ его аппроксимация в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ такая, что $u^\nu(x) \in J(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$ и

$$\|u - u^\nu\|_{W_2^1(\Omega)} < \nu \quad (\nu > 0). \quad (1.51)$$

Так как $w^\nu = u - u^\nu \in J(\Omega)$, то согласно лемме 1.3 существует вектор-функция $w_\varepsilon^\nu(x)$, удовлетворяющая условиям леммы 1.3 по отношению к $w^\nu(x)$, т.е. $w_\varepsilon^\nu(x)$ соленоидальна в Ω , равна нулю на $Q_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon^i \cup \partial\Omega$ и

$$\left. \begin{aligned} \|w_\varepsilon^\nu\|_{W_2^1(\Omega)} &\leq C \|u - u^\nu\|_{W_2^1(\Omega)}, \\ w_\varepsilon^\nu &\rightarrow u - u^\nu \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Здесь постоянная C не зависит от ε и ν .

Теперь представим решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.1) в виде

$$u_\varepsilon(x) = \hat{u}_\varepsilon^\nu(x) + w_\varepsilon^\nu(x) + \zeta_\varepsilon^\nu(x), \quad (1.53)$$

где $\hat{u}_\varepsilon^\nu(x)$ определяется формулами (1.35)—(1.37) с заменой всюду $w(x)$ на $u^\nu(x)$, т.е.

$$\hat{u}_\varepsilon^\nu(x) = u^\nu(x) + \operatorname{rot} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 (v_{\varepsilon k}^i - u_k^{\nu i}) \tilde{v}_\varepsilon^{ik}(x) \psi_\varepsilon^i(x) - \operatorname{rot} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \tilde{\delta}_\varepsilon^{\nu i}(x) \varphi_\varepsilon^i(x). \quad (1.54)$$

Так же как в п. 2.1, с помощью лемм 1.1 и 1.2 и неравенств (1.20), (1.21), учитывая свойства функций $\psi_\varepsilon^i(x)$, $\varphi_\varepsilon^i(x)$, условия 1) – 4) теоремы 1.1 и то, что $u^\nu(x) \in C_0^2(\Omega)$, заключаем, что второе и третье слагаемые в правой части (1.53) ограничены в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ равномерно по ε и стремятся к нулю по норме $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$. Поэтому $\forall \nu > 0$

$$u_\varepsilon^\nu \rightarrow u^\nu \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0.$$

Отсюда, вспоминая, что при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$ решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.1) сходится к $u(x)$ слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, с помощью (1.50) и (1.52)

закключаем, что $\zeta_\varepsilon^\nu(x) \rightarrow 0$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$ и, значит, в силу теоремы вложения

$$\zeta_\varepsilon^\nu(x) \rightarrow 0 \text{ в } L_q(\Omega) \text{ при } \varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0, \quad (1.55)$$

при любом $q < 6$, и $\nu > 0$.

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0} \|\zeta_\varepsilon^\nu\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C\nu, \quad (1.56)$$

где постоянная C не зависит от $\nu > 0$.

Прежде всего, заметим, что согласно (1.54) $\hat{u}_\varepsilon^\nu(x)$ принадлежит классу $J_{\varepsilon B}^\circ(\Omega)$ и, значит, в силу (1.53) и (1.1) $\zeta_\varepsilon^\nu(x)$ минимизирует функционал

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_\varepsilon(\zeta_\varepsilon^\nu) = & \mu \int_{\Omega} |\nabla \zeta_\varepsilon^\nu|^2 dx + 2 \int_{\Omega} f_\varepsilon \zeta_\varepsilon^\nu dx + 2\mu \int_{\Omega} (\nabla \hat{u}_\varepsilon^\nu, \nabla \zeta_\varepsilon^\nu) dx + \\ & + 2\mu \int_{\Omega} (\nabla w_\varepsilon^\nu, \nabla \zeta_\varepsilon^\nu) dx \end{aligned}$$

в классе $J(\Omega, Q_\varepsilon)$ соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(\Omega)$ равных 0 на $Q_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon^i$.

Учитывая (1.54), преобразуем $\hat{\Phi}_\varepsilon(\zeta_\varepsilon^\nu)$ к виду

$$\hat{\Phi}_\varepsilon(\zeta_\varepsilon^\nu) = \mu \int_{\Omega} |\nabla \zeta_\varepsilon^\nu|^2 dx + \sum_{j=1}^7 \Phi_{\varepsilon j}(\zeta_\varepsilon^\nu), \quad (1.57)$$

где

$$\Phi_{\varepsilon 1}(\zeta_\varepsilon^\nu) = 2 \int_{\Omega} (f_\varepsilon - \mu \Delta u^\nu, \zeta_\varepsilon^\nu) dx,$$

$$\Phi_{\varepsilon 2}(\zeta_\varepsilon^\nu) = 2\mu \int_{\Omega} (\nabla w_\varepsilon^\nu, \nabla \zeta_\varepsilon^\nu) dx,$$

$$\Phi_{\varepsilon 3}(\zeta_\varepsilon^\nu) = -2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{B_{2\varepsilon}^i} (\nabla \text{rot} [\tilde{\delta}_\varepsilon^{vi} \varphi_\varepsilon^i], \nabla \zeta_\varepsilon^\nu) dx,$$

$$\Phi_{\varepsilon 4}(\zeta_\varepsilon^\nu) = 2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 \int_{B_{1\varepsilon}^i \setminus B_{1\varepsilon}^i} [v_{\varepsilon k}^i - u_k^{vi}] (\nabla [\tilde{v}_\varepsilon^{ik} \times \nabla \psi_\varepsilon^i], \nabla \zeta_\varepsilon^\nu) dx,$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\varepsilon 5}(\zeta_\varepsilon^v) &= -2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 \int_{B_{1\varepsilon}^i \setminus B_{1\varepsilon}^i} [v_{\varepsilon k}^i - u_k^{vi}] (v_\varepsilon^{ik}, \nabla \zeta_\varepsilon^v) \Delta \psi_\varepsilon^i dx, \\ \Phi_{\varepsilon 6}(\zeta_\varepsilon^v) &= -4\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k,l=1}^3 \int_{B_{1\varepsilon}^i \setminus B_{1\varepsilon}^i} [v_{\varepsilon k}^i - u_k^{vi}] \left(\frac{\partial v_\varepsilon^{ik}}{\partial x_l}, \zeta_\varepsilon^v \right) \frac{\partial \psi_\varepsilon^i}{\partial x_l} dx, \\ \Phi_{\varepsilon 7}(\zeta_\varepsilon^v) &= -2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 \int_{B_{1\varepsilon}^i \setminus Q_\varepsilon^i} [v_{\varepsilon k}^i - u_k^{vi}] (\Delta v_\varepsilon^{ik}, \zeta_\varepsilon^v) \psi_\varepsilon^i dx.\end{aligned}$$

Здесь через $B_{1\varepsilon}^i$ обозначены шары с радиусами $a_{1\varepsilon}^i = b_\varepsilon^i + \frac{r_\varepsilon^i}{4}$

концентрические с $B_{1\varepsilon}^i$ ($B_{1\varepsilon}^i \subset B_{1\varepsilon}^i$).

Пользуясь неравенствами Гельдера и леммой 1.1 и учитывая свойства функций $\varphi_\varepsilon^i(x)$, $\psi_\varepsilon^i(x)$, неравенства (1.20), (1.21) и $a_{1\varepsilon}^i \leq 2r_\varepsilon^i$, $a_{2\varepsilon}^i \leq 2d_\varepsilon^i$, получаем

$$\left. \begin{aligned} |\Phi_{\varepsilon 1}(\zeta_\varepsilon^v)| &\leq C \left(\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u^v\|_{L_2(\Omega)} \right) \|\zeta_\varepsilon^v\|_{L_2(\Omega)}, \\ |\Phi_{\varepsilon 2}(\zeta_\varepsilon^v)| &\leq C \|\nabla w_\varepsilon^v\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla \zeta_\varepsilon^v\|_{L_2(\Omega)}, \\ |\Phi_{\varepsilon 3}(\zeta_\varepsilon^v)| &\leq C \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (|\omega_\varepsilon^i|^2 + \|u^v\|_{C^2}) (d_\varepsilon^i)^3 \right\}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \zeta_\varepsilon^v\|_{L_2(\Omega)}, \\ |\Phi_{\varepsilon 4}(\zeta_\varepsilon^v)| &\leq C \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (|v_\varepsilon^i|^2 + |u^{vi}|^2) \frac{(d_\varepsilon^i)^2}{r_\varepsilon^i} \right\}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \zeta_\varepsilon^v\|_{L_2(\Omega)}, \\ |\Phi_{\varepsilon j}(\zeta_\varepsilon^v)| &\leq C \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(d_\varepsilon^i)^\kappa}{(r_\varepsilon^i)^{3(\kappa-1)}} \right\}^{\frac{1}{\kappa}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (|v_\varepsilon^i|^q + |u^{vi}|^q) (r_\varepsilon^i)^3 \right\}^{\frac{1}{q}} \|\zeta_\varepsilon^v\|_{L_q(\Omega)}, \\ & j = 5, 6, \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

где $q = \frac{2\kappa}{\kappa-1} < 6$ при $\kappa > \frac{3}{2}$, C не зависит от ε .

При оценке $\Phi_{\varepsilon 7}(\zeta_\varepsilon^v)$ мы не можем воспользоваться леммой 1.1 непосредственно, поскольку нужно оценивать $\Delta v_\varepsilon^{ik}$ вплоть до границы ∂Q_ε^i . Поэтому поступим следующим обра-

зом. Вспомним, что вектор-функция $v_\varepsilon^{ik}(x)$ удовлетворяет вне Q_ε^i уравнению $\Delta v_\varepsilon^{ik} = \nabla p_\varepsilon^{ik}$, где давление $p_\varepsilon^{ik}(x)$ — гладкая функция определенная с точностью до аддитивной константы. Поэтому $p_\varepsilon^{ik}(x)$ можно представить в виде

$$p_\varepsilon^{ik}(x) = \int_{\bar{x}_\varepsilon^i}^x (\nabla p_\varepsilon^{ik}, dl) = \int_{\bar{x}_\varepsilon^i}^x (\Delta v_\varepsilon^{ik}, dl),$$

где \bar{x}_ε^i — произвольная точка области $B_{1\varepsilon}^i \setminus B_{1\varepsilon}^{i'}$, а интегрирование проводится по любому контуру, соединяющему точки \bar{x}_ε^i и x . Очевидно, если $x \in B_{1\varepsilon}^i \setminus B_{1\varepsilon}^{i'}$, то контур можно выбрать так, чтобы он находился в $B_{1\varepsilon}^i \setminus B_{1\varepsilon}^{i'}$ и его длина не превышала Cr_ε^i . Поэтому, применяя лемму 1.1, получаем при $x \in B_{1\varepsilon}^i \setminus B_{1\varepsilon}^{i'}$

$$|p_\varepsilon^{ik}(x)| \leq C \frac{d_\varepsilon^i}{(r_\varepsilon^i)^2}.$$

Теперь, учитывая, что $\zeta_\varepsilon^v \in J^\circ(\Omega, Q_\varepsilon)$, с помощью интегрирования по частям преобразуем $\Phi_{\varepsilon 7}(\zeta_\varepsilon^v)$ к виду

$$\Phi_{\varepsilon 7}(\zeta_\varepsilon^v) = 2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 [v_{\varepsilon k}^i - u_k^{vi}] (\nabla \psi_\varepsilon^i, \zeta_\varepsilon^v) p_\varepsilon^{ik}.$$

Отсюда, применяя неравенство Гельдера и учитывая (1.59) и свойства функций $\psi_\varepsilon^i(x)$ получаем

$$|\Phi_{\varepsilon 7}(\zeta_\varepsilon^v)| \leq C \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(d_\varepsilon^i)^\kappa}{(r_\varepsilon^i)^{3(\kappa-1)}} \right\}^{\frac{1}{\kappa}} \left\{ \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (|v_{\varepsilon k}^i|^q + |u_k^{vi}|^q) (r_\varepsilon^i)^3 \right\}^{\frac{1}{q}} \|\zeta_\varepsilon^v\|_{L_q(\Omega)}, \quad (1.60)$$

где $q = \frac{2\kappa}{\kappa-1}$, $\kappa > \frac{3}{2}$, C не зависит от ε .

Теперь вспомним, что $\zeta_\varepsilon^v(x)$ минимизирует функционал $\hat{\Phi}_\varepsilon(\zeta_\varepsilon^v)$ в классе $J^\circ(\Omega, Q_\varepsilon)$. Так как $0 \in J^\circ(\Omega, Q_\varepsilon)$ и, значит, $\hat{\Phi}_\varepsilon(\zeta_\varepsilon^v) \leq \hat{\Phi}_\varepsilon(0) = 0$, то из (1.57) следует неравенство

$$\mu \int_{\Omega} |\nabla \zeta_{\varepsilon}^v|^2 dx \leq \sum_{j=1}^7 |\Phi_{\varepsilon_j}(\zeta_{\varepsilon}^v)|,$$

с помощью которого, пользуясь оценками (1.58), (1.60), неравенствами (1.27), (1.28), (1.44), условиями 1) – 5) теоремы 1.1 и, учитывая (1.51), (1.52), (1.55), заключаем, что

$$\|\nabla \zeta_{\varepsilon}^v\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq (C_0 v + C_1(\varepsilon)) \|\nabla \zeta_{\varepsilon}^v\|_{L_2(\Omega)} + C_2(\varepsilon),$$

где C_0 не зависит от ε , а $C_i(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$ ($i = 1, 2$). Отсюда следует, что

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0} \|\nabla \zeta_{\varepsilon}^v\| \leq C v \quad (1.61)$$

и, учитывая еще (1.55) приходим к (1.56).

Теперь оценим $\Phi_{\varepsilon}(u_{\varepsilon})$ снизу. Подставляя (1.53) в (1.1) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) &\geq \Phi_{\varepsilon}(\hat{u}_{\varepsilon}) - C_1 \left(\|w_{\varepsilon}^v\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|\zeta_{\varepsilon}^v\|_{W_2^1(\Omega)} \right) - \\ &\quad - C_2 \left(\|\hat{u}_{\varepsilon}^v\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f_{\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \left(\|w_{\varepsilon}^v\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|\zeta_{\varepsilon}^v\|_{W_2^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу сначала по $\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0$, а затем по $v \rightarrow 0$ и учитывая (1.52), (1.51), (1.56) и условие 5) теоремы 1.1, получаем

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}) \geq \lim_{v \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0} \Phi(\hat{u}_{\varepsilon}^v). \quad (1.62)$$

Далее так же, как в п. 2, с помощью (1.54) выводим равенство (аналогичное (1.33))

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon' \rightarrow 0} \Phi(\hat{u}_{\varepsilon}^v) = \Phi(u^v) + D,$$

Откуда в силу (1.62), (1.51) и непрерывности функционала $\Phi(u)$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$ следует (1.34). Таким образом, теорема 1.1 доказана.

Имея в виду дальнейшее ее применение, сформулируем теорему 1.1 в несколько ином виде. А именно, вариационную задачу (1.1) можно сформулировать, как задачу нахождения решения краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= \tilde{f}_\varepsilon, \quad \operatorname{div} u_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup Q_\varepsilon^i, \\ u_\varepsilon(x) &= v_\varepsilon^i + \omega_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i, \quad i = 1, \dots, N_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x) &= 0, \quad x \in \partial Q, \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

где постоянные векторы v_ε^i и ω_ε^i и вектор-функция $\tilde{f}_\varepsilon(x)$ заданы, а искомой является вектор-функция $u_\varepsilon(x)$ и функция $p_\varepsilon(x)$ (давление).

В то же время вариационную задачу отыскания минимизанта функционала (1.7) можно сформулировать, как задачу нахождения решения следующей краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u - Cu + V + \nabla p &= g, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad x \in \Omega, \\ u &= 0, \quad x \in \partial \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

где искомой является пара (u, p) .

Как и всюду в этой книге, мы называем решением задач (1.63) и (1.64) лишь вектор-функции $u_\varepsilon(x)$ и $u(x)$ и теорема 1.1 принимает вид.

Теорема 1.1'. *Если при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняются условия теоремы 1.1, то решение $u_\varepsilon(x)$ задачи (1.63) сходится в $L_2(\Omega)$ к решению $u(x)$ задачи (1.64).*

§2. Вероятностное распределение частиц

Для того чтобы понять насколько «типичными» (или частыми) являются ситуации, когда выполняются условия теоремы 1.1 и вычислить в явном виде функции $C(x)$ и $V(x)$, введем вероятностную функцию распределения твердых частиц в суспензии по их координатам, скоростям, ориентациям и размерам. Будем предполагать, что частицы имеют одинаковую форму и являются сжатиями некоторого тела вращения Q . Тогда каждая частица $Q_\varepsilon^i(t)$ в суспензии (в момент времени t) характеризуется ее диаметром d_ε^i , положением ее центра масс $x_\varepsilon^i(t)$, вектором ориентации $\lambda_\varepsilon^i(t)$ ($\lambda_\varepsilon^i(t)$ – единичный век-

тор, направленный по оси вращения), поступательной $v_\varepsilon^i(t)$ и угловой $\omega_\varepsilon^i(t)$ скоростями.

Для характеристики состояния всего ансамбля частиц твердой фазы суспензии в момент времени t введем, следуя [6], набор m -частичных функций распределения $f_\varepsilon^m(\hat{x}^m, \hat{v}^m, \hat{\lambda}^m, \hat{\omega}^m, \hat{a}^m; t)$, где $\hat{x}^m = \{x^1, \dots, x^m\} \in (\Omega)^m$; $\hat{v}^m, \hat{\omega}^m \in (\mathbf{R}^3)^m$; $\hat{\lambda}^m \in (S_2)^m$; $\hat{a}^m \in (0, \infty)^m$, $m = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$. Эти функции определяют вероятность

$$f_\varepsilon^m(\hat{x}^m, \hat{v}^m, \hat{\lambda}^m, \hat{\omega}^m, \hat{a}^m; t) d\hat{x}^m d\hat{v}^m d\hat{\lambda}^m d\hat{\omega}^m d\hat{a}^m$$

того, что центры масс $x_\varepsilon^i(t)$, скорости $v_\varepsilon^i(t)$ и $\omega_\varepsilon^i(t)$, ориентации $\lambda_\varepsilon^i(t)$ и диаметры d_ε^i данной группы из m частиц находятся в момент времени t в бесконечно малых объемах $d\hat{x}^m = dx^1 dx^2 \dots dx^m \dots d\hat{a}^m = da^1 da^2 \dots da^m$ вблизи точек $\hat{x}^m, \dots, \hat{a}^m$. Они удовлетворяют условиям симметрии, согласованности и нормировки, вытекающими из их вероятностного смысла

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^m(T_m \hat{x}^m, T_m \hat{v}^m, \dots, T_m \hat{a}^m; t) &= f_\varepsilon^m(\hat{x}^m, \hat{v}^m, \dots, \hat{a}^m; t), \\ \int \dots \int f_\varepsilon^m(\hat{x}^m, \hat{v}^m, \dots, \hat{a}^m; t) dx^m \dots da^m &= f_\varepsilon^{m-1}(\hat{x}^{m-1}, \hat{v}^{m-1}, \dots, \hat{a}^{m-1}; t), \\ \int f_\varepsilon^1(x, v, \dots, a; t) dx dv d\lambda d\omega da &= 1, \end{aligned}$$

где T_m – любая перестановка точек с номерами $1, 2, \dots, m$.

Функции f_ε^m ($m = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$) порождают вероятностную меру на множестве фазовых состояний всего ансамбля твердых частиц в суспензии, который зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$. А именно, ε характеризует порядок малости расстояний от частиц до их ближайших соседей и границы $\partial\Omega$, так что общее число частиц в ансамбле $N_\varepsilon \sim \frac{|\Omega|}{\varepsilon^3}$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). При этом, твердые частицы не должны пересекаться и предполагается, что их диаметры имеют порядок $O(\varepsilon^3)$. Без существенного ограничения общности можно считать, что

$$f_\varepsilon^m(\hat{x}^m, \hat{v}^m, \hat{\lambda}^m, \hat{\omega}^m, \hat{a}^m; t) = 0, \quad (2.1)$$

если выполняется какое-нибудь из неравенств: $|x^i - x^j| \leq a^i + a^j$ ($i \neq j$), $a^i \geq \frac{b}{N_\varepsilon} = O(\varepsilon^3)$, $\text{dist}(x^i, \partial\Omega) < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$).

Будем также считать, что носители функций f_ε^m по переменным v^i , ω^i ($i = 1, 2, \dots, m$) есть подмножества компакта $D \subset \mathbf{R}^3$, т.е.

$$\text{supp}_{\varepsilon, t} f_\varepsilon^m(\hat{x}^m, \hat{v}^m, \hat{\lambda}^m, \hat{\omega}^m, \hat{a}^m; t) \subset (\Omega)^m \times (D)^m \times (S_2)^m \times (D)^m \times (0, \varepsilon)^m. \quad (2.2)$$

Относительно одночастичной f_ε^1 и двухчастичной f_ε^2 функций распределения будем предполагать, что они представимы в виде:

$$f_\varepsilon^1(x, v, \lambda, \omega, a; t) = N_\varepsilon f(x, v, \lambda, \omega, N_\varepsilon a; t), \quad (2.3)$$

$$f_\varepsilon^2(\hat{x}^2, \hat{v}^2, \hat{\lambda}^2, \hat{\omega}^2, \hat{a}^2; t) = f_\varepsilon^1(x^1, v^1, \lambda^1, \omega^1, a^1; t) f_\varepsilon^1(x^2, v^2, \lambda^2, \omega^2, a^2; t) + \varphi_\varepsilon^2(\hat{x}^2, \hat{v}^2, \hat{\lambda}^2, \hat{\omega}^2, \hat{a}^2; t), \quad (2.4)$$

где $f(x, v, \lambda, \omega, a; t)$ неотрицательная, ограниченная и нормированная в L_1 функция с компактным носителем в $\Omega \times \mathbf{R}^3 \times S_2 \times \mathbf{R}^3 \times [0, 1]$ при любом $t \geq 0$, а функция φ_ε^2 мала в следующем смысле:

$$\int \dots \int (a^1)^{v_1} (a^2)^{v_2} \varphi_\varepsilon^2 d\hat{x}^2 d\hat{v}^2 d\hat{\lambda}^2 d\hat{\omega}^2 d\hat{a}^2 \leq C\varepsilon^{3(v_1+v_2)+\sigma} \quad (\sigma > 2),$$

$$\max_{\hat{x}, \hat{v}, \hat{\lambda}, \hat{\omega}} \int (a^1)^{v_1} (a^2)^{v_2} \varphi_\varepsilon^2 d\hat{a}^2 \leq C\varepsilon^{3(v_1+v_2)} \quad (0 \leq v_1, v_2 \leq 2). \quad (2.5)$$

Нетрудно убедиться, что при этом условия (2.1) – (2.5) совместны. Условие (2.4) – есть условие ослабления корреляций [6].

Дальше мы не указываем зависимость функций распределения f_ε^m от времени t , так как рассматривается фиксированный момент t .

Таким образом, при любом $\varepsilon > 0$ фазовые состояния ансамбля твердых частиц случайные и сопоставляются точкам θ_ε вероятностного пространства \mathcal{H}_ε , в котором вероятностная мера P_ε

порождается функциями f_ε^m ($m=1,2,\dots,N_\varepsilon$). Покажем, что из предположенных выше свойств этих функций следует, что условия 1) – 4) теоремы 1.1. выполняются «по вероятности» P_ε (т.е. для подавляющего множества состояний ансамбля).

Достаточно это доказать лишь для условий 2) и 4). Условия 1) и 3) выполняются с вероятностью 1 (т.е. для почти всех состояний ансамбля), что следует из (2.1) и (2.2):

$$P_\varepsilon(\theta_\varepsilon : \max_i d_\varepsilon^i < \frac{2\varepsilon^3}{|\Omega|}) = 1, \quad (2.6)$$

$$P_\varepsilon(\theta_\varepsilon : \max_i |v_\varepsilon^i| + \max_i |\omega_\varepsilon^i| \leq 2 \text{diam } D) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Выполнение условия 2) «по вероятности» устанавливается в следующей лемме. Рассмотрим случайную величину

$$\zeta_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(d_\varepsilon^i)^\kappa}{(r_\varepsilon^i)^{3(\kappa-1)}}. \quad (2.7)$$

Лемма 2.1. При любых $N \in (0, \infty)$ и $1 < \kappa < 2$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon(\theta_\varepsilon : \zeta_\varepsilon(\theta_\varepsilon) \leq N) \geq 1 - \frac{C(\kappa)}{N}.$$

Доказательство. Пусть $B_{r_\varepsilon}^i$ – шары, концентрические с минимальным шаром $B(Q_\varepsilon^i)$ и с радиусом $r_\varepsilon = \varepsilon^{1+\gamma}$, где $1 < \gamma < 2$. При достаточно малых ε эти шары не пересекаются с $\partial\Omega$ и $Q_\varepsilon^i \subset B_{\frac{1}{2}r_\varepsilon}^i$. Обозначим через A_ε^γ событие в \mathcal{H}_ε , состоящее в том, что шары $B_{r_\varepsilon}^i$ не пересекаются друг с другом. Ясно, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(A_\varepsilon^\gamma) &= 1 - P(A_\varepsilon^\gamma) \geq \\ &\geq 1 - \frac{N_\varepsilon(1-N_\varepsilon)}{2} \int_{\Omega} \int_{B_{\frac{1}{2}r_\varepsilon}^1} \int_0^{\varepsilon^3} \int_0^{\varepsilon^3} \tilde{f}_\varepsilon^2(x^1, x^2, a^1, a^2) dx^1 dx^2 da^1 da^2. \end{aligned}$$

Здесь и далее используются обозначения

$$\tilde{f}_\varepsilon^m(\hat{x}^m, \hat{a}^m) = \int \dots \int f_\varepsilon^m d\hat{v}^m d\hat{\lambda}^m d\hat{\omega}^m, \quad m=1,2,\dots,N_\varepsilon. \quad (2.8)$$

Отсюда, учитывая (2.3) – (2.5), получаем

$$P_\varepsilon(A_\varepsilon^\gamma) \geq 1 - O(\varepsilon^{3\gamma-1}) - O(\varepsilon^{\sigma-2}) \quad (\gamma > 1, \sigma > 2).$$

и, следовательно

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon(A_\varepsilon^\gamma) = 1. \quad (2.9)$$

Выберем $\theta_\varepsilon \in A_\varepsilon^\gamma$. Тогда согласно (2.1) при достаточно малых ε

$$d_\varepsilon^i = O(\varepsilon^3) \ll \frac{1}{2} \varepsilon^{1+\gamma} \quad \text{и} \quad r_\varepsilon^i \geq \min \left\{ \frac{1}{2} \min_{j \neq i} |x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j|, \frac{1}{2} \min_i \rho(x_\varepsilon^i, \partial\Omega) \right\},$$

где через $\rho(x, \partial\Omega)$ обозначено расстояние от точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$. Поэтому из (2.7) следует

$$\zeta_\varepsilon(\theta_\varepsilon) \leq X_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = X_\varepsilon^{(1)}(\theta_\varepsilon) + X_\varepsilon^{(2)}(\theta_\varepsilon), \quad (2.10)$$

где случайные величины $X_\varepsilon^{(1)}(\theta_\varepsilon)$ и $X_\varepsilon^{(2)}(\theta_\varepsilon)$ определены равенствами

$$X_\varepsilon^{(1)}(\theta_\varepsilon) = 2^{3(\kappa-1)} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(d_\varepsilon^i)^\kappa}{|x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j|^{3(\kappa-1)}}, \quad (2.11)$$

$$X_\varepsilon^{(2)}(\theta_\varepsilon) = 2^{3(\kappa-1)} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \frac{(d_\varepsilon^i)^\kappa}{[\rho(x_\varepsilon^i, \partial\Omega)]^{3(\kappa-1)}}. \quad (2.12)$$

Учитывая (2.9), запишем

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(\zeta_\varepsilon \leq N) &\geq P_\varepsilon(A_\varepsilon^\gamma \cap (\zeta_\varepsilon \leq N)) \geq P_\varepsilon(A_\varepsilon^\gamma \cap (X_\varepsilon \leq N)) \geq \\ &\geq P_\varepsilon(X_\varepsilon \leq N) - P_\varepsilon(\overline{A_\varepsilon^\gamma}) = P_\varepsilon(X_\varepsilon \leq N) - 1 + P_\varepsilon(A_\varepsilon^\gamma), \quad \forall N > 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу положительности случайной величины $X_\varepsilon = X_\varepsilon^{(1)} + X_\varepsilon^{(2)}$, справедливо неравенство

$$P_\varepsilon(X_\varepsilon \leq N) \geq 1 + \frac{M(X_\varepsilon)}{N} = 1 - \frac{M(X_\varepsilon^{(1)})}{N} - \frac{M(X_\varepsilon^{(2)})}{N}, \quad (2.14)$$

где $M(\cdot)$ – математическое ожидание.

Согласно (2.12) и (2.1) – (2.3)

$$M(X_\varepsilon^{(2)}) = 2^{3(\kappa-1)} N_\varepsilon \int_{\Omega_\varepsilon} \int_0^{a^3} \frac{a^\kappa \tilde{f}_\varepsilon^1(x, a)}{[\rho(x, \partial\Omega)]^{3(\kappa-1)}} dx da \leq CN_\varepsilon \varepsilon^{3\kappa} \int_{\Omega} \frac{dx}{[\rho(x, \partial\Omega)]^{3(\kappa-1)}},$$

где Ω^ε – компактная подобласть в Ω , находящаяся на расстоянии ε от $\partial\Omega$, \tilde{f}_ε^1 определена равенством (2.8). Отсюда,

учитывая, что граница $\partial\Omega$ гладкая, ее площадь конечна, а $N_\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$, получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} M(X_\varepsilon^{(2)}) \leq C. \quad (2.15)$$

Теперь оценим математическое ожидание $M(X_\varepsilon^{(1)})$. Учитывая (2.11) и используя обозначение (2.8), запишем при $m = N_\varepsilon$

$$M(X_\varepsilon^{(1)}) = 2^{3(\kappa-1)} \int \dots \int \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} (a^i)^\kappa \max_{j \neq i} \frac{1}{|x^i - x^j|^{3(\kappa-1)}} \tilde{f}_\varepsilon^m(\hat{x}^m, \hat{a}^m) d\hat{x}^m d\hat{a}^m. \quad (2.16)$$

Очевидно, при любом $i=1,2,\dots,N_\varepsilon$ и $\kappa > 1$ справедливо неравенство

$$\max_{j \neq i} \frac{1}{|x^j - x^i|^{3(\kappa-1)}} \leq \varepsilon^{-3(\kappa-1)} + \sum_{j \neq i} \frac{X_\varepsilon(|x^j - x^i|)}{|x^j - x^i|^{3(\kappa-1)}},$$

где $X_\varepsilon(r)$ – характеристическая функция отрезка $[0, \varepsilon]$. Поэтому из (2.16), в силу свойств функций распределения следует, что

$$M(X_\varepsilon^{(1)}) \leq C_1 N_\varepsilon \varepsilon^3 + C_2 \frac{N_\varepsilon(N_\varepsilon - 1)}{2} \int_{\varepsilon^3 < |x^1 - x^2| < \varepsilon} \int_{\Omega} \frac{dx^1 dx^2}{|x^1 - x^2|^{3(\kappa-1)}} \int \int \frac{(a^1)^\kappa + (a^2)^\kappa}{2} \tilde{f}_\varepsilon^2(x^1, x^2, a^1, a^2) da^1 da^2.$$

Отсюда учитывая, что $N_\varepsilon = O(\varepsilon^{-3})$ и $\kappa < 2$ и с помощью (2.3) – (2.5), получаем

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} M(X_\varepsilon^{(1)}) < C. \quad (2.17)$$

Очевидно, что из (2.9), (2.10), (2.13), (2.14), (2.15) и (2.17) следует утверждение леммы 2.1.

Перейдем теперь к доказательству выполнения «по вероятности» условия 4) теоремы 1.1 и вычислению функций $C(x)$ и $V(x)$.

Поскольку мы здесь рассматриваем частицы Q_ε^i являющиеся сжатиями (и поворотами) фиксированного тела вращения $Q \subset \mathbf{R}^3$, то для их тензоров влияния $C_{kl}(Q_\varepsilon^i)$ можно воспользоваться формулой (4.1.6), полученной в главе 4 §1. А

именно, если λ_ε^i – вектор ориентации частицы Q_ε^i с диаметром d_ε^i , то

$$C_{kl}(Q_\varepsilon^i) = d_\varepsilon^i \left[\hat{C}_{22} \delta_{kl} + (\hat{C}_{11} - \hat{C}_{22}) \lambda_k^i \lambda_l^i \right] \equiv d_\varepsilon^i \hat{C}_{kl}(\lambda^i) \quad (2.18)$$

где \hat{C}_{11} и \hat{C}_{22} – компоненты тензора сопротивлений тела вращения Q единичного диаметра с осью симметрии направленной по оси x_1 .

Введем функции от $x \in \Omega$

$$C_{kl}(x) = \mu \int \dots \int a \hat{C}_{kl}(\lambda) f(x, v, \lambda, \omega, a) dv d\lambda d\omega da, \quad (2.19)$$

$$V_k(x) = \mu \int \dots \int a \sum_{l=1}^3 \hat{C}_{kl}(\lambda) v_l f(x, v, \lambda, \omega, a) dv d\lambda d\omega da, \quad (2.20)$$

где $f(x, v, \lambda, \omega, a)$ – нормированная одночастичная функция распределения, определенная в условии (2.3), а матрица $\{\hat{C}_{kl}(\lambda)\}_{k,l=1}^3$ – определена формулой (2.18). Ясно, что $C_{kl}(x)$, $V_k(x) \in L_\infty(\Omega)$.

Лемма 2.2. *Случайные функции $C_{\varepsilon kl}(x)$ и $V_{\varepsilon k}(x)$, определенные формулами (2.5) и (2.6), сходятся (в слабой топологии $D'(\Omega)$) по вероятности P_ε к функциям (2.19) и (2.20) соответственно, т.е. для $\forall \eta(x) \in C(\Omega)$ и $\delta > 0$*

$$P_\varepsilon \left\{ \theta_\varepsilon : \left| \int_{\Omega} (C_{\varepsilon kl}(x) - C_{kl}(x)) \eta(x) dx \right| < \delta \right\} \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.21)$$

$$P_\varepsilon \left\{ \theta_\varepsilon : \left| \int_{\Omega} (V_{\varepsilon k}(x) - V_k(x)) \eta(x) dx \right| < \delta \right\} \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad k, l = 1, 2, 3. \quad (2.22)$$

Доказательство обоих утверждений проводится одинаково, поэтому остановимся только на первом из них. Фиксируем функцию $\eta(x) \in C(\Omega)$ и рассмотрим случайную величину

$$C_{\varepsilon kl}(\eta) = \int_{\Omega} C_{\varepsilon kl}(x) \eta(x) dx,$$

которая, согласно (2.5) и (2.18), имеет вид

$$C_{\varepsilon kl}(\eta) = \mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} d_\varepsilon^i \hat{C}_{kl}(\lambda^i) \eta(x_\varepsilon^i). \quad (2.23)$$

Вычислим ее математическое ожидание $M[C_{\varepsilon kl}(\eta)]$. Учитывая (2.4), получаем

$$\begin{aligned} M[C_{\varepsilon kl}(\eta)] &= \mu N_\varepsilon \int \dots \int a \hat{C}_{kl}(\lambda) \eta(x) f_\varepsilon^1(x, v, \lambda, \omega, a) dx dv d\lambda d\omega da = \\ &= \int_{\Omega} C_{kl}(x) \eta(x) dx, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где функция $C_{kl}(x)$ определена формулой (2.19).

Теперь оценим дисперсию случайной величины $C_{\varepsilon kl}(\eta)$.

Согласно (2.23), имеем

$$\begin{aligned} D[C_{\varepsilon kl}(\eta)] &= M\left[\left(C_{\varepsilon kl}(\eta) - M[C_{\varepsilon kl}(\eta)]\right)^2\right] = \\ &= \int \dots \int \left(\sum_{i=1}^3 \mu d_\varepsilon^i \hat{C}_{kl}(\lambda^i) \eta(x_\varepsilon^i) - M[C_{\varepsilon kl}(\eta)]\right)^2 f_\varepsilon^s dx^s d\hat{x}^s dv^s d\hat{v}^s d\lambda^s d\hat{\omega}^s da^s, \end{aligned}$$

где для краткости обозначено $s = N_\varepsilon$.

Преобразуем подинтегральное выражение с помощью равенства

$$\left(\sum_{i=1}^s a^i - b\right)^2 = \frac{1}{s^2} \sum_{i=1}^s (sa^i - b)^2 + \frac{2}{s^2} \sum_{1 \leq i < j \leq s} (sa^i - b)(sa^j - b).$$

Тогда с учетом свойства функции распределения

$$\begin{aligned} D[C_{\varepsilon kl}(\eta)] &= \\ &= \frac{1}{N_\varepsilon} \int \dots \int \left(\mu a \hat{C}_{kl}(\lambda) \eta(x) - M[C_{\varepsilon kl}(\eta)]\right)^2 f(x, v, \lambda, \omega, a) dx dv d\lambda d\omega da + \\ &+ \frac{N_\varepsilon(N_\varepsilon - 1)}{N_\varepsilon^2} \int \dots \int \left(\mu a^1 \hat{C}_{kl}(\lambda^1) \eta^1(x) - M[C_{\varepsilon kl}(\eta)]\right) \times \\ &\times \left(\mu a^2 \hat{C}_{kl}(\lambda^2) \eta^2(x) - M[C_{\varepsilon kl}(\eta)]\right) f(x^1, v^1, \lambda^1, \omega^1, a^1) \times \\ &\times f(x^2, v^2, \lambda^2, \omega^2, a^2) dx^1 dx^2 dv^1 dv^2 d\lambda^1 d\lambda^2 d\omega^1 d\omega^2 da^1 da^2 + O(\varepsilon^\sigma), \sigma > 2. \end{aligned}$$

Согласно определению математического ожидания $M[C_{\varepsilon kl}(\eta)]$ второй интеграл в этом равенстве равен нулю. Следовательно

$$D[C_{\varepsilon kl}(\eta)] \rightarrow 0 \quad \text{ï ðè} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.25)$$

Теперь воспользуемся неравенством Чебышева: $\forall \delta > 0$

$$P_\varepsilon \left\{ \theta_\varepsilon : |C_{\varepsilon kl}(\eta) - M[C_{\varepsilon kl}(\eta)]| < \delta \right\} \geq 1 - \frac{D[C_{\varepsilon kl}(\eta)]}{\delta^2}.$$

Тогда, учитывая (2.23), (2.24) и (2.25), получаем (2.21). Лемма доказана.

Предположим еще, что вектор-функция \tilde{f}_ε в задаче (1.1) случайна, т.е. $\tilde{f}_\varepsilon(x) = \tilde{f}_\varepsilon(x, \theta_\varepsilon)$, $\theta_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к $f(x)$ в слабой топологии $L_2(\Omega)$ по вероятности P_ε , т.е. $\forall \eta(x) \in L_2(\Omega)$ и $\forall \delta > 0$

$$P_\varepsilon \left\{ \theta_\varepsilon : \left| \int_\Omega (\tilde{f}_{\varepsilon k}(x, \theta_\varepsilon) - f_k(x)) \eta(x) dx \right| < \delta \right\} \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0, k = 1, 2, 3. \quad (2.26)$$

Тогда все условия 1) – 5) теоремы 1.1 выполняются «по вероятности» и можно ожидать, что утверждение этой теоремы будет справедливо также «по вероятности». Действительно, справедливо следующее.

Теорема 2.1. Пусть распределение твердых частиц и вектор-функции $f_\varepsilon(x)$ в задаче (1.1) случайные и выполняются условия (2.1)–(2.5) и (2.26). Тогда случайное решение $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, \theta_\varepsilon)$ ($x \in \Omega$, $\theta_\varepsilon \in \mathcal{H}_\varepsilon$) задачи (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится в метрике $L_2(\Omega)$ по вероятности P_ε к неслучайной вектор-функции $u(x)$, т.е. $\forall \delta > 0$

$$P_\varepsilon \left\{ \theta_\varepsilon : \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(\Omega)} < \delta \right\} \rightarrow 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

причем $u(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ доставляет минимум функционалу (1.7), в котором $C(x)$ и $V(x)$ определены формулами (1.19), (1.20).

Доказательство этой теоремы проводится от противного: если теорема не верна, то с помощью лемм 2.1, 2.2 и (2.26) удастся выделить последовательность ансамблей твердых частиц, фазовые состояния которых удовлетворяют всем условиям 1) – 5) теоремы 1.1, а последовательность соответствующих им решений задачи (1.1) (или что то же – задачи (1.63)) не сходится к минимизанту $u(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ функционала (1.7) (решению задачи

(1.64)), что противоречит теореме 1.1 (теореме 1.1').

Переходя к выделению такой подпоследовательности, заметим, прежде всего, что пространство $C(\Omega)$ непрерывно вкладывается в $L_2(\Omega)$ и оба пространства сепарабельны. Поэтому существует счетное множество функций $\mathfrak{M} = \{\eta_j(x) \in C(\Omega), j=1,2\}$ плотное, как в $C(\Omega)$, так и в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим следующие события в вероятностном пространстве \mathcal{H}_ε

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^1 &= \left\{ \theta_\varepsilon : \max_i d_\varepsilon^i < \frac{2}{|\Omega|} \varepsilon^3 \right\}, \\ A_\varepsilon^2 &= \left\{ \theta_\varepsilon : \max_i |v_\varepsilon^i| + \max_i |\omega_\varepsilon^i| \leq 2D \right\}, \\ A_\varepsilon^3 &= \left\{ \theta_\varepsilon : \zeta_\varepsilon(\theta_\varepsilon) \leq N \right\}, \\ A_\varepsilon^4(j, m) &= \left\{ \theta_\varepsilon : \sum_{k,l=1}^3 |C_{\varepsilon kl}(\eta_j, \theta_\varepsilon) - C_{kl}(\eta_j)| \leq \frac{1}{m} \right\}, \\ A_\varepsilon^5(j, m) &= \left\{ \theta_\varepsilon : \sum_{k=1}^3 |V_{\varepsilon k}(\eta_j, \theta_\varepsilon) - V_k(\eta_j)| \leq \frac{1}{m} \right\}, \\ A_\varepsilon^6(j, m) &= \left\{ \theta_\varepsilon : \sum_{k=1}^3 |f_{\varepsilon k}(\eta_j, \theta_\varepsilon) - f_k(\eta_j)| \leq \frac{1}{m} \right\}, \\ A_\varepsilon^7(\delta) &= \left\{ \theta_\varepsilon : \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(\Omega)} > \delta \right\}, \end{aligned}$$

где случайная величина $\zeta_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$ определена равенством (2.7), случайные величины $C_{\varepsilon kl}(\eta_j, \theta_\varepsilon)$ и $V_{\varepsilon k}(\eta_j, \theta_\varepsilon)$ есть интегралы по $x \in \Omega$ от произведений функций $\eta_j(x)$ на случайные функции, определенные равенствами (1.5), (1.6) (см., например, (2.23)); числа $C_{kl}(\eta_j)$ и $V_k(\eta_j)$ определяются аналогично с помощью (2.19), (2.20); $f_{\varepsilon k}(\eta_j, \theta_\varepsilon)$ и $f_k(\eta_j)$ определены в условии (2.26).

Предположим, что $u_\varepsilon(x)$ не сходится в $L_2(\Omega)$ по вероятности P_ε к u . Тогда найдутся такие $\delta > 0$ и $\mu > 0$, что

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} P_\varepsilon(A_\varepsilon^7(\delta)) \geq \mu. \quad (2.27)$$

Согласно лемма 2.1, 2.2, равенствам (2.6) и условию (2.26) при любых j, m и N , найдется $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}(j, m, N)$ такое, что при $\varepsilon < \hat{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(A_\varepsilon^1) &= P_\varepsilon(A_\varepsilon^2) = 1, \\ P_\varepsilon(A_\varepsilon^1(N)) &\geq 1 - \frac{C}{N}, \\ P_\varepsilon(A_\varepsilon^s(j, m)) &\geq 1 - \frac{\mu}{2^{j+m+3}}, \quad s = 4, 5, 6. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Положим $N = \frac{8c}{\delta}$ и рассмотрим событие

$$A_{\varepsilon_k} = A_{\varepsilon_k}^1 \cap A_{\varepsilon_k}^2 \cap A_{\varepsilon_k}^3(N) \cap \left[\bigcap_{m=1}^{m_k} \bigcap_{j=1}^{j_k} \bigcap_{s=4}^6 A_{\varepsilon_k}^s \right] \cap A_{\varepsilon_k}^7(\delta), \quad k = 1, 2, \quad (2.29)$$

где ε_k, j_k, m_k выбираются так, чтобы все неравенства (2.28) выполняются при $\varepsilon = \varepsilon_k, m \leq m_k$ и $j \leq j_k$. При этом $\varepsilon \rightarrow 0, m_k \rightarrow \infty, j_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Учитывая (2.28), получаем

$$\begin{aligned} P_{\varepsilon_k} \left\{ \overline{A_{\varepsilon_k}^1} \cup \overline{A_{\varepsilon_k}^2} \cup \overline{A_{\varepsilon_k}^3(N)} \cup \left[\bigcup_{m=1}^{m_k} \bigcup_{j=1}^{j_k} \bigcup_{s=4}^6 \overline{A_{\varepsilon_k}^s(j, m)} \right] \cup \overline{A_{\varepsilon_k}^7(s)} \right\} &\leq \\ &\leq \sum_{j, m=1}^{\infty} \frac{3\delta}{2^{j+m+3}} + \frac{\delta}{8} = \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

и, значит,

$$P_{\varepsilon_k} \left\{ \overline{A_{\varepsilon_k}^1} \cup \overline{A_{\varepsilon_k}^2} \cup \overline{A_{\varepsilon_k}^3(N)} \cup \left[\bigcup_{m=1}^{m_k} \bigcup_{j=1}^{j_k} \bigcup_{s=4}^6 \overline{A_{\varepsilon_k}^s(j, m)} \right] \right\} \geq 1 - \frac{\delta}{2}. \quad (2.30)$$

Из (2.29) и (2.27), (2.30) следует, что события A_{ε_k} ($k=1, 2, \dots$) не пустые

Выбираем в каждом из них по точке $\theta_{\varepsilon_k} \in \mathcal{H}_{\varepsilon_k}$ и рассмотрим соответствующие фазовые состояния ансамбля твердых частиц и отвечающие им решения $u_{\varepsilon_k} = u(\theta_{\varepsilon_k})$ задачи (1.1). Согласно определению событий $A_{\varepsilon_k} \subset \mathcal{H}_{\varepsilon_k}$ все условия 1) – 5) теоремы 1.1 выполняются при $\varepsilon_k \rightarrow 0$, а решение u_{ε_k} не сходятся к $u(x)$. Тем самым получено противоречие с теоремой 1.1.

Сделаем только одно замечание. В приведенном доказательстве выделенная подпоследовательность $\{\varepsilon_k, k \rightarrow \infty\}$, такая

что условия 3) – 5) теоремы 1.1 при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ выполняются на счетном плотном в $C(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$ множестве функций $\{\eta_j(x), j=1,2,\dots\}$. Однако из формул типа (2.23) и неравенства (1.27) следует, что функционалы $C_{\varepsilon_k l}(\eta_j)$ и $V_{\varepsilon_k}(\eta_j)$ порождаемые функциями (1.5), (1.6) непрерывны в $C(\Omega)$ равномерно относительно $\{\varepsilon_k\}$. Значит условия 3), 4) выполняются при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ для любой функции $\eta(x) \in C(\Omega)$. Аналогично, функционал $f_{\varepsilon l}(\eta)$ непрерывен в $L_2(\Omega)$ равномерно относительно ε и, значит, условие 5) также выполняется при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$. Таким образом, теорема 1.1 верна и, значит, теорема 2.1 доказана.

§3. Возмущение вязкой несжимаемой жидкости мелкими твердыми частицами, движущимися в ней в режиме фильтрации

Здесь мы получим усредненные уравнения, описывающие возмущенные движения несущей жидкости суспензии, предполагая, что движения частиц в ней полностью определено. А именно, будем считать, что траектории и положения частиц $Q_\varepsilon^i(t)$ на интервале времени $[0, T]$, заданы, так что центры масс $x_\varepsilon^i(t)$, скорости $v_\varepsilon^i(t)$, угловые скорости $\omega_\varepsilon^i(t)$ частиц, а также область $\Omega_\varepsilon(t) = \Omega \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i(t)$, занимаемая жидкостью, известны. Тогда из (1.1) – (1.2) следует, что в любой момент времени $t \in [0, T]$ скорость жидкости $u_\varepsilon(x, t)$ и давление $p_\varepsilon(x, t)$ в ней, как функции точки $x \in \Omega_\varepsilon(t)$, определяются, как решения $\{u_\varepsilon(x), p_\varepsilon(x)\}$ стационарной краевой задачи (1.63), где область Ω_ε , векторы $x_\varepsilon^i, v_\varepsilon^i, \omega_\varepsilon^i$, а также вектор-функция

$$\tilde{f}_\varepsilon(x) = \rho_{\text{ж}} f_\varepsilon(x, t) - \rho_{\text{ж}} \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(x, t) + (u_\varepsilon \nabla) u_\varepsilon(x, t) \right], \quad (3.1)$$

считаются заданными.

Это очевидное утверждение является частным случаем леммы 1.3.1 в случае движения суспензии в режиме фильтрации.

Представим решение $\{u_\varepsilon, p_\varepsilon\}$ задачи (1.63) в виде суммы $\{u_\varepsilon(x), p_\varepsilon(x)\} = \{u_\varepsilon^1, p_\varepsilon^1\} + \{u_\varepsilon^2, p_\varepsilon^2\}$, где $\{u_\varepsilon^1, p_\varepsilon^1\}$ и $\{u_\varepsilon^2, p_\varepsilon^2\}$ – соответственно решения таких краевых задач в области Ω_ε

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u_\varepsilon^1 + \nabla p_\varepsilon^1 &= 0, \quad \operatorname{div} u_\varepsilon^1 = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i, \\ u_\varepsilon^1 &= v_\varepsilon^i + \omega_\varepsilon^i(x - x_\varepsilon^i), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i, \quad i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^1 &= 0, \quad x \in \partial \Omega \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u_\varepsilon^2 + \nabla p_\varepsilon^2 &= \tilde{f}_\varepsilon, \quad \operatorname{div} u_\varepsilon^2 = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i, \\ u_\varepsilon^2 &= 0, \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i, \quad i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^2 &= 0, \quad x \in \partial \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Для краткости будем называть решением этих задач лишь векторы скорости u_ε^1 и u_ε^2 , продолжая их на множества Q_ε^i в соответствии с граничными условиями на ∂Q_ε^i . Изучим асимптотическое поведение u_ε^1 и u_ε^2 при $\varepsilon \rightarrow 0$, применяя теорему 1.1 (теорему 2.1).

1. Рассмотрим сначала задачу (3.2). Предположим, что при любом $t \in [0, T]$ выполняются условия 1) – 4) теоремы 1.1. Ясно, что условие 5) выполнено, т.к. $f_\varepsilon(x) = 0$. Тогда, согласно теореме 1.1, решения $u_\varepsilon^1(x, t)$ задачи (3.2) при любом $t \in [0, T]$ сходятся в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции u^1 такой, что $\{u^1, p^1\}$ есть решение краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u^1 - C u^1 + \nabla p^1 &= -V, \quad \operatorname{div} u^1 = 0, \quad x \in \Omega, \\ u^1 &= 0, \quad x \in \partial \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

где матрица-функция $C=C(x, t)$ и вектор-функция $V=V(x, t)$ определены в условии 4) теоремы 1.1 ($t \in [0, T]$). При этом норма

вектор-функций $u_\varepsilon^1(x, t)$ в $L_2(\Omega)$ ограничена равномерно по $\varepsilon > 0$ и $t \in [0, T]$ а, значит, u_ε^1 сходится к u^1 в $L_2(\Omega_T)$.

2. Рассмотрим теперь задачу (3.3). Обозначим через R_ε разрешающий оператор в $L_2(\Omega_\varepsilon)$, т.е. ограниченный линейный оператор сопоставляющий вектор-функции $\tilde{f}_\varepsilon \in L_2(\Omega_\varepsilon)$ решения $u_\varepsilon^2 \in J(\Omega_\varepsilon)$ задачи (3.3). Как известно, (см., например, [17]) этот оператор самосопряжен, положительно определен и вполне непрерывен. Очевидно, сохраняя эти свойства, его можно расширить до оператора $R_\varepsilon^t: L_2(\Omega) \rightarrow J^1(\Omega)$, продолжая нулем вектор-функцию $u_\varepsilon^2 = R_\varepsilon \tilde{f}_\varepsilon$ на множество $\bigcup_i Q_\varepsilon^i$. Пусть выполняются условия 1) – 4) теоремы 1.1. Тогда из теоремы 1.1 следует, что R_ε^t сходится сильно в $L_2(\Omega)$ к оператору R^t , сопоставляющему вектор-функции $\tilde{f}(x) \in L_2(\Omega)$ вектор-функцию u^2 такую, что $\{u^2, p^2\}$ есть решение краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \mu \Delta u^2 - C u^2 + \nabla p^2 &= f(x), \quad \operatorname{div} u^2 = 0, \quad x \in \Omega, \\ u^2 &= 0, \quad x \in \partial \Omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Здесь $C=C(x, t)$ – матрица-функция, определенная в условии 4) теоремы 1.1 ($\forall t$).

Можно показать, что R_ε^t сходится к R^t по операторной норме (см. § 2 главы 2) и, значит, R^t самосопряженный положительно определенный и вполне непрерывный оператор в $L_2(\Omega), \forall t$.

Из оценок (2.3.1) и (2.3.24) следует, что вектор скорости $u_\varepsilon(x, t)$ задачи (1) – (9) ограничен в $W_2^1(\Omega_T)$ равномерно по $\varepsilon > 0$ и, значит, множество вектор-функций $\{u_\varepsilon(x, t), \varepsilon > 0\}$ слабо компактно в $W_2^1(\Omega_T)$ и компактно в $L_2(\Omega), \forall t > 0$. Поэтому, учитывая еще условие (j) (глава 2) и (2.3.24) заключаем, что

множество вектор-функций $\{\tilde{f}_\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ определенных равенством (3.1), слабо компактно в $L_2(\Omega_T)$. Выделим сходящуюся подпоследовательность $\{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ такую, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x, t) &\rightharpoonup u(x, t) \quad \text{в } W_2^1(\Omega_T), \\ \tilde{f}_\varepsilon(x, t) &\rightarrow \tilde{f}(x, t) = g - \rho_a \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u \right\} \quad \text{в } L_2(\Omega_T). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из определения операторов R_ε^t следует, что для почти всех $t \in [0, T]$

$$u_\varepsilon^2 = R_\varepsilon^t \tilde{f}_\varepsilon \in L_2(\Omega_T). \quad (3.7)$$

Пусть $\varphi(x, t)$ произвольная вектор-функция из $L_2(\Omega_T)$. Учитывая (3.6), (3.7) и свойства операторов R_ε^t и R^t , имеем при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$

$$\left(u_\varepsilon^2, \varphi \right)_{L_2(\Omega_T)} = \left(\tilde{f}_\varepsilon, R_\varepsilon^t \varphi \right)_{L_2(\Omega_T)} \rightarrow \left(\tilde{f}, R^t \varphi \right)_{L_2(\Omega_T)} = \left(R^t \tilde{f}, \varphi \right)_{L_2(\Omega_T)}.$$

Следовательно, u_ε^2 сходится (по подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$) слабо в $L_2(\Omega_T)$ к решению u^2 задачи (3.5), где $\tilde{f} = \tilde{f}(x, t)$. Отсюда, вспоминая, что u_ε^1 сходится в $L_2(\Omega_T)$ к решению u^1 задачи (3.4), а множество вектор-функций $\{u_\varepsilon = u_\varepsilon^1 + u_\varepsilon^2, \varepsilon > 0\}$, в силу (2.3.25) слабо компактно в $W_2^1(\Omega_T)$, выводим: u_ε сходится в $L_2(\Omega)$ к вектор-функции $u = u^1 + u^2, \forall t$. При этом, из (3.4) – (3.5) следует, что $\{u, p\}$, где $p = p^1 + p^2$, есть решение системы

$$\left. \begin{aligned} \rho_a \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u \right) - \mu \Delta u + C u - V &= \nabla p + g, \\ \operatorname{div} u &= 0, \\ u &= 0, \quad x \in \partial \Omega. \end{aligned} \right\} x \in \Omega, \quad (3.8)$$

Эта система описывает движение вязкой несжимаемой жидкости, возмущенной фильтрующимися сквозь нее мелкими твердыми частицами. При этом состояние и движение самого множества частиц в жидкости задается условиями 1) –

4) теоремы 1.1, где и определяются матрица-функция $C = \{C_{kl}(x, t)\}_{k, l=1}^3$ и вектор-функция $V = \{V_k(x, t)\}_{k=1}^3$ в весьма общем случае. В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать более частную ситуацию, предполагая, что все частицы $Q_\varepsilon^i(t)$, ($i = 1, \dots, N_\varepsilon$) являются сжатиями (в ε^3 раз) и поворотами фиксированного тела вращения Q . Будем характеризовать конфигурацию и фазовое состояние такого ансамбля частиц с помощью m -частичных функций распределения частиц по их координатам x , скоростям v , ориентациям λ , угловым скоростям ω и диаметрам a , как это сделано в §2. Тогда $C_{kl}(x, t)$ и $V_k(x, t)$ выражаются через нормированную одночастичную функцию распределения $f(x, v, \lambda, \omega, a, t)$ по формулам (см. (2.19) – (2.20))

$$\begin{aligned} C_{kl}(x, t) &= \mu \int \dots \int a \hat{C}_{kl}(\lambda) f(x, v, \lambda, \omega, a, t) dv d\lambda d\omega da, \\ V_k(x, t) &= \mu \int \dots \int a \sum_{l=1}^3 \hat{C}_{kl}(\lambda) v_l f(x, v, \lambda, \omega, a, t) dv d\lambda d\omega da, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\hat{C}_{kl} = \hat{C}_{22} \delta_{kl} + (\hat{C}_{11} - \hat{C}_{22}) \lambda_k \lambda_l, \quad (3.10)$$

а \hat{C}_{11} , \hat{C}_{22} (параметры тела вращения) определены в § 2 главы 4.

§ 4. Замкнутая система уравнений движения суспензии в режиме «фильтрующихся частиц»

Система (3.8) – (3.10) не замкнута, поскольку в нее входит заранее неизвестная функция распределения частиц $f(x, v, \lambda, \omega, a, t)$. Для ее замыкания воспользуемся тем, что функция распределения при отсутствии столкновений между частицами, должна удовлетворять кинетическому уравнению типа Лиувилля

$$L[f] \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + (v \nabla_x) f + \operatorname{div}_v [\dot{v} f] + \operatorname{div}_\omega [\dot{\omega} f] + \operatorname{div}_\lambda [\dot{\lambda} f] = 0 \quad (4.1)$$

в области $\Omega \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times S \times [0, T]$ ($x \in \Omega$, $v, \omega \in \mathbf{R}^3$, $\lambda \in S$, $t \in [0, T]$).

Здесь \dot{v} – ускорение центров масс частиц, $\dot{\omega}$ – угловое уско-

рение частиц и $\dot{\lambda}$ – скорость изменения единичного вектора ориентации частицы. Эти величины определяются в результате изучения воздействия несущей жидкости на уединенную частицу, что сделано в § 2 главы 4. Такое приближение естественно, поскольку при движении суспензии в режиме фильтрации среднее расстояние между ближайшими соседними частицами имеет порядок ε , а диаметры частиц – порядок ε^3 .

Согласно (4.2.1)

$$\dot{v} = \frac{\mu}{\rho_{\div\varepsilon} d_\varepsilon^2} [C_0(u-v) + C_1(u-v, \lambda)\lambda] + g_1, \quad (4.2)$$

где $g_1 = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\div\varepsilon}}\right)$ – Архимедова сила, $d_\varepsilon = a\varepsilon^3$ ($0 < a \leq 2$) – диаметр частицы. Заметим, что в режиме фильтрующихся частиц параметр $\frac{\mu}{\rho_{\div\varepsilon} d_\varepsilon^2}$ конечен.

Предположим, что частицы имеют плоскость симметрии перпендикулярную оси вращения, т.е. $\hat{D} = 0$, и внешний момент $M_{\text{аг}} = 0$. Тогда, согласно (4.2.3)

$$\dot{\omega} = \frac{\mu}{\rho_{\div\varepsilon} d_\varepsilon^2} \{J_1(\text{rot}u - 2\omega) + J_2(\text{rot}u - 2\omega, \lambda)\lambda + J_3(\lambda \times E[u]\lambda)\} + J_4(\omega \times \lambda)(\omega, \lambda). \quad (4.3)$$

Запишем еще кинематическое уравнение для вектора ориентации осесимметричной твердой частицы

$$\dot{\lambda} = \omega \times \lambda. \quad (4.4)$$

Уравнения (3.8) – (3.10) вместе с (4.1) – (4.4) представляют замкнутую систему, описывающую движение суспензии осесимметричных частиц в режиме фильтрации.

Выпишем наиболее простой вариант этой системы, когда частицы сферические. В этом случае функции распределения f зависят только от координат x , скоростей v и приведенных

радиусов $r = \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3}$ частиц, т.е. $f = f(x, v, r, t)$. Тогда система (3.8)

– (3.10), (4.1) – (4.4) приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \nabla) u - \nu \Delta u + f \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^3} r(u-v) f d v d r = \nabla p + g, \quad (4.5)$$

$$\operatorname{div} u = 0, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v \nabla_x) f + \operatorname{div}_v [\Gamma_r(u, v) f] = 0, \quad (x, v) \in \Omega \times \mathbf{R}^3, t > 0, \quad (4.7)$$

$$\Gamma_r(u, v) = \frac{\gamma}{r^2} (u - v) + g_1 \quad (0 < r \leq 1). \quad (4.8)$$

Здесь $\nu = \frac{\mu}{\rho_\varepsilon}$, $\beta = 6\pi\nu$, $\gamma = \frac{9\mu}{2\rho_\varepsilon \varepsilon^6}$ – постоянные коэффициенты,

ρ_ε – удельная плотность вещества частиц, ε – характерный масштаб расстояний между ближайшими частицами.

Такой же вид (но с иными коэффициентами β , γ) имеет замкнутая усредненная система уравнений движения суспензии осесимметричных частиц при случайном равномерном распределении их ориентаций. Соответствующая функция распределения тогда удовлетворяет условию

$$\int f(x, v, \lambda, \omega, a, t) d\omega = \frac{1}{4\pi} f(x, v, a, t),$$

где $f(x, v, a, t)$ – функция распределения частиц по координатам, скоростям и диаметрам. Пользуясь этим равенством, из (3.8)-(3.10) и (4.1)-(4.3) выводим систему уравнений (4.5)-(4.8), в которой коэффициенты β и γ определяются по формулам:

$$\beta = \frac{2(\hat{C}_{11} + 2\hat{C}_{22})\mu}{3\rho_\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{(\hat{C}_{11} + 2\hat{C}_{22})\hat{\tau}_\mu^{-1}}{12\rho_\varepsilon \varepsilon^6}. \quad \text{Здесь } \hat{C}_{11}, \hat{C}_{22}, \hat{\tau} \text{ –}$$

параметры, зависящие лишь от формы осесимметричных частиц (см. §2 глава 4).

Замечание. Случайное равномерное распределение векторов ориентаций частиц может осуществляться за счет броуновских толчков молекул несущей жидкости. Но если час-

тицы не имеют плоскости симметрии перпендикулярной оси вращения ($\hat{D} \neq 0$) и течение достаточно сильное, то гидродинамическое ориентирующее влияние несущей жидкости будет превалировать над дезориентирующим влиянием броуновских толчков молекул и частицы будут быстро ориентироваться по течению.

Действительно, так как в режиме фильтрации параметр

$$R = \frac{\mu}{\rho_{\pm\varepsilon} d_\varepsilon^2} \text{ конечен и, значит, } \left| \frac{\mu \hat{D}}{\rho_{\pm\varepsilon} d_\varepsilon^3} \right| \rightarrow \infty \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \text{ то из (2.3)}$$

следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $\lambda(x) \rightarrow (u(x) - v)|u(x) - v|^{-1}$, т.е. для функции распределения выполняется приближенное равенство

$$\int f(x, v, \lambda, \omega, a, t) d\omega \approx f(x, v, a, \lambda) \delta \left(\lambda - \frac{u(x) - v}{|u(x) - v|} \right) \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Учитывая это из (3.8)-(3.10) и (4.1), (4.2) выводим систему

$$\text{уравнений (4.4)-(4.7), в которой } \beta = \frac{2\hat{C}_{11}\mu}{\rho_\varepsilon}, \quad \gamma = \frac{\hat{C}_{11}\hat{\tau}^{-1}\mu}{4\rho_{\pm\varepsilon}\varepsilon^6}.$$

Ясно, что замкнутая система уравнений вида (4.5)-(4.8) не вполне математически обоснована, так как она получается формальным объединением возмущенной системы Навье-Стокса (4.5), (4.6) и кинематического уравнения Лиувилля для функции распределения частиц. В связи с этим возникает вопрос об ее непротиворечивости, т.е. совместности и разрешимости. Этому вопросу посвящены работы [1], [2], [71]. В частности в работе [1] доказано существование глобальных обобщенных решений начально-краевой задачи для системы (4.5)-(4.8) в случае, когда носитель начальной функции распределения $f_0(x, v, r)$ по переменной r отделен от 0:

$$\text{supp } f_0(x, v, r) \subset \Omega \times \mathbf{R}^3 \times [\delta, 1], \quad \delta > 0.$$

В следующем параграфе мы рассматриваем более общую усредненную систему уравнений движения суспензии в режиме фильтрации и это ограничение несколько ослабляем.

**§ 5. О существовании обобщенных решений
начально-краевой задачи для замкнутой системы
уравнений движения суспензии в режиме фильтрации
частиц**

1. Рассмотрим следующую систему уравнений, описывающую динамику суспензии сферических твердых частиц в режиме фильтрации с учетом броуновских толчков молекул несущей жидкости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla_x)u - \nu \Delta_x u + \beta \int_0^1 \int_{\mathbf{R}^3} r(u-v) f dv dr - \nabla_x p = g, \quad (5.1)$$

$$\operatorname{div}_x u = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v \cdot \nabla_x) f + \operatorname{div}_v [\Gamma_r(u, v) f] = \sigma_r \Delta_v f, \quad 0 < r \leq 1, \quad (5.3)$$

$$\Gamma_r(u, v) = \gamma r^{-2} (u - v) + g_1. \quad (5.4)$$

Здесь $u = u(x, t)$ – векторное поле скорости несущей жидкости, $p = p(x, t)$ – давление, $f = f(x, v, r, t)$ – нормированная функция распределения частиц по координатам $x \in \mathbf{R}^3$, скоростям

$v \in \mathbf{R}^3$ и приведенным радиусам $r = \frac{r_\varepsilon}{\varepsilon^3} \in (0, 1]$; g и $g_1 = \left(1 - \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{ч}}}\right) g$

– заданные векторы гравитационной и архимедовой сил, через Δ_x и Δ_v обозначены операторы Лапласа по переменным $x \in \mathbf{R}^3$, $v \in \mathbf{R}^3$, соответственно; ∇_x – оператор градиента по x

$(u \cdot \nabla_x) = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Постоянные параметры ν , β , γ выражаются

через характеристики жидкой и твердой фаз (см. § 4). Воздействие на частицы, обусловленное броуновским движением молекул несущей жидкости, учитывается коэффициентом диффузии σ_r , который определяется по формуле Эйнштейна (см. [68], [85])

$$\sigma_r = \frac{6\pi\mu r_\varepsilon}{m_\varepsilon} \frac{kT}{m_\varepsilon} = \frac{\sigma}{r^5} \quad (\sigma > 0),$$

где m_ε – масса частицы, r_ε – ее радиус, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура. Здесь мы считаем, что $\sigma_r \geq 0$.

Уравнения (5.1)-(5.2) (возмущенная система уравнений Навье-Стокса) рассматриваются в пространственной области $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ($x \in \Omega$), а уравнение (5.3) (уравнение Фоккера-Планка), зависящее от параметра $r \in (0,1)$, в области $\Omega \times \mathbf{R}^3$ ($x \in \Omega, v \in \mathbf{R}^3$) фазового пространства $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$.

Будем предполагать, что Ω – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а вектор скорости жидкости $u(x,t)$ и функция распределения $f(x,v,r,t)$ частиц в суспензии удовлетворяют таким граничным условиям:

$$u(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \geq 0, \quad (5.5)$$

$$f(x,v,r,t) = 0, \quad (x,v) \in \Sigma^-, t \geq 0, \quad (5.6)$$

где через Σ^- обозначена часть границы $\partial\Omega \times \mathbf{R}^3$, на которой вектор скорости v направлен внутрь области Ω .

Первое из этих условий есть условие прилипания вязкой жидкости и неподвижной границы, а второе означает, что частицы не входят в область Ω извне, а достигнув границы $\partial\Omega$ изнутри прилипают к ней.

Дополним систему уравнений (5.1)-(5.4) и граничные условия (5.5), (5.6) начальными условиями:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.7)$$

$$f(x,v,r,0) = f_0(x,v,r), \quad (x,v) \in \Omega, r \in (0,1), \quad (5.8)$$

где $u_0(x)$ – заданное начальное поле скоростей жидкости, а $f_0(x,v,r)$ – заданная начальная функция распределения частиц такая, что $f_0(x,v,r) \geq 0$ и $f_0(x,v,r) = 0$ при $(x,v) \in \Sigma^-$, $r \in (0,1)$.

Прежде чем определить обобщенное решение задачи (5.1)-(5.8), введем такие обозначения: $G = \Omega \times \mathbf{R}^3$ ($x \in \Omega, v \in \mathbf{R}^3$);

$(\cdot, \cdot)_{2\Omega}$, $(\cdot, \cdot)_{2G}$ – скалярные произведения в $L_2(\Omega)$ и $L_2(G)$, соответственно; $Q = \Omega \times (0, 1)$, $D = G \times (0, 1)$, $\Sigma = \partial\Omega \times \mathbf{R}^3$, $\Sigma^\pm = \{(x, v) \in \Sigma: \pm(n(x) \cdot v) > 0\}$, $n(x)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке $x \in \partial\Omega$;

$\Sigma_{1T}^\pm = \Sigma^\pm \times [0, 1] \times [0, T]$; $H_0^1(\mathbf{R}^3)$ – замыкание функций $\psi(v) \in C^1(\mathbf{R}^3)$ с компактными носителями по норме $\|\psi\| = \|\nabla_v \psi\|_{L_2(\mathbf{R}^3)}$, $L_{2\sigma_r}(G \times [0, T], H_0^1(\mathbf{R}^3))$ – пространство функций со значениями в $W_2^1(\mathbf{R}^3)$, определенных на $G \times [0, T]$ и имеющих конечную L_2 -норму с весом $\sigma_r = \sigma r^{-5}$

$$\|f\|^2 = \int_0^T \int_Q \|f\|_1^2 \sigma_r dx dr dt.$$

Будем предполагать, что начальные данные (5.7), (5.8) удовлетворяют условиям:

$$u_0(x) \in J_0^1(\Omega), \quad 0 \leq f_0(x, v, r) \in L_\infty(D), \quad (5.9)$$

причем найдутся такие $\alpha \geq 2$, $a > 0$, $A_1, A_2 < \infty$, что

$$\sup_G f_0(x, v, r) \leq A_1 \exp\left\{-\frac{a}{r^\alpha}\right\} \quad (5.10)$$

и

$$\int_D (r^{-9} + r^3 |v|^2) f_0(x, v, r) dx dv dr \leq A_2. \quad (5.11)$$

Ясно, что если неравенство (5.10) выполнено при некотором α , то при $\alpha' < \alpha$ оно тоже выполняется. Будем обозначать $\alpha_0 = \sup \alpha$, где \sup берется по $\alpha \geq 2$, для которых это неравенство выполняется.

Обобщенное решение задачи (5.1)-(5.8) будем искать в следующих классах функций:

$$u(x, t) \in U_T(\Omega) = L_\infty(0, T; J(\Omega)) \cap L_2(0, T; J_0^1(\Omega));$$

$$f(x, v, r, t) \in F_T(D) = L_{2\sigma_r}(Q \times [0, T]; H_0^1(\mathbf{R}^3)) \cap L_\infty(D \times [0, T])$$

$$(\text{если } \sigma_r = 0, \text{ то } F_r(D) = L_\infty(D \times [0, T]))$$

Определение. Пара $(u, f) \in U_T(\Omega) \times F_T(D)$ называется обобщенным решением задачи (5.1)-(5.6), если выполняются следующие равенства:

$$\int_0^T \left\{ (u, \xi_t + (u \cdot \nabla_x) \xi)_{2\Omega} - v(\nabla_x u, \nabla_x \xi)_{2\Omega} - \beta \left(\int_0^1 \int_{\mathbf{R}^3} r(u-v) f d v d r, \xi \right)_{2\Omega} + (g, \xi)_{2\Omega} \right\} dt + (u_0, \xi(0))_{2\Omega} = 0, \quad (5.12)$$

$$\int_0^T \int_0^1 \left\{ (f, \eta_t + (v \cdot \nabla_x) \eta + (\Gamma_r \cdot \nabla_v \eta))_{2G} - \sigma_r (\nabla_v f \cdot \nabla_v \eta)_{2G} \right\} dr dt + \int_0^1 (f_0, \eta(0))_{2G} dr = 0. \quad (5.13)$$

Здесь $\xi = \xi(x, t)$ – произвольная гладкая по $x \in \Omega$ и $t \in [0, T]$ вектор-функция такая, что $\xi \in U_T(\Omega)$ и $\xi(x, T) = 0$, а $\eta = \eta(x, v, r, t)$ – произвольная гладкая по $x \in \Omega$, $v \in \mathbf{R}^3$, $t \in [0, T]$ и непрерывная по $r \in (0, 1]$ функция, достаточно быстро стремящаяся к 0 при $|v| \rightarrow \infty$ и при $r \rightarrow 0$ и удовлетворяющая условиям: $\eta(x, v, r, T) = 0$ и $\eta|_{\Sigma_{1T}^\pm} = 0$.

Если равенства (5.12), (5.13) выполняются при любом T , то решение (u, f) называется глобальным.

Справедлива следующая теорема

Теорема 5.1. Пусть выполняются условия (5.9)-(5.11), причем $\alpha_0 = \sup \alpha > 2$. Тогда существует глобальное обобщенное решение (u, f) задачи (5.1)-(5.8). Если же $\alpha_0 = 2$, то существует обобщенное решение $(u, f) \in U_T(\Omega) \times F_T(\Omega)$ при $T < \sup_a \{a(3\gamma)^{-1}\}$, где \sup берется по a , для которых неравенство (5.10) выполняется при $\alpha_0 = 2$.

Доказательство этой теоремы проводится модифицированным методом Галеркина по такой же схеме, как и теоремы 5.1 (глава 4).

Следующая теорема описывает некоторые свойства обобщенного решения задачи (5.1)-(5.8).

Теорема 5.2. *Обобщенное решение $\{u(x,t), f(x,v,r,t)\}$ обладает такими свойствами:*

- (i) *функция $f(x,v,r,t)$ непрерывна по t в слабой топологии $L_1(D)$;*
- (ii) *$f(x,v,r,t) \geq 0$;*
- (iii) *$\int_D f(x,v,r,t) dx dv dr \leq \int_D f_0(x,v,r,t) dx dv dr$;*
- (iv) *вектор-функция $u(x,t)$ непрерывна по t в слабой топологии $L_2(\Omega)$ и $u(x,t) \rightarrow u_0(x)$ в $L_2(\Omega)$ при $t \rightarrow 0$;*
- (v) *справедлива оценка:*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left(\|u\|_{2\Omega}^2 + \int_D r^3 |v|^2 f dx dv dr \right) + \int_0^T \int_D r |u-v|^2 f dx dv dr dt + \int_0^T \|\nabla u\|_{2\Omega}^2 dt < C,$$

Доказательство теорем 5.1 и 5.2 подробно изложено в работе [14].

Вопросы разрешимости начально-краевых задач для систем уравнений типа (5.1)-(5.4), описывающих динамику монодисперсной суспензии (без разброса по радиусам частиц) изучались в работах [71], [80].

Глава 7

Усредненная модель сложной жидкости с микроструктурой

Термин «сложная жидкость» (среда) в последнее время стал часто встречаться в литературе по механике жидкостей. Примерами таких сред, имеющих естественное происхождение, являются кровь, мед, паутина и т.д. Но сейчас все большее применение находят сложные вещества искусственного происхождения такие, как коллоидные суспензии, резины, полимеры, полимерные жидкости ([45], [74], [75], [82]). Последние привлекают к себе особый интерес из-за своих удивительных свойств, отличных от свойств ньютоновых жидкостей ([60], [67], [77]).

Как правило, сложные среды имеют определенную микроструктуру, характерной особенностью которой является наличие основной среды с плотно распределенными в ней мелкими включениями в виде атомов, молекул, или мелких частиц инородного вещества. Эти включения взаимодействуют между собой посредством сил различной природы (электростатических, упругих, Ван-дер-Ваальсовых сил и т.д.), образуя при этом гибкие упругие сетки, цепочки, кластеры и т.п. Исследование свойств таких смесей в рамках исходных микроскопических моделей практически невозможно ввиду их сильной микронеоднородности. Поэтому на первый план выходит задача построения макроскопических (усредненных) моделей, которые бы адекватно описывали свойства таких смесей.

С этой целью в данной и следующей главах проводится асимптотический анализ при $\varepsilon \rightarrow 0$ задачи, описывающей малые колебания вязкой жидкости с мелкими твердыми частицами, взаимодействующими между собой.

В данной главе рассматривается случай, когда размеры частиц имеют порядок ε^α ($1 \leq \alpha < 3$), где ε – среднее расстояние между ближайшими частицами. В этом случае движение смеси происходит в режиме «вмороженных частиц» и усредненное уравнение является стандартной однофазной моделью движения вязкоупругой среды.

В главе 8 рассматривается критический случай, когда размеры частиц имеют порядок ε^3 . Движение такой смеси происходит в режиме «фильтрующихся частиц», а усреднение приводит к двухфазной модели, являющейся обобщением модели Бринкмана ([62], [63]).

§1. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^3 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$. Эта область заполнена смесью вязкой несжимаемой жидкости с мелкими твердыми, взаимодействующими между собой частицами Q_ε^i ($i = 1, \dots, N_\varepsilon$), ограниченными гладкими поверхностями S_ε^i ($S_\varepsilon^i \subset C^2$). Эта смесь характеризуется малым параметром ε таким, что $N_\varepsilon = O\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)$, а диаметры частиц d_ε^i , расстояния между ближайшими частицами r_ε^i и силы взаимодействия между ними имеют порядок $O(\varepsilon)$. Положение каждой частицы Q_ε^i в жидкости задается ее центром масс $x^i \in \Omega$ и вектором углов Эйлера $\alpha^i = \{\alpha_1^i, \alpha_2^i, \alpha_3^i\} \subset \mathbf{R}^3$. В неподвижной жидкости значения $x^i = x_\varepsilon^i$, $\alpha^i = \alpha_\varepsilon^i$ соответствуют равновесному состоянию, на котором достигается минимум энергии взаимодействия частиц друг с другом

$$\hat{H}_\varepsilon(x_\varepsilon^i, \alpha_\varepsilon^i) = \min_{(x^i, \alpha^i)} \hat{H}_\varepsilon(x^i, \alpha^i) \quad (1.1)$$

Естественно считать, что энергия взаимодействия склады-

вадается из энергий взаимодействия пар точек $x \in Q_\varepsilon^i$, $y \in Q_\varepsilon^j$ ($i, j=1, \dots, N_\varepsilon$). Так как частицы Q_ε^i есть твердые тела, то перемещение δx точки $x \in Q_\varepsilon^i$ определяется равенством $\delta x = u^i + \theta^i \times (x - x^i)$, где $u^i = x^i - x_\varepsilon^i$ – смещение центра масс частицы Q_ε^i , а θ^i – вектор угла поворота частицы Q_ε^i вокруг оси, направленной по единичному вектору $\theta^i / |\theta^i|^{-1}$. При малых углах поворота вектор θ^i связан с приращением вектора углов Эйлера $\delta \alpha^i = \alpha^i - \alpha_\varepsilon^i$ формулой $\theta^i = R \delta \alpha^i$, где R – обратимая матрица, зависящая от α_ε^i [13].

Будем предполагать, что при малых отклонениях системы частиц $M_\varepsilon = \{Q_\varepsilon^i, i=1, 2, \dots, N_\varepsilon\}$ от положения равновесия сила $F_\varepsilon^{ij}(x', y')$, действующая между любыми двумя точками x' , y' (принадлежащим разным частицам) направлена вдоль прямой $L_{x'y'}$, проходящей через них и пропорциональна проекции на $L_{x'y'}$ вектора разности $v = \delta x - \delta y$ отклонений этих точек от их равновесных положений $x \in Q_\varepsilon^i$, $y \in Q_\varepsilon^j$, т.е. $x' = x + \delta x$, $y' = y + \delta y$ и

$$F_\varepsilon^{ij}(x', y') = a_\varepsilon^{ij}(x, y) \langle v, e(x', y') \rangle e(x', y') \quad (1.2)$$

Здесь $e(x', y') = \frac{x' - y'}{|x' - y'|}$ – единичный вектор на прямой $L_{x'y'}$, скобками $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначено скалярное произведение в \mathbf{R}^3 , а $a_\varepsilon^{ij}(x, y)$ – неотрицательная обобщенная функция: $a_\varepsilon^{ij}(x, y) \in D'(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ с носителем $\text{supp } a_\varepsilon^{ij}(x, y) \subset Q_\varepsilon^i \times Q_\varepsilon^j$, удовлетворяющая условию симметрии $a_\varepsilon^{ij}(x, y) = a_\varepsilon^{ji}(y, x)$ ($i \neq j$). Если взаимодействие определяется только поверхностными источниками, например, поверхностными электрическими зарядами, или упругими пружинами, прикрепленными к границам S_ε^i , S_ε^j

частиц, то носитель $\text{supp} a^{ij}(x, y)$ сосредоточен на $S_\varepsilon^i \times S_\varepsilon^j \subset Q_\varepsilon^i \times Q_\varepsilon^j$.

Будем предполагать, что функция $a_\varepsilon^{ij}(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$a_\varepsilon^{ij}(x, y) = 0 \text{ при } |x - y| > C_1 \varepsilon, \exists C_1 > 0, \quad (1.3)$$

$$\int \int_{Q_\varepsilon^i Q_\varepsilon^j} a_\varepsilon^{ij}(x, y) dx dy = O(\varepsilon). \quad (1.4)$$

Это значит, что в системе частиц отсутствует дальнее действие и взаимодействуют лишь частицы находящиеся в малых окрестностях друг друга (порядка $O(\varepsilon)$), причем интенсивность взаимодействия имеет такой же порядок малости, как эти окрестности.

Из приведенных выше рассуждений и предположений следует, что энергия взаимодействия $\hat{H}_\varepsilon(x^i, \alpha^i)$ (1.1) в малой окрестности положений равновесия $\{x_\varepsilon^i, \alpha_\varepsilon^i, i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon\}$ представима в виде

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(u^i, \theta^i) &= \hat{H}_\varepsilon(x_\varepsilon^i, \alpha_\varepsilon^i) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int \int_{Q_\varepsilon^i Q_\varepsilon^j} \left\langle C_\varepsilon^{ij}(x, y) \left[u^i + \theta^i \times (x - x_\varepsilon^i) - u^j - \theta^j \times (y - x_\varepsilon^j) \right], \right. \\ &\quad \left. \left[u^i + \theta^i \times (x - x_\varepsilon^i) - u^j - \theta^j \times (y - x_\varepsilon^j) \right] \right\rangle dx dy + \\ &+ \text{члены более высокого порядка малости по } u^i, \theta^i, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $C_\varepsilon^{ij}(x, y)$ – симметричная неотрицательная матрица определенная равенством

$$C_\varepsilon^{ij}(x, y) = a_\varepsilon^{ij}(x, y) e(x, y) \otimes e(x, y) \quad (1.6)$$

и введено обозначение $H_\varepsilon(u^i, \theta^i) = \hat{H}_\varepsilon(x_\varepsilon^i + u^i, \alpha_\varepsilon^i + R^{-1} \theta^i)$. Ясно, что $C_\varepsilon^{ij}(x, y) = C_\varepsilon^{ji}(y, x)$, $\text{supp} C_\varepsilon^{ij}(x, y) \in Q_\varepsilon^i \times Q_\varepsilon^j$ и $C_\varepsilon^{ij}(x, y) = 0$ при $|x - y| > C_1 \varepsilon$.

Для того чтобы в системе взаимодействующих частиц

$M_\varepsilon = \{Q_\varepsilon^i, i=1,2,\dots,N_\varepsilon\}$ с энергией взаимодействия (1.5) в неподвижной жидкости было одно локализованное состояние равновесия $\{x_\varepsilon^i, \alpha_\varepsilon^i, i=1,2,\dots,N_\varepsilon\}$, потребуем, чтобы некоторая часть частиц $M_\varepsilon^0 = \{Q_\varepsilon^i, i=1,2,\dots,N_\varepsilon^0\} \subset M_\varepsilon$ была жестко закреплена на неподвижной границе $\partial\Omega$ и, кроме того, в системе M_ε не было подсистемы $M'_\varepsilon \subset M_\varepsilon$ допускающей движение как целое (без изменения энергии $\hat{H}_\varepsilon(x', \alpha')$). Это можно обеспечить подходящим подбором матриц-функции $\{a_\varepsilon^{ij}(x, y)\}_{i,j=1}^{N_\varepsilon}$ в системе взаимодействующих частиц $M_\varepsilon = \{Q_\varepsilon^i, i=1,2,\dots,N_\varepsilon\}$ (двумерную иллюстрацию см. на рис. 3).

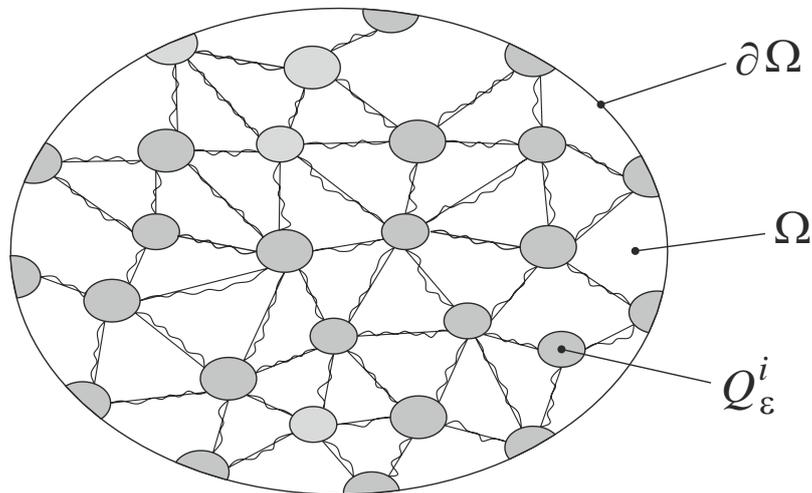


Рис.3

Выпишем теперь систему уравнений, описывающих малые колебания вязкой несжимаемой жидкости с твердыми взаимодействующими частицами. Будем пользоваться такими обозначениями:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon^i \quad - \text{область, дополнительная к множеству частиц}$$

$\{Q_\varepsilon^i\}$, занимающим положения в Ω , соответствующие равновесному состоянию системы частиц $M_\varepsilon = \{Q_\varepsilon^i, i=1,2,\dots,N_\varepsilon\}$

в неподвижной жидкости (эта область заполнена жидкостью);

$$S_\varepsilon^i = \partial Q_\varepsilon^i \text{ – поверхность частицы } Q_\varepsilon^i;$$

$$m_\varepsilon^i = \rho_\text{ч} |Q_\varepsilon^i| \text{ – масса частицы } Q_\varepsilon^i;$$

$$\mathbf{I}_\varepsilon^i = \rho_\text{ч} \int_{Q_\varepsilon^i} A^\text{T}(x)A(x)dx \text{ – тензор инерции частицы } Q_\varepsilon^i, \text{ где че-}$$

рез $A(x)$ обозначается кососимметричная матрица, определенная равенством $A(x)\theta = \theta \times x$.

Малые нестационарные колебания смеси «жидкость – взаимодействующие твердые частицы» при отсутствии внешних полей описывается следующей линеаризованной системой уравнений:

$$\rho_\text{ж} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \mu \Delta v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \rho_\text{ж} g, \quad \text{div } v_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon, \quad (1.7)$$

$$v_\varepsilon = \dot{u}_\varepsilon^i + \theta_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i) \quad \text{на частицах } Q_\varepsilon^i, \quad (1.8)$$

$$m_\varepsilon^i \ddot{u}_\varepsilon^i = - \int_{S_\varepsilon^i} \sigma[v_\varepsilon] dS - \nabla_{u^i} H_\varepsilon, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{I}_\varepsilon^i \ddot{\theta}_\varepsilon^i = - \int (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[v_\varepsilon] dS - \nabla_{\theta^i} H_\varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon. \quad (1.10)$$

Здесь $v_\varepsilon = v_\varepsilon(x, t)$, $p_\varepsilon = p_\varepsilon(x, t)$ – скорость и давление в жидкости; $u_\varepsilon^i = u_\varepsilon^i(t)$ – вектор смещения центра масс, а $\theta_\varepsilon^i = \theta_\varepsilon^i(t)$ – вектор поворота i -й частицы; точками сверху обозначены производные по времени: $\dot{u}_\varepsilon^i = \frac{du_\varepsilon^i}{dt}$, $\ddot{u}_\varepsilon^i = \frac{d^2 u_\varepsilon^i}{dt^2}$; $\sigma[v_\varepsilon]$ – вектор напряжений в жидкости на поверхностях частиц (см. главу 1), $H_\varepsilon = H_\varepsilon(u^i, \theta^i)$ – квадратичная часть энергии взаимодействия между частицами (1.5).

Равенство (1.8) означает прилипание вязкой жидкости к поверхностям S_ε^i твердых частиц, естественным образом продолжая скорость жидкости на сами частицы Q_ε^i .

Равенства (1.9) – есть закон сохранения импульсов частиц, а равенства (1.10) – линеаризация закона сохранения момен-

тов импульсов частиц. В правых частях этих равенств первые слагаемые определяются взаимодействием окружающей жидкости на частицы, а вторые – взаимодействием между самими частицами.

Будем предполагать, что внешняя граница $\partial\Omega$ неподвижна и касающиеся ее частицы Q_ε^i закреплены, т.е. выполняются такие граничные условия:

$$v_\varepsilon(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad u_\varepsilon^i = \theta_\varepsilon^i = 0, \quad \text{если } Q_\varepsilon^i \cap \partial\Omega \neq \emptyset. \quad (1.11)$$

Дополним еще систему (1.7) – (1.10) такими начальными условиями

$$\begin{aligned} v_\varepsilon(x, 0) &= v_{\varepsilon 0}(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon; \\ u_\varepsilon^i &= 0, \quad \dot{u}_\varepsilon^i(0) = v_{\varepsilon 0}^i; \quad \theta_\varepsilon^i(0) = 0, \quad \dot{\theta}_\varepsilon^i(0) = \omega_{\varepsilon 0}^i \quad \text{на } Q_\varepsilon^i \subset \Omega. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Будем предполагать, что начальная вектор-функция скорости $v_{\varepsilon 0}(x) \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$ продолжается на частицы Q_ε^i равенством $v_{\varepsilon 0}(x) = v_{\varepsilon 0}^i + \omega_{\varepsilon 0}^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ так, что продолженная вектор-функция $\tilde{v}_{\varepsilon 0}(x) \in W_2^1(\Omega)$.

Существует единственное решение $\{v_\varepsilon(x, t), u^i(t), \theta^i(t), i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon\}$ задачи (1.7) – (1.12). Основная цель данной главы состоит в изучении асимптотического поведения этого решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и построении усредненной модели движения смеси «жидкость – взаимодействующие твердые частицы».

§2. Мезоскопические характеристики микроструктуры и формулировка основного результата

Так же как в главе 2 введем локальные количественные (мезоскопические) характеристики микроструктуры смеси.

Пусть $K_h^\xi = K(\xi, h)$ – куб с центром в точке $\xi \in \Omega$ и сторонами длины h ($0 < \varepsilon \ll h \ll 1$) параллельными координатным осям («мезокуб»), а $J_\varepsilon(K_h^\xi)$ – класс соленоидальных вектор-

функций из пространства $W_2^1(K_h^\xi)$ равных $a^i + b^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на $Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi$. Рассмотрим в K_h^ξ следующую задачу минимизации в классе $J_\varepsilon(K_h^\xi) \equiv J_{\varepsilon h}^\xi$ для функционала

$$\begin{aligned} \Gamma[\varepsilon, h, \xi, \lambda, R; v_\varepsilon] = & E_{K_h^\xi}[v_\varepsilon, v_\varepsilon] + \frac{1}{\lambda} I_{K_h^\xi}^\varepsilon[v_\varepsilon, v_\varepsilon] + \\ & + h^{-2-\gamma} \int_{K_h^\xi} \left| v_\varepsilon - \sum_{k,l=1}^3 \psi^{kl}(x-\xi) R_{kl} \right|^2 dx \rightarrow \inf_{v_\varepsilon \in J_{\varepsilon h}^\xi}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $R = \{R_{kl}\}_{k,l=1}^3$ – симметричный тензор второго ранга в \mathbf{R}^3 , $\lambda > 0$, $\gamma \in (0, 1)$ – фиксированное число (параметр штрафа), вектор-функция $\psi^{jk}(x)$ определена равенством (2.1.2).

Здесь и далее используются обозначения

$$\begin{aligned} E_G[u, v] = & 2\mu \int_G \sum_{k,l} e_{kl}[u] e_{kl}[v] dx, \\ I_G^\varepsilon[u, v] = & \sum_{i \neq j} \int_G \int_{Q_\varepsilon^i Q_\varepsilon^j} \langle C_\varepsilon^{ij}(x, y)(u(x) - u(y), v(x) - v(y)) \rangle dx dy, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где G – подобласть в Ω , а сумма $\sum_{i,j}^G$ распространяется на пары взаимодействующих частиц $Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j$ ($i \neq j$), лежащих в G .

Так же как в главе 2 можно показать, что при любом $R = \{R_{kl}\}$ достигается минимум в задаче (2.1) и справедливо представление

$$\min_{v_\varepsilon \in J_{\varepsilon h}^\xi} \Gamma(\varepsilon, h, \xi, \lambda, R; v_\varepsilon) = \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h) R_{np} R_{qr}, \quad (2.3)$$

где $a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h)$ компоненты тензора четвертого ранга в \mathbf{R}^3 , определенные равенством

$$\begin{aligned} a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h) = & E_{K_h^\xi}[v_\varepsilon^{np}, v_\varepsilon^{qr}] + \frac{1}{\lambda} I_{K_h^\xi}^\varepsilon[v_\varepsilon^{np}, v_\varepsilon^{qr}] + \\ & + h^{-2-\gamma} \int_{K_h^\xi} \langle v_\varepsilon^{np}(x) - \psi^{np}(x-\xi), v_\varepsilon^{qr}(x) - \psi^{qr}(x-\xi) \rangle dx. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь $v_\varepsilon^{np}(x)$ – минимизант в задаче (2.1) при $R = R^{np} =$

$$= \frac{1}{2}(e^n \otimes e^p + e^p \otimes e^n), \quad e^n - \text{орт оси } x_n \quad (n=1, 2, 3).$$

Из (2.1), (2.4) следует, что тензор $\{a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h)\}$ обладает симметрией относительно перестановок пар индексов и перестановок индексов в парах: $a_{npqr} = a_{qnrp} = a_{pnqr}$. Этот тензор характеризует в малой окрестности точки $\xi \in \Omega$ (в «мезокубе» $K(z, h)$) среднюю вязкость смеси, ее упругие и релаксационные свойства.

Будем предполагать, что существуют пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{npqr}(x, \lambda; \varepsilon, h)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\overline{a_{npqr}}(x, \lambda; \varepsilon, h)}{h^3} = a_{npqr}(x, \lambda), \quad (2.5)$$

где $a_{npqr}(x, \lambda)$ непрерывные функции от $x \in \Omega$ и $\lambda > 0$ такие, что тензор $\{a_{npqr}(x, \lambda)\}_{n,p,q,r=1}^3$ положительно определен.

Справедлива следующая

Лемма 2.1. *Функции $a_{npqr}(x, \lambda)$ аналитически продолжаются по λ в комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $\lambda \leq 0$. Продолженные функции представимы в виде*

$$a_{npqr}(x, \lambda) = a_{npqr}(x) + \frac{1}{\lambda} b_{npqr}(x) + C_{npqr}(x, \lambda), \quad (2.6)$$

где $a_{npqr}(x)$, $b_{npqr}(x)$ непрерывны по $x \in \Omega$, а $C_{npqr}(x, \lambda)$ непрерывные по $x \in \Omega$, аналитичны по $\lambda \in C \setminus (-\infty, 0]$ и в угле $\Lambda_\delta = \{\lambda \in \tilde{N} : |\arg \lambda - \pi| \geq \delta\}$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ имеет оценку

$$|C_{npqr}(x, \lambda)| \leq \frac{C(\delta)}{|\lambda|^{3/2}}. \quad (2.7)$$

Доказательство леммы проводится в §4.

Рассмотрим обратное преобразование Лапласа по λ :

$$a_{npqr}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} a_{npqr}(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad \sigma > 0.$$

Из леммы 1.1 следует, что оно представимо в виде

$$a_{npqr}(x, t) = a_{npqr}(x) \delta(t) + b_{npqr}(x) \chi(t) + C_{npqr}(x, t), \quad (2.8)$$

где $\delta(t)$ и $\chi(t)$ – дельта-функция Дирихле и функция Хевисайда соответственно, а функция $C_{npqr}(x,t)$ принадлежит классу $C(\Omega \times [-T, T])$ при $\forall T > 0$ и равна нулю при $t \leq 0$.

Введем еще одну характеристику смеси, описывающую распределение ее плотности. Обозначим через $\chi_\varepsilon(x)$ – характеристическую функцию области Ω_ε , занятой жидкостью, а через $\chi_\varepsilon^i(x)$ характеристическую функцию частиц Q_ε^i . Положим

$$\rho_\varepsilon(x) = \rho_{\text{ж}} \chi_\varepsilon(x) + \rho_{\text{ч}} \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \chi_\varepsilon^i(x), \quad (2.9)$$

где $\rho_{\text{ж}}$, $\rho_{\text{ч}}$ – удельные плотности жидкости и частиц.

Будем предполагать, что в любой точке $x \in \Omega$ существуют пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \int_{K_h^x} \rho_\varepsilon(\xi) d\xi = \rho(x), \quad (2.10)$$

где $\rho(x)$ – некоторая положительная непрерывная функция (предельная плотность смеси).

Замечание. Из условия (2.10) следует, что $\rho_\varepsilon(x)$ сходится *-слабо в $L_\infty(\Omega)$ к $\rho(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Сформулируем теперь основной результат. Для этого с помощью решения $\{v_\varepsilon(x,t), u_\varepsilon^i(t), \theta_\varepsilon^i(t), i=1, 2, \dots, N_\varepsilon\}$ задачи (1.7) – (1.12) определим в области $\Omega \times (0, t)$ вектор-функцию

$$\tilde{v}_\varepsilon(x,t) = v_\varepsilon(x,t) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left[\dot{u}_\varepsilon^i(t) + \dot{\theta}_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i) \right] \chi_\varepsilon^i(x). \quad (2.11)$$

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия (i) – (ii) главы и условия (2.5), (2.10). Пусть также начальные данные (1.12) сходятся при $\varepsilon \rightarrow 0$ к некоторой функции $v_0(x) \in L_2(\Omega)$ в следующем смысле

$$\tilde{v}_\varepsilon(x,0) \rightarrow v_0(x) \quad \text{в } L_2(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.12)$$

где $\tilde{v}_\varepsilon(x,0) = \tilde{v}_\varepsilon(x,t)|_{t=0}$, а вектор-функция $\tilde{v}_\varepsilon(x,t)$ определена ра-

венством (2.11).

Тогда $\tilde{v}_\varepsilon(x, t)$ сходится в $L_2(\Omega \times [0, T])$, $\forall T > 0$ к вектор-функции $v(x, t)$, которая является решением следующей начально-краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \{a_{npqr}(x) e_{qr}[v]\} e^n - \\ - \int_0^t \sum_{n,p,q,r=1}^3 \{A_{npqr}(x, t-\tau) e_{qr}[v(\cdot, \tau)]\} e^n d\tau - \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \end{aligned} \right\} x \in \Omega, t > 0; \quad (2.13)$$

$$v(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0; \quad (2.14)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.15)$$

где введено обозначение $A_{npqr}(x, t) = b_{npqr}(x)\chi(t) + C_{npqr}(x, t)$, а функции $\rho(x)$, $a_{npqr}(x)$, $b_{npqr}(x)$ и $C_{npqr}(x, t)$ определены равенствами (2.5) – (2.8).

Введем вектор-функцию смещения смеси

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, \tau) d\tau.$$

Тогда систему уравнений (2.13) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ a_{npqr}(x) e_{qr} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau} \right] \right\} e^n - \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ b_{npqr}(x) e_{qr} [u] \right\} e^n - \\ - \int_{-\infty}^t \sum_{n,p,q,r=1}^3 C_{npqr}(x, \tau) e_{qr} \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}(x, t-\tau) \right] e^n d\tau - \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{aligned} \right\} (2.16)$$

где учтено, что $C_{npqr}(x, t) = 0$ при $t \leq 0$.

Из этой системы видно, что при малых временах t , близких к начальному моменту, когда смещение $u(x, t)$ и интегральный член в (2.16) еще малы, смесь ведет себя как вязкая несжимаемая жидкость (анизотропная) с тензором вязкости $\{a_{npqr}(x)\}$. С другой стороны, если движения медленные, т.е.

$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \sim 0$, смесь ведет себя как упругая среда (несжимаемая и анизотропная) с тензором упругости $\{b_{npqr}(x)\}$ и с памятью. Такое поведение смеси характерно для полимерных веществ.

Доказательство теоремы 2.1 проводится в §§ 3 – 6. Схема доказательства следующая. С помощью преобразования Лапласа по времени задача (1.7) – (1.12) сводится к стационарной краевой задаче, зависящей от спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re} \lambda > 0$). При вещественных $\lambda > 0$ эта задача допускает вариационную формулировку (§ 3). Главная часть доказательства состоит в изучении асимптотического поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $v_\varepsilon(x, \lambda)$ вариационной задачи. Это делается в § 4 в основном так же, как и в главе 2. В результате мы получаем усредненную вариационную задачу, решение $v(x, \lambda)$ которой дает главный член асимптотики $v_\varepsilon(x, \lambda)$. Переходя к уравнению Эйлера для $v(x, \lambda)$ получаем усредненное уравнение при $\lambda > 0$. Затем в §§ 5, 6 изучаются аналитические свойства решения исходной краевой задачи по спектральному параметру λ , что позволяет аналитически продолжить $v(x, \lambda)$ по λ в комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $(-\infty, 0]$ и вывести усредненное уравнение при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. С помощью этого уравнения получаем необходимые оценки для $v(x, \lambda)$ и делая обратное преобразование Лапласа, приходим к нестационарной усредненной задаче (2.13) – (2.15) теоремы 2.1.

§ 3. Вариационная постановка задачи и ее усреднение

Перейдем в задаче (1.7) – (1.12) к преобразованию Лапласа по времени, сохранив для простоты прежнее обозначение

$$v_\varepsilon(x, t) \rightarrow v_\varepsilon(x, \lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} v_\varepsilon(x, t) dt \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0),$$

$$\rho_\varepsilon(x, t) \rightarrow \rho_\varepsilon(x, \lambda), \quad u_\varepsilon^i(t) \rightarrow u_\varepsilon^i(\lambda), \quad \theta_\varepsilon^i(t) \rightarrow \theta_\varepsilon^i(\lambda).$$

Тогда, учитывая (1.7), (1.12), для преобразований Лапласа получаем краевую задачу

$$-\mu\Delta v_\varepsilon + \lambda\rho_{ж}v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = \rho_{ж}v_{\varepsilon 0}, \quad \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \quad \text{в } \Omega_\varepsilon; \quad (3.1)$$

$$v_\varepsilon = \lambda[u_\varepsilon^i + \theta_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)] \quad \text{на } Q_\varepsilon^i, \quad i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon; \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 m_\varepsilon^i u_\varepsilon^i &= - \int_{S_\varepsilon^i} \sigma[v_\varepsilon] dS - \\ &- \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq i} \int_{Q_\varepsilon^i} \int_{Q_\varepsilon^j} C_\varepsilon^{ij}(x, y) [v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)] dx dy + m_\varepsilon^i v_{\varepsilon 0}^i; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \mathbf{I}_\varepsilon^i \theta_\varepsilon^i &= - \int_{S_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[v_\varepsilon] dS - \\ &- \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq i} \int_{Q_\varepsilon^i} \int_{Q_\varepsilon^j} (x - x_\varepsilon^i) \times C_\varepsilon^{ij}(x, y) [(v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y))] dx dy + \mathbf{I}_\varepsilon^i \omega_{\varepsilon 0}^i; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$v_\varepsilon(x, 0) = 0, \quad x \in \partial\Omega; \quad u_\varepsilon^i = \theta_\varepsilon^i = 0, \quad \text{если } Q_\varepsilon^i \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \quad i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon. \quad (3.5)$$

Будем продолжать векторы скорости жидкости $v_\varepsilon(x, \lambda)$ на частицы Q_ε^i равенством (3. 2), сохраняя за продолженной вектор-функцией то же обозначение $v_\varepsilon = v_\varepsilon(x, \lambda)$. Легко видеть, что $v_\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ и $\operatorname{div} v_\varepsilon = 0$ в Ω .

Обозначим через $J_\varepsilon^0(\Omega)$ класс соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(\Omega)$ равных $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на частицах Q_ε^i , где $a_\varepsilon^i, b_\varepsilon^i$ – постоянные векторы ($a_\varepsilon^i = b_\varepsilon^i = 0$, если $Q_\varepsilon^i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$) и равных 0 на $\partial\Omega$.

Рассмотрим задачу минимизации в классе $J_\varepsilon^0(\Omega)$ следующего функционала

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] &= E_\Omega[v_\varepsilon, v_\varepsilon] + \frac{1}{\lambda} I_\Omega^\varepsilon[v_\varepsilon, v_\varepsilon] + \\ &+ \int_\Omega \left\{ \lambda \langle \rho_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle - 2 \langle \rho_\varepsilon \tilde{v}_{\varepsilon 0}, v_\varepsilon \rangle \right\} dx, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\lambda > 0$, $E_\Omega[v_\varepsilon, v_\varepsilon]$ и $I_\Omega^\varepsilon[v_\varepsilon, v_\varepsilon]$ определены равенствами (2.2), а

ρ_ε и $\tilde{v}_{\varepsilon 0} = \tilde{v}_\varepsilon(x, 0)$ – равенствами (2.10) и (2.11).

Стандартными вариационными методами теории краевых задач [36] можно показать, что существует единственная вектор-функция $v_\varepsilon = v_\varepsilon(x, \lambda)$, минимизирующая функционал (3.6) в классе $J_\varepsilon^0(\Omega)$ и эта вектор-функция дает решение $\{v_\varepsilon = v_\varepsilon(x, \lambda), x \in \Omega_\varepsilon; u_\varepsilon^i + \theta_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i) = \frac{1}{\lambda} v_\varepsilon(x, \lambda), x \in \bigcup_i Q_\varepsilon^i\}$ краевой задачи (3.1)–(3.5).

Наша основная цель состоит в исследовании асимптотического поведения $v_\varepsilon(x, \lambda)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Обозначим через $J^0(\Omega)$ класс солендоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и рассмотрим в этом классе следующий «усредненный» функционал

$$\Phi_0[v] = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x, \lambda) e_{np}[v] e_{qr}[v] + \lambda \langle \rho v, v \rangle - 2 \langle \rho v_0, v \rangle \right\} dx, \quad (3.7)$$

где функции $a_{npqr}(x, \lambda)$ и $\rho(x)$ определены условиями (2.5) и (2.10), а вектор-функция условием (2.12).

Теорема 3.1. Пусть выполняются те же условия, что и в теореме 2.1. (т.е. (i), (ii), (2.5), (2.10) и (2.12)).

Тогда решение $v_\varepsilon(x, \lambda)$ задачи минимизации

$$\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] = \inf_{v'_\varepsilon \in J_\varepsilon^0(\Omega)} \Phi_\varepsilon[v'_\varepsilon] \quad (3.8)$$

для функционала (3.6) сходится слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ (и сильно в $L_2(\Omega)$) к решению $v(x, \lambda)$ задачи минимизации

$$\Phi_0[v] = \inf_{v' \in J^0(\Omega)} \Phi_0[v'] \quad (3.9)$$

для функционала (3.7).

Доказательство этой теоремы проводится по такой же схеме, как и теоремы 2.1.1.

1. Сначала устанавливаем равномерную по ε ограниченность в $W_2^1(\Omega)$ решений $v_\varepsilon(x, \lambda)$ задачи (3.8). Так как согласно

(3.8) и (3.6) $\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[0] = 0$, то, учитывая (2.2) и неотрицательность матриц-функций $C_\varepsilon^{ij}(x, y)$, получаем

$$\int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_\varepsilon] + \lambda \langle \rho v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle \right\} dx \leq 2 \|\rho_\varepsilon \tilde{v}_{\varepsilon 0}\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}.$$

Поскольку $\mu > 0$, $\lambda > 0$ и $\rho_\varepsilon(x) > \min\{\rho_{\text{ж}}, \rho_{\text{ч}}\} > 0$, откуда в силу неравенства Корна и (2.10), (2.17), следует

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_1 \|\rho_\varepsilon \tilde{v}_{\varepsilon 0}\|_{L_2(\Omega)} < C.$$

Таким образом, множество решений $\{v_\varepsilon \in J^0(\Omega), \varepsilon > 0\}$ ограничено по норме $W_2^1(\Omega)$ и, значит, слабо компактно в $W_2^1(\Omega)$.

Выделим подпоследовательность $\{v_{\varepsilon_k}, \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ сходящуюся слабо в $W_2^1(\Omega)$ к вектор-функции $v \in J^0(\Omega)$ и покажем, что $v(x)$ является решением задачи (3.9). Это делается в п.2 и п.3 по такой же схеме, как в главе 2. Сначала выбираем произвольную соленоидальную вектор-функцию $w(x) \in C^2(\bar{\Omega})$, равную нулю в малой окрестности границы $\partial\Omega$ и по ней строим специальную вектор-функцию $w_{\varepsilon h}(x) \in J_\varepsilon^0(\Omega)$, где h мезопараметр ($0 < \varepsilon \ll h \ll 1$). Так как $v_\varepsilon(x)$ минимизирует функционал $\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon]$ в классе $J_\varepsilon^0(\Omega)$, то $\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[w_{\varepsilon h}]$.

Используя явную конструкцию $w_{\varepsilon h}(x)$, мы показываем, что

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[w_{\varepsilon h}] \leq \Phi_0[w]$$

и, таким образом, приходим к неравенству

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \leq \Phi_0[w], \quad (3.10)$$

где $\Phi_0[w]$ функционал задачи (3.7).

Далее показываем, что для слабого предела $v(x) \in J^0(\Omega)$ решений $v_\varepsilon(x)$ задачи (3.8) (по подпоследовательности $\{\varepsilon_k \rightarrow 0\}$) справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \geq \Phi_0[v]. \quad (3.11)$$

Из (3.10), (3.11) следует, что

$$\Phi_0[v] \leq \Phi_0[w], \quad \forall w \in J^0(\Omega)$$

и, значит, v является решением задачи (3.9).

Так как в силу положительной определенности тензора $\{a_{npqr}(x, \lambda)\}$ при $\lambda > 0$, эта задача имеет единственное решение, то вспоминая слабую компактность множества решений $\{v_\varepsilon(x), \varepsilon > 0\}$, заключаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ $v_\varepsilon(x)$ сходится к $v(x)$ слабо в $W_2^1(\Omega)$ (и, значит, сильно в $L_2(\Omega)$).

2. Перейдем к выводу неравенства (3.10). Пусть $w(x) \in J^0(\Omega) \cap C_0^2(\bar{\Omega})$. Так же как в главе 2, покроем область Ω кубами $K_h^s = K(x^s, h)$ и построим пробную вектор-функцию $w_{\varepsilon h}(x)$ по формуле аналогичной (2.1.33)

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon h} &= \sum_s' \left\{ w(x^s) + \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w](x^s) v_{\varepsilon h}^{np,s}(x) + g^{np,s}(x) \right\} \varphi_{\varepsilon h}^s(x) + \zeta_{\varepsilon h}(x) = \\ &= Z_{\varepsilon h}(x) + \zeta_{\varepsilon h}(x). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь $v_{\varepsilon h}^{np,s}(x)$ – вектор-функции класса $J_\varepsilon(K_h^\varepsilon)$, доставляющие минимум функционалу (2.1) в кубе K_h^ε при

$$R = R^{np} = \frac{1}{2}(e^p \otimes e^n + e^n \otimes e^p); \quad \text{все обозначения соответствуют}$$

(2.1.33). В частности вектор-функция $\zeta_{\varepsilon h}(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ введена для того, чтобы обеспечить соленидальность $w_{\varepsilon h}(x)$ и она строится в соответствии с леммой 2.1.3.

Нетрудно видеть, что определенная формулой (3.12) вектор-функция $w_{\varepsilon h}(x)$ принадлежит классу $J^0(\Omega)$. Оценим при малых ε и h ($0 < \varepsilon \ll h \ll 1$) значение функционала Φ_ε (3.6) на $w_{\varepsilon h}(x)$. Для этого нам понадобится следующая лемма, доказательство которой проводится точно также, как и доказатель-

ство леммы 2.1.1.

Лемма 3.1. Пусть $v_{\varepsilon h}^{np,s}(x)$ – решение задачи (2.1) в кубе $K_h^s = K(x^s, h)$ при $R = \frac{1}{2}(e^p \otimes e^n + e^n \otimes e^p)$ и пусть выполняются условия (2.5). Тогда при достаточно малых h и $\varepsilon \ll h$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} E_{K_h^s} [v_{\varepsilon h}^{np,s}, v_{\varepsilon h}^{np,s}] &= O(h^3), \\ E_{K_h^s \setminus K_{h'}^s} [v_{\varepsilon h}^{np,s}, v_{\varepsilon h}^{np,s}] &= o(h^3), \\ \int_{K_h^s} |v_{\varepsilon h}^{np,s} - \psi^{np}(x - x^s)|^2 dx &= O(h^{5+\gamma}), \\ \int_{K_h^s \setminus K_{h'}^s} |v_{\varepsilon h}^{np,s} - \psi^{np}(x - x^s)|^2 dx &= o(h^{5+\gamma}), \\ I_{K_h^s}^\varepsilon [v_{\varepsilon h}^{np,s}, v_{\varepsilon h}^{np,s}] &= O(h^3), \\ I_{K_h^s \setminus K_{h'}^s}^\varepsilon [v_{\varepsilon h}^{np,s}, v_{\varepsilon h}^{np,s}] &= o(h^3), \end{aligned}$$

где $K_{h'}^s = K(x^s, h')$, $h' = h - 2h^{1+\gamma/2}$, $\varepsilon \leq \hat{\varepsilon}(h) \ll h$, а остальные обозначения соответствуют (2.2).

Следующая лемма показывает, что при $h \rightarrow 0$ и $\varepsilon \leq \hat{\varepsilon}(h) \ll h$ вклад вектор-функции $\zeta_{\varepsilon h}$ в функционале (3.6) мал (при $h \rightarrow 0$ исчезает).

Лемма 3.2. Справедливы предельные равенства

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\zeta_{\varepsilon h}\|_{W_2^1}^2 &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\Omega^\varepsilon [\zeta_{\varepsilon h}, \zeta_{\varepsilon h}] &= 0. \end{aligned}$$

Первое равенство в этой лемме доказывается так же, как и лемма 2.1.4. Для доказательства второго заметим, что согласно конструкции вектор-функции $\zeta_{\varepsilon h}(x)$ (см. лемму 2.1.3) она принадлежит $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и на частицах Q_ε^i равна постоянному вектору $\zeta_{\varepsilon h}^i$ (среднее значение $\zeta_{\varepsilon h}$ на Q_ε^i). Учитывая это, а

также условия (i), (ii) (глава 2) легко получить неравенство

$$\varepsilon \sum'_{i \neq j} |\zeta_{\varepsilon h}^i - \zeta_{\varepsilon h}^j|^2 \leq C_1 \|\nabla \zeta_{\varepsilon h}\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

где сумма $\sum'_{i \neq j}$ распространяется лишь на взаимодействующие частицы, т.е. находящиеся на расстоянии не превышающем $C\varepsilon$; постоянная C_1 не зависит от ε и h .

Отсюда, в силу условий (1.3), (1.4) и первого равенства леммы 3.2, следует и второе равенство этой леммы. Таким образом лемма 3.2. доказана.

Чтобы вычислить значение функционала (3.6) на вектор-функциях $w_{\varepsilon h}(x)$, представим ее в виде (см. 2.1.37)

$$w_{\varepsilon h}(x) = w(x) + \sum_s \left\{ \sum_{n,p=1}^3 e_{np}^s[w](v_{\varepsilon h}^{np,s}(x) - \psi^{np,s}(x) - \sigma^s(x)) \right\} \varphi_{\varepsilon h}^s(x),$$

где обозначено $e_{np}^s[w] = e_{np}[w](x^s)$, $\psi^{np,s}(x) = \psi^{np}(x - x^s)$. Пользуясь этим представлением и, учитывая леммы 3.1, 3.2, свойства разбиения единицы $\{\varphi_{\varepsilon h}^s(x)\}$ и оценки (2.1.36), получаем

$$\begin{aligned} & E_{\Omega}[w_{\varepsilon h}, w_{\varepsilon h}] + \frac{1}{\lambda} I_{\Omega}^s[w_{\varepsilon h}, w_{\varepsilon h}] \leq \\ & \leq \sum_s \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}^s[w] e_{pq}^s[w] \left\{ E_{K_h^s}[v_{\varepsilon h}^{np,s}, v_{\varepsilon h}^{qr,s}] + \frac{1}{\lambda} I_{K_h^s}^{\varepsilon}[v_{\varepsilon h}^{np,s}, v_{\varepsilon h}^{qr,s}] \right\} + \delta(\varepsilon, h), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon, h) = 0. \quad (3.14)$$

Добавим в правую часть (3.13) неотрицательные слагаемые, соответствующие штрафным членам в определении $a_{npqr}(x^s, \lambda; \varepsilon, h)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}^s[w] e_{qr}^s[w] \left\{ \frac{1}{h^{2+\gamma}} \int_{K_h^s} \langle v_{\varepsilon h}^{np,s} - \psi^{np,s}, v_{\varepsilon h}^{qr,s} - \psi^{qr,s} \rangle dx \right\} = \\ & = \frac{1}{h^{2+\gamma}} \int_{K_h^s} \left| \sum_{n,p=1}^3 e_{np}^s[w] (v_{\varepsilon h}^{np,s} - \psi^{np,s}) \right|^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда, учитывая (2.9), получаем неравенство

$$\begin{aligned} & E_{\Omega}[w_{\varepsilon h}, w_{\varepsilon h}] + \frac{1}{\lambda} I_{\Omega}^{\varepsilon}[w_{\varepsilon h}, w_{\varepsilon h}] \leq \\ & \leq \sum_s \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x^s, \lambda; \varepsilon, h) e_{np}^s[w] e_{qr}^s[w] + \delta(\varepsilon, h), \end{aligned}$$

из которого, согласно (3.6), следует

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon}[w_{\varepsilon h}] & \leq \sum_s h^3 \sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{a_{npqr}(x^s, \lambda; \varepsilon, h)}{h^3} e_{np}[w](x^s) e_{qr}[w](x^s) + \\ & + \lambda \int_{\Omega} \langle \rho_{\varepsilon} w_{\varepsilon h}, w_{\varepsilon h} \rangle dx - 2 \int_{\Omega} \langle \rho_{\varepsilon} \tilde{v}_{\varepsilon 0}, w_{\varepsilon h} \rangle dx + \delta(s, h). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Теперь воспользуемся следующим равенством

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|w_{\varepsilon h} - w\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

которое доказывается так же, как лемма 2.1.5.

Тогда, пользуясь условиями (2.5), (2.10), (2.12) и учитывая (3.14), (3.15), получаем при $w \in C^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_{\varepsilon}[w_{\varepsilon h}] \leq \\ & \leq \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x, \lambda) e_{np}[w] e_{qr}[w] + \lambda \langle \rho w, w \rangle - 2 \langle \rho v, w \rangle \right\} dx = \Phi_0[w]. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (3.10) установлено для $\forall w(x) \in C_0^2(\Omega)$, а в силу непрерывности $\Phi_0[w]$ в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ оно верно и для $\forall w \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

3. Докажем теперь неравенство (3.11). Предположим сначала для простоты, что предельная вектор-функция $v(x)$ достаточно гладкая: $v(x) \in C^1(\bar{\Omega}) \cap J^0(\Omega)$. Разрежем область Ω на кубы $K_h^s = K(x^s, h)$ с центрами в точках x^s , образующими кубическую решетку с периодом h и ребрами длины h , параллельными координатным осям. В каждом таком кубе $K_h^s \subset \Omega$, так же как в главе 2, введем вектор-функцию (см (2.1.49))

$$u_{\varepsilon}^s(x) = v_{\varepsilon}(x) - v(x^s) + \theta^s \times (x - x^s), \quad (3.16)$$

где $v_\varepsilon(x)$ – решение задачи (3.8), а θ^s – постоянный вектор, определенный равенством (см. (2.1.30))

$$\theta^s = \frac{1}{2} \sum_{p,q,k} \varepsilon_{pqk} \omega_{pq}[v](x^s) e^k.$$

Из свойств $v_\varepsilon(x)$ следует, что u_ε^s принадлежит классу $J_\varepsilon(K_h^s)$, в котором ищется минимум функционала (2.1) и, значит, согласно (2.3)

$$\Gamma(\varepsilon, h, x^s, \lambda, R; u_\varepsilon^s) \geq \sum a_{npqr}(x^s, \lambda; \varepsilon, h) R_{np} R_{qr},$$

для любого тензора $R = \{R_{np}\}_{n,p=1}^3$.

Отсюда, полагая $R_{np} = e_{np}[v](x^s) = e_{np}^s[v]$ и учитывая (2.1), (2.1), а также (3.15), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{K_h^s} \left\{ \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_\varepsilon] + h^{-2-\gamma} \left| u_\varepsilon^s(x) - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}^s[v] \psi^{np,s}(x) \right|^2 \right\} dx + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_{K_h^s} \int_{Q_\varepsilon^i} \langle C_\varepsilon^{ij}(x, y) [v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)], [v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)] \rangle dx dy \geq \quad (3.17) \\ & \geq \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x^s, \lambda; \varepsilon, h) e_{np}^s[v] e_{qr}^s[v]. \end{aligned}$$

Так же как в главе 2, устанавливаем, что

$$\overline{\lim}_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{K_h^s} \left| u_\varepsilon^s - \sum_{n,p} e_{np}^s[v] \psi^{np,s} \right|^2 dx = O(h^7).$$

Поэтому, из (3.6), (2.2) и (3.17) следует, что при достаточно малых ε_k ($\varepsilon_k \ll \hat{\varepsilon}(h)$)

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] & \geq \sum_s \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(\varepsilon, h, x^s) e_{np}^s[v] e_{qr}^s[v] + \\ & + \int_{\Omega} \left\{ \lambda \langle \rho_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle - 2 \langle \rho_\varepsilon \tilde{v}_{\varepsilon 0}, v_\varepsilon \rangle \right\} dx + O(h^{2+\gamma}) \quad (0 < \gamma < 2). \end{aligned}$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу сначала по $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, а затем по $h \rightarrow 0$. Тогда, учитывая теорему 3.1 и сходимость $v_\varepsilon(x)$ к $v(x)$ в $L_2(\Omega)$ при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, приходим к неравенству

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \geq \Phi_0[v],$$

где функционал $\Phi_0[v]$ определен равенством (3.7). Таким образом, требуемое неравенство (3.11) установлено, если предельная вектор-функция $v(x)$ достаточно гладкая ($v(x) \in C^2(\Omega) \cap J^0(\Omega)$). Переход к произвольной $v(x) \in J^0(\Omega)$ делается также, как в главе 2. Тем самым теорема 3.1 доказана.

Стандартным способом нетрудно установить, что решение $v(x, \lambda)$ задачи (3.9) является решением краевой задачи

$$-\sum_{n,p,q,r=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_p} (a_{npqr}(x, \lambda) e_{qr}[v]) e^n + \lambda \rho v = -\nabla p v_0, \left. \begin{array}{l} x \in \Omega; \\ \operatorname{div} v = 0, \end{array} \right\} \quad (3.18)$$

$$v(x, \lambda) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (3.19)$$

которая, в силу положительной определенности тензора $\{a_{npqr}(x, \lambda)\}$ и положительности функции $\rho(x)$, однозначно разрешима.

Следовательно, при выполнении условий теоремы 3.1, решение $v_\varepsilon(x)$ краевой задачи (3.1) – (3.5) при $\lambda > 0$ сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению задачи (3.18) – (3.19). Ближайшая наша цель – распространить этот результат на комплексные значения параметра $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Для этого прежде всего нужно показать, что предельный тензор $\{a_{npqr}(x, \lambda)\}$, введенный в §2 условием (2.5), допускает аналитическое продолжение по λ с положительной полуоси $\lambda > 0$ в комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $\lambda \leq 0$ и изучить его аналитические свойства.

§ 4. Аналитические свойства предельного тензора $\{a_{npqr}(x, \lambda)\}$

Начнем с допредельного («мезоскопического») тензора $\{a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h)\}_{n,p,q,r=1}^3$, определенного при $\lambda > 0$ равенствами

(2.1) – (2.4). Стандартным способом нетрудно показать, что минимизант $v_\varepsilon(x, \lambda) = v_\varepsilon(x, \lambda; \xi, h, R)$ вариационной задачи (2.1) является решением краевой задачи

$$\left. \begin{aligned}
 & -\mu \Delta v_\varepsilon + h^{-2-\gamma} v_\varepsilon + \text{grad } p_\varepsilon = h^{-2-\gamma} \sum_{n,p=1}^3 \psi^{np}(x-\xi) R_{np}, \\
 & \text{div } v_\varepsilon = 0, \\
 & v_\varepsilon(x) = a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i), \quad \text{на } Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi; \\
 & \int_{S_\varepsilon^i} \sigma[v_\varepsilon] dS + h^{-2-\gamma} m_\varepsilon^i \rho_\varepsilon^{-1} a_\varepsilon^i + \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq i} \int_{Q_\varepsilon^j} \int_{Q_\varepsilon^i} C_\varepsilon^{ij}(x, y) [v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)] dx dy = \\
 & = h^{-2-\gamma} \int_{Q_\varepsilon^i} \sum_{n,p=1}^3 \psi^{np}(x-\xi) R_{np} dx, \quad Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi; \\
 & \int_{S_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[v_\varepsilon] dS + h^{-2-\gamma} I_\varepsilon^i \rho_\varepsilon^{-1} b_\varepsilon^i + \\
 & + \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq i} \int_{Q_\varepsilon^j} \int_{Q_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times C_\varepsilon^{ij}(x, y) [v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)] dx dy = \\
 & = h^{-2-\gamma} \int_{Q_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times \sum_{n,p=1}^3 \psi^{np}(x-\xi) R_{np} dx; \\
 & \sigma[v_\varepsilon] = 0, \quad \text{на } \partial K_h^\xi.
 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Здесь использованы введенные ранее обозначения: K_h^ξ – куб с центром в точке $\xi \in \Omega$ и сторонами длины $h \gg \varepsilon$, m_ε^i , I_ε^i – масса и тензор инерции частицы $Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi$,

$$\sigma[v_\varepsilon] = -np_\varepsilon + 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[v_\varepsilon] \cos(n, x_l) e^k - \quad (4.2)$$

вектор напряжений на поверхности $S_\varepsilon^i = \partial Q_\varepsilon^i$, n – внешняя нормаль к S_ε^i . Суммы \bigcup_i и $\sum_{j \neq i}$ распространяются на частицы, находящиеся в кубе K_h^ξ .

Запишем эту задачу в операторном виде в гильбертовом пространстве $L_2(K_h^\xi)$ комплекснозначных вектор-функций. Для этого введем в $L_2(K_h^\xi)$ следующие подпространства:

$\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ – замыкание в $L_2(K_h^\xi)$ множества соленоидальных

вектор-функций из $W_2^1(K_h^\xi)$ равных $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на $Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi$, где $a_\varepsilon^i, b_\varepsilon^i$ – произвольные постоянные векторы;

$\tilde{G}(K_h^\xi)$ – множество вектор-функций вида $v_\varepsilon(x) = \text{grad } \varphi + \sum_i \psi^i(x) \chi_\varepsilon^i(x)$, где $\varphi(x) \in W_2^1(K_h^\xi)$, $\chi_\varepsilon^i(x)$ – характеристическая функция Q_ε^i , а $\psi_\varepsilon^i(x)$ – вектор-функция ортогональная в $L_2(Q_\varepsilon^i)$ всем вектор-функциям $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$.

Нетрудно убедиться, что справедливо ортогональное разложение

$$L_2(K_h^\xi) = \tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi) \oplus \tilde{G}_\varepsilon(K_h^\xi). \quad (4.3)$$

Пусть $\hat{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ – плотное в $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ множество вектор-функций $u_\varepsilon(x)$ таких, что $u_\varepsilon(x) \in \tilde{J}(K_h^\xi) \cap W_2^1(K_h^\xi \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i)$ и $\sigma^0[u_\varepsilon] = 0$ на ∂K_h^ξ , где $\sigma^0[u_\varepsilon]$ – вектор вязких напряжений, определенный равенством (4.2) при $p_\varepsilon = 0$. Каждой такой вектор-функции поставим в соответствие постоянные векторы:

$$A_0^i[u_\varepsilon] = \frac{\rho_\nu}{m_\varepsilon^i} \int_{S_\varepsilon^i} \sigma^0[u_\varepsilon] dS, \quad B_0^i[u_\varepsilon] = \rho_\nu(I_\varepsilon^i) \int_{S_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma^0[u_\varepsilon] dS$$

и определим оператор \hat{A}_ε , отображающий $\hat{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ в $L_2(K_h^\xi)$, согласно равенствам

$$\hat{A}_\varepsilon u_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\mu \Delta u_\varepsilon(x) + h^{-2-\gamma} u_\varepsilon(x), & x \in K_h^\xi \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i; \\ A_0^i[u_\varepsilon] + B_0^i[u_\varepsilon] \times (x - x_\varepsilon^i) + h^{-2-\gamma} u_\varepsilon(x), & x \in Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi. \end{cases}$$

Положим

$$\tilde{A}_\varepsilon = P_\varepsilon \hat{A}_\varepsilon, \quad (4.4)$$

где P_ε – оператор ортогонального проектирования в $L_2(K_h^\xi)$ на подпространство $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$.

Ясно, что \tilde{A}_ε – линейный оператор, действующий из $\hat{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ в $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ и, согласно (4.3), (4.4), представим в виде

$$\tilde{A}_\varepsilon u_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\mu \Delta u_\varepsilon + h^{-2-\gamma} u_\varepsilon + \text{grad } p_{0\varepsilon}, & x \in K_h^\xi \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i; \\ A_0^i[u_\varepsilon] + B_0^i[u_\varepsilon] \times (x - x_\varepsilon^i) + h^{-2-\gamma} u_\varepsilon + \text{grad } p_{0\varepsilon} + \psi_{0\varepsilon}^i, & x \in Q_\varepsilon^i, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $p_{0\varepsilon}(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(K_h^\xi)$, а $\psi_{0\varepsilon}^i(x) \in L_2(Q_\varepsilon^i)$ и ортогональна вектор-функции вида $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$, причем справедливо равенство

$$\text{grad } p_{0\varepsilon}(x) + \psi_{0\varepsilon}^i(x) = a_{0\varepsilon}^i + b_{0\varepsilon}^i \times (x - x_\varepsilon^i), \quad (4.6)$$

в котором постоянные векторы $a_{0\varepsilon}^i$ и $b_{0\varepsilon}^i$ определены формулами

$$a_{0\varepsilon}^i = \rho_{\bar{\cdot}}(m_\varepsilon^i)^{-1} \int_{S_\varepsilon^i} p_{0\varepsilon} n dS, \quad b_{0\varepsilon}^i = \rho_{\bar{\cdot}}(I_\varepsilon^i)^{-1} \int_{S_\varepsilon^i} p_{0\varepsilon} (x - x_\varepsilon^i) \times n dS. \quad (4.7)$$

Нетрудно убедиться, что оператор \tilde{A}_ε , определенный на плотном в $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ множестве $\hat{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$, симметричен и положительно определен на нем, а потому допускает расширение по Фридрихсу A_ε [35]. При этом, для любого $v_\varepsilon \in \hat{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ и $w_\varepsilon \in \tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi) \cap W_2^1(K_h^\xi)$, справедливо равенство

$$(A_\varepsilon v_\varepsilon, w_\varepsilon) = \int_{K_h^\xi} \left\{ \sum_{k,l=1}^3 \mu e_{kl}[v_\varepsilon] e_{kl}[\bar{w}_\varepsilon] + h^{-2-\gamma} \langle v_\varepsilon, \bar{w}_\varepsilon \rangle \right\} dx. \quad (4.8)$$

Лемма 4.1. *Оператор A_ε самосопряжен в пространстве $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$, положительно определен и его обратный оператор $A_{0\varepsilon}^{-1}$ вполне непрерывен.*

Доказательство леммы проводится так же, как в книге [17].

Введем также в пространстве $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ ограниченный оператор

$$A_{1\varepsilon} = P_\varepsilon \hat{A}_{1\varepsilon}, \quad (4.9)$$

где P_ε ортопроектор в $L_2(K_h^\xi)$ на подпространство $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$, а оператор $\hat{A}_{1\varepsilon}$ отображает $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ в $L_2(K_h^\xi)$, согласно формуле

$$\begin{aligned} \hat{A}_{1_\varepsilon} u_\varepsilon = & \sum_{i \neq j} K_h^\xi \chi_\varepsilon^i(x) \left\{ \rho_\varepsilon(m_\varepsilon^i)^{-1} \int_{Q_\varepsilon^i} \int_{Q_\varepsilon^j} C_\varepsilon^{ij}(x, y) [u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)] dx dy + \right. \\ & \left. + \left(\rho_\varepsilon(I_\varepsilon^i)^{-1} \int_{Q_\varepsilon^i} \int_{Q_\varepsilon^j} (x - x_\varepsilon^i) \times C_\varepsilon^{ij}(x, y) [u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)] dx dy \right) \times (x - x_\varepsilon^i) \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Из (4.3), (4.7), (4.8) и свойств матриц-функций $C_\varepsilon^{ij}(x, y)$ следует, что оператор A_{1_ε} ограничен, самосопряжен, неотрицателен в $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$ и справедливо равенство

$$\begin{aligned} (A_{1_\varepsilon} v_\varepsilon, w_\varepsilon)_{L_2(K_h^\xi)} = \\ = \sum_{i \neq j} K_h^\xi \int_{Q_\varepsilon^i} \int_{Q_\varepsilon^j} \langle C_\varepsilon^{ij}(x, y) [v_\varepsilon(x) - v_\varepsilon(y)], [w_\varepsilon(x) - w_\varepsilon(y)] \rangle dx dy. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отметим также, что согласно (4.3), (4.9) он представим в виде:

$$A_{1_\varepsilon} u_\varepsilon = \begin{cases} \hat{A}_{1_\varepsilon} u_\varepsilon + \text{grad } p_{1_\varepsilon}(x), & x \in K_h^\xi \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i; \\ \hat{A}_{1_\varepsilon} u_\varepsilon + a_{1_\varepsilon}^i + b_{1_\varepsilon}^i \times (x - x_\varepsilon^i), & x \in Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $p_{1_\varepsilon}(x) \in W_2^1(K_h^\xi)$, а постоянные векторы $a_{1_\varepsilon}^i$, $b_{1_\varepsilon}^i$ выражаются через p_{1_ε} по формулам (4.7).

Аналогичное представление имеет место и для проекции $g_{\varepsilon h} = P_\varepsilon \psi_{\varepsilon h}$ правой части $\psi_{\varepsilon h}$ задачи (4.1) на подпространство $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$.

Из (4.5) – (4.7), (4.9), (4.10) и (4.12) следует, что краевая задача (4.1) может быть представлена в следующем операторном виде в пространстве $\tilde{J}_\varepsilon(K_h^\xi)$

$$A_\varepsilon v_\varepsilon + \frac{1}{\lambda} A_{1_\varepsilon} v_\varepsilon = g_{\varepsilon h}. \quad (4.14)$$

Будем рассматривать это уравнение при комплексных $\lambda \neq 0$. Вводя оператор $B_\varepsilon = -A_\varepsilon^{-1} A_{1_\varepsilon}$ запишем (4.14) в виде

$$B_\varepsilon v_\varepsilon - \lambda v_\varepsilon = -\lambda A_\varepsilon^{-1} g_{\varepsilon h}.$$

В силу леммы 4.1, оператор B_ε вполне непрерывен. Пока-

жем, что его собственные значения $\lambda_{k\varepsilon}$ лежат на отрицательной полуоси $(-\infty, 0]$. Действительно, если $v_{k\varepsilon}$ – собственный вектор, соответствующий $\lambda_{k\varepsilon}$, то в силу неотрицательности оператора $A_{1\varepsilon}$

$$\lambda_{k\varepsilon} (v_{k\varepsilon}, v_{k\varepsilon})_{A_\varepsilon} = (B_\varepsilon v_{k\varepsilon}, v_{k\varepsilon})_{A_\varepsilon} = -(A_{1\varepsilon} v_{k\varepsilon}, v_{k\varepsilon})_{L_2(K_h^\xi)} \leq 0,$$

где через $(\cdot)_{A_\varepsilon}$ обозначено скалярное произведение в энергетическом пространстве оператора A_ε [35]. Следовательно, $\lambda_{k\varepsilon} \leq 0$.

Таким образом, резольвента $R_\varepsilon(\lambda) = (B_\varepsilon - \lambda I)^{-1}$ оператора B_ε мероморфная операторно-значная функция с полюсами на отрицательной полуоси и, значит, уравнение (4.14) имеет единственное решение

$$v_\varepsilon = -\lambda (B_\varepsilon - \lambda I)^{-1} A_\varepsilon^{-1} g_{\varepsilon h}, \quad (4.15)$$

при всех $\lambda \neq \lambda_{k\varepsilon} \leq 0$.

Формула (4.15) дает аналитическое продолжение по λ решения $v_\varepsilon(x, \lambda; \xi, h, R)$ задачи (4.1) в комплексную плоскость λ $(-\pi < \arg \lambda < \pi)$. Выбирая $R = R^{np} = \frac{1}{2}(e^n \otimes e^p + e^p \otimes e^n)$ и подставляя соответствующую вектор-функцию $v_\varepsilon^{np} = v_\varepsilon(x, \lambda; \xi, h, R^{np})$ в формулу (2.4) получаем аналитическое продолжение по λ компонент тензора $\{a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h)\}_{n,p,q,r=1}^3$, которые оказываются мероморфными функциями с полюсами $\lambda_{k\varepsilon} \leq 0$.

Покажем теперь, что предельный тензор $\{a_{npqr}(\xi, \lambda)\}_{n,p,q,r=1}^3$, определенный равенством (2.5) при положительных λ , аналитически продолжается в комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $(-\infty, 0]$ и для него справедлива лемма 2.1.

Доказательство леммы 2.1. Введем в кубе K_h^ξ вектор-

функцию

$$\psi^R(x) = \sum_{n,p=1}^3 \psi^{np}(x-\xi)R_{np},$$

где R_{np} – компоненты произвольного постоянного тензора $R=\{R_{np}\}$ с нормой $\|R\| = \sum_{n,p} R_{np}^2 = 1$, а $\psi^{np}(x)$ – вектор-функция, определенная равенством (2.1.2).

Лемма 4.2. *Существует вектор-функция $\psi_\varepsilon^R(x) \in W_2^1(K_h^\xi)$ такая, что $\operatorname{div} \psi_\varepsilon^R = 0$ в K_h^ξ , $\psi_\varepsilon^R(x)$ равна постоянным векторам a_ε^i на $Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi$ и справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon^R\|_{W_2^1(K_h^\xi)} &\leq C_1 h^3, \\ \|\psi_\varepsilon^R - \psi^R\|_{L_2(K_h^\xi)} &\leq C_2 \varepsilon^2 h^3, \\ |a_\varepsilon^i - a_\varepsilon^j| &\leq C_3 \operatorname{dist}(Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j), \end{aligned}$$

где C_i ($i=1,2,3$) не зависят от ε , h и R ($\|R\|=1$).

Доказательство. Так как $\psi^R(x) \in C^1$ и $\operatorname{div} \psi^R(x) = 0$, то существует вектор-функция $g^R(x) \in C^2$ такая, что

$$\psi^R(x) = \operatorname{rot} g^R(x).$$

Положим

$$\begin{aligned} g_\varepsilon^R(x) = g^R(x) + \\ + \sum_i \left[\frac{1}{2} a_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i) + \sum_{n,p=1}^3 e_{np} [g^R](x_\varepsilon^i) \psi^{np}(x - x_\varepsilon^i) - g^R(x) + g^R(x_\varepsilon^i) \right] \varphi_\varepsilon^i, \end{aligned}$$

где $a_\varepsilon^i = \psi^R(x_\varepsilon^i)$, $\psi^{np}(x)$ – определена равенством (2.12), а $\varphi_\varepsilon^i(x)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции равные 1 при $|x - x_\varepsilon^i| < d_\varepsilon^i$, 0 при $|x - x_\varepsilon^i| > C d_\varepsilon^i$ ($C > 1$), причем $|D^\alpha \varphi_\varepsilon^i| < C (d_\varepsilon^i)^{-|\alpha|}$ ($|\alpha| = 0, 1, 2$), d_ε^i – диаметр $Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi$.

Учитывая условие (ii) с помощью формул (2.1.28) для $g^R(x)$ нетрудно убедиться, что вектор-функция

$$\psi_\varepsilon^R(x) = \operatorname{rot} g_\varepsilon^R(x)$$

обладает всеми требуемыми свойствами, что и завершает доказательство леммы 4.2.

Обозначим через $v_{\varepsilon\infty}(x)$ вектор-функцию класса $J_\varepsilon(K_h^\xi)$, являющуюся решением задачи (4.1) при $\lambda=\infty$. Легко видеть, что она минимизирует функционал

$$\Gamma_{\varepsilon h}^{R,\infty}[v] = \int_{K_h^\xi} \left\{ \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v] + h^{-2-\gamma} |v - \psi^R|^2 \right\} dx$$

в классе вектор-функций $v \in J_\varepsilon(K_h^\xi)$. Следовательно, так как $\psi_\varepsilon^R \in J_\varepsilon(K_h^\xi)$, имеем

$$\Gamma_{\varepsilon h}^{R,\infty}[v_{\varepsilon\infty}] \leq \Gamma_{\varepsilon h}^{R,\infty}[\psi_\varepsilon^R].$$

Отсюда, пользуясь леммой 4.2, равенством (4.7) и неравенством Корна, заключаем, что при достаточно малых ε ($\varepsilon < \varepsilon(h)$)

$$\|v_{\varepsilon\infty}\|_{W_2^1(K_h^\xi)}^2 \leq C_1 (A_{0\varepsilon} v_{\varepsilon\infty}, v_{\varepsilon\infty})_{L_2(K_h^\xi)} \leq C_2 h^3. \quad (4.16)$$

Лемма 4.3. Для любой вектор-функции $v_\varepsilon \in W_2^1(K_h^\xi)$, принимающей на частицах $Q_\varepsilon^i \subset K_h^\xi$ значения $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$, справедливо неравенство

$$\sum_{i,j} \sum_{K_h^\xi} \varepsilon |a_\varepsilon^i - a_\varepsilon^j|^2 + \sum_i \sum_{K_h^\xi} \varepsilon^3 |b_\varepsilon^i|^2 \leq C_1 \|v_\varepsilon\|_{W_2^1(K_h^\xi)}^2,$$

где $\sum_{K_h^\xi}$ распространяется только на взаимодействующие частицы $Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j$ (т.е. такие, что $|x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j| \leq C_2 \varepsilon$), C_1, C_2 не зависят от ε и h .

Доказательство леммы проводится стандартным образом, с учетом условий (i) – (ii) главы 2.

С помощью этой леммы, пользуясь равенством (4.11) и учитывая условия (1.3), (1.4) и неравенство (4.16), заключаем, что при достаточно малых ε

$$(A_{1\varepsilon} v_{\varepsilon\infty}, v_{\varepsilon\infty})_{L_2(K_h^\xi)} \leq Ch^3, \quad (4.17)$$

где C не зависит от h и $\varepsilon \ll \varepsilon(h)$.

Представим решение $v_{\varepsilon h}$ уравнения (4.13) (т.е. задачи (4.1)) при комплексных $\lambda \in \Lambda_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, |\arg \lambda - \pi| > \delta\}$ в виде

$$v_{\varepsilon\lambda} = v_{\varepsilon\infty} + w_{\varepsilon\lambda}. \quad (4.18)$$

Так как $v_{\varepsilon\infty}$ является решением уравнения (4.13) при $\lambda=\infty$, то $w_{\varepsilon\lambda}$ удовлетворяет уравнению

$$A_\varepsilon w_{\varepsilon\lambda} + \frac{1}{\lambda} A_{1\varepsilon} w_{\varepsilon\lambda} = -\frac{1}{\lambda} A_{1\varepsilon} v_{\varepsilon\infty}, \quad (4.19)$$

с помощью которого, учитывая положительность операторов $A_\varepsilon, A_{1\varepsilon}$ заключаем, что при $\lambda \in \Lambda_\delta$ справедлива оценка

$$(A_\varepsilon w_{\varepsilon\lambda}, w_{\varepsilon\lambda})_{L_2(K_h^\xi)} \leq \frac{2}{|\lambda| \sin^2 \delta} (A_{1\varepsilon} v_{\varepsilon\infty}, v_{\varepsilon\infty}).$$

Отсюда, в силу (4.17) и неравенства Корна, следует

$$\|w_{\varepsilon\lambda}\|_{W_2^1(K_h^\xi)}^2 \leq C (A_\varepsilon w_{\varepsilon\lambda}, w_{\varepsilon\lambda})_{L_2(K_h^\xi)} \leq C_1(\delta) \frac{h^3}{|\lambda|}. \quad (4.20)$$

Так как $w_{\varepsilon\lambda} \in J_\varepsilon(K_h^\xi)$, то пользуясь равенством (4.11) (при $v_\varepsilon = w_\varepsilon = w_{\varepsilon\lambda}$), условиями (1.3), (1.4), леммой 4.3 и неравенством (4.20), получаем

$$(A_{1\varepsilon} w_{\varepsilon\lambda}, w_{\varepsilon\lambda})_{L_2(K_h^\xi)} \leq C_2(\delta) \frac{h^3}{|\lambda|}. \quad (4.21)$$

Неравенства (4.20), (4.21) выполняются при $\lambda \in \Lambda_\delta$ и в них постоянные $C_1(\delta), C_2(\delta)$ не зависят от h и ε $\varepsilon \ll \hat{\varepsilon}(h)$ и тензора R ($\|R\|=1$).

Положим $R = R^{np} = \frac{1}{2}(e^n \otimes e^p + e^p \otimes e^n)$ и обозначим $v_{\varepsilon\lambda}^{np}, v_{\varepsilon\infty}^{np}$

и $w_{\varepsilon\lambda}^{np}$ соответствующие решения уравнений (4.14), (4.19). Тогда, подставляя отвечающее им равенство (4.18) в (2.4) с учетом (4.7), (4.11), (4.14) (при $\lambda=\infty$) и (4.19), получаем

$$a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h) = a_{npqr}^0(\xi; \varepsilon, h) + a_{npqr}^1(\xi, \lambda; \varepsilon, h), \quad (4.22)$$

где

$$a_{npqr}^0(\xi; \varepsilon, h) = \int_{K_h^\xi} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[v_{\varepsilon^\infty}^{np}] e_{kl}[v_{\varepsilon^\infty}^{qr}] + h^{-2-\gamma} \langle v_{\varepsilon^\infty}^{np} - \psi^{np}, v_{\varepsilon^\infty}^{qr} - \psi^{qr} \rangle \right\} dx, \quad (4.23)$$

$$a_{npqr}^1(\xi, \lambda; \varepsilon, h) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j \neq i} \int_{K_h^\xi} \int_{Q_\varepsilon^i Q_\varepsilon^j} \langle C_\varepsilon^{ij}(x, y) [v_{\varepsilon^\infty}^{np}(x) - v_{\varepsilon^\infty}^{np}(y)], [v_{\varepsilon^\infty}^{qr}(x) - v_{\varepsilon^\infty}^{qr}(y)] \rangle dx dy + \frac{1}{\lambda} (A_{1\varepsilon} w_{\varepsilon\lambda}^{pn}, v_{\varepsilon^\infty}^{qr})_{L_2(K_h^\xi)} + \frac{1}{\lambda} (A_{1\varepsilon} w_{\varepsilon\lambda}^{qr}, v_{\varepsilon^\infty}^{np})_{L_2(K_h^\xi)}. \quad (4.24)$$

Так как вектор-функции $w_{\varepsilon\lambda}^{qr}$ голоморфны по λ в области $\Lambda_\delta = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg \lambda - \pi| > \delta, |\lambda| > \delta\}$, то из (4.22) – (4.24), равенств (4.7), (4.11) и оценок (4.16), (4.17), (4.21), следует, что функции $a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h)$ при любых фиксированных ξ, ε, h также голоморфны по $\lambda \in \Lambda_\delta$ и равномерно по $\xi \in \Omega, h$ и $\varepsilon < \varepsilon(h)$

$$|a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h)| \leq C \left(1 + \frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{|\lambda|^{3/2}} \right) h^3 \quad \lambda \in \Lambda_\delta.$$

Таким образом, функции $\frac{1}{h^3} a_{npqr}(x, \lambda; \varepsilon, h)$ при $\forall x \in \Omega$ голоморфны по λ и ограничены в области Λ_δ ($\lambda \in \Lambda_\delta$) равномерно по ε и h . Поэтому, учитывая условие (2.5), которое выполняется при всех $\lambda > 0$ с помощью теоремы Витали [32] заключаем, что пределы (2.5) существуют также при комплексных $\lambda \in \Lambda_\delta$ и предельные функции $a_{npqr}(x, \lambda)$ голоморфны по $\lambda \in \Lambda_\delta \forall \delta > 0$. Отметим также, что в силу (4.17) и (4.21) второе слагаемое в правой части равенства (4.24) имеет порядок $O(\frac{1}{|\lambda|^{3/2}})$ при $\lambda \rightarrow \infty \lambda \in \Lambda_\delta$. Поэтому из (4.22)–(4.24) следует формула (2.6) и оценка (2.7). Таким образом лемма 2.4.1 доказана.

§ 5. Аналитические свойства решений краевых задач (3.1) – (3.5) и (3.18) – (3.19)

1. Задачу (3.1) – (3.5) можно представить в операторном

виде

$$A_\varepsilon v_\varepsilon + \lambda B_\varepsilon v_\varepsilon + \frac{1}{\lambda} A_{1\varepsilon} v_\varepsilon = g_\varepsilon \quad (5.1)$$

в пространстве $J_\varepsilon(\Omega)$ комплекснозначных соленоидальных вектор-функций в Ω равных $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на частицах $Q_\varepsilon^i \subset \Omega$ и нулю на внешней границе $\partial\Omega$. Здесь A_ε и $A_{1\varepsilon}$ – само-сопряженные операторы в $J_\varepsilon(\Omega)$, которые определяются так же, как в §4 (с заменой K_h^ξ на Ω), а B_ε – самосопряженный ограниченный оператор, действующий из $J_\varepsilon(\Omega)$ в $J_\varepsilon(\Omega)$ согласно формуле

$$B_\varepsilon v_\varepsilon = P_\varepsilon \left(\rho_{\text{ж}} \chi_\varepsilon v_\varepsilon + \rho_{\text{ч}} \sum_i \chi_\varepsilon^i v_\varepsilon \right),$$

где P_ε – ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство $J_\varepsilon(\Omega) \subset L_2(\Omega)$, $\chi_\varepsilon^i(x)$ и $\chi_\varepsilon(x)$ – характеристические функции областей $Q_\varepsilon^i \subset \Omega$ и $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i$. Операторы A_ε и B_ε – положительно определены: $(A_\varepsilon u, u) \geq \alpha \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$, $(B_\varepsilon u, u) \geq \beta \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$, причем обратный к A_ε оператор A_ε^{-1} – вполне непрерывен, а B_ε – ограничен равномерно по ε : $\|B_\varepsilon\| < b$. Оператор $A_{1\varepsilon}$ – неотрицателен: $(A_{1\varepsilon} u, u) \geq 0$ и ограничен при каждом $\varepsilon > 0$. Правая часть g_ε в уравнении (5.1) определяется равенством $g_\varepsilon = P_\varepsilon \tilde{v}_{\varepsilon 0} \equiv P_\varepsilon [\rho_{\text{ж}} v_{\varepsilon 0} \chi_\varepsilon(x) + \sum_i \rho_{\text{ч}} (v_{\varepsilon 0}^i + \omega_{\varepsilon 0}^i \times (x - x_\varepsilon^i)) \chi_\varepsilon^i(x)]$ и является ограниченной в $J_\varepsilon(\Omega)$ равномерно по ε (см. 1.12).

Рассмотрим оператор-функцию от λ

$$G_\varepsilon = I + L_\varepsilon(\lambda),$$

где $L_\varepsilon(\lambda) = \lambda A_\varepsilon^{-1} B_{0\varepsilon} + \frac{1}{\lambda} A_\varepsilon^{-1} A_{1\varepsilon}$ – вполне непрерывный оператор при любом $\lambda \neq 0$ и $\varepsilon > 0$. Эта оператор-функция голоморфна в

области $\mathbb{C} \setminus 0$ и, в силу отмеченных выше свойств операторов A_ε , B_ε и $A_{1\varepsilon}$, оператор $G_\varepsilon(\lambda)$ имеет ограниченный обратный при любом $\lambda > 0$. Таким образом $G_\varepsilon(\lambda)$ есть регулярный пучок в области $\mathbb{C} \setminus 0$ и, следовательно, его резольвента $G_\varepsilon^{-1}(\lambda)$ мероморфна в $\mathbb{C} \setminus 0$, а ее полюсы находятся в точках λ_k , которые являются собственными значениями пучка $G_\varepsilon(\lambda)$ ([15], [31]), т.е.

$$[I + L_\varepsilon(\lambda_k)]u_k = 0, \quad \|u_k\| = 1.$$

Отсюда следует, что собственные векторы u_k принадлежат области определения оператора A_ε и удовлетворяют уравнению

$$A_\varepsilon u_k + \lambda_k B_\varepsilon u_k + \lambda_k^{-1} A_{1\varepsilon} u_k = 0.$$

Учитывая свойства операторов A_ε , $A_{1\varepsilon}$ и B_ε , с помощью этого уравнения легко показать, что собственные значения λ_k располагаются в левой полуплоскости симметрично относительно вещественной оси, причем невещественные λ_k удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re} \lambda_k = -\alpha \|B_\varepsilon\|^{-1} \leq -\frac{\alpha}{b} \quad \text{и} \quad |\lambda_k| \leq \sqrt{\|A_{1\varepsilon}\| \beta^{-1}}$$

Из всего сказанного следует, что уравнение (5.1), представимое в виде $G_\varepsilon(\lambda)v_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1}g_\varepsilon$, однозначно разрешимо при всех $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_k \lambda_k \cup 0\right)$ и его решение $v_\varepsilon = v_\varepsilon(x, \lambda)$ является мероморфной функцией λ в области $\mathbb{C} \setminus 0$ с полюсами в точках λ_k , причем $v_\varepsilon(x, \lambda)$ голоморфна в подобласти

$$\Lambda_\varepsilon = \left\{ \lambda \in \tilde{\mathbb{N}} \setminus 0 : |\arg \lambda| > \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\|A_{1\varepsilon}\| \beta^{-1}}}{\alpha B_{1\varepsilon}} \right\} \subset \tilde{\mathbb{N}} \setminus 0,$$

содержащая полуплоскость $\tilde{N}_+ = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

В силу равномерной по ε ограниченности g_ε , положительной определенности операторов A_ε , B_ε , неотрицательности оператора $A_{1\varepsilon}$ из уравнения (5.1) следует равномерная по ε

оценка для $v_\varepsilon(x, \lambda)$ в полуплоскости C_+

$$\|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha + \beta \operatorname{Re} \lambda}. \quad (5.2)$$

2. Рассмотрим теперь задачу (3.18)—(3.19) при комплексных λ . Так как при $\lambda > 0$ тензор $\{a_{npqr}(x, \lambda)\}_{n,p,q,r=1}^3$ положительно определен, то эта задача имеет единственное решение $v(x, \lambda)$ при $\lambda > 0$. Учитывая доказанную в § 4 голоморфность $\{a_{npqr}(x, \lambda)\}$ по λ в плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси, заключаем, что $v(x, \lambda)$ можно аналитически продолжить в некоторую окрестность луча $\lambda \geq \sigma > 0$. Как было доказано в § 3 при $\lambda > 0$ решение $v_\varepsilon(x, \lambda)$ задачи (3.1)—(3.6) сходится в $L_2(\Omega)$ к решению $v(x, \lambda)$ задачи (3.18)—(3.19). Поэтому, учитывая голоморфность $v_\varepsilon(x, \lambda)$ по $\lambda \in \hat{\Lambda}_\varepsilon$ и равномерную по ε ограниченность в норме $L_2(\Omega)$ в C_+ (см. 5.1), с помощью теоремы Витали заключаем, что $v_\varepsilon(x, \lambda)$ сходится в $L_2(\Omega)$ к голоморфной в C_+ вектор-функции $v(x, \lambda)$, которая является решением задачи (3.18)—(3.19) и удовлетворяет неравенству

$$\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{C}{\alpha + \beta \operatorname{Re} \lambda}, \quad \lambda \in C_+. \quad (5.3)$$

При этом сходимость равномерна по λ , принадлежащим любому компактному $K \subset C_+$.

Отметим также, что задачу (3.18)—(3.19), в силу леммы 2.1 можно представить в операторной форме

$$Av + \lambda Bv + A_1(\lambda)v = Bv_0 \quad (5.4)$$

в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ комплекснозначных соленоидальных вектор-функций в области Ω и равных 0 на $\partial\Omega$.

Здесь A и $A_1(\lambda)$ линейные неограниченные операторы, определенные равенством вида:

$$\hat{A}v = P \left\{ \sum_{n,p,q,r} \frac{\partial}{\partial x_p} (\hat{a}_{npqr}(x) e_{qr}[v] e^n) \right\}, \quad (5.5)$$

где $\hat{a}_{npqr}(x) = a_{npqr}(x)$ для оператора A и $\hat{a}_{npqr}(x) = \frac{1}{\lambda} b_{npqr}(x) + C_{npqr}(x, \lambda)$ для $A_1(\lambda)$, а P – ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство $J(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

Замечание. В случае негладких коэффициентов $\hat{a}_{npqr}(x) \in L^\infty(\Omega)$ эти операторы порождаются полуторалинейными формами в $J(\Omega) \cap W_2^1(\Omega)$ вида (см. [42])

$$(\hat{A}u, v) = \int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r} \hat{a}_{npqr}(x) e_{qr}[u] e_{np}[\bar{v}] dx.$$

Оператор B в уравнении (5.4) ограниченный и задается формулой:

$$Bv = P \{ \rho(x)v(x) \}. \quad (5.6)$$

Из (5.5), (5.6) следует, что операторы A и B положительно определены, а оператор-функция $A_1(\lambda)$ голоморфна в области $\mathbb{C} \setminus [-\infty, 0]$.

§ 6. Окончание доказательства теоремы 2.1

Из определения операторов A_ε , B_ε и $A_{1\varepsilon}$ следует, что решение $v_\varepsilon(t) = v_\varepsilon(x, t)$ исходной задачи (1.7)–(1.12) является решением следующей абстрактной задачи Коши в пространстве $J_\varepsilon(\Omega)$:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon \frac{dv_\varepsilon}{dt} + A_\varepsilon v_\varepsilon + \int_0^t A_{1\varepsilon} v_\varepsilon d\tau = 0, \quad t > 0, \\ v_\varepsilon(0) = \hat{v}_{\varepsilon 0}. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Отсюда, учитывая равномерную по ε ограниченность операторов B_ε и векторов $v_{\varepsilon 0}$ легко получить неравенство:

$$(B_\varepsilon v_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)) + \int_0^t (A_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon) d\tau + (A_{1\varepsilon} u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) \leq C, \quad (6.2)$$

где $u_\varepsilon(t) = \int_0^t v_\varepsilon d\tau$, а C не зависит от ε и t .

Из него, в силу свойств операторов A_ε , B_ε , и $A_{1\varepsilon}$ следует, что равномерно по $\varepsilon > 0$

$$\int_0^T \|v_\varepsilon(t)\|_{W_2^1(\Omega)}^2 dt \leq C(T), \quad \forall T > 0. \quad (6.3)$$

Покажем, что справедлива также равномерная по ε оценка непрерывности $v_\varepsilon(t)$ по t , а именно

$$\int_0^T \|v_\varepsilon(t+\Delta t) - v_\varepsilon(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq C(T) |\Delta t|, \quad \forall T > 0. \quad (6.4)$$

Для этого проинтегрируем уравнение (6.1) от t до $t + \Delta t$ и умножим скалярно на $v_\varepsilon(t + \Delta t) - v_\varepsilon(t)$. После этого снова проинтегрировав по t от 0 до T , приходим к равенству:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (B_\varepsilon[v_\varepsilon(t+\Delta t) - v_\varepsilon(t)], v_\varepsilon(t+\Delta t) - v_\varepsilon(t)) dt = \\ & = \int_0^T \int_t^{t+\Delta t} (A_\varepsilon v_\varepsilon(\tau), v_\varepsilon(t+\Delta t) - v_\varepsilon(t)) d\tau dt + \\ & + \int_0^T \int_t^{t+\Delta t} (A_{1\varepsilon} u_\varepsilon(\tau), v_\varepsilon(t+\Delta t) - v_\varepsilon(t)) d\tau dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что операторы A_ε и $A_{1\varepsilon}$ положительные, скалярные произведения в правой части, а затем интегралы, оценим с помощью неравенств Шварца. В результате получаем:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (B_\varepsilon[v_\varepsilon(t+\Delta t) - v_\varepsilon(t)], v_\varepsilon(t+\Delta t) - v_\varepsilon(t)) d\tau \leq \\ & \leq 2 |\Delta t| \int_0^{T+\Delta t} (A_\varepsilon v_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)) dt + \\ & + 2 |\Delta t| \left(\int_0^{T+\Delta t} (A_{1\varepsilon} u_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t)) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^{T+\Delta t} (A_{1\varepsilon} v_\varepsilon(t), v_\varepsilon(t)) dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Воспользовавшись леммой 2.1 применительно к области Ω и свойствами операторов A_ε и $A_{1\varepsilon}$, получаем неравенство:

$$(A_{1\varepsilon} v_\varepsilon, v_\varepsilon) \leq C (A_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon), \quad (6.6)$$

где C не зависит от ε .

Теперь из (6.2), (6.5), (6.6) и равномерной по ε положительности B_ε вытекает требуемая оценка (6.4).

Из равномерных по ε оценок (6.3) и (6.4) следует, что множество решений $\{v_\varepsilon(x, t), \varepsilon > 0\}$ задачи (1.7)—(1.12) компактно в $L_2(\Omega_T)$ ($\forall T > 0$) и, значит, чтобы закончить доказательство теоремы 2.1 достаточно показать, что $v_\varepsilon(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится слабо в $L_2(\Omega_T)$ к решению $v(x, t)$ задачи (2.13)—(2.15). Согласно §3 преобразование Лапласа от $v_\varepsilon(x, t)$ по времени есть вектор-функция $v_\varepsilon(x, \lambda)$, являющаяся решением задачи (3.1)—(3.5), или, что то же, уравнения (5.1). Поэтому $v_\varepsilon(x, t)$ представима через $v_\varepsilon(x, \lambda)$ обратным преобразованием Лапласа:

$$v_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} v_\varepsilon(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda, \quad \sigma > 0. \quad (6.7)$$

Как было показано в п.2 $v_\varepsilon(x, \lambda)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится по норме $L_2(\Omega)$ равномерно по λ принадлежащим любому компактному $K \subset \mathbb{C}_+$ к решению $v(x, \lambda)$ задачи (3.18), (3.19), или что то же уравнения (5.4), причем $v(x, \lambda)$ удовлетворяет оценке (5.3). Поэтому обратное преобразование Лапласа от $v(x, \lambda)$

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} v(x, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda \equiv v(t) \quad (6.8)$$

является обобщенным решением следующей абстрактной задачи Коши в пространстве $J(\Omega)$:

$$\begin{aligned} B \frac{dv}{dt} + Av + \int_0^t A_1(t-\tau)v(\tau) d\tau &= 0, \\ v(0) &= v_0, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где оператор-функция $A_1(t)$ есть обратное преобразование Лапласа по λ от $A_1(\lambda)$.

Отсюда, согласно определению операторов B , A , $A_1(\lambda)$ и $A_1(t)$ следует, что $v(t) = v(x, t)$ является решением задачи (2.13)—(2.15).

Пусть $\varphi(x, t)$ – произвольная гладкая вектор-функция класса $C_0^2(\Omega_T)$. Тогда, учитывая (6.7), (6.8) с помощью интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} e^{\lambda t} (v_{\varepsilon}(x, t) - v(x, t), \varphi(x, t)) dx dt = \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} (v_{\varepsilon}(x, \lambda) - v(x, \lambda), \varphi(x, t)) d\lambda dx dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \int_{\Omega} \int_0^T \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^2} \left(v_{\varepsilon}(x, \lambda) - v(x, \lambda), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x, t) \right) dt dx d\lambda. \end{aligned}$$

Перестановка порядка интегрирования здесь законна, поскольку интегралы в правой части сходятся абсолютно в силу оценок (5.2), (5.3) и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega} (v_{\varepsilon}(x, t) - v(x, t), \varphi(x, t)) dx dt \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2\pi} e^{\sigma T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|v_{\varepsilon}(x, \sigma + iv) - v(x, \sigma + iv)\|_{L_2(\Omega)}}{\sigma^2 + v^2} \max_{0 < t \leq T} \left\| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\|_{L_2(\Omega)} dv. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Отсюда, учитывая равномерную на компактах $K \subset \mathbb{C}_+$ сходимость $v_{\varepsilon}(x, \lambda)$ к $v(x, \lambda)$ по норме $L_2(\Omega)$ заключаем, что $v_{\varepsilon}(x, t)$ сходится к $v(x, t)$ слабо в $L_2(\Omega_T)$. Таким образом теорема 2.1 доказана.

Замечание. Теорема 2.1 остается в силе и в случае, когда диаметры частиц имеют порядок $O(\varepsilon^{\alpha})$ ($1 < \alpha < 3$). В этом случае $\rho(x) = \rho_{ж}$ и $a_{npqr}(x) = \mu I_{npqr} = \frac{\mu}{2} (\delta_{nq} \delta_{pr} + \delta_{nr} \delta_{pq}) - \frac{\mu}{3} \delta_{np} \delta_{qr}$ и, значит, усредненная система уравнений (2.13) имеет вид (доказательство см. [54])

$$\rho_{\alpha} \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \Delta v - \sum_{n,p,q,r} \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ \int_0^t A_{npqr}(x, t - \tau) e_{qr} [v(\tau)] d\tau \right\} e^n = \nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0.$$

§ 7. Периодическая структура

Рассмотрим один конкретный случай, когда выполняются все условия (1.3), (1.4), (2.5), (2.10), причем тензор $\{a_{npqr}(x, \lambda)\}$ вычисляется с помощью решения «ячеечной задачи».

Предположим, что частицы Q_ε^i являются гомотетическим ε -сжатием фиксированного тела Q с гладкой границей $S \subset C^2$ с центром масс в точке O , с диаметром $d < 1/2$; все они одинаково ориентированы в пространстве \mathbf{R}^3 и их центры масс x_ε^i образуют кубическую решетку M_ε с периодом ε . Предположим также, что взаимодействуют лишь точки, лежащие на поверхностях $S_\varepsilon^i, S_\varepsilon^j$ соседних частиц $Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j$ (схематичное изображение дано на рис.2), а соответствующие функции $a_\varepsilon^{ij}(x, y)$ взаимодействия (1.2) определены равенством

$$a_\varepsilon^{ij}(x, y) = \frac{a}{\varepsilon^{3-\kappa} |x-y|^\kappa} \delta_{S_\varepsilon^i}(x) \delta_{S_\varepsilon^j}(y), \quad (7.1)$$

где $\delta_{S_\varepsilon^i}$ – δ -функция, сосредоточенная на поверхности S_ε^i , $\kappa \geq 0$, $a > 0$. Тем самым обеспечивается периодичность структуры, как в смысле геометрии, так и в смысле взаимодействия, и выполняются условия (1.3) и (1.4).

1. Ячеечная задача. Представим энергию взаимодействия (1.5) в виде

$$\begin{aligned} H_\varepsilon(u^i, \theta^i) = H_\varepsilon(0, 0) + \sum_{i,j} \langle C_{1\varepsilon}^{ij} [u^i - u^j], [u^i - u^j] \rangle + \sum_{i,j} \langle C_{2\varepsilon}^{ij} [u^i - u^j], \theta^i \rangle + \\ + \sum_{i,j} \langle C_{3\varepsilon}^{ij} \theta^i, \theta^i \rangle + \sum_{i,j} \langle C_{4\varepsilon}^{ij} \theta^i, \theta^j \rangle, \end{aligned} \quad (7.2)$$

где, согласно (1.6) и (7.1)

$$\begin{aligned}
C_{1\varepsilon}^{ij} &= \frac{1}{2} \int_{S_\varepsilon^i} \int_{S_\varepsilon^j} C_\varepsilon^{ij}(x, y) dS_x dS_y, \\
C_{2\varepsilon}^{ij} &= \int_{S_\varepsilon^i} \int_{S_\varepsilon^j} A^T(x - x_\varepsilon^i) C_\varepsilon^{ij}(x, y) dS_x dS_y, \\
C_{3\varepsilon}^{ij} &= \int_{S_\varepsilon^i} \int_{S_\varepsilon^j} A^T(y - x_\varepsilon^i) C_\varepsilon^{ij}(x, y) A(x - x_\varepsilon^i) dS_x dS_y, \\
C_{4\varepsilon}^{ij} &= - \int_{S_\varepsilon^i} \int_{S_\varepsilon^j} A^T(x - x_\varepsilon^i) C_\varepsilon^{ij}(x, y) A(y - x_\varepsilon^j) dS_x dS_y,
\end{aligned} \tag{7.3}$$

а через $A(x)$ обозначена кососимметричная матрица, удовлетворяющая равенству $A(x)\theta = \theta \times x$. Из (1.6), (7.1) следует, что

$$C_{k\varepsilon}^{ij} = \varepsilon^k C_k^{ij} \quad (k=1,2,3), \quad C_{4\varepsilon}^{ij} = \varepsilon^3 C_4^{ij}, \tag{7.4}$$

где матрицы C_k^{ij} ($k=1,2,3,4$) не зависят от ε , причем C_1^{ij} и C_3^{ij} положительно определены.

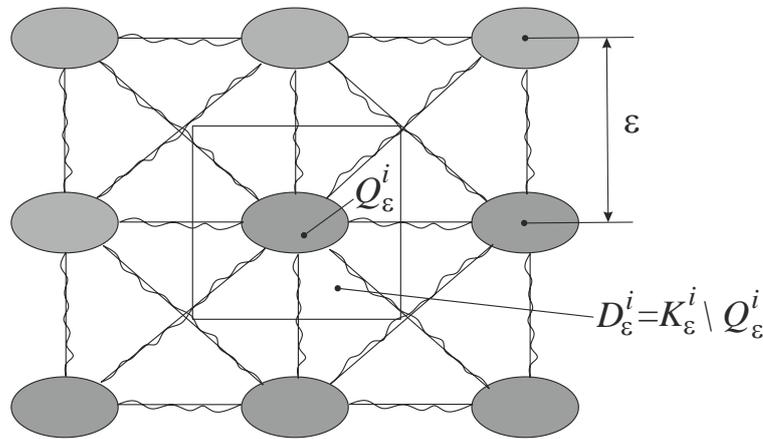


Рис.4

Поместим частицу Q_ε^i в куб K_ε^i с центром в точке x_ε^i и сторонами длины ε и рассмотрим элементарную ячейку $D_\varepsilon^i = K_\varepsilon^i \setminus Q_\varepsilon^i$ (рис.4). Растянув эту ячейку в $\frac{1}{\varepsilon}$ раз и сместив ее центр в точку O , получим фиксированную область $D=K \setminus Q$, где K – куб с центром в O и сторонами длины 1, а Q – область в K диаметра d ($d < 1/2$) и границей S класса C^2 . Рассмотрим в области $D=K \setminus Q$ краевую задачу (ячеечная задача)

$$-\mu \Delta u^{qr} + \nabla p^{qr} = 0, \quad \operatorname{div} u^{qr} = 0, \quad x \in K \setminus Q; \tag{7.5}$$

$$u^{qr}(x) = -\psi^{qr}(x) + b^{qr} \times x, \quad x \in S; \tag{7.6}$$

$$\int_S x \times \sigma[u^{qr}] ds = -C(\lambda)b^{qr} \quad (7.7)$$

$$u^{qr} \text{ и } \sigma[u^{qr}] - K\text{-периодичны,} \quad (7.8)$$

т.е. на противоположных гранях Γ_k^\pm ($k=1, 2, 3$) куба K :

$$u^{qr}|_{\Gamma_k^+} = u^{qr}|_{\Gamma_k^-}, \quad \sigma[u^{qr}]|_{\Gamma_k^+} = \sigma[u^{qr}]|_{\Gamma_k^-}.$$

Здесь вектор-функция $\psi^{qr}(x)$ определена равенством (2.1.2), b^{qr} – постоянный вектор, $\sigma[u^{qr}]$ – вектор напряжений на соответствующих поверхностях, матрица $C(\lambda)$ определена равенством

$$C(\lambda) = \frac{1}{2\lambda} \sum_j^i (C_3^{ij} + C_4^{ij}), \quad (7.9)$$

где сумма \sum_j^i распространяется на все соседние с Q_ε^i частицы Q_ε^j ; для определенности давление $p^{qr}(x)$ подчинено условию

$$\int_{K \setminus Q} p^{qr}(x) dx = 0. \quad (7.10)$$

Лемма 7.1. *Задача (7.5)–(7.10) при $\lambda > 0$ имеет единственное решение $\{u^{qr}(x), p^{qr}(x), b^{qr}\}$ такое, что $u^{qr}(x) \in C^2(\overline{K \setminus Q})$, $p \in C^1(\overline{K \setminus Q})$. Это решение можно периодически продолжить с сохранением гладкости на периодическую область $\bigcup_i \left(K \setminus Q + \sum_{k=1}^3 m_{ik} e^k \right)$, $m_{ik} \in \mathbf{Z}$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что матрица $C(\lambda)$ положительно определена, т.к. в силу (1.6), (7.1), (7.8), (7.9) и периодичности структуры при $\forall b \in \mathbf{R}^3$

$$\langle C(\lambda)b, b \rangle = \frac{C}{4\lambda\varepsilon^{3-\alpha}} \sum_j^i \int_{S_\varepsilon^i} \int_{S_\varepsilon^j} \frac{|b_\varepsilon^i(x) - b_\varepsilon^j(y)|^2}{|x - y|^\alpha} dS_x dS_y \geq C \|b\|^2, \quad C > 0,$$

где $b_\varepsilon^i(x) = b \times (x - x_\varepsilon^i)$, $b_\varepsilon^j(y) = b \times (y - x_\varepsilon^j)$.

Учитывая это, стандартным образом доказывается единст-

венность решения задачи (7.5)—(7.10).

Для доказательства существования решения воспользуемся тем, что эта задача эквивалентна задаче минимизации функционала

$$I[u^{qr}] = \int_{K \setminus Q} \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [u^{qr}] dx + \langle C(\lambda) b^{qr}, b^{qr} \rangle \quad (7.11)$$

в классе $J_{qr}^1(K \setminus Q)$ соленоидальных вектор-функций из $W_2^1(K \setminus Q)$ удовлетворяющих граничным условиям (7.6) на $S = \partial Q$ и условиям периодичности $u^{qr}|_{\Gamma_k^+} = u^{qr}|_{\Gamma_k^-}$ ($k=1,2,3$). Нетрудно убедиться, что этот класс не пуст и вектор-функции из него удовлетворяют в области $K \setminus Q$ неравенству Корна. Учитывая это, обычным образом [36] устанавливаем существование минимизанта $\{u^{qr} \in J_{qr}^1(K \setminus Q)\}$ функционала (7.11), который удовлетворяет тождеству

$$\int_{K \setminus Q} \mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl} [u^{qr}] e_{kl} [v] dx + \langle C(\lambda) b^{qr}, b \rangle = 0 \quad (7.12)$$

для любой соленоидальной вектор-функции $v \in W_2^1(K \setminus Q)$, удовлетворяющей граничному условию $v(x) = b \times x$ на поверхности S и условию периодичности $v|_{\Gamma_k^+} = v|_{\Gamma_k^-}$. Как известно [17], отсюда следует, что $u^{qr}(x) \in W_{2loc}^2(K \setminus Q)$, $p^{qr}(x) \in W_{2loc}^2(K \setminus Q)$. Поэтому в (7.12) можно провести интегрирование по частям, в результате чего, учитывая свойства $v(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{K \setminus Q} \langle -\mu \Delta u^{qr} + \nabla p^{qr}, v \rangle dx + \int_S \langle x \times \sigma[u^{qr}], b \rangle dS + \\ + \int_{\partial K} \langle \sigma[u^{qr}], v \rangle dS + \langle C(\lambda) b^{qr}, b \rangle = 0. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $v(x)$ и b , следует первое уравнение (7.5), равенство (7.7) и второе равенство (7.8).

Обозначим через $\{\tilde{u}, \tilde{p}\}$ периодическое продолжение ре-

шения $\{u, p\}$ задачи (7.5)–(7.10), получаемое сдвигами на вектора $\sum_{k=1}^3 m_{ki} e^k$ ($m_{ki} \in \mathbf{Z}$). Ясно, что $\{\tilde{u}, \tilde{p}\}$ удовлетворяет первому уравнению (7.5) во внутренних точках областей-сдвигов ячейки $K \setminus Q$ и \tilde{u} – соленоидальна в периодической области $\Omega_{per} = \mathbf{R}^3 \setminus \bigcup_i (Q + \sum_i m_{ki} e^k)$ – внешности сдвигов тела Q .

Покажем, что $\{\tilde{u}, \tilde{p}\}$ удовлетворяет уравнениям (7.5) всюду в Ω_{per} . Обозначим $K_\delta = \left\{ x : |x_k| \leq \frac{1+\delta}{2}, k=1,2,3 \right\}$ ($0 < \delta < 1/2-d$) – куб концентрический с K . В силу (7.8) $\tilde{u} \in W_2^1(K_\delta \setminus Q) \cap J_{gr}^1(K_\delta \setminus Q)$. Пусть $\zeta(x)$ – произвольная гладкая соленоидальная вектор-функция с компактным носителем в $K_\delta \setminus Q$, пересекающимся с границей куба $K \subset K_\delta$. Пользуясь формулой Грина, запишем

$$\begin{aligned} \mu \int_{\tilde{K} \setminus Q} \sum_{k,l} e_{kl}[\tilde{u}] e_{kl}[\zeta] dx &= \mu \left(\int_{\tilde{K} \setminus K} + \int_{K \setminus Q} \right) \sum_{k,l} e_{kl}[\tilde{u}] e_{kl}[\zeta] dx = \\ &= - \int_{\tilde{K} \setminus K} \langle -\mu \Delta \tilde{u} + \nabla \tilde{p}, \zeta \rangle dx + \int_{K \setminus Q} \int_{\tilde{K} \setminus K} \langle -\mu \Delta u + \nabla p, \zeta \rangle dx = \\ &= - \int_{\partial K} \langle \sigma[\tilde{u}], \zeta \rangle dS + \int_{\partial K} \langle \sigma[u], \zeta \rangle dS. \end{aligned}$$

В правой части этого равенства два первых интеграла равны нулю в силу (7.5), а третий и четвертый взаимно уничтожаются в силу периодичности продолжения $u(x)$. Таким образом

$$\int_{\tilde{K} \setminus Q} \sum_{k,l} e_{kl}[\tilde{u}] e_{kl}[\zeta] dx = 0$$

откуда, в силу произвольности $\zeta \in J_0^1(\tilde{K} \setminus Q)$ следует, что \tilde{u} удовлетворяет уравнениям (7.5) в $\tilde{K} \setminus Q$ причем, согласно [17] $\tilde{u}(x) \in C^2(K \setminus Q)$ и $\tilde{p}(x) \in C^1(K \setminus Q)$. Лемма доказана.

Приведем еще следующие два равенства для решения $\{u^{gr}, b^{gr}\}$ задачи (7.5) – (7.8), которые понадобятся нам в следующем разделе и которые легко получить, пользуясь форму-

лами Грина, так же как равенства (3.1.15)

$$\begin{aligned} \int_S \sigma[\psi^{qr} + u^{qr}] dS &= 0, \\ \int_S x \times \sigma[\psi^{qr} + u^{qr}] dS &= -C(\lambda)b^{qr}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

2. С помощью решения $\{u^{qr}(x, \lambda), b^{qr}(\lambda)\}$ ячеечной задачи (7.5) – (7.10) получим формулы для компонент тензора $\{a_{npqr}(x, \lambda)\}$ (2.5)

Теорема 7.1. Для рассматриваемой периодической структуры существуют пределы (2.5), причем компоненты предельного тензора имеют вид

$$\begin{aligned} a_{npqr}(\lambda) &= \mu I_{npqr}(1 + |Q|) + \mu \int_{K \setminus Q} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[u^{np}(x, \lambda)] e_{kl}[u^{qr}(x, \lambda)] dx + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \sum_j^i \langle C_1^{ij} \psi^{np}(x^j), \psi^{qr}(x^j) \rangle + \langle C(\lambda) b^{np}(\lambda), b^{qr}(\lambda) \rangle, \end{aligned}$$

где $x^i = \sum_{k=1}^3 m_k^i e^k$ – центры масс соседних с $Q = Q^i$ частиц Q^j

($m_k^j = 0 \pm 1$, $j=1, 2, \dots, 26$), матрица C_1^{ij} , $C(\lambda)$ определена формулами (7.3), (7.9).

Доказательство. Пусть $K_h^\xi = K(\xi, h)$ – куб с центром в точке $\xi \in \Omega$ и сторонами длины $h \gg \varepsilon$, ориентированными по координатным осям. Чтобы не загромождать доказательство непринципиальными усложнениями, будем считать, что куб K_h^ξ можно разрезать на целое число элементарных кубиков K_ε^i так, чтобы центр x_ε^i одного из них совпадал с ξ (h/ε – нечетное целое число).

Рассмотрим в кубе K_h^ξ вектор-функции

$$U_\varepsilon^{qr}(x) = \psi^{qr}(x - \xi) + \varepsilon \tilde{u}^{qr} \left(\frac{x - \tau}{\varepsilon}, \lambda \right), \quad (7.14)$$

где \tilde{u}^{qr} – периодическое предложение на \mathbf{R}^3 решения $u^{qr}(x, \lambda)$

ячеечной задачи (7.5) – (7.10), продолженного на Q равенством (7.6).

В силу свойств $\psi^{qr}(x)$ и $\tilde{y}^{qr}(x, \lambda)$, вектор-функция $U_\varepsilon^{qr}(x)$ соленоидальна в K_h^ξ и на границах частиц Q_ε^j выполняются равенства

$$U_\varepsilon^{qr}(x) = \psi^{qr}(x_\varepsilon^j - \xi) + b^{qr}(\lambda) \times (x - x_\varepsilon^j), \quad x \in S_\varepsilon^j. \quad (7.15)$$

Следовательно $U_\varepsilon^{qr}(x)$ принадлежит классу $J_\varepsilon(K_h^\xi)$.

Будем искать вектор-функцию $v_\varepsilon^{qr}(x, \lambda)$ минимизирующую функционал (2.1) при $R = \frac{1}{2}(e^q \otimes e^r + e^r \otimes e^q)$, в виде

$$v_\varepsilon^{qr}(x, \lambda) = U_\varepsilon^{qr}(x) + w_\varepsilon^{qr}(x, \lambda). \quad (7.16)$$

Учитывая обозначения (2.2), заключаем, что вектор-функция $w_\varepsilon^{qr}(x, \lambda)$ должна минимизировать в классе $J_\varepsilon(K_h^\xi)$ следующий функционал

$$\begin{aligned} \Gamma[w_\varepsilon^{qr}] = & \Gamma_0[w_\varepsilon^{qr}] + 2\mu E_{K_h^\xi}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] + \frac{1}{\lambda} I_{K_h^\xi}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] + \\ & + 2h^{-2-\gamma} \int_{K_h^\xi} \langle U_\varepsilon^{qr} - \psi^{qr}, w_\varepsilon^{qr} \rangle dx, \end{aligned} \quad (7.17)$$

где

$$\Gamma_0[w_\varepsilon^{qr}] = \mu E_{K_h^\xi}[w_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] + \frac{1}{2\lambda} I_{K_h^\xi}[w_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] + h^{-2-\gamma} \int_{K_h^\xi} |w_\varepsilon^{qr}|^2 dx.$$

Так как $0 \in J_\varepsilon(K_h^\xi)$ и, значит, $\Gamma[v_\varepsilon^{qr}] \leq \Gamma[0] = 0$, то из (7.17) следует

$$\begin{aligned} \Gamma_0[w_\varepsilon^{qr}] \leq & \left| 2\mu E_{K_h^\xi}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] + \frac{1}{\lambda} I_{K_h^\xi}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] \right| + \\ & + 2h^{-2-\gamma} \left| \int_{K_h^\xi} \langle U_\varepsilon^{qr} - \psi^{qr}, w_\varepsilon^{qr} \rangle dx \right|. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Пользуясь формулой Грина, леммой 7.1, а также равенствами (7.3), (7.4), (7.9), (7.13) и учитывая, что $w_\varepsilon^{qr}(x) = a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на Q_ε^i , получаем

$$2\mu E_{K_h^\varepsilon}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] = -2 \int_{\partial K_h^\varepsilon} \langle \sigma[U_\varepsilon^{qr}], w_\varepsilon^{qr} \rangle dS - \frac{1}{\lambda} \sum_{i,j} \langle (C_{3\varepsilon}^{ij} + C_{4\varepsilon}^{ij}) b^{qr}, b_\varepsilon^i \rangle,$$

$$\frac{1}{\lambda} I_{K_h^\varepsilon}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] = \frac{1}{\lambda} \sum_{i,j} \langle (C_{3\varepsilon}^{ij} + C_{4\varepsilon}^{ij}) b^{qr}, b_\varepsilon^i \rangle,$$

и, следовательно,

$$\left| 2\mu E_{K_h^\varepsilon}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] + \frac{1}{\lambda} I_{K_h^\varepsilon}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] \right| \leq 2 \int_{\partial K_h^\varepsilon} \left| \langle \sigma[U_\varepsilon^{qr}], w_\varepsilon^{qr} \rangle \right| dS \leq$$

$$\leq Ch \left\{ \int_{\partial K_h^\varepsilon} |w_\varepsilon^{qr}|^2 dS \right\}^{1/2}.$$

Для оценки поверхностного интеграла в правой части, воспользуемся леммой 2.1.7 (глава 2), выбирая в ней $\tau = h^{1+1/2}$. Тогда получим

$$\left| 2\mu E_{K_h^\varepsilon}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] + \frac{1}{\lambda} I_{K_h^\varepsilon}[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{qr}] \right| \leq Ch^{2+\frac{\gamma}{4}} (\Gamma_0[w_\varepsilon^{qr}])^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая (7.14), аналогичную оценку получаем и для последнего слагаемого в правой части (7.17)

$$2h^{-2-\gamma} \left| \int_{K_h^\varepsilon} \langle U_\varepsilon^{qr} - \psi^{qr}, w_\varepsilon^{qr} \rangle dx \right| \leq C\varepsilon h^{2-\frac{\gamma}{2}} (\Gamma_0[w_\varepsilon^{qr}])^{\frac{1}{2}}.$$

Из этих двух оценок и (7.18) следует, что

$$|\Gamma_0[w_\varepsilon^{qr}]| \leq Ch^3 \left(h^{\frac{\gamma}{2}} + \varepsilon^2 h^{1-\gamma} \right). \quad (7.19)$$

Здесь всюду постоянные C не зависят от ε и h .

Для сокращения записи, переобозначим

$$E[u, v] = \frac{1}{h^3} E_{K_h^\varepsilon}[u, v], \quad I[u, v] = \frac{1}{h^3} I_{K_h^\varepsilon}[u, v], \quad H[u, v] = h^{-5-\gamma} \int_{K_h^\varepsilon} u \cdot v dx.$$

Тогда, подставляя (7.16) в (2.4), получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h^3} a_{npqr}(\xi, \lambda; \varepsilon, h) = \\
& = E[U_\varepsilon^{np}, U_\varepsilon^{qr}] + \frac{1}{\lambda} I[U_\varepsilon^{np}, U_\varepsilon^{qr}] + H[U_\varepsilon^{np} - \psi^{np}, U_\varepsilon^{qr} - \psi^{qr}] \\
& + E[U_\varepsilon^{np}, w_\varepsilon^{qr}] + E[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{np}] + \frac{1}{\lambda} I[U_\varepsilon^{np}, w_\varepsilon^{qr}] + \frac{1}{\lambda} I[U_\varepsilon^{qr}, w_\varepsilon^{np}] + \\
& + H[U_\varepsilon^{np} - \psi^{np}, w_\varepsilon^{qr}] + H[U_\varepsilon^{qr} - \psi^{qr}, w_\varepsilon^{np}] + E[w_\varepsilon^{np}, w_\varepsilon^{qr}] + \\
& + \frac{1}{\lambda} I[w_\varepsilon^{np}, w_\varepsilon^{qr}] + H[w_\varepsilon^{np}, w_\varepsilon^{qr}]. \tag{7.20}
\end{aligned}$$

В правой части этого равенства только первые два слагаемые дают ненулевой вклад в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$. Остальные слагаемые оцениваются так же, как правая часть в неравенстве (7.18) с учетом (7.19) и они имеют порядок $o(1)$ ($\varepsilon \ll h, h \rightarrow 0$). Согласно (7.14)

$$E[U_\varepsilon^{np}, U_\varepsilon^{qr}] = E[\psi^{np}, \psi^{qr}] + E[\tilde{u}_\varepsilon^{np}, \tilde{u}_\varepsilon^{qr}] + E[\psi^{np}, \tilde{u}_\varepsilon^{qr}] + E[\psi^{qr}, \tilde{u}_\varepsilon^{np}], \tag{7.21}$$

где $\tilde{u}_\varepsilon^{np}(x) = \varepsilon \tilde{u}\left(\frac{x-\xi}{\varepsilon}, \lambda\right)$.

Учитывая линейность $\psi^{np}(x)$ и периодичность $\tilde{u}_\varepsilon^{np}(x)$, получаем

$$\begin{aligned}
E[\psi^{np}, \psi^{qr}] &= \frac{\mu}{h^3} \sum_j K_h^\xi \varepsilon^2 \int \sum_{K_j^{k,l=1}}^3 e_{kl} \left[\psi^{np} \left(\frac{x-x_\varepsilon^i}{\varepsilon} \right) \right] e_{kl} \left[\psi^{qr} \left(\frac{x-x_\varepsilon^j}{\varepsilon} \right) \right] dx = \\
&= \mu \int \sum_{K^{k,l=1}}^3 e_{kl} [\psi^{np}(x)] e_{kl} [\psi^{qr}(x)] dx = \mu \mathbf{I}_{npqr}, \tag{7.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[\tilde{u}_\varepsilon^{np}, \tilde{u}_\varepsilon^{qr}] &= \frac{\mu}{h^3} \sum_j K_h^\xi \varepsilon^2 \int \sum_{K_j^{k,l=1}}^3 e_{kl} \left[\tilde{u}_\varepsilon^{np} \left(\frac{x-x_\varepsilon^i}{\varepsilon} \right) \right] e_{kl} \left[\tilde{u}_\varepsilon^{qr} \left(\frac{x-x_\varepsilon^j}{\varepsilon} \right) \right] dx = \\
&= \mu \int \sum_{K^{k,l=1}}^3 e_{kl} [u^{np}(x)] e_{kl} [u^{qr}(x)] dx = \\
&= \mu |Q| \mathbf{I}_{npqr} + \mu \int \sum_{K \setminus Q^{k,l=1}}^3 e_{kl} [u^{np}] e_{kl} [u^{qr}] dx. \tag{7.23}
\end{aligned}$$

Здесь учтено, что число кубиков K_ε^i в кубе K_h^ξ равно точно

$\frac{h^3}{\varepsilon^3}$ и $u^{np}(x)$ продолжено на Q равенством (7.6).

Аналогично, учитывая линейность $\psi^{np}(x)$ и периодичность

$u^{np}(x)$, с помощью формулы Грина, заключаем, что

$$\begin{aligned} E[\psi^{np}, \tilde{u}_\varepsilon^{qr}] &= \mu \int_K \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[\psi^{np}] e_{kl}[u^{qr}] dx = \\ &= -\mu \int_K \langle \Delta \psi^{np}, u^{qr} \rangle dx + \int_{\partial K} \langle \sigma[\psi^{np}], u^{qr} \rangle dS = 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Наконец, пользуясь определением вектор-функции $U_\varepsilon^{np}(x)$ и линейностью $\psi^{np}(x)$, получаем

$$\begin{aligned} I[U_\varepsilon^{np}, U_\varepsilon^{qr}] &= \frac{1}{2h^3} \sum_{i,j} \sum_{K_h^\varepsilon} \langle C_{1\varepsilon}^{ij} \psi^{np}(x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j), \psi^{qr}(x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2h^3} \sum_{i,j} \sum_{K_h^\varepsilon} \langle (C_{3\varepsilon}^{ij} + C_{4\varepsilon}^{ij}) b^{np}, b^{qr} \rangle = \sum_j^i \langle C_1^{ij} \psi^{np}(x^j) \psi^{qr}(x^j) \rangle + \langle C b^{np}, b^{qr} \rangle, \end{aligned} \quad (7.25)$$

где $x^j = \sum_{k=1}^3 m_k^j e^k$ ($m_k^j = 0, \pm 1$), $C = \sum_j^i \frac{C_3^{ij} + C_4^{ij}}{2}$.

Из (7.20)—(7.25) и (2.5) следует утверждение теоремы.

3. Разложим решение $\{u(x, \lambda), b(\lambda), p(x, \lambda)\}$ ячеечной задачи (7.5)—(7.10) в сумму

$$u(x, \lambda) = u_\infty(x) + u_\lambda(x),$$

$$p(x, \lambda) = p_\infty(x) + p_\lambda(x),$$

$$b(\lambda) = b_\infty + b_\lambda$$

решений $\{u_\infty(x), b_\infty, p_\infty(x)\}$ и $\{u_\lambda(x), b_\lambda, p_\lambda(x)\}$ следующих краевых задач

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u_\infty + \nabla p_\infty &= 0, \quad \operatorname{div} u_\infty = 0, \quad x \in K \setminus Q; \\ u_\infty(x) &= -\psi(x) + b_\infty \times x, \quad x \in S; \\ \int_S x \times \sigma[u_\infty] dS &= 0; \\ u_\infty \text{ и } \sigma[u_\infty] &- K\text{-периодичны} \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

и

$$\left. \begin{aligned} -\Delta u_\lambda + \nabla p_\lambda &= 0, \quad \operatorname{div} u_\lambda = 0, \quad x \in K \setminus Q; \\ u_\lambda(x) &= b_\lambda \times x, \quad x \in S; \\ \int_S x \times \sigma[u_\lambda] dS + C(\lambda) b_\lambda &= -C(\lambda) b_\infty, \\ u_\lambda \text{ и } \sigma[u_\lambda] &- K\text{-периодичны.} \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

Здесь для простоты индексы q, r опущены. Тогда, пользуясь теоремой 7.1 для компонент предельного тензора получаем такое представление:

$$\begin{aligned} a_{npqr}(\lambda) &= \mu \mathbf{I}_{npqr}(1 + |Q|) + \mu \int_{K \setminus Q} \sum_{k,l} e_{kl}[u_\infty^{np}] e_{kl}[u_\infty^{qr}] dx + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \sum_j^i \langle C_1^{ij} \psi^{np}(x^j), \psi^{qr}(x^j) \rangle + \langle C(\lambda) b_\infty^{np}, b_\infty^{qr} \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \langle C(\lambda) b_\infty^{np}, b_\lambda^{qr} \rangle + \frac{1}{2} \langle C(\lambda) b_\infty^{qr}, b_\lambda^{np} \rangle. \end{aligned} \quad (7.28)$$

Рассмотрим частный случай, когда Q есть шар. Тогда, из симметрии задачи (7.26), следует, что $b_\infty = 0$ и, значит, в силу (7.27) $b_\lambda = 0$. В этом случае, согласно (7.28), компоненты тензора $\{a_{npqr}(\lambda)\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} a_{npqr}(\lambda) &= \mu \mathbf{I}_{npqr}(1 + |Q|) + \mu \int_{K \setminus Q} \sum_{k,l} e_{kl}[u_\infty^{np}] e_{kl}[u_\infty^{qr}] dx + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \sum_j^i \langle C_1^{ij} \psi^{np}(x^j), \psi^{qr}(x^j) \rangle. \end{aligned}$$

В случае произвольных Q , пользуясь таким же методом, как в § 4, можно показать, что b_λ есть мероморфная функция λ с простыми полюсами λ_k на отрицательной полуоси, сгущающимися к 0. Тогда, из (7.28), (7.9), следует

$$\begin{aligned} a_{npqr}(\lambda) &= \mu \mathbf{I}_{npqr}(1 + |Q|) + \mu \int_{K \setminus Q} \sum_{k,l} e_{kl}[u_\infty^{np}] e_{kl}[u_\infty^{qr}] dx + \\ &+ \frac{1}{\lambda} \left[\sum_j^i \langle C_1^{ij} \psi^{np}(x^j), \psi^{qr}(x^j) \rangle + \langle C b_\infty^{np}, b_\infty^{qr} \rangle \right] + \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^{npqr}}{\lambda - \lambda_k}, \\ C &= \frac{1}{2} \sum_j^i (C_3^{ij} + C_4^{ij}). \end{aligned}$$

Глава 8

Двухфазная усредненная модель движения сложной жидкости с микроструктурой

В этой главе изучается асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ малых колебаний суспензии вязкой несжимаемой жидкости с взаимодействующими между собой мелкими твердыми частицами (см. главу 7). В отличие от главы 7, здесь рассматривается случай, когда размеры частиц имеют критический порядок $O(\varepsilon^3)$, в то время как расстояния между соседними частицами и жесткость силового взаимодействия между ними – порядок $O(\varepsilon)$. В этом случае движение происходит в режиме «фильтрующихся частиц».

Выводится усредненная система уравнений, которая является двухфазной моделью движения такой композитной среды. Ее можно трактовать как усложненную версию закона Бринкмана, описывающего асимптотическое поведение течения вязкой несжимаемой жидкости в перфорированной области с критическими размерами дыр [52], [63].

§ 1. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область в \mathbf{R}^3 , заполненная вязкой несжимаемой жидкостью со взвешенными в ней мелкими твердыми частицами, взаимодействующими между собой посредством некоторых сил не гидродинамической природы (см. главу 7).

Для простоты будем считать, что частицы сферические, а попарные силы взаимодействия между ними – центральные, т.е. приложены к центрам x_ε^i частиц Q_ε^i и направлены вдоль векторов $x_\varepsilon^j - x_\varepsilon^i$. Упругая энергия взаимодействия в системе частиц определяется равенством:

$$H_\varepsilon(u_\varepsilon) = H_\varepsilon(0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} [u_\varepsilon^i - u_\varepsilon^j], [u_\varepsilon^i - u_\varepsilon^j] \rangle, \quad (1.1)$$

где $u_\varepsilon = \{u_\varepsilon^i, i=1, \dots, N_\varepsilon\}$, u_ε^i – смещение центра i -й частицы, а C_ε^{ij} – симметричные неотрицательные матрицы, такие что $\forall u \in \mathbf{R}^3$

$$C_\varepsilon^{ij} u = a_\varepsilon^{ij} \langle u, e_\varepsilon^{ij} \rangle e_\varepsilon^{ij}. \quad (1.2)$$

Здесь $e_\varepsilon^{ij} = \frac{x^i - x^j}{|x^i - x^j|}$ – единичные векторы, а коэффициенты a_ε^{ij}

характеризуют жесткость силового взаимодействия между частицами Q_ε^i и Q_ε^j .

Будем предполагать, что система частиц зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ так, что радиусы частиц r_ε^i имеют порядок $O(\varepsilon^3)$, а расстояние между соседними частицами и коэффициенты a_ε^{ij} жесткости взаимодействия – порядок $O(\varepsilon)$, причем взаимодействие близкоедействующее, т.е. $a_\varepsilon^{ij} = 0$, если $|x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j| > C\varepsilon$ (C не зависит от ε , i и j).

Замечание. Формулами (1.1), (1.2) определяется асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ энергии взаимодействия между частицами и при более общем характере взаимодействия, таким как в главе 7 (см. (7.1.5), (7.1.6), (7.7.2), (7.7.3)).

В неподвижной жидкости центры x_ε^i частиц Q_ε^i должны находиться в положениях соответствующих равновесному состоянию системы частиц, при котором реализуется минимум энергии взаимодействия (1.1), (1.2). Чтобы это состояние было единственным, потребуем чтобы некоторая часть частиц была закреплена по неподвижной границе $\partial\Omega$, т.е. $u_\varepsilon^i = 0$, если $Q_\varepsilon^i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, а центры всех частиц $\{Q_\varepsilon^i, i=1, 2, \dots, N_\varepsilon\}$ в определенном смысле триангулировали область Ω . А именно, будем предполагать, что выполняются следующие условия:

I. Множество центров, закрепленных на $\partial\Omega$ частиц

$F_\varepsilon = \left\{ \bigcup_i x_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^i \cap \partial\Omega \neq \emptyset \right\}$ образует « ε -сеть» для $\partial\Omega$, т.е. $\forall x \in \partial\Omega$
 $\text{dist}(x, F_\varepsilon) < C\varepsilon$.

II. Условие триангуляции. Пусть Γ_ε – граф с вершинами в центрах x_ε^i частиц Q_ε^i с ребрами $(x_\varepsilon^i, x_\varepsilon^j)$, соединяющими взаимодействующие точки $x_\varepsilon^i, x_\varepsilon^j$. Предполагается, что для любого $\varepsilon > 0$ существует подграф $\Gamma'_\varepsilon \subset \Gamma_\varepsilon$ с тем же множеством вершин $\{x_\varepsilon^i\}$ и ребрами длины $|x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j| = d_\varepsilon^{ij} \varepsilon$ ($0 \leq d \leq d_\varepsilon^{ij} < 2$) с соответствующими коэффициентами жесткости взаимодействий $a_\varepsilon^{ij} = a_\varepsilon^{ij} \varepsilon$ ($0 < a \leq a_\varepsilon^{ij} < A$), причем Γ'_ε триангулирует область Ω так, что объемы $|P_{\alpha\varepsilon}|$ симплексов триангуляции $P_{\alpha\varepsilon}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, N_\varepsilon$) удовлетворяют неравенству $|P_{\alpha\varepsilon}| > C\varepsilon^3$ ($C > 0$).

При этих условиях существует единственное (изолированное) состояние равновесия рассматриваемой системы частиц в неподвижной жидкости. В окрестности этого равновесного состояния малые нестационарные движения смеси «жидкость-взаимодействующие твердые частицы» описывается следующей линеаризованной системой уравнений:

$$\rho \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \mu \Delta v_\varepsilon = \nabla p_\varepsilon, \quad \text{div } v_\varepsilon = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (1.3)$$

$$v_\varepsilon = \dot{u}_\varepsilon^i + \dot{\theta}_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i), \quad x \in Q_\varepsilon^i, \quad (1.4)$$

$$m_\varepsilon^i \ddot{u}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} \sigma[v_\varepsilon] dS = -\nabla_{u^i} H_\varepsilon, \quad (1.5)$$

$$I_\varepsilon^i \ddot{\theta}_\varepsilon^i + \int_{S_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[v_\varepsilon] dS = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon. \quad (1.6)$$

Здесь все обозначения соответствуют обозначениям главы 7, с той особенностью, что для рассматриваемого случая сферических частиц Q_ε^i тензоры инерции I_ε^i пропорциональны единичным с коэффициентами пропорциональности равными момен-

там инерции $I_\varepsilon^i = \frac{2}{5} m_\varepsilon^i (r_\varepsilon^i)^2$ шаров Q_ε^i радиусов r_ε^i и $\rho = \rho_{\text{ж}}$.

Дополним эту систему уравнений начальными условиями вида:

$$v_\varepsilon(x, 0) = v_{\varepsilon 0}(x), \quad x \in \Omega_\varepsilon, \quad (1.7)$$

$$u_\varepsilon^i(0) = 0, \quad \dot{u}_\varepsilon^i(0) = v_{\varepsilon 0}^i, \quad \theta_\varepsilon^i(0) = 0, \quad \dot{\theta}_\varepsilon^i(0) = \theta_{\varepsilon 0}^i, \quad i = 1, 2, \dots, N_\varepsilon \quad (1.8)$$

и граничными условиями на $\partial\Omega$:

$$v_\varepsilon(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.9)$$

При этом предполагаем, что $v_{\varepsilon 0}(x) \in W_2^1(\Omega_\varepsilon)$, $v_{\varepsilon 0}(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$ и $v_{\varepsilon 0}(x) = v_{\varepsilon 0}^i + \theta_{\varepsilon 0}^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $x \in \partial Q_\varepsilon^i$.

Существует единственное решение $\{v_\varepsilon(x, t), u_\varepsilon^i(t), \theta_\varepsilon^i(t)\}$ задачи (1.3)—(1.8) при любом $\varepsilon > 0$. Основная цель данной главы — изучить асимптотическое поведение этого решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получить усредненную систему уравнений, описывающую главный член асимптотики.

§2. Локальные количественные характеристики системы взаимодействующих частиц и формулировка основного результата

Пусть $K_h^x = K(x, h)$ — куб с центром в точке $x \in \Omega$ и сторонами длины h ($\varepsilon \ll h \ll 1$) ориентированным по координатным осям (мезокуб). Обозначим через $N(x, \varepsilon, h)$ множество решетчатых вектор-функций $w_\varepsilon(x)$, определенных в точках $x_\varepsilon^i \in K_h^x$. Их значение в этих точках обозначаем $w_\varepsilon^i = w_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$. Рассмотрим задачу минимизации в классе $N(x, \varepsilon, h)$ следующего функционала:

$$A_{\varepsilon, h}(w_\varepsilon; x, R) = \sum_{i, j} \left\langle C_\varepsilon^{ij} [w_\varepsilon^i - w_\varepsilon^j], [w_\varepsilon^i - w_\varepsilon^j] \right\rangle + h^{-2-\gamma} \varepsilon^3 \sum_i \left| w_\varepsilon^i - \sum_{q, r=1}^3 \psi^{qr}(x_\varepsilon^i - x) R_{qr} \right|^2, \quad (2.1)$$

где матрицы C_ε^{ij} определены равенством (1.2), $R = \{R_{pq}\}_{p,q=1}^3$ – произвольный тензор 2-го ранга в \mathbf{R}^3 , $\psi_{pq} = \frac{1}{2}(x_p e^q + x_q e^p)$, $0 < \gamma < 2$ – параметр штрафа, суммы $\sum_{K_h^x}$ берутся по тем i, j , для которых $Q_\varepsilon^i, Q_\varepsilon^j \subset K_h^x$.

Лемма 2.1. *Существует единственная решетчатая вектор-функция $w_\varepsilon(x)$ минимизирующая функционал (2.1) в классе $N(x, \varepsilon, h)$. Минимум этого функционала есть квадратичная однородная функция от тензора R , т.е.*

$$\min_{w_\varepsilon \in N(x, \varepsilon, h)} A_{\varepsilon, h}(w_\varepsilon; x, R) = \sum_{n, p, q, r=1}^3 a_{npqr}(x, \varepsilon, h) R_{np} R_{qr}. \quad (2.2)$$

Здесь $a_{npqr}(x, \varepsilon, h)$ – компоненты тензора 4-го ранга в \mathbf{R}^3 , которые определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_{npqr}(x, \varepsilon, h) = & \sum_{i, j \in K_h^x} \left\langle C_\varepsilon^{ij} [w_\varepsilon^{np}(x_\varepsilon^i) - w_\varepsilon^{np}(x_\varepsilon^j)], [w_\varepsilon^{qr}(x_\varepsilon^i) - w_\varepsilon^{qr}(x_\varepsilon^j)] \right\rangle + \\ & + h^{-2-\gamma} \varepsilon^3 \sum_i \left\langle w_\varepsilon^{np}(x_\varepsilon^i) - \psi^{np}(x_\varepsilon^i - x), w_\varepsilon^{qr}(x_\varepsilon^i) - \psi^{qr}(x_\varepsilon^i - x) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где через $w_\varepsilon^{np}(x)$ обозначена решетчатая вектор-функция минимизирующая функционал (2.1) при $R = R^{np} = \frac{1}{2}(e^n \otimes e^p + e^p \otimes e^n)$.

Доказательство леммы проводится так же как в главе 2 (см. например, [55]).

Из (2.3) следует, что тензор $\{a_{npqr}(x, \varepsilon, h)\}_{n, p, q, r=1}^3$ обладает симметрией: $a_{npqr} = a_{qnrp} = a_{pnqr} = a_{nrpq}$. Этот тензор является мезоскопической характеристикой системы взаимодействующих частиц. Мотивация структуры этой характеристики такая же как в главе 2 (§1): первое слагаемое в (2.1) – локальная энергия взаимодействия, а второе – штрафное слагаемое, обусловленное требованием, чтобы решетчатая функция в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ в определенном смысле становилась гладкой («локально линейной»).

Будем предполагать, что выполняются такие условия: равномерно по $x \in \Omega'$ ($\forall \Omega' \subset \Omega$) существуют пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{npqr}(x; \varepsilon, h)}{h^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a_{npqr}(x; \varepsilon, h)}{h^3} = a_{npqr}(x), \quad (2.4)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{h^3} \sum_{K_h^i} r_\varepsilon^i = r(x), \quad (2.5)$$

где r_ε^i – радиусы частиц Q_ε^i , $r(x)$ – непрерывная положительная функция в Ω , $\{a_{npqr}(x)\}$ – непрерывный положительно-определенный тензор.

С помощью решения $\{v_\varepsilon(x, t), u_\varepsilon^i(x, t), \theta_\varepsilon^i(t)\}$ задачи (1.3)–(1.8) построим вектор-функцию определенную в области $\Omega \times [0, T]$

$$\tilde{v}_\varepsilon(x, t) = v_\varepsilon(x, t) \chi_\varepsilon(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} [\dot{u}_\varepsilon^i(t) + \dot{\theta}_\varepsilon^i(t) \times (x - x_\varepsilon^i)] \chi_\varepsilon^i(x), \quad (2.6)$$

где $\chi_\varepsilon(x)$ и $\chi_\varepsilon^i(x)$ – характеристические функции областей Ω_ε и Q_ε^i , соответственно.

Теперь сформулируем основной результат данной главы.

Теорема 2.1. *Предположим, что выполняются условия I, II, (2.4), (2.5) и начальные данные (1.7) задачи (1.3)–(1.8) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходятся в следующем смысле*

$$\tilde{v}_\varepsilon(x, 0) \rightarrow v_0(x) \text{ в } L_2(\Omega). \quad (2.7)$$

Тогда вектор-функция $\tilde{v}_\varepsilon(x, t)$ (2.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится слабо в $L_2(\Omega) \times [0, T]$ ($\forall T > 0$) к вектор-функции $v(x, t)$ такой, что пара вектор-функций $\{v(x, t), w(x, t)\}$ есть решение следующей краевой задачи:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \Delta v + C(x)(w - v) = \nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega, t > 0; \quad (2.8)$$

$$C(x)(w - v) + \sum_{n,p,q,r} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(a_{npqr}(x) e_{qr} \left[\int_0^t w d\tau \right] \right) e^q = 0, \quad x \in \Omega, t > 0; \quad (2.9)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \partial\Omega; \quad (2.10)$$

$$v(x,t) = w(x,t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (2.11)$$

где $C(x) = 6\pi\mu r(x)$, функция $r(x)$ и тензор $\{a_{pqrs}(x)\}$ определены равенствами (2.5) и (2.4).

Доказательство теоремы проводится в §§ 3-5. С помощью преобразования Лапласа по времени задача (1.3)-(1.8) сводится к стационарной краевой задаче, зависящей от спектрального параметра λ ($\text{Re}\lambda > 0$), а затем при $\text{Im}\lambda = 0$ приводится к вариационной постановке. В §4 мы изучаем асимптотическое поведение решения этой вариационной задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получаем усредненный вариационный функционал, для которого уравнения Эйлера являются усредненными уравнениями стационарной краевой задачи, зависящей от параметра $\lambda > 0$. При этом существенно используется дискретный аналог неравенства Корна, вывод которого дан в §3. Наконец, в §5 мы изучаем аналитические свойства решений исходной и предельной задач и, применяя обратное преобразование Лапласа, получаем нестационарную усредненную задачу (2.8)-(2.11).

Замечание. Усредненную систему уравнений (2.8)-(2.9) можно трактовать как обобщение закона Бринкмана ([62], [63]) на случай протекания вязкой несжимаемой жидкости через упругую пористую среду типа тонкого каркаса.

§3. Дискретный аналог неравенства Корна

Докажем неравенство, которое играет принципиальную роль при исследовании компактности решетчатых вектор-функций – такую же как и неравенство Корна для обычных вектор-функций из пространства $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$.

Лемма 3.1. Пусть выполняются условия I, II. Тогда для любой решетчатой вектор-функции $v_\varepsilon(x)$, определенной в точках x_ε^i : $v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) = v_\varepsilon^i$, причем $v_\varepsilon^i = 0$, если $Q_\varepsilon^i \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ справедливо не-

равенство:

$$\sum'_{i,j} \langle C_{\varepsilon}^{ij} [v_{\varepsilon}^i - v_{\varepsilon}^j], [v_{\varepsilon}^i - v_{\varepsilon}^j] \rangle \geq C \left(\varepsilon \sum'_{i,j} |v_{\varepsilon}^i - v_{\varepsilon}^j|^2 + \varepsilon^3 \sum_i |v_{\varepsilon}^i|^2 \right),$$

где матрицы C_{ε}^{ij} определены равенством (1.2), сумма $\sum'_{i,j}$ берется по тем (i,j) , которые соответствуют ребрам $(x_{\varepsilon}^i, x_{\varepsilon}^j)$ триангулирующего подграфа Γ'_{ε} , а постоянная $C > 0$ не зависит от ε .

Доказательство. Обозначим через $L_{\varepsilon}^i(x)$ непрерывную в области Ω функцию, линейную в каждом симплексе $P_{\alpha\varepsilon}$ (связанном с триангулирующим подграфом Γ'_{ε}) и принимающую в точках x_{ε}^j значения: $L_{\varepsilon}^i(x_{\varepsilon}^j) = \delta_{ij}$. Очевидно, эта функция отлична от нуля лишь в симплексах с вершиной в точке x_{ε}^i . С помощью этой функции построим кусочно-линейный сплайн $w_{\varepsilon}(x)$, интерполирующий заданную решетчатую вектор-функцию $v_{\varepsilon} = \{v_{\varepsilon}^i, i=1, \dots, N_{\varepsilon}\}$:

$$w_{\varepsilon}(x) = \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} v_{\varepsilon}^i L_{\varepsilon}^i(x). \quad (3.1)$$

Поскольку в каждом симплексе $P_{\alpha\varepsilon}$ вектор-функция $w_{\varepsilon}(x)$ линейна, она представима в виде:

$$w_{\varepsilon}(x) = w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}^{\alpha}) + \sum_{n,p=1}^3 \left\{ e_{np} [w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}^{\alpha})] \varphi^{np}(x - x_{\varepsilon}^{\alpha}) + \omega_{np} [w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}^{\alpha})] \psi^{np}(x - x_{\varepsilon}^{\alpha}) \right\}, \quad x \in P_{\alpha\varepsilon}, \quad (3.2)$$

где x_{ε}^{α} – центры масс симплексов $P_{\alpha\varepsilon}$,

$$e_{np} [w(x_{\varepsilon}^{\alpha})] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial x_p}(x_{\varepsilon}^{\alpha}) + \frac{\partial w_p}{\partial x_n}(x_{\varepsilon}^{\alpha}) \right), \quad (3.3)$$

$$\omega_{np} [w(x_{\varepsilon}^{\alpha})] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_n}{\partial x_p}(x_{\varepsilon}^{\alpha}) - \frac{\partial w_p}{\partial x_n}(x_{\varepsilon}^{\alpha}) \right),$$

а вектор-функции $\psi^{np}(x)$ и $\varphi^{np}(x)$ определены равенствами:

$$\psi^{np}(x) = \frac{1}{2}(e^n x_p + e^p x_n), \quad \varphi^{np}(x) = \frac{1}{2}(e^n x_p - e^p x_n). \quad (3.4)$$

Учитывая условие II, равенство (1.2) запишем в виде:

$$C_\varepsilon^{ij} u = \frac{b_\varepsilon^{ij}}{\varepsilon} \langle u, x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j \rangle (x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j), \quad (3.5)$$

где $b_\varepsilon^{ij} = a_\varepsilon^{ij} (d_\varepsilon^{ij})^{-2}$, $0 < b \leq b_\varepsilon^{ij} \leq B < \infty$.

С помощью (3.1)-(3.4) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j}^\alpha \langle C_\varepsilon^{ij} [v_\varepsilon^i - v_\varepsilon^j], [v_\varepsilon^i - v_\varepsilon^j] \rangle = \\ & = \sum_{i,j}^\alpha \langle C_\varepsilon^{ij} [w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - w_\varepsilon(x_\varepsilon^j)], [w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - w_\varepsilon(x_\varepsilon^j)] \rangle = \\ & = \sum_{i,j}^\alpha \frac{b_\varepsilon^{ij}}{\varepsilon} \left(\sum_{n,p} e_{np} [w_\varepsilon(x_\varepsilon^\alpha) (x_{\varepsilon n}^i - x_{\varepsilon n}^j) (x_{\varepsilon p}^i - x_{\varepsilon p}^j)] \right)^2 \geq \\ & \geq \frac{6}{\varepsilon} \sum_{i,j}^\alpha \left(\sum_{n,p} e_{np} [w_\varepsilon(x_\varepsilon^\alpha) (x_{\varepsilon n}^i - x_{\varepsilon n}^j) (x_{\varepsilon p}^i - x_{\varepsilon p}^j)] \right)^2, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\sum_{i,j}^\alpha$ распространяется на 6 пар индексов (i, j) , соответствующих ребрам $(x_\varepsilon^i, x_\varepsilon^j)$ симплекса $P_{\alpha\varepsilon}$.

Рассмотрим квадратичную форму от симметричного тензора $t = \{t_{np}\}_{n,p=1}^3$ 2-го ранга в \mathbf{R}^3

$$\Phi_\varepsilon^\alpha(t) = \sum_{i,j}^\alpha \left(\sum_{n,p} \frac{(x_{\varepsilon n}^i - x_{\varepsilon n}^j)}{\varepsilon} \frac{(x_{\varepsilon p}^i - x_{\varepsilon p}^j)}{\varepsilon} t_{np} \right)^2. \quad (3.7)$$

Покажем, что на сфере $S_1 = \left\{ t : \sum_{n,p} t_{np}^2 = 1 \right\}$ она ограничена

снизу положительным числом не зависящим от ε .

Если это не верно, то найдутся числа $C_\alpha(\varepsilon) \geq 0$, $C_\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и тензоры $t^\varepsilon \in S^1$ такие, что $\Phi_\varepsilon^\alpha(t^\varepsilon) = C_\alpha(\varepsilon)$. Поэтому, согласно (3.7), найдутся числа $C_{ij}(\varepsilon)$ такие, что

$\sum_{i,j}^\alpha C_{ij}^2(\varepsilon) = C_\alpha(\varepsilon)$, а компоненты тензора $t^\varepsilon = \{t_{np}^\varepsilon, n \geq p = 1, 2, 3\}$

есть решение следующей системы из 6 линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{n,p=1}^3 \frac{(x_{\varepsilon n}^i - x_{\varepsilon n}^j)}{\varepsilon} \frac{(x_{\varepsilon p}^i - x_{\varepsilon p}^j)}{\varepsilon} t_{np}^{\varepsilon} = C_{ij}(\varepsilon).$$

Запишем ее в виде:

$$A_{\varepsilon} t^{\varepsilon} = C_{\varepsilon}, \quad (3.8)$$

где A_{ε} – матрица 6×6 с элементами $\frac{(x_{\varepsilon n}^i - x_{\varepsilon n}^j)}{\varepsilon} \frac{(x_{\varepsilon p}^i - x_{\varepsilon p}^j)}{\varepsilon}$, а

$C_{\varepsilon} = \{C_{ij}(\varepsilon)\}$, $\|C_{\varepsilon}\| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Можно показать, что модуль

определителя $\det A_{\varepsilon}$ этой матрицы равен 4-й степени объема

симплекса $P_{\alpha} = \frac{1}{\varepsilon} P_{\alpha\varepsilon}$ и, значит, согласно условию триангуля-

ции II, $|\det A_{\varepsilon}| \geq C > 0$. Кроме того, $\|A_{\varepsilon}^{-1}\| \leq \frac{6|\max A_{\varepsilon}|^5}{|\det A_{\varepsilon}|}$, где

$|\max A_{\varepsilon}|$ максимальный по модулю элемент матрицы, который

не превосходит 4. Поэтому из (3.7) получаем

$$\|t^{\varepsilon}\| \leq \|A_{\varepsilon}^{-1}\| \|C_{\varepsilon}\| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

что противоречит тому, что $t^{\varepsilon} \in S^1$.

Таким образом, равномерно по ε и α $\Phi_{\varepsilon}^{\alpha}(t^{\varepsilon}) \geq C > 0$ при

$t^{\varepsilon} \in S^1$ и, значит, из (3.5), (3.6) следует

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j}^{\alpha} \langle C_{\varepsilon}^{ij} [v_{\varepsilon}^i - v_{\varepsilon}^j], [v_{\varepsilon}^i - v_{\varepsilon}^j] \rangle \geq \\ & \geq C_1 \varepsilon^3 \sum_{n,p} e_{np}^2 [w_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}^{\alpha})] \geq C_2 \int \sum_{P_{\alpha\varepsilon}^{n,p}} e_{np}^2 [w(x)] dx. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь учтено, что вектор-функция $w_{\varepsilon}(x)$ (3.1) линейна в сим-

плексе $P_{\alpha\varepsilon}$ и $|P_{\alpha\varepsilon}| > C\varepsilon^3$.

Суммируя неравенство (3.9) по всем симплексам $P_{\alpha\varepsilon}$ и,

учитывая, что в силу условия II, каждое ребро подграфа Γ'_{ε}

при этом встречается с кратностью не превышающей некото-

рого числа не зависящего от ε , получаем:

$$\sum_{i,j} \langle C_{\varepsilon}^{ij} [v_{\varepsilon}^i - v_{\varepsilon}^j], [v_{\varepsilon}^i - v_{\varepsilon}^j] \rangle \geq C \int \sum_{\Omega^{n,p}} e_{np}^2 [w_{\varepsilon}(x)] dx, \quad (3.10)$$

где $\tilde{\Omega}$ – область такая, что $\Omega \subseteq \tilde{\Omega}$, $\bigcup_{\alpha} P_{\alpha\epsilon} \subset \tilde{\Omega}$ и вектор-функция $w_{\epsilon}(x)$ продолжена нулем вне $\bigcup_{\alpha} P_{\alpha\epsilon}$, т.е. $w_{\epsilon}(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\tilde{\Omega})$.

Воспользуемся неравенством Корна для $w_{\epsilon}(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\tilde{\Omega})$

$$\|w_{\epsilon}\|_{W_2^1(\tilde{\Omega})}^2 \leq C(\tilde{\Omega}) \int_{\tilde{\Omega}} \sum_{n,p} e_{np}^2 [w_{\epsilon}(x)] dx.$$

Тогда из (3.10) получаем:

$$\sum_{i,j} \langle C_{1\epsilon}^{ij} [v_{\epsilon}^i - v_{\epsilon}^j], [v_{\epsilon}^i - v_{\epsilon}^j] \rangle \geq C \|w_{\epsilon}\|_{W_2^1(\tilde{\Omega})}^2. \quad (3.11)$$

Отсюда, в силу специального вида $w_{\epsilon}(x)$ (3.1) и условия II, следует требуемое неравенство.

Лемма доказана.

§4. Сведение задачи к вариационной постановке

С помощью преобразования Лапласа по времени сведем задачу (1.3)-(1.8) к стационарной задаче, зависящей от спектрального параметра $\lambda \in \mathbb{C}$, $\text{Re} \lambda \geq 0$. Для простоты, для преобразований Лапласа неизвестных вектор-функций сохраним прежние обозначения: $v_{\epsilon}(x, t) \rightarrow v_{\epsilon}(x, \lambda)$, $p_{\epsilon}(x, t) \rightarrow p_{\epsilon}(x, \lambda)$, $u_{\epsilon}^i(t) \rightarrow u_{\epsilon}^i(\lambda)$, $\theta_{\epsilon}^i(t) \rightarrow \theta_{\epsilon}^i(\lambda)$. Тогда получаем следующую краевую задачу:

$$-\mu \Delta v_{\epsilon} + \lambda \rho v_{\epsilon} - \nabla p_{\epsilon} = \rho v_{\epsilon 0}, \quad \text{div } v_{\epsilon} = 0, \quad x \in \Omega_{\epsilon}; \quad (4.1)$$

$$v_{\epsilon}(x) = \lambda [u_{\epsilon}^i + \theta_{\epsilon}^i \times (x - x_{\epsilon}^i)], \quad x \in Q_{\epsilon}^i; \quad (4.2)$$

$$\lambda^2 m_{\epsilon}^i u_{\epsilon}^i + \int_{S_{\epsilon}^i} \sigma [v_{\epsilon}] dS = - \sum_j C_{\epsilon}^{ij} [u_{\epsilon}^i - u_{\epsilon}^j] + m_{\epsilon}^i v_{\epsilon 0}^i; \quad (4.3)$$

$$\lambda^2 I_{\epsilon}^i \theta_{\epsilon}^i + \int_{S_{\epsilon}^i} (x - x_{\epsilon}^i) \times \sigma [v_{\epsilon}] dS = I_{\epsilon}^i \omega_{\epsilon 0}^i; \quad (4.4)$$

$$v_{\epsilon}(x) = 0, \quad x \in \partial \Omega. \quad (4.5)$$

Мы продолжаем вектор-функции скорости $v_{\epsilon}(x, \lambda)$ на частицы Q_{ϵ}^i равенством (4.2), сохраняя за продолжением то же

обозначение $v_\varepsilon = v_\varepsilon(x, \lambda)$. Легко видеть, что $v_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и $\operatorname{div} v_\varepsilon = 0$ в Ω .

Обозначим через $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ класс соленоидальных вектор-функций из $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ равных $a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на частицах Q_ε^i , где $a_\varepsilon^i, b_\varepsilon^i$ – произвольные постоянные векторы.

Рассмотрим задачу минимизации в классе $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ следующего функционала:

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] = \int_\Omega \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_\varepsilon] + \lambda \langle \rho v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle - 2 \langle \rho_\varepsilon \tilde{v}_{\varepsilon 0}, v_\varepsilon \rangle \right\} dx + \\ + \frac{1}{\lambda} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} [v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v_\varepsilon(x_\varepsilon^j)], [v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v_\varepsilon(x_\varepsilon^j)] \rangle, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\lambda > 0$, $\rho_\varepsilon = \rho \chi_\varepsilon(x) + \rho_\varepsilon \sum_i \chi_\varepsilon^i(x)$, а $\tilde{v}_{\varepsilon 0} = \tilde{v}_\varepsilon(x, 0)$ определена равенством (2.6) при $t=0$.

Учитывая, что матрицы $C_{1\varepsilon}^{ij}$ неотрицательны, можно показать, что существует единственная вектор-функция v_ε , минимизирующая функционал (4.6) в классе $\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$ и она является решением $\{v_\varepsilon(x, \lambda) \chi_\varepsilon(x), u_\varepsilon^i + \theta_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i) = v_\varepsilon(x, \lambda) \chi_\varepsilon^i(x)\}$ задачи (4.1)-(4.5) при $\lambda > 0$.

Основная наша цель теперь состоит в исследовании асимптотического поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения $v_\varepsilon(x)$ задачи минимизации

$$\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] = \inf_{v'_\varepsilon \in \overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)} \Phi_\varepsilon[v'_\varepsilon]. \quad (4.7)$$

Обозначим через $\overset{\circ}{H}(\Omega) = \overset{\circ}{J}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ – пространство пар вектор-функций (v, w) таких, что $v \in \overset{\circ}{J}^1(\Omega)$ – соленоидальные вектор-функции из $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, а $w \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Введем на $\overset{\circ}{H}(\Omega)$

функционал

$$\begin{aligned} \Phi_0[v, w] = \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v] + \lambda \langle \rho v, v \rangle + \langle C(x)[v-w], [v-w] \rangle + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda} \sum_{n,p,q,r} a_{npqr} e_{np}[w] e_{qr}[w] - 2 \langle \rho v_0, v \rangle \right\} dx, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $v_0 = v_0(x)$ – предельная вектор-функция, определенная равенством (2.7), тензор $\{a_{npqr}(x)\}$ и функция $C(x) = 6\pi\mu r(x)$ определены условиями (2.4), (2.5), и рассмотрим задачу его минимизации

$$\Phi_0[v, w] = \inf_{(v', w') \in \dot{H}(\Omega)} \Phi_0[v', w']. \quad (4.9)$$

В силу положительной определенности тензора $\{a_{npqr}(x)\}$ и положительности функции $C(x)$ существует единственное решение $(v, w) \in \dot{H}(\Omega)$ задачи (4.9) и оно является решением следующей краевой задачи:

$$-\mu\Delta v + C[v-w] + \lambda\rho v - \nabla p = \rho v_0, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega; \quad (4.10)$$

$$-\frac{1}{\lambda} \sum_{n,p,q,r} \frac{\partial}{\partial x_p} \{a_{npqr} e_{qr}[w]\} e^n + C[w-v] = 0, \quad x \in \Omega; \quad (4.11)$$

$$v = w = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.12)$$

Покажем, что решение $v_\varepsilon(x)$ задачи (4.7) при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится (в указанном ниже смысле) к решению (v, w) задачи (4.9). Для точной формулировки результата введем специальный кусочно-линейный сплайн

$$w_\varepsilon(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) L_\varepsilon^i(x) \equiv \lambda \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} u_\varepsilon^i L_\varepsilon^i(x), \quad (4.13)$$

где $L_\varepsilon^i(x)$ – конечные элементы, порождаемые триангуляцией области Ω подграфом Γ'_ε (см. §3), а векторы $u_\varepsilon^i = u_\varepsilon^i(\lambda)$ определяются равенством (4.2).

Теорема 4.1. *Предположим, что выполняются условия I, II, (2.4), (2.5) и (2.7). Тогда решение $v_\varepsilon(x, \lambda)$ задачи (4.7) сходится*

к решению $(v(x, \lambda), w(x, \lambda))$ задачи (4.9) в следующем смысле:

$$\forall \lambda > 0$$

$$v_\varepsilon(x, \lambda) \rightarrow v(x, \lambda), \quad w_\varepsilon(x, \lambda) \rightarrow w(x, \lambda) \text{ слабо в } \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega).$$

Полное доказательство этой теоремы дано в §5. Здесь опишем кратко лишь схему доказательства. В п. 5.1. устанавливается равномерная по ε ограниченность по норме $W_2^1(\Omega)$ семейства решений задачи (4.7) $\{v_\varepsilon(x, \lambda), \varepsilon > 0\}$ и семейства сплайнов $\{w_\varepsilon(x, \lambda), \varepsilon > 0\}$ (4.13). Следовательно эти семейства слабо компактны в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ и можно выделить подпоследовательности сходящиеся слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ (и сильно в $L_2(\Omega)$) к вектор-функциям $v(x, \lambda) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ и $w(x, \lambda) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Оказывается, что пара этих вектор-функций $(v(x, \lambda), w(x, \lambda))$ минимизирует функционал (4.8) в классе $\overset{\circ}{J}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Это доказывается следующим образом. В п. 5.2 по произвольной паре вектор-функций $(\tilde{v}, \tilde{w}) \in \left(\overset{\circ}{J}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \right) \cap C_0^2(\Omega)$ строится тестовая вектор-функция $v_{\varepsilon h}(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ для задачи (4.7), зависящая от параметра h такого, что $\varepsilon \ll h \ll 1$. Поскольку $v_\varepsilon(x)$ есть решение задачи (4.7), то $\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[v_{\varepsilon h}]$. Используя явную конструкцию $v_{\varepsilon h}$, получаем

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[v_{\varepsilon h}] \leq \Phi_0[\tilde{v}, \tilde{w}], \quad (4.14)$$

где функционал $\Phi_0[\tilde{v}, \tilde{w}]$ определен формулой (4.8) и, значит, непрерывен в пространстве $\overset{\circ}{J}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Следовательно, для любой пары $(v', w') \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \leq \Phi_0[v', w']. \quad (4.15)$$

Далее, в п. 5.3. мы доказываем, что если $v \in J^1(\Omega)$ и $w \in W_2^1(\Omega)$ есть слабые пределы v_ε и w_ε по некоторой подпоследовательности $\varepsilon = \varepsilon_h \rightarrow 0$, то справедливо неравенство

$$\liminf_{\varepsilon=\varepsilon_h \rightarrow 0} \Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \geq \Phi_0[v, w]. \quad (4.16)$$

Из (4.15), (4.16), очевидно, следует, что для $\forall (v', w') \in J^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$

$$\Phi_0[v, w] \leq \Phi_0[v', w']$$

и, значит, предельная пара вектор-функций (v, w) есть решение задачи минимизации (4.9).

§5. Доказательство основной теоремы в вариационной постановке

1. Пусть $v_\varepsilon = v_\varepsilon(x, \lambda)$, $\varepsilon > 0$ есть решение задачи минимизации (4.7). Так как $0 \in J(\Omega)$, то $\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon] \leq \Phi_\varepsilon[0] = 0$ и, значит, из (4.6) следует

$$\int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_\varepsilon] + \lambda \langle \rho_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle \right\} dx + \frac{1}{\lambda} \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij}[v_\varepsilon^i - v_\varepsilon^j], [v_\varepsilon^i - v_\varepsilon^j] \rangle \leq 2 \|\rho_\varepsilon \tilde{v}_{0\varepsilon}\|_{L_2(\Omega)} \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)},$$

где $v_\varepsilon^i = v_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$.

Отсюда, учитывая, что $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $C_0 \leq \rho_\varepsilon \leq C_1$ и, применяя неравенство Корна

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_\varepsilon] + \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \right),$$

а также дискретное неравенство Корна в форме (3.11)

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq C \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij}[v_\varepsilon^i - v_\varepsilon^j], [v_\varepsilon^i - v_\varepsilon^j] \rangle,$$

с учетом (2.7), получаем

$$\|v_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \|w_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 < C. \quad (5.1)$$

Здесь $w_\varepsilon(x)$ определено равенством (4.13) (или, что то же (3.1)), а постоянная C не зависит от ε .

Из (5.1) следует, что множества вектор-функций $\{v_\varepsilon(x, \lambda), \varepsilon > 0\}$ и $\{w_\varepsilon(x, \lambda), \varepsilon > 0\}$ слабо компактны в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\forall \lambda > 0$.

Выберем подпоследовательность $\{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0\}$ такую, что при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ $v_\varepsilon(x, \lambda) \rightarrow v(x, \lambda)$ слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $w_\varepsilon(x, \lambda) \rightarrow w(x, \lambda)$ слабо в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $\forall \lambda > 0$.

Так как при $\forall \varepsilon > 0$ $v_\varepsilon(x, \lambda) \in J^1(\Omega)$ и $w_\varepsilon(x, \lambda) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, то $v(x, \lambda) \in J^1(\Omega)$ и $w(x, \lambda) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$. Покажем, что пара $(v, w) \in \overset{\circ}{H}(\Omega)$ является решением задачи (4.9). Так как эта задача в силу положительной определенности тензора $\{a_{npqr}(x)\}$ и положительности функции $C(x)$ имеет единственное решение, а множества $\{v_\varepsilon(x)\}$ и $\{w_\varepsilon(x)\}$ слабо компактны в $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, то отсюда будет следовать, что $v_\varepsilon \rightarrow v$, $w_\varepsilon \rightarrow w$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\forall \lambda$.

2. Прежде всего, установим неравенство (4.14). Покроем область Ω кубами $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ ($\alpha = 1, \dots, N_\varepsilon$) со сторонами длины h , ориентированными по координатным осям. Центры x^α этих кубов образуют периодическую решетку с периодом $h - \delta$ ($0 < \varepsilon \ll \delta \ll h$). Обозначим через $K_{h'}^\alpha = K(x^\alpha, h')$ кубы с теми же центрами x^α и сторонами длины $h' = h - 2\delta$. Ясно, что $K_{h'}^\alpha = K_h^\alpha \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_h^\beta$.

Построим разбиение единицы, связанные с покрытием $\bigcup_\alpha K_h^\alpha$, т.е. набор функций $\{\varphi_h^\alpha(x), \alpha = 1, \dots, N_h\}$ удовлетворяющих условиям: $\varphi_h^\alpha(x) \in C^2(\mathbf{R}^3)$, $0 \leq \varphi_h^\alpha(x) \leq 1$, $\varphi_h^\alpha(x) = 1$ при $x \in K_{h'}^\alpha$, $\varphi_h^\alpha(x) = 0$ при $x \in \mathbf{R}^3 \setminus K_h^\alpha$, $\sum_\alpha \varphi_h^\alpha(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}^3$, $|\nabla \varphi_h^\alpha(x)| \leq \frac{C}{\delta}$, где C

не зависит от h и δ .

Пусть $w(x)$ – произвольная вектор-функция из $C_0^2(\Omega)$. Введем дискретную вектор-функцию $w^{\varepsilon h}$ определенную в решетке $\{x_\varepsilon^i\}$ (x_ε^i – центры масс частиц Q_ε^i)

$$w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) = \sum_\alpha \left\{ w(x^\alpha) + \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w(x^\alpha)] w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_\varepsilon^i) + \sum_{n,p=1}^3 \omega_{np}[w(x^\alpha)] \varphi^{np}(x_\varepsilon^i - x^\alpha) \right\} \varphi_h^\alpha(x_\varepsilon^i), \quad (5.2)$$

где $e_{np}[w(x^\alpha)]$ и $\omega_{np}[w(x^\alpha)]$ – симметричная и антисимметричная части тензора $\nabla w(x)$ в точке $x - x^\alpha$ (см. (3.3)), а $w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x)$ – дискретная вектор-функция, минимизирующая функционал (2.1) в кубе $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ при $R = R^{np} = \frac{1}{2}(e^n \otimes e^p + e^p \otimes e^n)$.

Замечание. Данная конструкция решетчатой вектор-функции $w^{\varepsilon h}(x)$ мотивирована следующими соображениями: 1) при $h \ll 1$ и $\varepsilon < \hat{\varepsilon}(h)$ $w^{\varepsilon h}(x)$ должна быть близка к сужению вектор-функции $w(x) \in C_0^2(\Omega)$ на решетку $\{x_\varepsilon^i\}$; 2) при $h \ll 1$ и $\varepsilon < \hat{\varepsilon}(h)$ $w^{\varepsilon h}(x)$ должна «почти» минимизировать функционал (2.1) в каждом кубе $K(x^\alpha, h)$ при $R_{qr} = e_{qr}[w(x^\alpha)]$. Учитывая, что любая вектор-функция $w(x) \in C_0^2(\Omega)$ в кубе $K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ представима в виде:

$$w(x) = w(x^\alpha) + \sum \left\{ e_{np}[w(x^\alpha)] \psi^{np}(x - x^\alpha) + \omega_{np}[w(x^\alpha)] \varphi^{np}(x - x^\alpha) \right\} + O(h^2) \quad (5.3)$$

и $w^{\alpha np}(x)$ в кубе K_h^α близки к вектор-функции $\sum_{q,r} \psi^{qr}(x - x^\alpha) \delta_{qn} \delta_{pr}$ ($\psi^{np}(x)$, $\varphi^{np}(x)$ определены формулами (3.4)), нетрудно убедиться, что эти условия в определенном смысле выполняются.

Рассмотрим частицу Q_ε^i – шар радиуса r_ε^i с центром в точ-

ке x_ε^i . Предполагая, что расстояние d_ε^i от Q_ε^i до множества $\bigcup_{j \neq i} Q_\varepsilon^j \cup \partial\Omega$ удовлетворяет условию $r_\varepsilon^i \ll d_\varepsilon^i$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), будем обозначать через $B_{1\varepsilon}^i$ и $B_{2\varepsilon}^i$ концентрические с Q_ε^i шары радиусов $r_{1\varepsilon}^i = 2r_\varepsilon^i$ и $r_{2\varepsilon}^i = r_\varepsilon^i + \frac{d_\varepsilon^i}{2}$ соответственно. Рассмотрим в области $\mathbf{R}^3 \setminus Q_\varepsilon^i$ краевую задачу:

$$\mu\Delta v(x) = \nabla p(x), \quad \operatorname{div} v(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^3 \setminus Q_\varepsilon^i, \quad (5.4)$$

$$v(x) = e^k + b \times (x - x_\varepsilon^i), \quad x \in \partial Q_\varepsilon^i = S_\varepsilon^i, \quad (5.5)$$

$$\int_{S_\varepsilon^i} (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[v] dS = 0, \quad (5.6)$$

$$v(x) \in W_2^1(\mathbf{R}^3 \setminus Q_\varepsilon^i), \quad v(x) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty, \quad (5.7)$$

где e^k – орт оси x_k , b – неизвестный постоянный вектор, $\sigma[v]$ – вектор напряжений на S_ε^i .

Существует единственное решение $(v^{ik}(x), p^{ik}(x), b^{ik})$ этой задачи. Из симметрии задачи (Q_ε^i – шар) следует, что вектор b^{ik} равен нулю. При этом условие (5.6) выполняется автоматически и может быть опущено. Следовательно, задача (5.4)–(5.7) эквивалентна задаче Стокса об обтекании шара потоком вязкой несжимаемой жидкости. Для решения этой задачи получены явные формулы (см., например, [22]). Используя их, нетрудно показать, что (см. леммы 6.1.1, 6.1.2 главы 6)

$$\int_{\mathbf{R}^3} 2\mu \sum_{p,q=1}^3 e_{pq} [v^{ik}] e_{pq} [v^{il}] dx = 6\pi\mu r_\varepsilon^i \delta_{kl}, \quad (5.8)$$

$$\left| D^\alpha v_l^{ik}(x) \right| \leq \frac{A_1 r_\varepsilon^i}{|x - x_\varepsilon^i|^{1+|\alpha|}}, \quad \left| p^{ik}(x) \right| \leq \frac{A_2 r_\varepsilon^i}{|x - x_\varepsilon^i|^2}, \quad (5.9)$$

$$\int_{B_{2\varepsilon}^i} \left| D^\alpha v_l^{ik}(x) \right|^2 dx \leq A_3 \left[(r_\varepsilon^i)^{3-2|\alpha|} + (r_\varepsilon^i)^2 (d_\varepsilon^i)^{1-2|\alpha|} \right]. \quad (5.10)$$

Здесь $\{v^{ik}(x), p^{ik}(x)\}$ – решение задачи (5.4)–(5.7) при $b=0$, причем скорость $v^{ik}(x)$ продолжена на Q_ε^i равенством (5.5), δ_{kl} –

символ Кронекера; $v_l^{ik}(x)$ – l -компонента $v^{ik}(x)$; $|\alpha|=0,1,2$; постоянные A_i ($i=1,2,3$) не зависят от ε и в неравенствах (5.9) $x \in B_{2\varepsilon}^i \setminus B_{1\varepsilon}^i$.

Пусть $v(x)$ – произвольная соленоидальная вектор-функция класса $J(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$, а $v^{ik}(x)$ – вектор-скорость задачи (5.3)-(5.6) при $b=0$ продолженный на Q_ε^i равенством $v^{ik}(x) = e^k$ так, что $\operatorname{div} v^{ik}(x) = 0$ в \mathbf{R}^3 .

В соответствии с теоремой 6.1.2 введем вектор-функции $\tilde{v}^i \in J(B_{1\varepsilon}^i) \cap W_2^1(B_{1\varepsilon}^i)$ и $\tilde{v}^{ik} \in J(B_{2\varepsilon}^i) \cap W_2^1(B_{2\varepsilon}^i)$, удовлетворяющие равенствам:

$$\operatorname{rot} \tilde{v}^i(x) = v(x_\varepsilon^i) - v(x), \quad x \in B_{1\varepsilon}^i; \quad \operatorname{rot} \tilde{v}^{ik}(x) = v^{ik}(x), \quad x \in B_{2\varepsilon}^i. \quad (5.11)$$

Теперь по заданным $v(x) \in J(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$ и $w(x) \in C_0^2(\Omega)$ построим тестовую вектор-функцию $v_{\varepsilon h} \in J(\Omega)$:

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon h}(x) = & v(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \operatorname{rot}[\tilde{v}^i(x)\varphi_{1\varepsilon}(x)] + \\ & + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 [w_k^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) - v_k(x_\varepsilon^i)] \operatorname{rot}[\tilde{v}^{ik}(x)\varphi_{1\varepsilon}(x)]. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь $v_k(x)$ и $w_k^{\varepsilon h}(x)$ ($k=1,2,3$) k -компоненты вектор-функции $v(x)$ и решетчатой вектор-функции $w^{\varepsilon h}(x)$, построенной согласно (5.2) по вектор-функции $w(x)$;

$$\varphi_{1\varepsilon}^i(x) = \varphi\left(\frac{|x - x_\varepsilon^i|}{r_{1\varepsilon}^i}\right), \quad \varphi_{2\varepsilon}^i(x) = \varphi\left(\frac{|x - x_\varepsilon^i|}{r_{2\varepsilon}^i}\right),$$

$r_{1\varepsilon}^i, r_{2\varepsilon}^i$ – радиусы шаров $B_{1\varepsilon}^i, B_{2\varepsilon}^i$ соответственно, а функция $\varphi(r) \in C_0^2(0, \infty)$ равна 1 при $r < \frac{1}{2}$ и 0 при $r > 1$.

Из (5.5), (5.11) и (5.12) и свойств функций $\varphi_{1\varepsilon}^i(x), \varphi_{2\varepsilon}^i(x)$ следует, что $v_{\varepsilon h}(x) \in W_2^1(\Omega)$, $\operatorname{div} v_{\varepsilon h}(x) = 0$ при $x \in \Omega$, $v_{\varepsilon h}(x) = w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i)$

при $x \in Q_\varepsilon^i$. Следовательно $v_{\varepsilon h}(x) \in J(\Omega)$.

Замечание. Вектор-функция $v_{\varepsilon h}(x)$ обладает такими свойствами: 1) при достаточно малых h и $\varepsilon < \hat{\varepsilon}(h)$ она близка к первой заданной вектор-функции $v(x)$ в норме $L_2(\Omega)$; 2) $v_{\varepsilon h}(x)$ близка к $v(x)$ вдали от частиц, но ее ограничения на решетку $\{x_\varepsilon^i\}$ совпадает с решетчатой функцией $w^{\varepsilon h}(x)$, которая аппроксимирует вторую заданную вектор-функцию $w(x)$ и «почти» минимизирует функционал (2.1) в каждом кубе $K(x^\alpha, h)$ при $R_{np} = e_{np}[w(x^\alpha)]$. Последнее свойство позволяет оценить левую часть неравенства (4.14) и тем самым получить выражение для правой части через мезохарактеристики (2.4).

Чтобы оценить $\Phi_\varepsilon[v_{\varepsilon h}]$ (функционал Φ_ε определен формулой (4.6)) перепишем (5.12) в ином виде, выделив слагаемые, которые дают исчезающий при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ вклад в $\Phi_\varepsilon[v_{\varepsilon h}]$:

$$v_{\varepsilon h}(x) = v(x) + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 [w_k(x_\varepsilon^i) - v_k(x_\varepsilon^i)] v^{ik}(x) \varphi_{2\varepsilon}^i + \sum_{s=1}^5 \delta_{\varepsilon h}^s(x). \quad (5.13)$$

Здесь слагаемые $\delta_{\varepsilon h}^s(x)$, дающие исчезающий вклад, определены следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{\varepsilon h}^1(x) &= \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 [w_k^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) - w_k(x_\varepsilon^i)] v^{ik}(x) \varphi_{2\varepsilon}^i(x), \\ \delta_{\varepsilon h}^2(x) &= \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 [w_k^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) - v_k(x_\varepsilon^i)] \tilde{v}^{ik}(x) \times \nabla \varphi_{2\varepsilon}^i(x), \\ \delta_{\varepsilon h}^3(x) &= \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 [w_k^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) - w_k(x_\varepsilon^i)] \tilde{v}^{ik}(x) \times \nabla \varphi_{2\varepsilon}^i(x), \\ \delta_{\varepsilon h}^4(x) &= \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} [v(x_\varepsilon^i) - v(x)] \varphi_{1\varepsilon}^i(x), \\ \delta_{\varepsilon h}^5(x) &= \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \tilde{v}^i(x) \times \nabla \varphi_{1\varepsilon}^i(x). \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Учитывая, что носители функций $\varphi_{2\varepsilon}^i(x)$ ($i=1, 2, \dots, N_\varepsilon$) не пересекаются, получаем

$$\int_{\Omega} 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_{\varepsilon h}] dx = \int_{\Omega} 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v] dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \sum_{p,q=1}^3 C_{pq}^{i\varepsilon} (w_p(x_{\varepsilon}^i) - v_p(x_{\varepsilon}^i))(w_q(x_{\varepsilon}^i) - v_q(x_{\varepsilon}^i)) + \Delta(\varepsilon, h), \quad (5.15)$$

где

$$C_{pq}^{i\varepsilon} = \int_{\Omega} 2\mu \sum e_{kl} [v^{ip} \varphi_{2\varepsilon}^i] e_{kl} [v^{iq} \varphi_{2\varepsilon}^i] dx, \quad (5.16)$$

$$\Delta(\varepsilon, h) = \sum_{r,s=1}^5 \int_{\Omega} 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl} [\delta_{\varepsilon h}^r] e_{kl} [\delta_{\varepsilon h}^s] dx +$$

$$+ \sum_{s=1}^5 \int_{\Omega} 4\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl} [v + \delta_{\varepsilon h}^s] e_{kl} [\delta_{\varepsilon h}^s] dx + \int_{\Omega} 4\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl} [v] e_{kl} [\delta_{\varepsilon h}] dx. \quad (5.17)$$

Здесь введено обозначение $\delta_{\varepsilon h} = \sum_{s=1}^5 \delta_{\varepsilon h}^s(x)$.

Далее нам понадобится следующая лемма, являющаяся дискретным аналогом леммы 2.1.1 (глава 2). Ее доказательство проводится аналогично (см., например, [55])

Лемма 5.1. *При достаточно малых h и $\varepsilon < \hat{\varepsilon}(h)$ решетчатая вектор-функция $w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x)$, минимизирующая функционал (2.1) в кубе K_h^{α} при $R = R^{np}$, имеет следующие оценки:*

$$\sum_{i,j} K_h^{\alpha} \left\langle C_{\varepsilon}^{ij} [w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^i) - w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^j)], [w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^i) - w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^j)] \right\rangle = O(h^3),$$

$$\sum_i K_h^{\alpha} \left| w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi^{np}(x_{\varepsilon}^i - x^{\alpha}) \right|^2 \varepsilon^3 = O(h^{5+\gamma}),$$

$$\sum_{i,j} K_h^{\alpha} \setminus K_{h'}^{\alpha} \left\langle C_{\varepsilon}^{ij} [w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^i) - w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^j)], [w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^i) - w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^j)] \right\rangle = o(h^3),$$

$$\sum_i K_h^{\alpha} \setminus K_{h'}^{\alpha} \left| w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi^{np}(x_{\varepsilon}^i - x^{\alpha}) \right|^2 \varepsilon^3 = o(h^{5+\gamma}),$$

где $K_{h'}^{\alpha} = K(x^{\alpha}, h')$ – куб с центром в точке x^{α} и стороной длины

$$h' = h - 2h^{1+\frac{\gamma}{2}} \quad (K_{h'}^{\alpha} = K_h^{\alpha} \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} K_h^{\beta}).$$

Пользуясь этой леммой, а также свойствами функций $\varphi_{1\varepsilon}^i(x)$, $\varphi_{2\varepsilon}^i(x)$, $\varphi_h^{\alpha}(x)$ и неравенствами (5.9), (5.10), с учетом (5.2), (5.3), (5.14), получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [\delta_{\varepsilon h}^s] dx = 0, \quad s=1,2,\dots,5, \quad (5.18)$$

откуда, согласно (5.17), следует

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(\varepsilon, h) = 0. \quad (5.19)$$

Продемонстрируем доказательство (5.18) только для $s=1,2$. Поскольку носители $B_{2\varepsilon}^i$ функций $\varphi_{2\varepsilon}^i$ не пересекаются, из (5.14) следует

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [\delta_{\varepsilon h}^1] dx &\leq 2 \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \sum_{q=1}^3 \left| w_q^{\varepsilon h}(x_{\varepsilon}^i) - w_q(x_{\varepsilon}^i) \right|^2 \int_{B_{2\varepsilon}^i} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [v^{iq} \varphi_{2\varepsilon}^i] dx \leq \\ &\leq C \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \sum_{q=1}^3 \left| w_q^{\varepsilon h}(x_{\varepsilon}^i) - w_q(x_{\varepsilon}^i) \right|^2 \int_{B_{2\varepsilon}^i} \left\{ |\nabla v^{iq}|^2 \varphi_{2\varepsilon}^i + |v^{iq}|^2 |\nabla \varphi_{2\varepsilon}^i|^2 \right\} dx. \end{aligned}$$

Пользуясь неравенствами (5.9), (5.10) и учитывая свойства функций $\varphi_{2\varepsilon}^i(x)$ и геометрией множества частиц $\{Q_{\varepsilon}^i, i=1,\dots,N_{\varepsilon}\}$ ($r_{\varepsilon}^i < C\varepsilon^3$, $d_{\varepsilon}^i \gg r_{\varepsilon}^i$), получаем:

$$\int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [\delta_{\varepsilon h}^1] dx \leq C_1 \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \left| w^{\varepsilon h}(x_{\varepsilon}^i) - w(x_{\varepsilon}^i) \right|^2 \varepsilon^3. \quad (5.20)$$

Согласно (5.2), (5.3) при $x_{\varepsilon}^i \in K(x^{\alpha}, h)$

$$\left| w^{\varepsilon h}(x_{\varepsilon}^i) - w(x_{\varepsilon}^i) \right|^2 \leq C_2 \sum_{n,p=1}^3 \left| w^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi^{np}(x_{\varepsilon}^i - x^{\alpha}) \right|^2 + O(h^4), \quad (5.21)$$

а, так как $N_{\varepsilon} = O(\varepsilon^{-3})$, то из (5.20), (5.21) и леммы 5.1 следует (5.18) при $s=1$.

Чтобы получить (5.18) при $s=2$, воспользуемся неравенствами (6.1.20), (6.1.21) (глава 6) для $u(x) = v^{iq}(x)$. Тогда, аналогично предыдущему, с помощью неравенства (5.10), получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2 [\delta_{\varepsilon h}^2] dx &\leq C_1 \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \sum_{q=1}^3 \left\{ \left\| \nabla \tilde{v}^{iq} \right\|_{L_2(B_{2\varepsilon}^i)}^2 (d_{\varepsilon}^i)^{-2} + \left\| \tilde{v}^{iq} \right\|_{L_2(B_{2\varepsilon}^i)}^2 (d_{\varepsilon}^i)^{-4} \right\} \leq \\ &\leq C_2 \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \sum_{k=1}^3 \left\| \nabla v^{iq} \right\|_{L_2(B_{2\varepsilon}^i)}^2 (d_{\varepsilon}^i)^{-2} \leq C_3 \sum_{i=1}^{N_{\varepsilon}} \frac{(r_{\varepsilon}^i)^2}{d_{\varepsilon}^i} = o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и, значит, (5.18) выполняется и при $s=2$. При $s=3,4,5$ равенст-

ва (5.18) доказываются таким же образом. Аналогично, с помощью (5.13), (5.14) и (5.2), пользуясь неравенствами (6.1.20) (глава 6) и (5.9), (5.10) и леммой 5.1, устанавливаем равенства

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v_{\varepsilon h} - v\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0. \quad (5.22)$$

Наконец, учитывая (5.8), (5.16) и свойства функций $\varphi_{2\varepsilon}^i(x)$, получаем следующие асимптотические формулы

$$C_{pq}^{i\varepsilon} = 6\pi\mu r_\varepsilon^i \delta_{pq} + O(\varepsilon^4) \quad (\varepsilon \rightarrow 0). \quad (5.23)$$

Собирая (5.15), (5.17), (5.22), (5.23) вместе можно сделать предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ в интегральном слагаемом функционала $\Phi_\varepsilon[v_\varepsilon]$ (4.6) при $v_\varepsilon = v_{\varepsilon h}$. Тогда, с учетом условия (2.5), (2.7), получим

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v_{\varepsilon h}] + \lambda \langle \rho_\varepsilon v_{\varepsilon h}, v_{\varepsilon h} \rangle - 2 \langle \rho_\varepsilon \tilde{v}_{\varepsilon 0}, v_{\varepsilon h} \rangle \right\} dx = \\ & = \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v] + \lambda \langle \rho v, v \rangle + \langle C(x)[w-v], [w-v] \rangle - 2 \langle \rho v_0, v \rangle \right\} dx, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где $C(x) = 6\pi\mu r(x)$.

Теперь рассмотрим второе слагаемое (сумму $\sum_{i,j}^{\varepsilon h} \equiv \sum^{\varepsilon h}$) в функционале (4.6) при $v_\varepsilon = v_{\varepsilon h}$.

Согласно (5.12) $v_{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) = w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i)$ и, значит, эту сумму можно записать в виде:

$$\sum_{i,j}^{\varepsilon h} = \sum_{i,j} \langle C_\varepsilon^{ij} [w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) - w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^j)], [w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) - w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^j)] \rangle. \quad (5.25)$$

Учитывая, что $\sum_{\alpha} \varphi_h^\alpha(x) = 1$ при $x \in \Omega$, с помощью (5.2) получаем:

$$\begin{aligned} w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i) - w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^j) &= \sum_{\alpha} [\hat{w}_{\varepsilon h}^\alpha(x_\varepsilon^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^\alpha(x_\varepsilon^j)] \varphi_h^\alpha(x_\varepsilon^i) + \\ &+ \sum_{\alpha} [\hat{w}_{\varepsilon h}^\alpha(x_\varepsilon^j) - w(x_\varepsilon^j)] [\varphi_h^\alpha(x_\varepsilon^i) - \varphi_h^\alpha(x_\varepsilon^j)], \end{aligned} \quad (5.26)$$

где через $\hat{w}_{\varepsilon h}^\alpha(x_\varepsilon^i)$ обозначено выражение, стоящее в фигурных скобках (5.2).

Из (5.25), (5.26) следует, что

$$\begin{aligned}
& \sum^{\varepsilon h} = \\
& = \sum_{\alpha, \beta} \sum_{i, j} \langle C_{\varepsilon}^{ij} [\hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)], [\hat{w}_{\varepsilon h}^{\beta}(x_{\varepsilon}^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^{\beta}(x_{\varepsilon}^j)] \rangle \varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) \varphi_h^{\beta}(x_{\varepsilon}^j) + \\
& + \sum_{\alpha, \beta} \sum_{i, j} \langle C_{\varepsilon}^{ij} \Delta_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i), \Delta_{\varepsilon h}^{\beta}(x_{\varepsilon}^j) \rangle [\varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)] [\varphi_h^{\beta}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi_h^{\beta}(x_{\varepsilon}^j)] + \quad (5.27) \\
& + 2 \sum_{\alpha, \beta} \sum_{i, j} \langle C_{\varepsilon}^{ij} [\hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)], \Delta_{\varepsilon h}^{\beta}(x_{\varepsilon}^j) \rangle [\varphi_h^{\beta}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi_h^{\beta}(x_{\varepsilon}^j)] \varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) = \\
& = \sum_1^{\varepsilon h} + \sum_2^{\varepsilon h} + \sum_3^{\varepsilon h},
\end{aligned}$$

где $\Delta_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) = \hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - w(x_{\varepsilon}^i)$.

Покажем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_1^{\varepsilon h} \leq \int_{\Omega} \sum_{n, p, q, r=1}^3 a_{npqr}(x) e_{np}[w] e_{qr}[w] dx, \quad (5.28)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_2^{\varepsilon h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \sum_3^{\varepsilon h} \right| = 0. \quad (5.29)$$

Заметим, что второе равенство (5.29) следует из первого и неравенства (5.28), поскольку

$$\left| \sum_3^{\varepsilon h} \right| \leq 2 \left(\sum_1^{\varepsilon h} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_2^{\varepsilon h} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая свойства разбиения единицы $\{\varphi_h^{\alpha}(x)\}$, получаем

$$\begin{aligned}
\sum_1^{\varepsilon h} & \leq \sum_{\alpha} \sum_{i, j} K_h^{\alpha} \langle C_{\varepsilon}^{ij} [\hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)], [\hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)] \rangle + \\
& + \sum_{\alpha} \sum_{i, j} K_h^{\alpha} K_h^{\alpha} \langle C_{\varepsilon}^{ij} [\hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)], [\hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)] \rangle = \quad (5.30) \\
& = \sum_{11}^{\varepsilon h} + \sum_{12}^{\varepsilon h}.
\end{aligned}$$

Вспомянув определение $\hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x)$ (см. фигурные скобки в (5.2)) и учитывая, что $\omega_{np}[w(x^{\alpha})] \psi^{np}(x_{\varepsilon}^i - x^{\alpha}) = g^{\alpha np} \times (x - x^{\alpha})$ (см. (2.1.30)), запишем

$$\begin{aligned}
& \hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j) = \\
& = \sum_{n, p=1}^3 e_{np}[w(x^{\alpha})] [w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^i) - w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^j)] + g^{\alpha} \times (x_{\varepsilon}^i - x_{\varepsilon}^j), \quad (5.31)
\end{aligned}$$

где $g^\alpha = \sum_{n,p} g^{\alpha np}$ – постоянный вектор, а $w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x)$ – дискретная вектор-функция, минимизирующая функционал (2.1) в кубе K_h^α .

Отсюда, в силу (1.2), следует, что

$$C_\varepsilon^{ij}[\hat{w}_{\varepsilon h}^\alpha(x_\varepsilon^i) - \hat{w}_{\varepsilon h}^\alpha(x_\varepsilon^j)] = \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w(x^\alpha)] C_\varepsilon^{ij}[w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_\varepsilon^i) - w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_\varepsilon^j)]. \quad (5.32)$$

Теперь подставим (5.31) и (5.32) в (5.30). Пользуясь леммой 5.1 и учитывая, что $C_\varepsilon^{ij} = 0$, если $|x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j| > C\varepsilon$ (см. §1), получаем

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{12}^{\varepsilon h} = 0. \quad (5.33)$$

Из (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{11}^{\varepsilon h} &= \sum_{\alpha} \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w(x^\alpha)] e_{qr}[w(x^\alpha)] \times \\ &\times \sum_{i,j} \sum_{K_h^\alpha} \left\langle C_\varepsilon^{ij}[w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_\varepsilon^i) - w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_\varepsilon^j)], [w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_\varepsilon^i) - w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_\varepsilon^j)] \right\rangle + O(\varepsilon) \leq \\ &\leq \sum_{\alpha} \sum_{n,p,q,r=1}^3 e_{np}[w(x^\alpha)] e_{qr}[w(x^\alpha)] a_{npqr}(x, \varepsilon, h) + O(\varepsilon) \end{aligned}$$

и, значит, в силу гладкости $w(x)$ и условия (2.4)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{11}^{\varepsilon h} \leq \int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r=1}^3 a_{npqr}(x) e_{np}[w] e_{qr}[w] dx. \quad (5.34)$$

Из (5.30), (5.33) и (5.34) следует неравенство (5.28).

Теперь оценим $\sum_2^{\varepsilon h}$. В силу определения $\hat{w}_{\varepsilon h}^\alpha(x)$ (см. фигурные скобки в (5.2)) и равенства (5.3), имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\varepsilon h}^\alpha(x_\varepsilon^i) &= \hat{w}_{\varepsilon h}^\alpha(x_\varepsilon^i) - w(x_\varepsilon^i) = \\ &= \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w(x^\alpha)] [w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_\varepsilon^i) - \psi^{np}(x_\varepsilon^i - x^\alpha)] + O(h^2). \end{aligned}$$

Пользуясь этим равенством, определениями $\sum_2^{\varepsilon h}$ (см. (5.27))

и матриц C_ε^{ij} (1.2) и учитывая свойства разложения единицы

$\{\varphi_h^\alpha(x)\}$, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_2^{\varepsilon h} \leq C_1 \varepsilon \sum_{\alpha} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}' \sum_{n,p} |w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^j) - \psi^{np}(x_{\varepsilon}^j - x^{\alpha})|^2 |\varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)|^2 + \\ + C_2 \varepsilon h^4 \sum_{\alpha} \sum_{i,j}' |\varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)|^2, \end{aligned} \quad (5.35)$$

где суммы $\sum_{i,j}'$ распространены на пары (i, j) , для которых

$|x_{\varepsilon}^i - x_{\varepsilon}^j| \leq C\varepsilon$. Так как $\varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j) = 0$ при $x_{\varepsilon}^i, x_{\varepsilon}^j \in K_h^{\alpha}$ и

$|\varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)| \leq C\varepsilon\delta^{-1}$, если $x_{\varepsilon}^i \in K_h^{\alpha} \setminus K_{h'}^{\alpha}$, или $x_{\varepsilon}^j \in K_h^{\alpha} \setminus K_{h'}^{\alpha}$, то из

(5.35) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_2^{\varepsilon h} \leq C\delta^{-2} \sum_{\alpha} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}'_{K_h^{\alpha} \setminus K_{h'}^{\alpha}} |w_{\varepsilon h}^{\alpha np}(x_{\varepsilon}^j) - \psi^{np}(x_{\varepsilon}^j - x^{\alpha})|^2 \varepsilon^2 + \\ + C\varepsilon h^4 \sum_{\alpha} \sum_{i,j}'_{K_h^{\alpha} \setminus K_{h'}^{\alpha}} |\varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^i) - \varphi_h^{\alpha}(x_{\varepsilon}^j)|^2, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где постоянная C не зависит от ε , δ и h .

С помощью леммы 5.1 нетрудно убедиться, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ первая сумма в (5.36) имеет порядок $o(h^{2+\tau}\delta^{-2})$, а вторая – по-

рядок $O(h^3\delta^{-1})$. Выбирая $\delta = h^{1+\frac{\tau}{2}}$ при $0 < \tau < 2$, приходим у первому равенству (5.29).

Таким образом, согласно (5.27)-(5.29), имеем

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum^{\varepsilon h} \leq \int_{\Omega} \sum_{n,p,q,r} a_{npqr}(x) e_{np}[w] e_{qr}[w] dx. \quad (5.37)$$

Наконец, учитывая (4.6), (5.24), (5.37) и (4.8), приходим к требуемому неравенству (4.14).

3. Докажем теперь неравенство (4.16). Пусть $v(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega)$ и $w(x) \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ есть, соответственно, слабые пределы при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ в $H^1(\Omega)$ решений $v_{\varepsilon}(x)$ задачи (4.7) и вектор-функции $w_{\varepsilon}(x)$, определенной равенством (4.13). Предположим сначала, что $v(x) \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \cap C_0^2(\Omega)$ и $w(x) \in C_0^2(\Omega)$.

Разобьем область Ω на непересекающиеся кубы

$K_h^\alpha = K(x^\alpha, h)$ с центрами в точках x^α , образующую кубическую решетку периода h . В каждом таком кубе введем дискретную вектор-функцию:

$$w_\varepsilon^\alpha(x_\varepsilon^i) = w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - (w(x^\alpha) + g^\alpha \times (x_\varepsilon^i - x^\alpha)), \quad (5.38)$$

где $x_\varepsilon^i \in K_h^\alpha$, $g^\alpha = \sum_{n,p} g^{\alpha np}$, а вектор $g^{\alpha np}$ определен в (2.1.30).

Согласно (2.1)-(2.2), для любого тензора $R = \{R_{np}\}_{n,p=1}^3$ имеем:

$$A(w_\varepsilon^\alpha, x^\alpha; R) \geq \sum_{n,p,q,r} a_{npqr}(x^\alpha, \varepsilon, h) R_{np} R_{qr}.$$

Выбирая $R_{np} = e_{np}[w(x^\alpha)]$ и подставляя (5.38) в (2.1), получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{i,j \\ j \neq i}} K_h^\alpha \left\langle C_\varepsilon^{ij} [w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - w_\varepsilon(x_\varepsilon^j)], [w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - w_\varepsilon(x_\varepsilon^j)] \right\rangle + \\ & + h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \sum_i K_h^\alpha \left| w_\varepsilon^\alpha(x_\varepsilon^i) - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w(x^\alpha)] \psi^{np}(x_\varepsilon^i - x^\alpha) \right|^2 \geq \quad (5.39) \\ & \geq \sum_{n,p,q,r} a_{npqr}(x^\alpha, \varepsilon, h) e_{np}[w(x^\alpha)] e_{qr}[w(x^\alpha)]. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое в левой части (5.39). Из (5.38) и (5.3) следует, что

$$\begin{aligned} & h^{-2-\tau} \varepsilon^3 \sum_i K_h^\alpha \left| w_\varepsilon^\alpha(x_\varepsilon^i) - \sum_{n,p=1}^3 e_{np}[w(x^\alpha)] \psi^{np}(x_\varepsilon^i - x^\alpha) \right|^2 \leq \quad (5.40) \\ & \leq 2h^{-2-\tau} \sum_i K_h^\alpha |w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - w(x_\varepsilon^i)|^2 \varepsilon^3 + O(h^{5-\tau}). \end{aligned}$$

Так как $w(x) \in C_0^2(\Omega)$ и вектор-функция $w_\varepsilon(x) \in H^1(\Omega) \cap C(\Omega)$ ограничена в $H^1(\Omega)$ равномерно по ε , то

$$\sum_i K_h^\alpha |w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - w(x_\varepsilon^i)|^2 \varepsilon^3 \leq C \int_{K_h^\alpha} |w_\varepsilon(x) - w(x)|^2 dx,$$

где C не зависит от ε . Отсюда, учитывая, что $w(x)$ есть слабый предел $w_\varepsilon(x)$ в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ и применяя теорему вложения, получаем:

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2+\tau}} \sum_i K_h^\alpha |w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - w(x_\varepsilon^i)|^2 \varepsilon^3 = 0. \quad (5.41)$$

Из (5.39)-(5.41) следует неравенство:

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \sum_{i,j} K_h^\alpha \left\langle C_\varepsilon^{ij} [w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - w_\varepsilon(x_\varepsilon^j)], [w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - w_\varepsilon(x_\varepsilon^j)] \right\rangle \geq \\ & \geq \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \sum_{n,p,q,r} a_{npqr}(x^\alpha, \varepsilon, h) e_{np}[w(x^\alpha)] e_{qr}[w(x^\alpha)], \end{aligned}$$

с помощью которого, пользуясь условием (2.4) и вспоминая, что $w(x) \in C_0^2(\Omega)$ и $w_\varepsilon(x_\varepsilon^i) = v_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$, приходим к такой оценке снизу для суммы в функционале (4.6)

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \sum_{i,j} \left\langle C_\varepsilon^{ij} [v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v_\varepsilon(x_\varepsilon^j)], [v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v_\varepsilon(x_\varepsilon^j)] \right\rangle \geq \\ & \geq \int \sum_{\Omega^{n,p,q,r}} a_{npqr}(x) e_{np}[w(x)] e_{qr}[w(x)]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Оценим теперь интеграл в (4.6). Пусть $v_\varepsilon(x)$ – минимизант функционала (4.6) в классе $J_\varepsilon^\circ(\Omega)$. Обозначим через $J_{1\varepsilon}^\circ(\Omega)$ класс соленоидальных вектор-функций из $H^1(\Omega)$ равных $v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на Q_ε^i . Здесь $v_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$ – заданный постоянный вектор, а b_ε^i – произвольный постоянный вектор.

Пусть $v_\varepsilon^1(x)$ – минимизант функционала

$$\Phi_{1\varepsilon}[v_\varepsilon^1] = \int \left\{ 2\mu \sum_{k,l} e_{kl}^2[v_\varepsilon^1] + \lambda \langle \rho_\varepsilon v_\varepsilon^1, v_\varepsilon^1 \rangle - 2 \langle \rho_\varepsilon v_{\varepsilon 0}, v_\varepsilon^1 \rangle \right\} dx \quad (5.43)$$

в классе $J_{1\varepsilon}^\circ(\Omega)$. Тогда из (4.6) и определения $J_{1\varepsilon}^\circ(\Omega)$ следует, что $v_\varepsilon^1(x) \equiv v_\varepsilon(x)$. Будем искать $v_\varepsilon^1(x)$ в виде

$$v_\varepsilon^1(x) = v_{1\varepsilon}(x) + \zeta_\varepsilon(x) \quad (\equiv v_\varepsilon), \quad (5.44)$$

где вектор-функция $v_{1\varepsilon}(x)$ определена равенством (5.12) с заменой $w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i)$ на $v_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$. Пользуясь равенствами (5.5), (5.11), (5.12) нетрудно проверить, что $v_{1\varepsilon}(x)$ равна $v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на Q_ε^i и, значит, $v_{1\varepsilon}(x) \in J_{1\varepsilon}^\circ(\Omega)$. Отсюда следует, что вектор-функция $\zeta_\varepsilon(x)$ должна минимизировать функционал

$$\begin{aligned} \Phi_{0\varepsilon}[\zeta_\varepsilon] = \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l} e_{kl}^2[\zeta_\varepsilon] + 4\mu \sum_{k,l} e_{kl}[v_{1\varepsilon}]e_{kl}[\zeta_\varepsilon] + \lambda \langle \rho_\varepsilon \zeta_\varepsilon, \zeta_\varepsilon \rangle + \right. \\ \left. + 2\lambda \langle \rho_\varepsilon v_{1\varepsilon}, \zeta_\varepsilon \rangle - 2 \langle \rho_\varepsilon v_{\varepsilon 0}, \zeta_\varepsilon \rangle \right\} dx \end{aligned} \quad (5.45)$$

в классе $J_{0\varepsilon}^\circ(\Omega)$ соленоидальных вектор-функций из $H^1(\Omega)$ равных $b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на Q_ε^i .

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \Phi_{0\varepsilon}[\zeta_\varepsilon] = 0. \quad (5.46)$$

Сначала преобразуем $v_{1\varepsilon}(x)$ к виду (5.13), (5.14), где $w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i)$ заменено на $v_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$. Пользуясь этим представлением, неравенствами (5.9), (5.10) и учитывая слабую сходимость в $H^1(\Omega)$ $w_\varepsilon(x)$ (см. (4.13)) к $w(x)$ при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \|v_{1\varepsilon} - v\|_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (5.47)$$

Так как v_ε сходится к v слабо в $H^1(\Omega)$ при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ (и, значит, $v_{1\varepsilon}(x) \rightarrow v(x)$ сильно в $L_2(\Omega)$) из (5.44) и (5.47) следует, что

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \|\zeta_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (5.48)$$

и, учитывая (5.5), (2.7) и неравенство $|\rho_\varepsilon(x)| < C$, заключаем, что интегралы от третьего, четвертого и пятого слагаемых в (5.45) стремятся к нулю при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$.

Остается оценить интегралы от первых двух слагаемых.

Так как $\zeta_\varepsilon \in J_{0\varepsilon}^\circ(\Omega)$ и, значит, $\Phi_{0\varepsilon}[\zeta_\varepsilon] \leq \Phi_{0\varepsilon}[0] = 0$, то из (5.45) следует, что при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[\zeta_\varepsilon] dx \leq \left| \int_{\Omega} 4\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[v_{1\varepsilon}]e_{kl}[\zeta_\varepsilon] dx \right| + o(1). \quad (5.49)$$

Преобразуем правую часть этого неравенства с помощью интегрирования по частям. Учитывая, что $\zeta_\varepsilon = b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на Q_ε^i и, значит, интеграл по Ω берется лишь по подобласти

$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_i Q_\varepsilon^i$, а $v_{1\varepsilon} \in J_\varepsilon(\Omega) \cap C^2(\Omega_\varepsilon)$, получаем

$$\int_{\Omega} 4\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[v_{1\varepsilon}] e_{kl}[\zeta_\varepsilon] dx = -2 \int_{\Omega} \mu \langle \Delta v_{1\varepsilon}, \zeta_\varepsilon \rangle dx + 2 \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{S_\varepsilon^i} \langle \sigma^0[v_{1\varepsilon}], \zeta_\varepsilon \rangle dS,$$

где $\sigma^0[v_{1\varepsilon}] = 2\mu \sum_{l=1}^3 e_{kl}[v_{1\varepsilon}] \cdot n_l$ – вектор вязких напряжений на сферах $S_\varepsilon^i = \partial Q_\varepsilon^i$. Пользуясь формулами (5.13), (5.14) для $v_{1\varepsilon}(x)$ (с заменой $w^{eh}(x_\varepsilon^i)$ на $v_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$), запишем это равенство в виде:

$$\int_{\Omega} 4\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}[v_{1\varepsilon}] e_{kl}[\zeta_\varepsilon] dx = \sum_{l=1}^6 I_{l\varepsilon}, \quad (5.50)$$

где

$$I_{1\varepsilon} = - \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i \langle \Delta v^{ik}, \zeta_\varepsilon \rangle \varphi_{2\varepsilon}^i dx + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} 2 \int_{S_\varepsilon^i} \langle \sigma^0[v_{1\varepsilon}], \zeta_\varepsilon \rangle dS,$$

$$I_{2\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \langle \Delta v, \zeta_\varepsilon \rangle dx,$$

$$I_{3\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i \left\langle \sum_{\substack{|\alpha+\beta|=2 \\ |\alpha|<2}} C_{\alpha\beta} D^\alpha v^{ik} D^\beta \varphi_{2\varepsilon}^i, \zeta_\varepsilon \right\rangle dx,$$

$$I_{4\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i \left\langle \sum_{|\alpha+\beta|=2} C_{\alpha\beta} D^\alpha \tilde{v}^{ik} \times D^\beta \nabla \varphi_{2\varepsilon}^i, \zeta_\varepsilon \right\rangle dx,$$

$$I_{5\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i \left\langle \sum_{|\alpha+\beta|=2} C_{\alpha\beta} D^\alpha [v(x_\varepsilon^i) - v(x)]^{ik} \times D^\beta \nabla \varphi_{1\varepsilon}^i, \zeta_\varepsilon \right\rangle dx,$$

$$I_{6\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} 2\mu \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i \left\langle \sum_{|\alpha+\beta|=2} C_{\alpha\beta} D^\alpha \tilde{v}^i \times D^\beta \nabla \varphi_{1\varepsilon}^i, \zeta_\varepsilon \right\rangle dx.$$

Здесь обозначено $u_{\varepsilon k}^i = v_{\varepsilon k}(x_\varepsilon^i) - v_k(x_\varepsilon^i)$, а $C_{\alpha\beta}$ – неотрицательные целочисленные коэффициенты. Учитывая (5.48), с помощью неравенств (5.9), (5.10), можно показать, что

$$\lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} I_{l\varepsilon} = 0 \quad (l=1, \dots, 6). \quad (5.51)$$

Это очевидно для $I_{2\varepsilon}$, поскольку $v(x) \in C^2(\Omega)$. Продемонстрируем это для $I_{3\varepsilon}$. Так как $|\alpha| < 2$ и, значит, $|\beta| \geq 1$, то в си-

лу (5.9) и неравенства $r_\varepsilon^i \leq C\varepsilon^3$ $D^\alpha v^{ik} = O(\varepsilon^{2-|\alpha|})$ на носителе функций $\varphi_{2\varepsilon}^i(x)$, из свойств которых следует, что $D^\beta \varphi_{2\varepsilon}^i = O(\varepsilon^{-|\beta|})$. Поэтому справедлива оценка:

$$|I_{3\varepsilon}| \leq C \sum_i \left| v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v(x_\varepsilon^i) \right| \int_{B_{2\varepsilon}^i} |\zeta_\varepsilon| dx.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши получаем:

$$|I_{3\varepsilon}| \leq C \left(\sum_i \left| v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v(x_\varepsilon^i) \right|^2 |B_{2\varepsilon}^i| \right)^{\frac{1}{2}} \|\zeta_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}. \quad (5.52)$$

Заметим, что $v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) = w_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$, где вектор-функция $w_\varepsilon(x)$, определенная равенством (4.13), кусочно-линейная, ограниченная в $H^1(\Omega)$ равномерно по ε и при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ сходится в $L_2(\Omega)$ к $w(x) \in C^2(\Omega)$. Поэтому, учитывая, что шары $B_{2\varepsilon}^i$ не пересекаются $|B_{2\varepsilon}^i| < C\varepsilon^3$ и $v(x) \in C^2(\Omega)$, заключаем, что

$$\sum_i \left| v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v(x_\varepsilon^i) \right|^2 |B_{2\varepsilon}^i| < C, \quad (5.53)$$

где C не зависит от ε .

Теперь требуемое равенство (5.51) при $l = 3$ следует из (5.52), (5.53) и (5.48). Аналогичным образом с учетом (5.11) доказывается равенство (5.51) при $l = 4, 5, 6$.

Наконец докажем (5.51) при $l = 1$. Учитывая, что $v^{ik}(x)$ есть решение задачи (5.4)-(5.7) представим $I_{1\varepsilon}$ в виде:

$$I_{1\varepsilon} = \int_{\Omega_\varepsilon} 2 \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i \langle \nabla p_\varepsilon^{ik}, \zeta_\varepsilon \rangle \varphi_{2\varepsilon}^i dx + \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \int_{S_\varepsilon^i} \langle \sigma^0[v_{1\varepsilon}], \zeta_\varepsilon \rangle dS.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем:

$$I_{1\varepsilon} = - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \left\{ \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i \int_{S_\varepsilon^i} 2 \langle p_\varepsilon^{ik} \cdot n, \zeta_\varepsilon \rangle dS + 2 \int_{S_\varepsilon^i} \langle \sigma^0[v_{1\varepsilon}], \zeta_\varepsilon \rangle dS \right\} - \sum_{i=1}^{N_\varepsilon} \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i \int_{B_{2\varepsilon}^i \setminus B_{2\varepsilon}^i} p_\varepsilon^{ik} \langle \nabla \varphi_{2\varepsilon}^i, \zeta_\varepsilon \rangle dx, \quad (5.54)$$

где n – внутренняя нормаль к сфере S_ε^i , а $B_{2\varepsilon}^i$ – шар радиуса

$r_\varepsilon^i = \frac{1}{2} r_\varepsilon^i$ концентрический с $B_{2\varepsilon}^i$.

Сумма поверхностных интегралов в (5.54) равна нулю.

Действительно, согласно (5.12) $v_{1\varepsilon}(x) = v(x_\varepsilon^i) + \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i v^{ik}(x)$ в шарах $B_{1\varepsilon}^i$ ($Q_\varepsilon^i \subset B_{1\varepsilon}^i$) и, следовательно $\sigma[v_{1\varepsilon}] = \sum_k u_{\varepsilon k}^i \sigma^0[v^{ik}]$. Учитывая это и вспоминая, что $\zeta_\varepsilon = b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ на Q_ε^i , сумму поверхностных интегралов в (5.58) можно записать в виде:

$$2 \sum_i \sum_{k=1}^3 u_{\varepsilon k}^i \int_{S_\varepsilon^i} \langle (x - x_\varepsilon^i) \times \sigma[v^{ik}], b_\varepsilon^i \rangle dS,$$

где $\sigma[v^{ik}] = \sigma^0[v^{ik}] - p^{ik} n$ – тензор напряжений на S_ε^i . Отсюда в силу (5.6) следует, что эта сумма равна нулю.

Остается показать, что сумма интегралов по областям $B_{2\varepsilon}^i \setminus B_{2\varepsilon}^i$ в (5.54) стремится к нулю при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$. Учитывая, что $u_{\varepsilon k}^i = v_{\varepsilon k}(x_\varepsilon^i) - v_k(x_\varepsilon^i)$ и пользуясь неравенством (5.9), свойствами функций $\varphi_{2\varepsilon}^i(x)$, с помощью неравенства Коши, получаем:

$$\left| \sum_i \sum_k u_{\varepsilon k}^i \int_{B_{2\varepsilon}^i \setminus B_{2\varepsilon}^i} p_\varepsilon^{ik} \langle \nabla \varphi_{2\varepsilon}^i, \zeta_\varepsilon \rangle dx \right| \leq \\ \leq C \left\{ \sum_i |v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v(x_\varepsilon^i)|^2 |B_{2\varepsilon}^i \setminus B_{2\varepsilon}^i| \right\}^{\frac{1}{2}} \|\zeta_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)},$$

Откуда в силу (5.48) и (5.53) следует, что эта сумма стремится к нулю при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$ и, значит, равенство (5.51) выполняется и при $l=1$.

Таким образом, согласно (5.48) и (5.51)

$$\lim_{\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0} \int_\Omega 4\mu \sum_{k,l} e_{kl}[v_{1\varepsilon}] e_{kl}[\zeta_\varepsilon] dx = 0. \quad (5.55)$$

Собирая вместе (5.47), (5.48), (5.49) и (5.55), приходим к равенству (5.46).

Из (5.43), (5.44), (5.46) следует, что

$$\Phi_{1\varepsilon}[v_\varepsilon] = \Phi_{1\varepsilon}[v_{1\varepsilon}] + \Phi_{0\varepsilon}[\zeta_\varepsilon]. \quad (5.56)$$

Учитывая вид вектор-функции $v_{1\varepsilon}(x)$ (определенной равенствами (5.13), (5.14) с заменой $w^{\varepsilon h}(x_\varepsilon^i)$ на $v_\varepsilon(x_\varepsilon^i)$), (5.8) и (5.52), получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_{1\varepsilon}[v_{1\varepsilon}] = & \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k,l=1}^3 e_{kl}^2[v] + \lambda \langle \rho v, v \rangle - 2 \langle \rho v_{\varepsilon 0}, v \rangle \right\} dx + \\ & + \sum_i \sum_{p,q} 6\pi\mu r_\varepsilon^i [v_p(x_\varepsilon^i) - w_p(x_\varepsilon^i)] [v_q(x_\varepsilon^i) - w_q(x_\varepsilon^i)] + o(1), \end{aligned}$$

при $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$.

Поэтому из (2.5) и (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon=\varepsilon_k \rightarrow 0} \Phi_{1\varepsilon}[v_{1\varepsilon}] = & \int_{\Omega} \left\{ 2\mu \sum_{k=1}^3 e_{kl}^2[v] + \lambda \langle \rho v, v \rangle + \right. \\ & \left. + \langle C(x)[v-w], [v-w] \rangle - 2 \langle \rho v_0, v \rangle \right\} dx, \end{aligned} \quad (5.57)$$

Наконец, объединяя (4.6), (4.8), (5.42), (5.46), (5.56) и (5.57) приходим к неравенству (4.16). Мы получим это неравенство предполагая, что $v(x), w(x) \in C_0^2(\Omega)$. Но так как гладкость этих вектор-функций заранее не известна (известно лишь, что $v(x), w(x) \in W_2^1(\Omega)$), то для окончания доказательства нужно построить их гладкие аппроксимации $v_\nu(x), w_\nu(x) \in C^2(\Omega)$, для которых установить неравенство (4.16) и затем перейти к пределу при $\nu \rightarrow 0$. Это можно сделать точно таким же образом, как в §1 главы 2 (см. также §1 главы 6), поэтому эту часть мы опускаем. Таким образом, теорема 4.1 доказана.

§6. Аналитические свойства решений краевых задач (4.1)-(4.5) и (4.10)-(4.12) по параметру $\lambda \in \mathbb{C}$.

Окончание доказательства основной теоремы 2.1

1. Начнем с задачи (4.1)-(4.5). Так же как в §5 главы 6 представим ее в операторном виде:

$$A_\varepsilon v_\varepsilon + \lambda B_\varepsilon v_\varepsilon + \frac{1}{\lambda} A_{1\varepsilon} v_\varepsilon = g_\varepsilon v_{\varepsilon 0}, \quad (6.1)$$

где A_ε , B_ε и $A_{1\varepsilon}$ – самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве комплекснозначных вектор-функций $\mathring{J}_\varepsilon(\Omega)$. Напомним, что $\mathring{J}_\varepsilon(\Omega)$ есть замыкание в $L_2(\Omega)$ множества $\mathring{\tilde{J}}_\varepsilon(\Omega)$ вектор-функций $u_\varepsilon(x)$ удовлетворяющих условиям: $u_\varepsilon(x) \in \mathring{W}_2^1(\Omega) \cap W^2(\Omega_\varepsilon)$, $\operatorname{div} u_\varepsilon(x) = 0$ в Ω и $u_\varepsilon(x) = a_\varepsilon^i + b_\varepsilon^i \times (x - x_\varepsilon^i)$ при $x \in Q_\varepsilon^i \subset \Omega$ (a_ε^i , b_ε^i – постоянные векторы). Операторы A_ε и B_ε и вектор g_ε в (6.1) определяются также как в главе 7 (см. §4, 5), а оператор $A_{1\varepsilon}$ здесь определяется равенством:

$$A_{1\varepsilon} v_\varepsilon = P_\varepsilon \left(\sum_{i,j} \chi_\varepsilon^i(x) \rho_\varepsilon(m_\varepsilon^i)^{-1} C_\varepsilon^{ij} [v_\varepsilon(x_\varepsilon^i) - v_\varepsilon(x_\varepsilon^j)] \right),$$

где P_ε – ортопроектор в $L_2(\Omega)$ на подпространство соленоидальных вектор-функций $\mathring{J}_\varepsilon(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Операторы A_ε , B_ε положительно определены равномерно по ε : $(A_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq \alpha \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2$, $(B_\varepsilon v_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq \beta \|v_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2$, $\alpha, \beta > 0$, оператор $A_{1\varepsilon}$ неотрицателен $(A_{1\varepsilon} v_\varepsilon, v_\varepsilon) \geq 0$. Операторы B_ε и $A_{1\varepsilon}$ ограничены, причем B_ε ограничен равномерно по ε .

Как было показано в §5 главы 7 из этих свойств операторов A_ε , B_ε , $A_{1\varepsilon}$ следует, что решение $v_\varepsilon(x, \lambda)$ уравнения (6.1) (т.е. задачи (4.5)-(4.6)) существует при $\lambda > 0$ и аналитически продолжается по λ в сектор $\Lambda_\varepsilon \subset \mathbb{C}$, содержащей правую полуплоскость \mathbb{C}_+ . В этой полуплоскости для $v_\varepsilon(x, \lambda)$ справедлива равномерная по ε оценка (7.5.2).

Из (6.1) следует, что обобщенное обратное преобразование Лапласа от $v_\varepsilon(x, \lambda)$:

$$v_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} v_\varepsilon(x, \lambda) d\lambda \quad (6.2)$$

является решением абстрактной задачи Коши в пространстве

$\overset{\circ}{J}_\varepsilon(\Omega)$:

$$\begin{aligned} B_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + A_\varepsilon v_\varepsilon + A_{1\varepsilon} \int_0^t v_\varepsilon d\tau = 0, \\ v_\varepsilon(0) = v_{\varepsilon 0}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

которая эквивалентна исходной задаче (1.3)-(1.8).

2. Теперь рассмотрим задачу (4.1)-(4.5) при комплексных λ . Запишем ее в операторной форме в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{M}(\Omega)$, которое вводится следующим образом. Обозначим через $\overset{\circ}{\tilde{M}}(\Omega)$ множество пар комплексных вектор-функций $(v(x), w(x))$ таких, что $v \in \overset{\circ}{J}(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$, а $w \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$, а через $\overset{\circ}{H}(\Omega)$ – замыкание $\overset{\circ}{\tilde{M}}(\Omega)$ в $(L_2(\Omega))^2$. Ясно, что $\overset{\circ}{M}(\Omega)$ – подпространство в $(L_2(\Omega))^2$. Ортогональным дополнением к нему является подпространство $G(\Omega) \subset (L_2(\Omega))^2$ состоящее из пар $(\text{grad } \varphi, 0)$, где $\varphi(x)$ – произвольная функция из $W_2^1(\Omega)$, так что имеет место ортогональное разложение

$$(L_2(\Omega))^2 = \overset{\circ}{M}(\Omega) \oplus G(\Omega). \quad (6.4)$$

Введем линейные операторы \hat{A} , \hat{B} , \hat{A}_1 отображающие $\overset{\circ}{\tilde{M}}(\Omega)$ в $(L_2(\Omega))^2$:

$$\begin{aligned} \hat{A} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu \Delta v + C(x)v - C(x)w \\ -C(x)v + C(x)w \end{bmatrix}, \quad \hat{B} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho v \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \hat{A}_1 \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sum_{n,p,q,r} \frac{\partial}{\partial x_p} (a_{npqr}(x) e_{qr}[w]) e^n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Обозначим через P оператор ортогонального проектирования в $(L_2(\Omega))^2$ на подпространство $\overset{\circ}{M}(\Omega)$ и введем операторы

$A = P\hat{A}$, $B = P\hat{B}$, $A_1 = P\hat{A}_1$, отображающие $\overset{\circ}{M}(\Omega)$ в $\overset{\circ}{M}(\Omega)$. Те же обозначения сохраним за их расширением по Фридрихсу. Оператор A самосопряжен, положительно определен и имеет компактный обратный оператор A^{-1} , а операторы B и A_1 самосопряжены и неотрицательны. Из (6.2), (6.3) следует, что задача (4.10)-(4.12) представима в следующем операторном виде в пространстве $\overset{\circ}{M}(\Omega)$

$$Au + \lambda Bu + \frac{1}{\lambda} A_1 u = g, \quad (6.6)$$

где $u = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$, $g = \begin{bmatrix} \rho v_0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Кроме того, из определения операторов A и A_1 и свойств тензора $\{a_{pqrs}(x)\}$ следует неравенство:

$$C_1 \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq (Au, u) + (A_1 u, u) \leq C_2 \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in \overset{\circ}{H}(\Omega),$$

с помощью которого легко показать, что полуторалинейная форма $F(u, v) = \left(Au + \lambda Bu + \frac{1}{\lambda} A_1 u, \bar{v} \right)$ удовлетворяет условиям теоремы Лакса-Мильграма [42] на любом компакте $K \subset \mathbb{C}_+$. Применяя эту теорему, устанавливаем, что уравнение (6.6) однозначно разрешимо и аналитично в полуплоскости \mathbb{C}_+ и для решения $u(x, \lambda) = (v(x, \lambda), w(x, \lambda))$ справедлива оценка (7.5.3). Отсюда следует, что обобщенное обратное преобразование Лапласа от $u(x, \lambda)$

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} u(\lambda) d\lambda \quad (6.7)$$

является решением абстрактной задачи Коши в пространстве $\overset{\circ}{H}(\Omega)$

$$B \frac{\partial u}{\partial t} + Au + A_1 \int_0^t u d\tau = 0, \quad (6.8)$$

$$u(0) = u_0.$$

Эта задача Коши эквивалентна усредненной задаче (2.8)-(2.11).

3. Как было доказано в §§ 4, 5 решение $v_\varepsilon(x, \lambda)$ задачи (4.1)-(4.5) при $\lambda > 0$ сходится по норме $L_2(\Omega)$ к первой компоненте $v(x, \lambda)$ решения $(v(x, \lambda), w(x, \lambda))$ задачи (4.10)-(4.12). Так как $v_\varepsilon(x, \lambda)$ аналитично по $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$ и равномерно по ε удовлетворяет неравенству (7.5.2), то из теоремы Витали следует, что $v_\varepsilon(x, \lambda)$ сходится к $v(x, \lambda)$ по норме $L_2(\Omega)$ равномерно по λ на компактах $K \subset \mathbb{C}_+$. Учитывая это, с помощью (6.2), (6.7) так же как в § 6 главы 7 (см. (7.6.10)), заключаем, что $v_\varepsilon(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится к $v(x, t)$ слабо в $L_2(\Omega_T)$. Таким образом теорема 2.1 доказана.

§7. Периодическая структура

Рассмотрим теперь конкретный случай, когда выполняются условия теоремы 2.1, II, (2.4), (2.5) и функция $C(x)$ и тензор упругости $\{a_{npqr}(x)\}$ вычисляются явно.

Предположим, что шары Q_ε^i одинакового радиуса $r_\varepsilon^i = r\varepsilon^3$ ($r > 0$) расположены периодически, так что их центры x_ε^i образуют кубическую решетку периода ε . Предположим, что каждая точка x_ε^i взаимодействует с вершинами x_ε^j кубов, которым она принадлежит. Для наглядности можно считать, что взаимодействие осуществляется посредством тонких пружинок: жесткость пружинок направленных вдоль ребер кубов равна $k_1 > 0$, вдоль диагоналей граней кубов — $k_2 > 0$, а вдоль диагоналей кубов $k_3 > 0$ (Рис. 5)

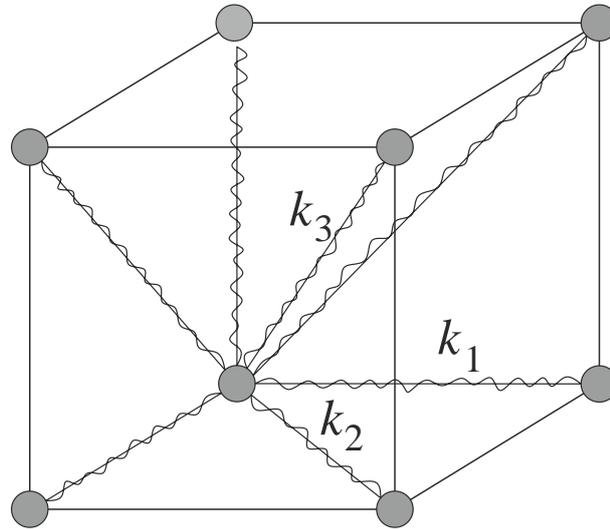


Рис. 5

Соответствующие коэффициенты жесткости взаимодействия a_ε^{ij} в (1.2) при этом будут равны:

$$a_\varepsilon^{ij} = \frac{k_{ij} \varepsilon^2}{|x_\varepsilon^i - x_\varepsilon^j|}, \quad k_{ij} = k_1, k_2, k_3.$$

В этом случае выполняется условие (2.4) и соответствующий тензор упругости постоянен и его компоненты определяются формулами:

$$a_{nnnn} = k_1 + 2 \frac{k_2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{3} \frac{k_3}{\sqrt{3}};$$

$$a_{nppp} = a_{pnpp} = \frac{k_2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{3} \frac{k_3}{\sqrt{3}} \quad (n \neq p)$$

и $a_{nprq} = 0$ в остальных случаях. Это доказано в [55] (теорема 4.1).

Ясно, что функция $C(x)$ также постоянна и равна $\beta\mu r$ и выполняется условие триангуляции II.

Положим $k_1 = \frac{k_2}{\sqrt{2}} + \frac{8}{3} \frac{k_3}{\sqrt{3}}$. Тогда компоненты предельного тензора упругости удовлетворяют условиям $a_{nnnn} = 2a_{nppp} + a_{pnpp}$ ($p \neq n$) и, значит, предельная модель упругой системы изотропна [43]. В этом случае система (2.8)-(2.9) имеет вид:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + Cv - \nabla p = C \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \Delta u - (a+b) \nabla \operatorname{div} u = v,$$

Здесь $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ – кинематическая вязкость, $C = 6\nu r$, $a = b =$

$= \frac{1}{6\pi\mu r} \left(\frac{k_2}{\sqrt{2}} + \frac{4}{3} \frac{k_3}{\sqrt{3}} \right)$, а $u(x, t) = \int_0^t w(x, \tau) d\tau$ – вектор смещений в

упругой подсистеме.

Литература

1. Анощенко О.А. Существование в целом обобщенного решения системы уравнений движения суспензии/ О.А. Анощенко// В кн.: «Динамические системы и комплексный анализ», сб. научн. трудов – Киев: Наукова думка, 1992 – С. 112-119.
2. Анощенко О.А. Существование и единственность решения системы уравнений движения суспензии в гельдеровских классах/ О.А. Анощенко // Мат. физика, анализ, геом. – 1992. – т.1. – №1 – С. 33-42.
3. Антонцев С.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей/ С.Н. Антонцев, А.В.Кажиков, В.Н. Монахов – Новосибирск: Наука, 1983 – 320с.
4. Афанасьев Е.Ф. К построению асимметричной гидродинамики суспензий с вращающимися твердыми частицами/ Е.Ф. Афанасьев, В.Н.Никольский – Проблемы гидромеханики сплошной среды – Москва: Наука, 1969 – С.17-24.
5. Бердичевский В.Л. Уравнения механики жидкостей с частицами/ В.Л.Бердичевский// В сб.: Проблемы осреднения и построения континуальных моделей в механике сплошной среды – Москва: Издательство МГУ, 1980.
6. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике/ Н.Н. Боголюбов – ОГИЗ, Гос. изд. техн.-теор. литературы, 1946 – 117с..
7. Бреннер Г. Реология двухфазных систем/ Г. Бреннер// Реология суспензий – Москва: Мир, 1975 – С. 11-67.
8. Буевич Ю.А. Реология концентрированных смесей жидкости с мелкими частицами. Параметры межфазного взаимодействия /Ю.А. Буевич, В.Г. Марков// Прикл. мат и мех. 1972. – т. 36. – №3 – С. 480-497.
9. Бэтчелор Дж. Успехи микрогидродинамики/ Дж. Бэтчелор

лор// В кн. Теоретическая и прикладная гидромеханика. Труды XIV международного конгресса механиков – Москва: Наука, 1979 – С. 136-187.

10. Быховский Э.Б. Об ортогональном разложении пространств вектор-функций квадратично суммируемых по заданной области и операторах векторного анализа/ Э.Б. Быховский, Н.В. Смирнов // Труды Мат. института им. В.А. Стеклова АН СССР – 1960. – т. 59. – с. 5-36.

11. Волощук В.М., Седунов Ю.С. Процессы коагуляции в дисперсных системах/ В.М. Волощук, Ю.С. Седунов – Ленинград: Гидрометеиздат, 1975, 320с.

12. Гидродинамическое взаимодействие частиц в суспензиях: пер. с англ. под ред. Буевича Ю.А./ Серия Механика. Новое в зарубежной науке – № 22/ Ред. серии Ишлинский А.Ю., Черный Г.Г.– Москва: Мир, 1980 – 243с.

13. Голдстейн Н.М. Классическая механика / Н.М. Голдстейн – Москва: Гостехиздат, 1975 – 415с.

14. Егоров С. М. Глобальные слабые решения системы Навье-Стокса-Фоккера-Планка/ С.М. Егоров, Е.Я.Хруслов // Украинский мат. журнал – т.65. – вып. 2. – 2013. – С. 192-225.

15. Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи/ Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Кан Нго-Зуй – Москва: Наука, 1989 – 416с.

16. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений/ М.А.Красносельский – Москва: Гостехиздат, 1956 – 392с.

17. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости/ О.А. Ладыженская – Москва: Наука, 1970 – 288с.

18. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики/ О.А. Ладыженская – Москва: Наука, 1973 – 408с.

19. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа/ О.А. Ладыженская, Н.Н. Уралцева – Москва: Наука, 1973 – 540с.
20. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уралцева – Москва: Наука, 1967 – 735с.
21. Ладыженская О.А. Об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для вязких несжимаемых неоднородных жидкостей/ О.А. Ладыженская, В.А. Солонников// Записки науч. семинара ЛОМИ – Ленинград: Наука, 1975, – т. 52 – С. 52-109.
22. Ламб Г. Гидродинамика: пер. с англ./ Г. Ламб – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1947 – 928 с.
23. Ландау Л.Д. Теоретическая физика, Т. 6. Гидродинамика / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц – Москва: Наука, 1986 – 736 с.
24. Ландау Л.Д. Теоретическая физика, Т. 8. Электродинамика сплошных сред / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц – Москва: Наука, 1982 – 621с.
25. Львов В.А. Об одной математической задаче механики суспензий/ В.А.Львов // Вестник Харьковского университета – сер. Проблемы управления и механики сплошных сред. – 1985. – № 277 – с. 13-37.
26. Львов В.А. Сходимость решений начально-краевой задачи для системы уравнений Навье-Стокса в областях с подвижной мелкозернистой границей/ В.А.Львов // Докл. АН УССР – Сер. А. – 1987. – № 7 – с. 21-25.
27. Львов В.А. Глобальная разрешимость начально-краевой задачи, описывающей движение вязкой несжимаемой жидкости с внутренней структурой / В.А.Львов // Вестник Харьковского университета – Сер. Управляемые системы. – 1988. – №315 – с. 58-65.

28. Львов В.А. Тензор вязкости суспензии твердых частиц / В.А.Львов // Докл. АН УССР – Сер. А. – 1988. – №4 – с. 9-13.

29. Львов В.А. Осредненное описание движения суспензии в приближении односкоростного континуума с ориентационной микроструктурой / В.А.Львов // Докл. АН УССР – Сер. А. – 1988. – №5 – с. 15-19.

30. Львов В.А. О разрешимости в целом одной задачи, описывающей движение твердых осесимметричных частиц в вязкой жидкости / В.А.Львов, Е.Я.Хруслов // Вестник Харьковского университета – Сер. Управляемые системы. – 1988. – № 315 – с. 104-110.

31. Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков/ А.С.Маркус – Кишинев: Штиинца, 1986 – 259с.

32. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций, Т.1. Начала теории. Изд 2-е/ А.И. Маркушевич – Москва: Наука, 1967 – 486 с.

33. Марченко В.А. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей/ В.А.Марченко, Е.Я.Хруслов – Киев: Наукова думка, 1974 – 278с.

34. Марченко В.А. Усредненные модели микронеоднородных сред/ В.А.Марченко, Е.Я.Хруслов – Киев: Наукова думка, 2005 – 550с.

35. Михлин С.Г. Проблемы минимума квадратичного функционала/ С.Г. Михлин – Москва: Гостехиздат, 1952 – 216с.

36. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике/ С.Г. Михлин – Москва: Наука, 1970 – 512с.

37. Монин А.С. Статистическая гидромеханика, часть 1. Механика турбулентности/ А.С. Монин, А.М. Яглом – Москва: Наука, 1965 – 696с.

38. Нигматулин Р.Н. Динамика многофазных сред, часть 1/ Р.Н. Нигматулин – Москва: Наука, 1987.
39. Олейник О.А. Математические задачи теории сильно неоднородных сред/ О.А. Олейник, Г.А. Иосифьян, А.С. Шамаев – Москва: Издательство МГУ, 1990 – 311с.
40. Пятницкий А.Л. Усреднение. Методы и приложения/ А.Л. Пятницкий, Г.А. Чечкин, А.С. Шамаев – Новосибирск, 2007 – 264 с.
41. Покровский В.Н. Статистическая механика разбавленных суспензий/ В.Н. Покровский – Москва: Наука, 1978 – 136 с.
42. Санчес-Паленсия Е. Неоднородные среды и теория колебаний: пер. с англ./ Е. Санчес-Паленсия – Москва: Мир, 1984, 471 с.
43. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1./ Л.И. Седов – Москва: Наука, 1970, 492 с.
44. Смирнов В.Н. Курс высшей математики, т. V. / В.Н. Смирнов – Москва: Физматгиз, 1959.
45. Физика за рубежом: сб. статей Простые и полимерные жидкости. Обобщенная гидродинамика. Кристаллические и некристаллические полупроводники. Суперполимеры. Сверхпроводящие материалы. Экспериментальная гравитация. Новости физики / ред. пер.: А. С. Боровик-Романов, Р. З. Сагдеев ; сост. Ю. А. Данилов. - Москва: Мир, 1986 - 260 с.
46. Фортъе А. Механика суспензий / А.Фортъе – Москва: Мир, 1971 – 264 с.
47. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа/ А. Фридман – Москва: Мир, 1968 – 428 с.
48. Хаппель Дж., Бренер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса: пер. с англ. / Дж. Хаппель, Г. Бреннер – Москва: Мир, 1976 – 630с.

49. Чандрасехар С. Стохастические проблемы в астрономии/ С. Чандрасехар – Москва: Издательство «Иностранная литература», 1947 – 168 с.
50. Шлюмис М.И. К гидродинамике жидкости с внутренним вращением/ М.И. Шлюмис // ЖЭТФ. – т. 51. – № 1. – С. 258-265.
51. Эйнштейн А. Новое определение размеров молекул/ А. Эйнштейн // Собр. научн. трудов. Под редакцией И.Е. Тамма, Я. А. Смородинского, Б.Г. Кузнецова – Москва: Наука, 1965 – т. 3. – с. 75-91.
52. Allaire G. Homogenization of the Navier-Stokes Equations in Open Sets Perforated with Tiny Holes. I Abstract Framework, a Volume Distribution of Holes, III Non-critical Series of the Holes for a Volume Distribution and a Surface Distribution of Holes / G.Allaire // Archive for Rational Mechanics and Analysis – 1991. – vol. 113., issue 3 – p. 209-259, 261-298.
53. Bensoussan A. Asymptotic Analysis for Periodic Structures/ A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou –North-Holland Publishing Company, 1978 – 700p.
54. Berezhnyi M.A. The Asymptotic Behaviour of Viscous Incompressible Fluid Small Oscillations with Solid Interacting Particles/ M.A. Berezhnyi // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry – 2007. – v. 3. – № 2. – p. 135-156.
55. Berezhnyi M.A. Continuum Limit for Three-dimensional Mass-spring Network and Discrete Korn's Inequality/ M.A. Berezhnyi, L.V. Berlyand // Journal of the Mechanics and Physics of Solid – 2006. – v. 54. – issue 3. – p. 635-669.
56. Berezhnyi M.A. The Homogenized Model of Small Oscillation of Complex Fluid / M.A. Berezhnyi, L.V. Berlyand and E.Ya. Khruslov// Networks and Heterogeneous Media. – 2008. – v. 3. – N 4. – p. 831-862.
57. Berezhnyi M.A. Asymmetric Hydrodynamics of Suspension

Subjected to the Influence of Strong External Field/ M.A. Bereznyi, E.Ya. Khruslov // Journal of Multiscale Modeling. – 2012. – v. 4. – issue 1. – p. 12-31.

58. Bereznyi M.A. Asymptotic Behaviour of Suspension of Oriented Particles in Viscous Incompressible Fluid/ M.A. Bereznyi, E.Ya. Khruslov // Asymptotic Analysis – 2013. – v. 83. – issue 4. – p. 331-353.

59. Berlyand L.V. Homogenized non-Newtonian Viscoelastic Rheology of a Suspension of Interacting Particles in a Viscous Newtonian Fluid/ L.V. Berlyand and E.Ya. Khruslov // SIAM Journal of Applied Math. – 2004. – v. 64. – p. 1002-1034.

60. Bird B.K., Curtiss C.F. Surprising Polymeric Liquids/ B.K. Bird, C.F. Curtiss // Physics Today. – 1984. – v. 37. – p. 36-55.

61. Brenner H. Hydrodynamic Resistance of Particles at Small Reynolds Number/ H. Brenner// New-York: Academic Press - Advances in Chemical Engineering, vol. 6, 1966.

62. Brillard A. Asymptotic Analysis of Incompressible and Viscous Fluid through Porous Media. Brinkman's Law via Epi-convergence Methods/ A. Brillard // Annales de la Faculte des Science de Toulouse – 1986. – v. 8. – issue 2 – p. 225-252.

63. Brinkman H.C. A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles/ H.C. Brinkman // Applied Scientific Research – 1947 – v. A1 – p. 27-34.

64. Conca C. Existence of Solutions for the Equations Modeling the Motion of a Rigid Body in a Viscous Fluid/ C.Conca, J.San Martin and M.TucsnaK // Communications in Partial Differential Equations – 2000. – v. 25. – p. 1399-1413.

65. Desjardins B. Existence of Weak Solutions for the Motion of Rigid Bodies in Viscous Fluid/ B. Desjardins and M.J. Esteban // Archive for Rational Mechanics and Analysis – 1999. – v. 146. – p. 59-71.

66. Einstein A. Eine neue Bestimmung der

Molekuldimensionen/ A. Einstein // *Annalen der Physik* – 1906. – v. 19.

67. Evans D.J. *Non-Newtonian Phenomena in Simple Fluids*/ D.J.Evans, J.M.Hanley and S.Ness // *Physics Today*. – 1984. – v. 37. – p. 26-35.

68. Gardiner C.W. *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and Natural Sciences*/ C.W.Gardiner – Springer Series in Senergetic - Berlin: Springer, 1994 – 442p.

69. Gunzburger M.D. *Global Existence of Weak Solutions for Viscous Incompressible Flow around a Moving Rigid Body in Three Dimensions*/ M.D.Gunzburger, H.C.Lee and A.Seregin // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics* – 2000. – v. 2. – p. 213-266.

70. Feireisl E. *On the Motion of Rigid Bodies in a Viscous Incompressible Fluid*/ E. Feireisl // *Journal of Evolution Equations* – 2003. – v. 3. – p. 419-441.

71. Hamdache K. *Global Existence and Large-time Behaviour of Solutions for the Vlasov-Stokes Equations*/ K. Hamdache // *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematica* – 1998. – v. 15. – p. 51-73.

72. Hoffman K.H. *On a Motion of a Solid Body in a Viscous Fluid. Two Dimensional Case*/ K.H. Hoffman and V.N.Starovoitov // *Advances in Mathematical Science and Applications* – 1999. – v. 9. – N. 8. – 633-648.

73. Jeffery G.B. *The Motion of Ellipsoidal Particles Immersed in a Viscous Fluid*/ G.B.Jeffery // *Proceedings of the Royal Society of london* – Ser. A. – 1922. – v. 102. – p. 161-179.

74. Larson R.G. *The Structure and the Rheology and Complex Fluids*/ R.G.Larson – Oxford: Oxford University Press, 1999 – 663p..

75. Leonov A.I. *On Rheology of Filled Polymers*/ A.I. Leonov // *Journal of Rheology* – 1990. – v. 34. – N 7. – p. 1039-1068.

76. Leray J. Topologie et equations fonctionelles/ J.Leray and J.Schauder // Annales Scientifique de l' Ecole Normale Superior – 1934. – v. 51 – p. 45-78.

77. Lubensky T.C. Superpolymers Ultraweak Solid Bodies and Aggregates/ T.C. Lubensky and P.A. Pinkus // Physics Today – 1984. – v. 37 – p. 44-59.

78. Markus A.S. Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Pencils/ A.S. Markus – American Mathematical Society – Translations of Mathematical Monographs, 1988 – v. 71 – 250p.

79. Marchenko V.A. Homogenization of Partial Differential Equations/ V.A.Marchenko, E.Ya.Khruslov – Boston: Birkhauser, - 2006 – 398p.

80. Mellet A. Global Weak Solution for Vlasov-Fokker-Plank-Navier-Stokes equation/ A. Mellet, A. Vasseur // Mathematical Models and Methods in Applied Science – 2007. – v. 17 – N7 – p. 1039-1063.

81. Oleinic O.A. Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization/ O.A. Oleinic, A.S.Shamaev, G.A. Iosif'yan – Mathematical Problems in Elasticity and its Applications, Amsterdam: North-Holland, vol. 26, 1982 – 392p.

82. Russel W.B. Colloidal Dispersions/ W.B. Russel, D.A. Saville and W.R. Schowalter – Cambridge: Cambridge University Press, 1989 – 544p.

83. Sanches-Palencia E. Nonhomogeneous media and vibration theory/ E. Sanches-Palencia – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1980 – 400p.

84. San-Martin J.A. Global Weak Solution for the Two Dimensional Motion of Several Bodies in an Incompressible Viscous Fluid/ J.A. San-Martin, V.N.Starovoitov and M. Tucsnak // Archive for Rational Mechanics and Analysis – 2002. – v. 161. – p. 93-112.

85. Van-Kampen N.G. Stochastic Process in Physics and Chemistry/ N.G. Van-Kampen– Amsterdam: North-Holland, 1990- 465p.

Оглавление

Предисловие.....	3
Глава 1	
Основные асимптотические режимы движения суспензии и соответствующие им модельные краевые задачи	9
§ 1. Микроскопическая модель движения суспензии	10
§ 2. Априорные оценки решения исходной задачи и основные асимптотические режимы движения суспензий	16
§3. Метод фиксации положений частиц. Три основные модельные задачи	25
Глава 2	
Усредненные уравнения движения суспензии в режиме замороженных частиц	31
§ 1. Исследование асимптотического поведения решения модельной задачи А	31
§ 2. Сходимость резольвенты модельной задачи А	64
§ 3. Равномерные оценки производных решения исходной задачи	72
§ 4. Усредненные уравнения, описывающие возмущение несущей жидкости мелкими твердыми частицами, движущимися в режиме замороженных частиц	81
Глава 3	
Тензор вязкости суспензии	92
§ 1. Вычисление тензоров вязкости для структур близких к периодическим	92
§ 2. Эквивалентное определение тензора вязкости	106
§ 3. Асимптотика тензоров вязкости при малых концентрациях	112
§ 4. Среднее значение тензора вязкости при случайном	

распределении диаметров и ориентаций частиц126

Глава 4

Замыкание усредненной системы уравнений, описывающей движение суспензии в режиме замороженных частиц 133

§ 1. О воздействии потока вязкой несжимаемой жидкости на частицу 133

§2. О движении уединенной частицы в потоке вязкой несжимаемой жидкости 140

§ 3. Уравнение эволюции среднего вектора ориентации 143

§ 4. Замкнутые системы уравнений, описывающие движение суспензии в режиме замороженных частиц 150

§5. О существовании обобщенных решений начально-краевой задачи для замкнутой системы усредненных уравнений движения суспензии осесимметричных частиц 153

Глава 5

Гидродинамика суспензии в сильных внешних полях172

§ 1. Исследование асимптотического поведения решений модельной задачи С 172

§2. Асимптотическое поведение решения модельной задачи А при заданных внешних моментах 189

§ 3. Нестандартная модель гидродинамики суспензии ориентированных частиц 195

Глава 6

Усредненные уравнения движения в режиме фильтрующихся частиц 203

§1 Исследование асимптотического поведения решения модельной задачи В 204

§2. Вероятностное распределение частиц 226

§3. Возмущение вязкой несжимаемой жидкости мелкими

твердыми частицами, движущимися в ней в режиме фильтрации 237

§ 4. Замкнутая система уравнений движения суспензии в режиме «фильтрующихся частиц» 241

§ 5. О существовании обобщенных решений начально-краевой задачи для замкнутой системы уравнений движения суспензии в режиме фильтрации частиц 245

Глава 7

Усредненная модель сложной жидкости с микроструктурой..
.....250

§1. Постановка задачи 251

§2. Мезоскопические характеристики микроструктуры и формулировка основного результата256

§3. Вариационная постановка задачи и ее усреднение ..261

§4. Аналитические свойства предельного тензора
..... $\{a_{pq}(x, \lambda)\}$ 270

§5. Аналитические свойства решений краевых задач (3.1) – (3.5) и (3.18) – (3.19)280

§ 6. Окончание доказательства теоремы 2.1283

§ 7. Периодическая структура 287

Глава 8

Двухфазная усредненная модель движения сложной жидкости с микроструктурой 298

§ 1. Постановка задачи 298

§2. Локальные количественные характеристики системы взаимодействующих частиц и формулировка основного результата 301

§3. Дискретный аналог неравенства Корна 304

§4. Сведение задачи к вариационной постановке 308

§5. Доказательство основной теоремы в вариационной по-

	340
становке	312
§6. Аналитические свойства решений краевых задач (4.1)- (4.5) и (4.10)-(4.12) по параметру $\lambda \in \mathbb{C}$. Окончание доказа- тельства основной теоремы 2.1	330
§7. Периодическая структура	334
<i>Список литературы</i>	337