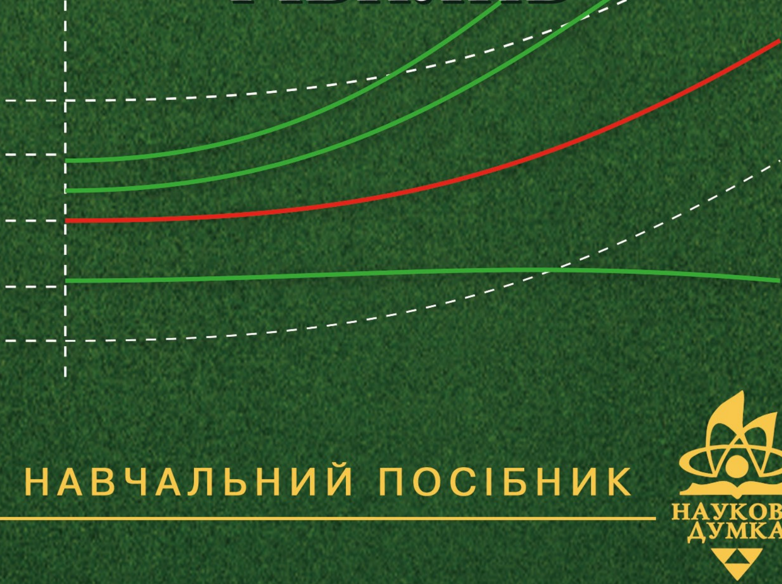
Л.В. ФАРДИГОЛА

# КУРС ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ



НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

НАУКОВА ДУМКА

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ
ТЕМПЕРАТУР ІМЕНІ Б. І. ВЄРКІНА

Л. В. ФАРДИГОЛА

# КУРС ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

КИЇВ НАУКОВА ДУМКА 2022

УДК 517.9
DOI: https://doi.org/10.15407/978-966-00-1840-2

Л. В. Фардигола. **Курс звичайних диференціальних рівнянь**. Навчальний посібник — Київ: Наукова думка, 2022. — 312 с.

Посібник складається з п'яти розділів, в яких розглянуто лінійні та нелінійні звичайні диференціальні рівняння та системи, зокрема, задача Коші та крайові задачі, теореми існування та єдиності розв'язків, побудова функцій від матриць, інтегрування за допомогою степеневих рядів, стійкість за Ляпуновим, елементи теорії керування.

Мета посібника — ознайомлення читачів з основними поняттями, фактами та сучасними методами теорії звичайних диференціальних рівнянь

У посібнику викладено підхід до викладання курсу звичайних диференціальних рівнянь, характерний для механіко-математичного факультету, а згодом і факультету математики та інформатики Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, де авторка викладала цей курс упродовж багатьох років.

Посібник призначено для студентів та аспірантів фізико-математичних спеціальностей університетів, а також для науковців, які оперують диференціальними рівняннями у своїх дослідженнях.

Рецензенти:
Є. Я. Хруслов, академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, ФТІНТ ім. Б. І. Вєркіна НАН України
В. І. Коробов, доктор фіз.-мат. наук, професор, ХНУ ім. В. Н. Каразіна

*Рекомендовано до друку вченою радою*
*Фізико-технічного інституту низьких температур*
*імені Б.І. Вєркіна Національної академії наук України*
*(протокол № 8 від 26.08.2021 р.)*

***Видання здійснено за кошти***
***Цільової комплексної програми НАН України***
***«Наукові основи функціонування та забезпечення умов розвитку науково-видавничого комплексу НАН України»***
Науково-видавничий відділ фізико-математичної
та технічної літератури

Редактор *В. В. Вероцька*



**ISBN 978-966-00-1840-2**

# Зміст

# Вступ

Посібник складається з п'яти розділів. У першому розділі розглянуто базові поняття теорії звичайних диференціальних рівнянь і досліджено деякі рівняння першого порядку. У другому розділі розглянуто лінійні диференціальні рівняння та системи: загальна теорія лінійних рівнянь та систем з неперервними коефіцієнтами; теорія лінійних рівнянь та систем зі сталими коефіцієнтами, включаючи побудову і вивчення властивостей функцій від матриць; базові поняття і факти теорії крайових задач; методи інтегрування степеневими рядами, зокрема функції Бесселя і рівняння Бесселя та їх модифіковані версії. У третьому розділі розглянуто нелінійні системи: теореми існування та єдиності, теореми про неперервність і теореми про диференційовність розв'язків задачі Коші; продовження розв'язків задачі Коші; загальні інтеграли і пов'язані з ними способи розв'язання нелінійних систем, а також лінійних і квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. У четвертому розділі для лінійних систем розглянуто стійкість за Ляпуновим, зокрема методи Ляпунова; окремий випадок систем зі сталими коефіцієнтами і класифікацію точок спокою для систем другого порядку. У п'ятому розділі розглянуто елементи математичної теорії керування. У цьому розділі вміщено дещо доопрацьований матеріал навчального посібника [13], написаного авторкою та Г.М. Скляром.

Одним з основних інструментів, використаних при дослідженні диференціальних рівнянь та систем, є відображення, зокрема оператор. У загальному вигляді лінійні рівняння та системи подаються в операторній формі, далі досліджуються властивості відповідних операторів, і вже потім формулюються результати, стосовно цих рівнянь та системи. Крім того, усі результати, що стосуються рівнянь $n$-го порядку одержано з відповідних результатів для систем $n$-го порядку за допомогою відображення, побудованого на основі стандартного способу зведення рівняння $n$-го порядку до системи $n$-го порядку, за винятком результатів, що стосуються рівнянь зі сталими коефіцієнтами, які вивчаються безпосередньо. У рамках цього підходу теорема про існування та єдиність і теорема про неперервність розв'язку задачі Коші доводяться із застосуванням поняття стискальних відображень і теореми про нерухому точку. Метод послідовних наближень у посібнику також розглянуто на прикладі доведення теореми про існування та єдиність розв'язку для лінійної системи з неперервними коефіцієнтами.

У посібнику викладено дещо нестандартний (принаймні для такого типу посібників) підхід до побудови функцій від матриць, які є базовим інструментом для розв'язання лінійних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Побудова функцій від матриць здійснюється послідовно для класів функцій, які поступово розширюються. Спочатку розглядається клас поліномів. Далі — клас аналітичних функцій, заданих степеневим рядом, круг збіжності, якого містить спектр матриці, і вивчаються властивості відповідного матричного ряду, зокрема, установлюється, що цей ряд можна подати деяким поліномом, і вивчаються його властивості (за фактом це інтерполяційний поліном Лагранжа–Сільвестра). Нарешті поняття функції від матриці розширюється на клас функцій, визначених на спектрі цієї матриці, беручи за основу властивості інтерполяційного поліному, одержаного для дійсно-аналітичних функцій. Однією з переваг такого підходу є те, що студентам ясно видно звідки береться поняття інтерполяційного полінома і означення функції від матриці, яке на ньому базується.

Однією з особливостей цього посібника є розділ, який містить елементи математичної теорії керування. Теорія керування є відносно молодим розділом математики, який на даний момент досить інтенсивно розвивається і має численні застосування при моделюванні реальних процесів. Тому включення базових понять і фактів цього розділу математики є важливим і доцільним. Для продовження вивчення цієї теорії див., наприклад, [5].

Мета посібника — ознайомлення читачів з основними поняттями, фактами та сучасними методами теорії звичайних диференціальних рівнянь

В одному посібнику неможливо охопити всі аспекти теорії звичайних диференціальних рівнянь. Існує багато навчальних посібників, у кожному з яких реалізовано свій підхід до викладання цієї дисципліни (див., наприклад, [3, 6, 8, 11, 14–20]). У цьому посібнику викладено підхід до викладання курсу звичайних диференціальних рівнянь, характерний для механіко-математичного факультету, а згодом і факультету математики та інформатики Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна, де авторка посібника викладала зазначений курс упродовж багатьох років.

# Розділ 1

# Початкові відомості

## 1.1. Рівняння першого порядку

**Означення 1.1.1.** Рівняння

$$F(t, y, y') = 0, \tag{1.1.1}$$

де $y$ є шуканою функцією, що залежить від $t$, називається *звичайним диференціальним рівнянням першого порядку*. Тут $F$ є функцією трьох змінних: $t$, $x$ і $z$, визначеною на множині $\widetilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$.

**Означення 1.1.2.** Рівняння

$$y' = f(t, y), \tag{1.1.2}$$

де $y$ є шуканою функцією, що залежить від $t$, називається *звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної* або *рівнянням першого порядку, записаним в нормальній формі*. Тут $f$ є функцією двох змінних: $t$ і $x$, визначеною на множені $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Зрозуміло, що рівняння (1.1.2) є окремим випадком (1.1.1).

Далі будемо розглядати рівняння першого порядку, записані в нормальній формі, тобто рівняння (1.1.2).

**Означення 1.1.3.** Функція

$$y = \varphi(t), \quad t \in I, \tag{1.1.3}$$

називається *розв'язком* рівняння (1.1.2), якщо

1. $\forall t \in I \quad (t, \varphi(t)) \in \Omega$,

2. $\forall t \in I \quad \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$.

Тут і далі розглядаємо розв'язки диференціальних рівнянь на зв'язних множинах, тобто $I$ є або $(a, b)$, або $(a, b]$, або $[a, b)$, або $[a, b]$, де $a,b \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

**Означення 1.1.4.** Множина точок $\{(t, \varphi(t)) \mid t \in I\}$ називається *інтегральною траєкторією* рівняння (1.1.2), якщо $y = \varphi(t)$, $t \in I$, є розв'язком (1.1.2).

**Означення 1.1.5.** Множина всіх розв'язків (1.1.2) називається *загальним розв'язком* цього рівняння.

Клас функцій, неперервних на $\Omega$, позначатимемо через $C(\Omega)$. Клас функцій, $k$ разів неперервно диференційовних на $\Omega$, позначатимемо через $C^k(\Omega)$.

**Означення 1.1.6.** Функція $u$ (яка залежить від змінних $t$ та $y$) класу $C^1(\Omega)$ називається *загальним інтегралом* рівняння (1.1.2), якщо для будь-якого розв'язку $y = \varphi(t)$, $t \in I$, цього рівняння маємо $u(t, \varphi(t)) \equiv \mathrm{const}$ та $\dfrac{\partial u(t, y)}{\partial y} \neq 0$ на $\Omega$.

**Означення 1.1.7.** Нехай $(t_0, y_0) \in \Omega$. Задача пошуку розв'язку рівняння (1.1.2), який задовольняє *початкову умову* $y(t_0) = y_0$, називається *задачею Коші* для цього рівняння.

Іншими словами, задача Коші є задачею визначення інтегральної траєкторії рівняння (1.1.2), яка проходить через точку $(t_0, y_0)$.

*Приклад* 1.1.8. Розглянемо рівняння

$$\dot{y} = -2y, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1.4}$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $y = Ce^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$, де $C \in \mathbb{R}$ є довільною сталою. Загальними інтегралами є, наприклад, такі функції:

$$\begin{aligned} u_1(t, y) &= ye^{2t}, \\ u_2(t, y) &= \left(ye^{2t}\right)^3 + ye^{2t}, \\ u_3(t, y) &= \arctan\left(ye^{2t}\right). \end{aligned}$$

Зрозуміло, рівняння $u_k(t, y) = \text{const}$, $k = 1, 2, 3$, задають інтегральні траєкторії рівняння (1.1.4).

Розглянемо для рівняння (1.1.4) початкову умову

$$y(0) = 0. \tag{1.1.5}$$

Функція $y = 0$, $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком задачі Коші (1.1.4), (1.1.5).

Інтегральні траєкторії рівняння (1.1.4) зображено на рис. 1.1.

## 1.1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

**Означення 1.1.9.** Нехай $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$. Рівняння вигляду

$$y' = g(t)h(y), \quad (t, y) \in \Omega = (a, b) \times (c, d), \tag{1.1.6}$$

називається *рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Якщо для деякого $y_0 \in (c, d)$ маємо $h(y_0) = 0$, то $y = y_0$, $t \in (a, b)$, є розв'язком рівняння (1.1.6). Далі ми розглядатимемо випадок, коли $h(y) \neq 0$ на $(c, d)$.

Розглянемо теорему про загальний інтеграл рівняння з відокремлюваними змінними.

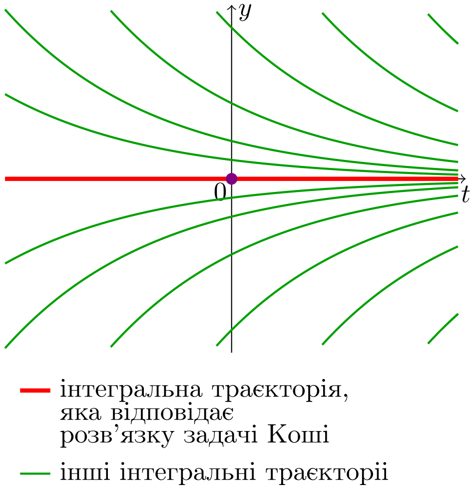



Рис. 1.1. Інтегральні траєкторії рівняння (1.1.4)

**Теорема 1.1.10.** *Нехай* $g \in C(a,b)$, $h \in C(c,d)$ *та* $h(y) \neq 0$ *на* $(c,d)$. *Нехай також* $G$ *та* $H$ *є функціями, визначеними на* $(a,b)$ *та* $(c,d)$, *відповідно, такими, що* $G'(t) \equiv g(t)$ *на* $(a,b)$ *та* $H'(y) \equiv \dfrac{1}{h(y)}$ *на* $(c,d)$. *Тоді функція* $u(t,y) \equiv G(t) - H(y)$ *на* $\Omega$ *є загальним інтегралом рівняння* (1.1.6).

*Доведення.* Маємо

$$\frac{\partial u(t,y)}{\partial y} \equiv -H'(y) \equiv \frac{1}{h(y)} \neq 0 \quad \text{на } \Omega.$$

Нехай $y = \varphi(t)$, $t \in I$, є розв'язком (1.1.6). Тоді

$$\dot{\varphi}(t) \equiv g(t)h(y) \quad \text{на } I.$$

Оскільки $h(y) \neq 0$ на $(c,d)$, маємо

$$\big(H(\varphi(t))\big)' \equiv \frac{\dot{\varphi}(t)}{h(\varphi(t))} \equiv g(t) \equiv G'(t) \quad \text{на } I.$$

Тому $G(t) - H(\varphi(t)) \equiv \text{const}$ на $I$ (оскільки множина $I$ є зв'язною). Таким чином, $u(t,y) \equiv G(t) - H(y)$ на $\Omega$ є загальним інтегралом рівняння (1.1.6). $\square$

Припустимо, що виконано умови щойно доведеної теореми. Позначимо

$$P = \{p_0 \in \mathbb{R} \mid \exists (t_0, y_0) \in \Omega \quad G(t_0) - H(y_0) = p_0\}. \tag{1.1.7}$$

Зафіксуємо $p_0 \in P$ та розглянемо функціональне рівняння

$$G(t) - H(y) = p_0, \quad (t, y) \in \Omega. \tag{1.1.8}$$

Розв'язком такого рівняння називається функція $y = \psi$, $t \in J$, класу $C^1(J)$, для якої виконано тотожність $G(t) - H(\psi(t)) \equiv p_0$ на $J$. Тут $J$ є зв'язною множиною. Розглянемо будь-яку точку $(t_0, y_0) \in \Omega$ таку, що $p_0 = G(t_0) - H(y_0)$, і покажемо, що в деякому околі цієї точки рівняння (1.1.8) має єдиний розв'язок. Оскільки $h(y) \neq 0$ на $(c, d)$, функція $H$ є монотонною і диференційовною на $(c, d)$. Позначимо $(\gamma, \delta) = H\big((c, d)\big)$. Тоді існує обернена функція $H^{-1} : (\gamma, \delta) \to (c, d)$. Тому існує окіл $J$ точки $t_0$ такий, що функція $H^{-1}(G(t) - p_0) \equiv \psi(t)$ визначена та диференційовна в цьому околі. Очевидно, за побудовою, що $y = \psi(t)$, $t \in J$, є розв'язком (1.1.8). Крім цього,

$$\dot{\psi}(t) \equiv \big(H^{-1}(G(t) - p_0)\big)' \equiv \frac{1}{H'(\psi(t))} G'(t) \equiv h(\psi(y))g(t) \quad \text{на } J.$$

Отже, $y = \psi(t)$, $t \in J$, є також розв'язком рівняння (1.1.6).

З теореми 1.1.10 випливає, що кожний розв'язок рівняння (1.1.6) є розв'язком класу $C^1$ рівняння (1.1.8). Виявляється, що обернене твердження також справедливе. Отже, доведено теорему про загальний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними.

**Теорема 1.1.11.** *Нехай $g \in C(a, b)$, $h \in C(c, d)$, та $h(y) \neq 0$ на $(c, d)$. Нехай $G : (a, b) \to \mathbb{R}$, $H : (c, d) \to \mathbb{R}$, такі функції, що $G'(t) \equiv g(t)$ на $(a, b)$, $H'(y) \equiv \dfrac{1}{h(y)}$ на $(c, d)$ і $P$ визначено співвідношенням (1.1.7). Тоді*

1. *Для будь-якого розв'язку $y = \varphi(t)$, $t \in I$, рівняння (1.1.6) існує $p_0 \in P$ таке, що ця функція є також розв'язком (1.1.8).*

2. *Для будь-якого фіксованого $p_0 \in P$ розв'язок $y = \psi(t)$, $t \in J$, класу $C^1(J)$ рівняння* (1.1.8) *є розв'язком рівняння* (1.1.6).

Іншими словами, загальний розв'язок рівняння (1.1.6) описується функціональним рівнянням (1.1.8), де $p_0 \in P$.

*Приклад* 1.1.12. Розглянемо рівняння

$$y' = \frac{y}{1+t^2}, \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty), \tag{1.1.9}$$

і знайдемо його загальний розв'язок. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, де $g(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, і $h(y) = y$, $y \in (0, +\infty)$. Маємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{1+t^2}, \quad (t, y) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty),$$

тому за теоремою 1.1.11 про загальний розв'язок рівняння з відокремлюваними змінними функціональне рівняння

$$\ln y = \arctan t + M$$

визначає всі розв'язки рівняння (1.1.9), коли $M \in \mathbb{R}$. Отже,

$$y = Ce^{\arctan t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $C > 0$ — довільна стала, є загальним розв'язком рівняння (1.1.9).

## 1.1.2. Рівняння першого порядку, записані в симетричній формі

Розглянемо рівняння

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \tag{1.1.10}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ є відкритою зв'язною множиною, $M, N \in C(\Omega)$, $|M(x, y)| + |N(x, y)| \neq 0$, $(x, y) \in \Omega$. Зафіксуємо $(x_0, y_0) \in \Omega$ та розглянемо два випадки:

1. $M(x_0, y_0) \neq 0$,

2. $N(x_0, y_0) \neq 0$.

1. Нехай $M(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді існує окіл $U_1(x_0, y_0) \subset \Omega$ такий, що $M(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in U_1(x_0, y_0)$. Отже, рівняння (1.1.10) є еквівалентним рівнянню

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}, \tag{1.1.11}$$

якщо $(x, y) \in U_1(x_0, y_0)$. Рівняння (1.1.11) є рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, усі розв'язки якого є розв'язками (1.1.10).

2. Нехай $N(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді існує окіл $U_2(x_0, y_0) \subset \Omega$ такий, що $N(x, y) \neq 0$, $(x, y) \in U_2(x_0, y_0)$. Отже, рівняння (1.1.10) є еквівалентним рівнянню

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{1.1.12}$$

якщо $(x, y) \in U_2(x_0, y_0)$. Рівняння (1.1.12) є рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, усі розв'язки якого є розв'язками (1.1.10).

Таким чином, розв'язками рівняння (1.1.10) можуть бути як функції $y = \varphi(x)$, $x \in I$, так і функції $x = \psi(y)$, $y \in J$.

**Означення 1.1.13.** Функція $y = \varphi(x)$, $x \in I$, називається *розв'язком* рівняння (1.1.10), якщо

$$\forall x \in I \quad \big((x, \varphi(x)) \in \Omega \ \wedge \ M(x, \varphi(x))\, dx + N(x, \varphi(x))\, d\varphi(x) = 0\big).$$

Функція $x = \psi(y)$, $y \in J$, називається *розв'язком* рівняння (1.1.10), якщо

$$\forall y \in J \quad \big((\psi(y), y) \ \wedge \ M(\psi(y), y)\, d\psi(y) + N(\psi(y), y)\, dy = 0\big).$$

**Означення 1.1.14.** Множина усіх розв'язків рівняння (1.1.10) називається *загальним розв'язком* цього рівняння.

**Означення 1.1.15.** Функція $u$ (яка залежить від змінних $x$ та $y$) класу $C^1(\Omega)$ називається *загальним інтегралом* (1.1.10), якщо

$$\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right| \neq 0, \quad (x,y) \in \Omega,$$

та для будь-якого розв'язку $y = \varphi(x)$, $x \in I$, цього рівняння маємо $u(x, \varphi(x)) \equiv \mathrm{const}$ на $I$ і для будь-якого розв'язку $x = \psi(y)$, $y \in J$, цього рівняння маємо $u(\psi(y), y) \equiv \mathrm{const}$ на $J$.

Кожній точці $(x_0, y_0) \in \Omega$ відповідає пряма

$$M(x_0, y_0)(x - x_0) + N(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

яка є дотичною до інтегральної траєкторії, що проходить через точку $(x_0, y_0)$.

**Означення 1.1.16.** Множина $\Omega$, кожній точці $(x_0, y_0)$ якої поставлено у відповідність пряма виду (1.1.2), називається *полем напрямків*, яке відповідає рівнянню (1.1.10).

**Означення 1.1.17.** Лінія, вздовж якої кут нахилу прямих, що утворюють поле напрямків, є сталим, називається *ізокліною*.

*Приклад* 1.1.18. Розглянемо рівняння

$$dy + xy\,dx = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1.13}$$

Зрозуміло, що $y = 0$ є розв'язком (1.1.13). Відокремлюючи змінні, маємо $\dfrac{dy}{y} = -x\,dx$. Тому $\ln|y| = -x^2/2 + K$, $K \in \mathbb{R}$. Крім того, $y = 0$, $x \in \mathbb{R}$, також є розв'язком цього рівняння. Отже, $y = Ce^{-x^2/2}$, $C \in \mathbb{R}$, є загальним розв'язком (1.1.13). Функція $u(x,y) = e^{x^2/2}y$ є загальним інтегралом (1.1.13).

Кут нахилу прямої поля напрямків у точці $(x, y)$ дорівнює $\dfrac{dy}{dx} = -xy$. Тому криві $xy = \mathrm{const}$ є ізоклінами. Інтегральні траєкторії, ізокліни та прямі поля напрямків зображено на рис. 1.2.

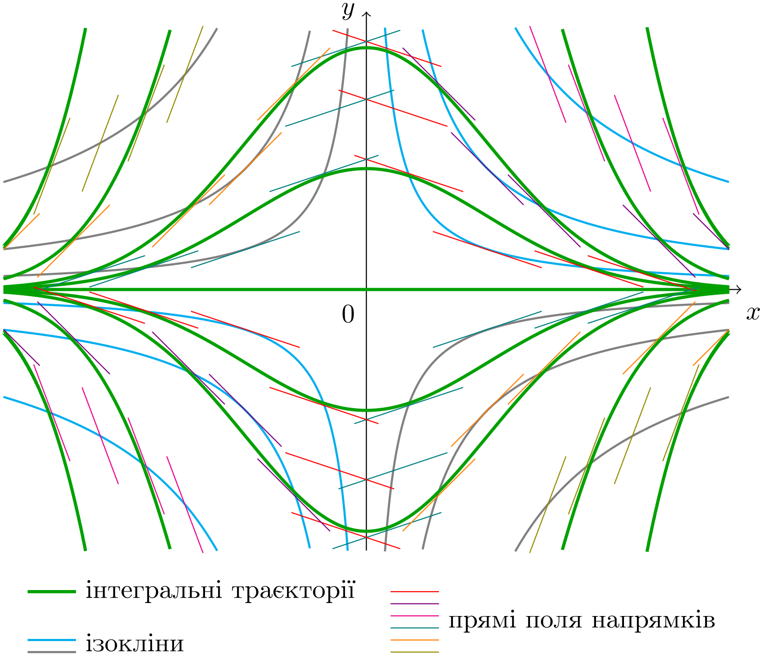



Рис. 1.2. Інтегральні траєкторії, ізокліни та прямі поля напрямків рівняння (1.1.13)

## 1.1.3. Рівняння в повних диференціалах

Розглянемо рівняння

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \quad (x,y) \in \Omega = (a,b)\times(c,d), \quad (1.1.14)$$

де $M, N \in C(\Omega)$, $|M(x,y)| + |N(x,y)| \neq 0$, $(x,y) \in \Omega$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $c \in \overline{\mathbb{R}}$, $d \in \overline{\mathbb{R}}$.

Клас функцій, диференційовних на $\Omega$, позначатимемо через $D(\Omega)$. Клас функцій, $k$ разів диференційовних на $\Omega$, позначатимемо через $D^k(\Omega)$.

**Означення 1.1.19.** Рівняння вигляду (1.1.14) називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо існує функція $F \in$

$D(\Omega)$ така, що

$$dF(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy, \quad (x,y) \in \Omega. \tag{1.1.15}$$

Нехай $M, N \in C^1(\Omega)$. З'ясуємо, за яких умов на $M$,$N$ рівняння (1.1.14) буде рівнянням у повних диференціалах. Якщо виконано (1.1.15), то

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega, \tag{1.1.16}$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega. \tag{1.1.17}$$

Звідси одержуємо

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \equiv \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} \equiv \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\,\partial x} \equiv \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \quad \text{на } \Omega.$$

Таким чином, умова

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial y}, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1.1.18}$$

є необхідною умовою того, що рівняння (1.1.14) є рівнянням у повних диференціалах. Виявляється, що ця умова є також і достатньою умовою. Розглянемо критерій того, що рівняння (1.1.14) є рівнянням у повних диференціалах.

**Теорема 1.1.20.** *Нехай $M, N \in C^1(\Omega)$. Рівняння* (1.1.14) *є рівнянням у повних диференціалах тоді і лише тоді, коли виконано умову* (1.1.18).

*Доведення.* 1. *Необхідність* доведено вище.

2. *Достатність.* Нехай (1.1.18) виконано. Спробуємо знайти функцію $F \in C^1(\Omega)$, таку, яка задовольняє умови (1.1.16), (1.1.17). З (1.1.16) одержуємо

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y)\,d\xi + \varphi(y), \quad (x,y) \in \Omega,$$

тут $x_0 \in (a, b)$, $\varphi \in C^1(c, d)$. Продиференціюємо цю рівність за $y$ та скористаємося (1.1.17), (1.1.18):

$$\begin{aligned}N(x,y) = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(\xi,y)}{\partial y}\, d\xi + \varphi'(y) \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(\xi,y)}{\partial \xi}\, d\xi + \varphi'(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(\xi,y)}{\partial \xi} d\xi + \varphi'(y) \\ &= N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y), \quad (x,y) \in \Omega.\end{aligned}$$

Тому

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi,y)\, d\xi + \int_{y_0}^{y} N(x_0,\mu)\, d\mu + C, \quad (x,y) \in \Omega,$$

де $y_0 \in (c, d)$, $C \in \mathbb{R}$. Скориставшись (1.1.16), (1.1.17), звідси одержуємо (1.1.15). □

*Зауваження* 1.1.21. Критерій того, що рівняння (1.1.14) є рівнянням у повних диференціалах, залишається справедливим, якщо область $\Omega = (a, b) \times (c, d)$ замінити на будь-яку однозв'язну область в $\mathbb{R}^2$ з кусково-гладкою межею. Умова (1.1.18) є необхідною для того щоб рівняння (1.1.14) було рівнянням у повних диференціалах для будь-якої відкритої зв'язної множини в $\mathbb{R}^2$.

З прикладу бачимо, що для багатозв'язних множин умови (1.1.18) недостатньо для того, щоб рівняння було рівнянням у повних диференціалах.

*Приклад* 1.1.22. Розглянемо рівняння

$$\frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0, \quad (x,y) \in \Omega = (-1,1)^2 \backslash \{(0,0)\}. \quad (1.1.19)$$

Тут область $\Omega$ не є однозв'язною. Маємо

$$M(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad (1.1.20)$$

$$N(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}. \quad (1.1.21)$$

Отже, $M \in C^1(\Omega)$, $N \in C^1(\Omega)$,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad (x,y) \in \Omega,$$

тобто умову (1.1.18) виконано. Нехай $y \neq 0$. Тоді

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{y^2} x^2 + y^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\arctan\frac{x}{y}\right).$$

Отже, $F(x,y) = \arctan\frac{x}{y} + \varphi(y)$, тому

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2} + \varphi'(y) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Тоді $\varphi'(y) = 0$. Отже,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \arctan\frac{x}{y} + K, \quad \text{якщо } y > 0, \\ F(x,y) &= \arctan\frac{x}{y} + L, \quad \text{якщо } y < 0, \end{aligned}$$

де $K, L \in \mathbb{R}$ є деякими сталими. Спробуємо підібрати $K$, $L$ так, щоб $F(x,y) \in C(\Omega)$. Маємо

$$\lim_{y\to+0} \arctan\frac{x}{y} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{y\to-0} \arctan\frac{x}{y} = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}, & x > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

Тому з того, що $F(x,0^+) = F(x,0^-)$, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} + K &= L - \frac{\pi}{2}, \quad \text{якщо } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} + K &= L + \frac{\pi}{2}, \quad \text{якщо } x < 0. \end{aligned}$$

Отже, $L - K = \pi = K - L$. Оскільки це неможливо, не існує функції $F \in C(\Omega)$, яка б задовольняла умови (1.1.16), (1.1.17) на $\Omega$ для $M$ і $N$, заданих (1.1.20), (1.1.21). Таким чином, рівняння (1.1.19) не є рівнянням у повних диференціалах, але умову (1.1.18) для нього виконано.

*Зауваження* 1.1.23. Нехай (1.1.14) є рівнянням у повних диференціалах та $F \in D(\Omega)$ така, що умову (1.1.15) виконано. Оскільки $M, N \in C(\Omega)$, маємо $F \in C^1(\Omega)$. Позначимо

$$P = \{p_0 \in \mathbb{R} \mid \exists (x_0, y_0) \in \Omega \ F(x_0, y_0) = p_0\}. \tag{1.1.22}$$

Зафіксуємо $p_0 \in P$ та розглянемо функціональне рівняння:

$$F(x, y) = p_0. \tag{1.1.23}$$

Розглянемо будь-яку точку $(x_0, y_0) \in \Omega$ таку, що $F(x_0, y_0) = p_0$. Маємо

$$M(x_0, y_0) = \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0 \text{ або } M(x_0, y_0) = \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} \neq 0.$$

Для визначеності припустимо, що виконано першу з цих умов. Оскільки $F \in C^1(\Omega)$, існує окіл $W(x_0, y_0) \subset \Omega$ такий, що для $(x, y) \in W(x_0, y_0)$

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \neq 0.$$

За теоремою про неявне відображення (див., наприклад, [10, гл. 12, § 2]) одержуємо, що існують околи $U(x_0)$, $V(y_0)$ та єдина бієктивна функція $\mu : U(x_0) \to V(y_0)$ такі, що $U(x_0) \times V(y_0) \subset W(x_0, y_0)$ і $F(x, \mu(x)) \equiv p_0$ на $U(x_0)$. Окрім того, $\mu \in C^1(U(x_0))$.

Таким чином, для будь-якого значення $p_0 \in P$ рівняння (1.1.23) має єдиний розв'язок у досить малому околі будь-якої точки $(x_0, y_0) \in \Omega$, що задовольняє умову $F(x_0, y_0) = p_0$.

Розглянемо теорему про загальний розв'язок рівняння у повних диференціалах.

**Теорема 1.1.24.** *Нехай для* $F \in D(\Omega)$ *виконано умову* (1.1.15) *і* $P$ *визначено співвідношенням* (1.1.22)*. Тоді*

1. *Для будь-якого розв'язку рівняння* (1.1.14) *існує* $p_0 \in P$ *таке, що ця функція є також розв'язком функціонального рівняння* (1.1.23)*.*

2. *Для будь-якого фіксованого* $p_0 \in P$ *розв'язок класу* $C^1$ *рівняння* (1.1.23) *є також розв'язком диференціального рівняння* (1.1.14)*.*

Іншими словами, загальний розв'язок рівняння (1.1.14) описується функціональним рівнянням (1.1.23), де $p_0 \in P$. Крім того (див. зауваження 1.1.23), для будь-якого $p_0 \in P$ рівняння (1.1.23) має хоча б один розв'язок класу $C^1$.

*Доведення.* Оскільки $M, N \in C(\Omega)$, маємо $F \in C^1(\Omega)$.

1. Нехай $y = \varphi(x)$, $x \in I$, є розв'язком рівняння (1.1.14). Тоді

$$\begin{aligned} 0 &\equiv M(x, \varphi(x))dx + N(x, \varphi(x))\, d\varphi(x) \\ &\equiv \big(M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy\big)\big|_{y=\varphi(x)} \\ &\equiv dF(x, y)|_{y=\varphi(x)} \equiv dF(x, \varphi(x)) \quad \text{на } I. \end{aligned}$$

Отже, $F(x, \varphi(x)) \equiv \text{const}$ на $I$, тобто $y = \varphi(x)$, $x \in I$, є розв'язком класу $C^1(I)$ рівняння (1.1.23) з деяким $p_0 \in P$. Аналогічно розглядається випадок розв'язку $x = \psi(y)$, $y \in J$, рівняння (1.1.14).

2. Нехай $y = \mu(x)$, $x \in I$, є розв'язком класу $C^1(I)$ рівняння (1.1.23) з фіксованим $p_0 \in P$. Тоді $F(x, \mu(x)) \equiv p_0$ на $J$. Отже,

$$\begin{aligned} 0 &\equiv dF(x, \mu(x)) \equiv dF(x, y)|_{y=\mu(x)} \\ &\equiv \big(M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy\big)\big|_{y=\mu(x)} \\ &\equiv M(x, \mu(x))\, dx + N(x, \mu(x))\, d\mu(x) \quad \text{на } I. \end{aligned}$$

Тобто $y = \mu(x)$, $x \in I$, є розв'язком (1.1.14). Аналогічно розглядається випадок розв'язку $x = \nu(y)$, $y \in J$, класу $C^1(J)$ рівняння (1.1.23) з деяким $p_0 \in P$. $\square$

З цієї теореми випливає наслідок про загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах.

**Наслідок 1.1.25.** *Нехай для* $F \in D(\Omega)$ *виконано умову* (1.1.15)*. Тоді* $F$ *є загальним інтегралом рівняння* (1.1.14)*.*

## 1.2. Системи диференціальних рівнянь та диференціальні рівняння вищих порядків

Уведемо деякі позначення. Нехай $g$ є вектор-функцією, визначеною на $[a, b]$, тобто $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Маємо

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}, \qquad \int_\alpha^\beta g(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_\alpha^\beta g_1(t)\,dt \\ \vdots \\ \int_\alpha^\beta g_n(t)\,dt \end{pmatrix},$$

$$g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_n'(t) \end{pmatrix}, \qquad \lim_{t\to t_0} g(t) = \begin{pmatrix} \lim\limits_{t\to t_0} g_1(t) \\ \vdots \\ \lim\limits_{t\to t_0} g_n(t) \end{pmatrix}.$$

Як і в скалярному випадку, має місце нерівність

$$\left| \int_\alpha^\beta g(t)\,dt \right| \le \int_\alpha^\beta |g(t)| dt, \quad a \le \alpha < \beta \le b.$$

Система

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \tag{1.2.1}$$

де $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, називається *нормальною системою* диференціальних рівнянь $n$-го порядку. Якщо $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, то в розгорнутому вигляді її можна записати так:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \quad (t, x) \in \Omega, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \quad (t, x) \in \Omega. \end{cases}$$

**Означення 1.2.1.** Вектор-функція $x = \varphi(t)$, $t \in I$, називається *розв'язком* системи (1.2.1), якщо виконано наступні умови:

1. $\forall t \in I \; \big(t, \varphi(t)\big) \in \Omega$;

2. $\forall t \in I \; \dot{\varphi}(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$.

**Означення 1.2.2.** Множина точок $\big\{\big(t, \varphi(t)\big) \mid t \in I\big\}$ називається *інтегральною траєкторією* системи (1.1.2), якщо $y = \varphi(t)$, $t \in I$, є розв'язком (1.2.1).

**Означення 1.2.3.** *Загальним розв'язком* системи (1.2.1) називається множина всіх розв'язків цієї системи.

*Приклад* 1.2.4. Для системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x_1 = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \\ x_2 = C_1 \cos t - C_2 \sin t, \end{cases}$$

де $C_1 \in \mathbb{R}$, $C_2 \in \mathbb{R}$.

Покажемо, що будь-яке *рівняння $n$-го порядку*, розв'язане відносно старшої похідної, можна звести до системи вигляду (1.2.1). Розглянемо таке рівняння:

$$y^{(n)} = h\big(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big), \tag{1.2.2}$$

де $h : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_z^n$, та розглянемо заміну:

$$\begin{cases} x_1 = y, \\ x_2 = y', \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = y^{(n-1)}. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Тоді

$$\begin{cases} \quad \dot{x}_1 = x_2, \\ \quad \dot{x}_2 = x_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \quad \dot{x}_n = h(t,x). \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Система (1.2.4) — це система вигляду (1.2.1) з

$$f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad f(t,x) \equiv \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ h(t,x) \end{pmatrix}. \tag{1.2.5}$$

Таким чином, рівняння (1.2.2) еквівалентно системі (1.2.4) та перехід між ними здійснюється за формулами (1.2.3). Введемо відображення $\mathfrak{A}_n : D^{(n-1)}[a,b] \to \big(F[a,b]\big)^n$, де $F[a,b]$ є множиною всіх функцій, визначених на $[a,b]$, за формулою

$$\mathfrak{A}_n g = \begin{pmatrix} g \\ g' \\ \vdots \\ g^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad g \in D^{n-1}[a,b]. \tag{1.2.6}$$

Якщо ми розглянемо не всю множину $F[a,b]$, а її підмножину

$$\Delta_n[a,b] = \left\{ p \in (F[a,b])^n \mid \exists z \in D^{n-1}[a,b] \ \forall i = \overline{1,n} \ p_i = z^{(i-1)} \right\},$$

то відображення $\mathfrak{A}_n : D^{n-1}[a,b] \to \Delta_n[a,b]$ буде бієктивним, і відображення

$$\mathfrak{A}_n^{-1} p = p_1, \quad p \in \Delta_n[a,b],$$

буде оберненим для нього.

Відображення $\mathfrak{A}_n : D^{n-1}[a,b] \to \Delta_n[a,b]$ встановлює взаємно-однозначну відповідність між множиною розв'язків системи (1.2.4), заданих на $[a,b]$, і множиною розв'язків рівняння (1.2.3), заданих на $[a,b]$. Тому далі більшість результатів будемо доводити для системи виду (1.2.1) і, застосовуючи оператор $\mathfrak{A}_n$, переносити ці результати на рівняння виду (1.2.2).

*Приклад* 1.2.5. Спробуємо звести рівняння

$$y^{\mathrm{IV}} = \sin t + y''' + y'y'' - \cos t y, \quad t \in [a,b].$$

до системи вигляду (1.2.1). Зробимо заміну $x = \mathfrak{A}_4 y$, де $\mathfrak{A}_4 : D^3[a,b] \to \Delta_4[a,b]$. Маємо

$$\begin{cases} x_1 = y, \\ x_2 = y', \\ x_3 = y'', \\ x_4 = y'''. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = \sin t + x_4 + x_2 x_3 - \cos t x_1. \end{cases}$$

**Означення 1.2.6.** Задача пошуку розв'язку системи (1.2.1), який задовольняє умову

$$x(t_0) = x^0, \tag{1.2.7}$$

де $(t_0, x^0) \in \Omega$, називається *задачею Коші* для системи (1.2.1), а умова (1.2.7) називається *умовою Коші* або *початковою умовою*.

Іншими словами, задача Коші є задачею визначення інтегральної траєкторії системи (1.2.1), яка проходить через точку $\big(t_0, x^0\big)$.

Спробуємо поставити задачу Коші для рівняння (1.2.2). Для цього зробимо заміну (1.2.3): $x = \mathfrak{A}_n y$, і для системи (1.2.4) розглянемо задачу Коші з умовою (1.2.7). Далі до задачі (1.2.4), (1.2.7) застосуємо оператор $\mathfrak{A}_n^{-1}$. Матимемо рівняння (1.2.2) і початкову умову

$$\begin{cases} y(t_0) = x_1^0, \\ y'(t_0) = x_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = x_n^0, \end{cases} \tag{1.2.8}$$

де $\big(t_0, x^0\big) \in \Omega$.

**Означення 1.2.7.** Задача пошуку розв'язку рівняння (1.2.2), який задовольняє умову (1.2.8), називається *задачею Коші* для рівняння (1.2.2), а умови (1.2.8) називаються *умовами Коші* або *початковими умовами*.

*Приклад* 1.2.8. Для рівняння з прикладу (1.2.5) умови Коші матимуть вигляд

$$\begin{cases} y(t_0) = x_1^0, \\ y'(t_0) = x_2^0, \\ y''(t_0) = x_3^0, \\ y'''(t_0) = x_4^0, \end{cases}$$

де $t_0 \in [a, b]$, $x_k^0 \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, 4}$.

# Розділ 2

# Лінійні диференціальні рівняння та системи

## 2.1. Лінійні системи диференціальних рівнянь

Нагадаємо деякі означення курсу лінійної алгебри.

**Означення 2.1.1.** Відображення $|\cdot| : \mathbb{R}^n$ (або $\mathbb{C}^n$) $\to \mathbb{R}$ називається *нормою вектора* $x \in \mathbb{R}$ (або $x \in \mathbb{C}^n$), якщо воно задовольняє наступні три умови:

1. $|x| \geq 0 \wedge (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$, $x \in \mathbb{R}^n$ (або $x \in \mathbb{C}^n$);

2. $|\lambda x| = |\lambda||x|$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (або $x \in \mathbb{C}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$);

3. $|x + y| \leq |x| + |y|$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ (або $x, y \in \mathbb{C}^n$).

У просторі $\mathbb{R}^n$ розглянемо евклідову норму

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Для відображення $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яке називається *скалярним добутком* і задається формулою

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

маємо $|x|^2 = \langle x, x\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$. Таким чином, ми розглядаємо простір $\mathbb{R}^n$ з евклідовою нормою і скалярним добутком. В $\mathbb{R}^n$ розглянемо також *стандартний базис* $e^1, \dots, e^n$, де

$$e^l = \begin{pmatrix} e^l_1 \\ \vdots \\ e^l_n \end{pmatrix}, \quad e^l_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = l, \\ 0, & \text{якщо } j \neq l. \end{cases}$$

Тоді

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e^j, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де $x_j = \langle x, e^j\rangle$, $j = \overline{1, n}$.

Аналогічно простір $\mathbb{C}^n$ розглядаємо з нормою

$$|z| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

і скалярним добутком

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n,$$

де риска означає комплексне спряження.

Через $\operatorname{lin}\left(x^1, \dots, x^n\right)$ позначимо *лінійну оболонку системи векторів* $x^1, \dots, x^n$.

Далі розглянемо множину $\mathfrak{M}(n,m)$ матриць розміру $n \times m$ з дійсними або комплексними коефіцієнтами. Одиничну матрицю позначатимемо через $\mathbb{I}$. Ця множина є лінійним простором. Уведемо на цьому просторі норму, так звану, операторну норму:

$$\|A\| = \sup_{|x|>0} \frac{|Ax|}{|x|}, \quad A \in \mathfrak{M}(n,m). \tag{2.1.1}$$

Спочатку доведемо, що:

$$\sup_{|x|>0} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{|x|=1} |Ax|, \quad A \in \mathfrak{M}(n,m). \tag{2.1.2}$$

Відображення $|Ax|$ є неперервним на $\mathbb{R}^n$ (або $\mathbb{C}^n$), а множина $\{x \in \mathbb{R}^n(\text{або } \mathbb{C}^n) : |x| = 1\}$ є компактом. Тому за теоремою Вейерштрасса

$$\exists x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \left(|x_0| = 1 \wedge |Ax_0| = \sup_{|x|=1} |Ax_0|\right).$$

Отже, вираз $\max\limits_{|x|=1} |Ax|$ завжди має сенс.

Якщо $x \neq 0$, то позначивши $\xi = \dfrac{x}{|x|}$, одержуємо $|\xi| = 1$. Отже,

$$\frac{|Ax|}{|x|} = \frac{|A(|x|\xi)|}{|x|} = \frac{|x||A\xi|}{|x|} = |A\xi|.$$

Тому

$$\sup_{|x|>0} \frac{|Ax|}{|x|} \leq \sup_{|x|=1} |Ax| = \max_{|x|=1} |Ax|.$$

Очевидно, що

$$\sup_{|x|>0} \frac{|Ax|}{|x|} > \sup_{|x|=1} |Ax| = \max_{|x|=1} |Ax|.$$

Таким чином, (2.1.2) має місце. Далі покажемо, що формулою (2.1.1) дійсно задається норма, тобто виконуються наступні три умови:

1. $\|A\| \geq 0 \wedge (\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0)$, $A \in \mathfrak{M}(n,m)$;

2. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$, $A \in \mathfrak{M}(n,m)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (або $\lambda \in \mathbb{C}$);

3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $A, B \in \mathfrak{M}(n,m)$.

*Доведення.* 1. За означенням $\|A\| \geq 0$. Маємо

$$\|A\| = 0 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}^n \ Ax = 0)$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \mathcal{R}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0,$$

де $\mathcal{N}(A)$ є нуль-множиною (ядром), а $\mathcal{R}(A)$ є образом лінійного відображення, яке задається матрицею $A$.

2. Для $\lambda \in \mathbb{R}$ (або $\lambda \in \mathbb{C}$) маємо

$$\|\lambda A\| = \sup_{|x|>0} \frac{|(\lambda A)x|}{|x|} = \sup_{|x|>0} \frac{|\lambda(Ax)|}{|x|} = |\lambda| \sup_{|x|>0} \frac{|Ax|}{|x|} = |\lambda|\|A\|.$$

3. Скориставшись (2.1.2), одержуємо

$$\|A + B\| = \max_{|x|=1} |(A + B)x| = \max_{|x|=1} |Ax + Bx| \leq$$
$$\leq \max_{|x|=1} |Ax| + \max_{|x|=1} |Bx| = \|A\| + \|B\|.$$

Отже, твердження 1–3 доведено. □

Таким чином, формула (2.1.1) задає норму в лінійному просторі $\mathfrak{M}(n,m)$. Далі будемо розглядати лінійний нормований простір $\mathfrak{M}(n,m)$ з такою нормою. З означення $\|A\|$ випливає

$$|Ax| \leq \|A\||x|, \quad x \in \mathbb{R}^n (\text{або } \mathbb{C}^n), \ A \in \mathfrak{M}(n,m). \tag{2.1.3}$$

Має місце також наступна формула:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \quad A \in \mathfrak{M}(n,p), \ B \in \mathfrak{M}(p,m). \tag{2.1.4}$$

Дійсно, скориставшись (2.1.3), для $x \neq 0$ одержуємо

$$\frac{|(AB)x|}{|x|} = \frac{|A(Bx)|}{|x|} \leq \frac{\|A\||Bx|}{|x|} = \|A\|\frac{|Bx|}{|x|}.$$

Тому

$$\|AB\| = \sup_{|x|>0} \frac{|(AB)x|}{|x|} \leq \|A\| \sup_{|x|>0} \frac{|Bx|}{|x|} = \|A\|\|B\|.$$

*Задача* 2.1.2. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — власні значення $A \in \mathfrak{M}(n,n)$. Довести, що

$$\|A\| \geq \max_{j=\overline{1,n}} |\lambda_j|.$$

Зрозуміло, що лінійний простір $\mathfrak{M}(n,m)$ фактично є простором $\mathbb{R}^{n\times m}$ (або $\mathbb{C}^{n\times m}$ у випадку матриць з комплексними коефіцієнтами). Тому природно було б порівняти норму $\|A\|$ з відповідною евклідовою нормою у цьому просторі. Нехай

$$A = \{a_j^l\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,m}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^m \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Для $|x| = 1$ та $j = \overline{1,n}$ маємо

$$\left|\sum_{l=1}^m a_j^l x_l\right|^2 \leq m \sum_{l=1}^m \left|a_j^l x_l\right|^2 \leq m \sum_{l=1}^m \left|a_j^l\right|^2.$$

Тому, скориставшись (2.1.3), одержуємо

$$\|Ax\| \leq \sqrt{m} \sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \left|a_j^l\right|^2}. \tag{2.1.5}$$

З іншого боку, для $l = \overline{1,m}$ маємо

$$\sum_{j=1}^n \left|a_j^l\right|^2 = \left|Ae^l\right|^2 \leq \|A\|^2,$$

отже,

$$\sqrt{\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m \left|a_j^l\right|^2} \leq \sqrt{m}\|Ax\|. \tag{2.1.6}$$

Порівнюючи (2.1.5) та (2.1.6), одержуємо

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left|a_j^l\right|^2} \le \|Ax\| \le \sqrt{m}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\left|a_j^l\right|^2}. \qquad (2.1.7)$$

## 2.1.1. Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи

Розглянемо спочатку наступне допоміжне твердження (нерівність Ґронуолла–Беллмана).

**Теорема 2.1.3** (Ґронуолл–Беллман)**.** *Нехай $u, v \in C[a,b]$ є невід'ємними на $[a,b]$ функціями, які задовольняють умову*

$$v(t) \le C + \int_a^t v(\xi)u(\xi)d\xi, \quad t \in [a,b], \qquad (2.1.8)$$

*де $C \ge 0$. Тоді виконується нерівність*

$$v(t) \le C \exp\left(\int_a^t u(\xi)d\xi\right), \quad t \in [a,b]. \qquad (2.1.9)$$

*Зокрема, якщо $C = 0$, то $v(t) \equiv 0$ на $[a,b]$.*

*Доведення.* 1. Нехай $C > 0$. Позначимо

$$V(t) = C + \int_a^t v(\xi)u(\xi)d\xi, \quad t \in [a,b].$$

З (2.1.8) випливає

$$v(t) \le V(t), \quad t \in [a,b]. \qquad (2.1.10)$$

Отже,

$$V'(t) = v(t)u(t) \le u(t)V(t), \quad t \in [a,b].$$

Оскільки $V(t) \geq C > 0$, $t \in [a,b]$, маємо

$$\frac{V'(t)}{V(t)} \leq u(t), \quad t \in [a,b].$$

Ураховуючи умову $V(a) = C$ та інтегруючи у межах $[a,t]$, одержуємо

$$\ln V(t) - \ln C \leq \int_a^t u(\xi) d\xi, \quad t \in [a,b].$$

Отже, враховуючи (2.1.10), маємо

$$0 \leq v(t) \leq V(t) \leq C \exp\left(\int_a^t u(\xi) d\xi\right). \tag{2.1.11}$$

2. Якщо $C = 0$, то для кожного $C' > 0$ виконується (2.1.8), а отже, і (2.1.9). Тому $v(t) \equiv 0$ на $[a,b]$. $\square$

За тією самою схемою можемо довести інший варіант нерівності Ґронуолла–Беллмана.

**Наслідок 2.1.4.** *Нехай $u, v \in C[a,b]$ є невід'ємними на $[a,b]$ функціями, які задовольняють умову*

$$v(t) \leq C + \int_t^b u(\xi) v(\xi) d\xi, \quad t \in [a,b], \tag{2.1.12}$$

*де $C \geq 0$. Тоді виконується нерівність*

$$v(t) \leq C \exp\left(\int_t^b u(\xi) d\xi\right), \quad t \in [a,b]. \tag{2.1.13}$$

*Зокрема, якщо $C = 0$, то $v(t) \equiv 0$ на $[a,b]$.*

Розглянемо *лінійну неоднорідну систему*

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{2.1.14}$$

де $A(t) \in \mathfrak{M}(n,n)$, $f(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a,b]$; $x \in \mathbb{R}^n$; $A, f \in C[a,b]$; з початковою умовою

$$x(t_0) = x^0, \tag{2.1.15}$$

де $t_0 \in [a, b]$, $x^0 \in \mathbb{R}$.

Для того щоб довести теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи, доведемо лему про еквівалентність задачі Коші інтегральному рівнянню.

**Лема 2.1.5.** *Функція $x = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$, класу $C[a, b]$ є розв'язком інтегрального рівняння*

$$\varphi(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(\tau)\varphi(\tau) + f(\tau)\big)\, d\tau, \quad t \in [a, b], \tag{2.1.16}$$

*тоді і лише тоді, коли вона є розв'язком задачі Коші* (2.1.14), (2.1.15).

*Доведення.* 1. Нехай функція $x = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$, класу $C[a, b]$ є розв'язком інтегрального рівняння (2.1.16). Тоді $\varphi(t_0) = x^0$. Диференціюючи (2.1.16) за змінною $t$, одержуємо

$$\dot{\varphi}(t) = A(t)\varphi(t) + f(t), \quad t \in [a, b].$$

Отже, $x = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$, є розв'язком (2.1.14), (2.1.15).

2. Нехай функція $x = \varphi(t)$, $t \in [a, b]$, є розв'язком задачі Коші (2.1.14), (2.1.15). Тоді, інтегруючи (2.1.14) від $a$ до $t$, враховуючи (2.1.15), бачимо, що ця функція є розв'язком класу $C^1[a, b]$ інтегрального рівняння (2.1.16). □

Доведемо, нарешті, теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи.

**Теорема 2.1.6.** *На сегменті $[a, b]$ існує єдиний розв'язок задачі Коші* (2.1.14), (2.1.15).

*Доведення.* 1. *Існування.* Доведемо, що існує розв'язок інтегрального рівняння (2.1.16). Для цього використаємо метод послідовних наближень. Позначимо

$$x_0(t) \equiv x^0, \tag{2.1.17$_0$}$$

$$x_1(t) \equiv x^0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(\tau)x_0(\tau) + f(\tau)\big)\, d\tau, \tag{2.1.17$_1$}$$

$$x_2(t) \equiv x^0 + \int_{t_0}^{t} \big(A(\tau)x_1(\tau) + f(\tau)\big)\, d\tau, \tag{2.1.17$_2$}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$x_k(t) \equiv x^0 + \int_{t_0}^{t} \big([A(\tau)x_{k-1}(\tau) + f(\tau)\big)\, d\tau. \tag{2.1.17$_k$}$$

Очевидно, що $x_k \in C[a,b]$. Доведемо, що ряд

$$x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \big(x_{k+1}(t) - x_k(t)\big)$$

є рівномірно збіжним на $[a,b]$. Спочатку перевіримо для $k \in \mathbb{N}$ справедливість формули

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \le \big(|x^0| + 1\big)\frac{M^k}{k!}|t - t_0|^k, \quad t \in [a,b], \tag{2.1.18$_k$}$$

де $M > 0$ є сталою, яка задовольняє умови

$$\|A(t)\| \le M, \quad |f(t)| \le M, \quad t \in [a,b]. \tag{2.1.19}$$

Доведення (2.1.18$_k$) будемо здійснювати за методом математичної індукції. *База індукції:*

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} (A(\tau)x_0 + f(\tau))\, d\tau\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t} \big(M(|x^0| + 1)\big)\, d\tau\right| \\ &= (|x^0| + 1)M\,|t - t_0|\,, \quad t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Далі здійснимо *індуктивний перехід* $k \rightsquigarrow k+1$. Маємо

$$\begin{aligned} |x_{k+1}(t) - x_k(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} (A(\tau)(x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)))\, d\tau\right| \\ &\le \left|\int_{t_0}^{t} \|A(\tau)\|\, |x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau)|\, d\tau\right|, \quad t \in [a,b]. \end{aligned}$$

Ураховуючи (2.1.19), ($2.1.18_k$), звідси одержуємо

$$|x_{k+1}(t) - x_k(t)| \leq M \left| \int_{t_0}^{t} (|x^0| + 1) \frac{M^k}{k!} |\tau - t_0|^k \, d\tau \right| \\ = \big(|x^0| + 1\big) \frac{M^{k+1}}{(k+1)!} |t - t_0|^{k+1}, \quad t \in [a, b].$$

Таким чином, нерівність ($2.1.18_k$) доведено. З неї випливає

$$|x_k(t) - x_{k-1}(t)| \leq \big(|x^0| + 1\big) \frac{M^k}{k!} (b - a)^k, \; t \in [a, b], \; k \geq 1. \quad (2.1.20)$$

Оскільки ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} (b - a)^k$$

є збіжним, ряд

$$x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \big(x_{k+1}(t) - x_k(t)\big)$$

є рівномірно збіжним на $[a, b]$ (див. (2.1.20)). Отже, послідовність часткових сум цього ряду, яка є послідовністю $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$, рівномірно збігається на $[a, b]$.

Нехай $x = \phi(t)$, $t \in [a, b]$, є границею цієї послідовності:

$$x_k(t) \rightrightarrows \phi(t) \quad \text{на } [a, b], \quad \text{коли } k \to \infty.$$

Покажемо, що $x = \phi(t)$, $t \in [a, b]$, є розв'язком (2.1.16). З ($2.1.17_k$) та (2.1.19) одержуємо

$$\left| x_k(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} A(\tau)\phi(\tau) d\tau + f(\tau) d\tau \right| \\ \leq \left| \int_{t_0}^{t} A(\tau)(x_{k-1}(\tau) - \phi(\tau)) d\tau \right| \\ \leq M \left| \int_{t_0}^{t} \left( \sup_{\xi \in [a,b]} |x_{k-1}(\xi) - \phi(\xi)| \right) d\tau \right|$$

$$\le M(b-a)\sup_{\xi\in[a,b]}|x_{k-1}(\xi)-\phi(\xi)|\to 0,\quad \text{коли } k\to\infty.$$

Отже,

$$x_k(t)\rightrightarrows x_0+\int_{t_0}^{t}(A(\tau)\phi(\tau)+f(\tau))\,d\tau\quad \text{на } [a,b],\ \text{коли } k\to\infty.$$

Тому

$$\phi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}(A(\tau)\phi(\tau)+f(\tau))\,d\tau,\quad t\in[a,b].$$

Таким чином, ми довели, що $x=\phi(t)$, $t\in[a,b]$, задовольняє умову (2.1.16), а отже, і (2.1.14), (2.1.15) (див. лему 2.1.5). Тому існування розв'язку задачі Коші (2.1.14), (2.1.15) доведено.

2. *Єдиність.* Нехай $x=\psi(t)$, $x=\varphi(t)$, $t\in[a,b]$ є розв'язками задачі Коші (2.1.14), (2.1.15). Тоді за лемою 2.1.5 ці функції є розв'язками інтегрального рівняння (2.1.16). Скориставшись (2.1.19), одержуємо

$$|\varphi(t)-\psi(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}A(\tau)(\varphi(\tau)-\psi(\tau))d\tau\right|\le$$
$$\le\left|\int_{t_0}^{t}M|\varphi(\tau)-\psi(\tau)|d\tau\right|,\quad t\in[a,b].$$

Застосовуючи нерівності Ґронуолла–Беллмана (див. теорему 2.1.3 та наслідок 2.1.4), одержуємо $\varphi(t)\equiv\psi(t)$ на $[a,b]$. Отже, єдиність розв'язку задачі Коші (2.1.14), (2.1.15) доведено. Таким чином, доведення теореми завершено. □

### 2.1.2. Комплексні розв'язки лінійних систем

Розглянемо систему

$$\dot z=A(t)z+f(t),\quad t\in[a,b],\ z\in\mathbb{C}^n, \tag{2.1.21}$$

де $A$ є матрицею $(n \times n)$ з комплексними коефіцієнтами. Позначимо $z^1 = \operatorname{Re} z$, $z^2 = \operatorname{Im} z$, $A^1 = \operatorname{Re} A$, $A^2 = \operatorname{Im} A$, $f^1 = \operatorname{Re} f$, $f^2 = \operatorname{Im} f$. Тоді маємо, з одного боку,

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t) + f(t),$$

з іншого —

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= \dot{z}^1(t) + i\dot{z}^2(t)\\ &= \left[A^1(t)z^1 - A^2(t)z^2\right] + i\left[A^2(t)z^1 + A^1(t)z^2\right] + f^1(t) + if^2(t),\end{aligned}$$

тобто

$$\begin{cases}\dot{z}^1(t) = A^1(t)z^1 - A^2(t)z^2 + f^1(t),\\ \dot{z}^2(t) = A^2(t)z^1 + A^1(t)z^2 + f^2(t).\end{cases}$$

Таким чином,

$$\begin{pmatrix}\dot{z}^1(t)\\ \dot{z}^2(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A^1(t) & -A^2(t)\\ A^2(t) & A^1(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z^1\\ z^2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}f^1(t)\\ f^2(t)\end{pmatrix}. \qquad (2.1.22)$$

Отже, система (2.1.21) еквівалентна системі (2.1.22). Тому далі вивчаємо дійсні розв'язки систем з дійсними коефіцієнтами.

### 2.1.3. Оператор $L_n^A$

**Означення 2.1.7.** Нехай $H_1$ та $H_2$ є лінійними просторами над $\mathbb{R}$ (означення див., наприклад, в [12, гл. 1, § 4]). Відображення $G : H_1 \to H_2$ називається *лінійним оператором*, якщо

$$G(\alpha x + \beta y) = \alpha Gx + \beta Gy, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ x, y \in H_1.$$

Зазначимо, що класи $C^k(\Omega)$ та $D^k(\Omega)$ є лінійними просторами над $\mathbb{R}$ (і над $\mathbb{C}$), $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Для лінійного оператора $G : H_1 \to H_2$, де $H_1$ та $H_2$ є лінійними просторами, позначимо

$$\mathcal{N}(G) = \{x \in H_1 \mid Gx = 0\}, \quad \mathcal{R}(G) = \{y \in H_2 \mid \exists x \in H_1 y = Gx\}.$$

Легко бачити, що $\mathcal{N}(G)$ та $\mathcal{R}(G)$ є нуль-множиною (ядром) та образом цього оператора, відповідно, і утворюють лінійні простори.

**Означення 2.1.8.** Система елементів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ лінійного простору $H$ називається *лінійно незалежною*, якщо

$$\forall M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \left( \sum_{j=1}^{n} M_j x_j = 0 \Rightarrow M = 0 \right).$$

Якщо $H$ є простором $(F[a,b])^n$ або його підпростором, лінійно незалежну систему елементів називатимемо (вектор-) функціями, лінійно незалежними на $[a,b]$.

Розглянемо оператор

$$\begin{aligned} &L_n^A : (D[a,b])^n \to (F[a,b])^n, \\ &L_n^A x = \left( \mathbb{I}\frac{dx}{dt} - A(t)x \right), \quad x \in (D[a,b])^n, \end{aligned}$$

де $A(t) \in \mathfrak{M}(n,n)$, $t \in [a,b]$, $A \in C[a,b]$. Формально цей оператор записуватимемо так:

$$L_n^A = \mathbb{I}\frac{d}{dt} - A(t).$$

Маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{N}\big(L_n^A\big) &= \{x \in (D[a,b])^n \mid \dot{x} = A(t)x\}, \\ \mathcal{R}\big(L_n^A\big) &= \{f \in (F[a,b])^n \mid \dot{x} = A(t)x + f(t)\}. \end{aligned}$$

## 2.1.4. Властивості оператора $L_n^A$

**Твердження 2.1.9.** *Оператор $L_n^A$ є лінійним.*

*Доведення.* Для всіх $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$, $x^1, x^2 \in (D[a,b])^n$ маємо

$$\begin{aligned} L_n^A(\alpha x^1 + \beta x^2) &= \left( \mathbb{I}\frac{d}{dt} - A(t) \right)(\alpha x^1 + \beta x^2) \\ &= \alpha \left( \mathbb{I}\frac{d}{dt} - A(t) \right) x^1 + \beta \left( \mathbb{I}\frac{d}{dt} - A(t) \right) x^2 \\ &= \alpha L_n^A x^1 + \beta L_n^A x^2. \end{aligned}$$

□

**Твердження 2.1.10.** *Нехай $x^1$ є розв'язком $L_n^A x = f^1$, а $x^2$ — розв'язком $L_n^A x = f^2$. Тоді для будь-яких $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функція $\alpha x^1 + \beta x^2$ є розв'язком $L_n^A x = \alpha f^1 + \beta f^2$. Зокрема, $\mathcal{N}\big(L_n^A\big)$ та $\mathcal{R}\big(L_n^A\big)$ є лінійними просторами.*

*Доведення.* Маємо $L_n^A x^1 = f_1$ і $L_n^A x^2 = f^2$. Тоді $\alpha f^1 + \beta f^2 = \alpha L_n^A x^1 + \beta L_n^A x^2$. Скориставшись твердженням 2.1.9, одержуємо $\alpha f^1 + \beta f^2 = L_n^A(\alpha x^1 + \beta x^2)$. □

**Твердження 2.1.11.** *Нехай $L_n^A x^0 = f$. Тоді для будь-якого розв'язку $x^1$ рівняння $L_n^A x = f$ існує $x^2$ — розв'язок рівняння $L_n^A x = 0$ такий, що $x^1 = x_0 + x^2$. Тобто множина розв'язків рівняння $L_n^A x = f$ має вигляд $\{x^0\} + \mathcal{N}\big(L_n^A\big)$.*

*Доведення.* Маємо $L_n^A x^0 = f$, $L_n^A x^1 = f$. Позначивши $x^2 = x^1 - x^0$, за твердженням 2.1.10 одержуємо $L_n^A x^2 = L_n(x^1 - x^0) = f - f = 0$. Тому $x^2 \in N\big(L_n^A\big)$. □

**Твердження 2.1.12.** *Існує система лінійно незалежних елементів $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \mathcal{N}\big(L_n^A\big)$ така, що $\operatorname{lin}\big(x^1, \ldots, x^n\big) = \mathcal{N}\big(L_n^A\big)$, тобто $\dim \mathcal{N}\big(L_n^A\big) = n$.*

*Доведення.* Нехай $e^j$, $j = \overline{1, n}$, є стандартним базисом $\mathbb{R}^n$ (див. с. 30). За теоремою 2.1.6 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи для кожного $j = \overline{1, n}$ знайдемо розв'язок $x^j$ рівняння $L_n^A x = 0$, який задовольняє умову $x(t_0) = e^j$, $t_0 \in [a, b]$. Покажемо, що так знайдені $x^j$ утворюють базис $N(L_n^A)$, тобто:

1) функції $x^1, \ldots, x^n$ лінійно незалежні,

2) $\operatorname{lin}(x^1, \ldots, x^n) = \mathcal{N}\big(L_n^A\big)$.

1) Нехай $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ і для всіх $t \in [a, b]$ маємо $\sum_{j=1}^{n} M_j x^j(t) = 0$. Тоді $0 = \sum_{j=1}^{n} M_j x^j(t_0) = \sum_{j=1}^{n} M_j e^j$. Тому $M = 0$, тобто 1) вірно.

2) Нехай $x \in \mathcal{N}\big(L_n^A\big)$. Знайдемо $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ таке, що $x(t_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j e^j$. Тоді $x(t_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} C_j x^j(t_0)$. Отже, функція

$$\widehat{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j x^j(t), \quad t \in [a,b],$$

є розв'язком $L_n^A x = 0$ і задовольняє умову $\widehat{x}(t_0) = x(t_0)$. Тому за теоремою 2.1.6 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи маємо $\widehat{x}(t) = x(t)$, $t \in [a,b]$. Таким чином, 2) також доведено. □

## 2.1.5. Визначник Вронського

**Означення 2.1.13.** Нехай $\varphi^j = \begin{pmatrix} \varphi_1^j \\ \vdots \\ \varphi_n^j \end{pmatrix} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,n}$. Визначник

$$W\left\{\varphi^j\right\}_{j=1}^n = \det\left(\varphi^1 \cdots \varphi^n\right) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \cdots & \varphi_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^1 & \cdots & \varphi_n^n \end{vmatrix}$$

називається *визначником Вронського* системи вектор-функцій $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$.

Розглянемо теорему про визначник Вронського системи лінійно залежних вектор-функцій.

**Теорема 2.1.14.** *Нехай $\varphi^j : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,n}$, є лінійно залежними. Тоді $W\left\{\varphi^j\right\}_{j=1}^n(t) \equiv 0$ на $[a,b]$.*

*Доведення.* Якщо вектор-функції $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ є лінійно залежними на $[a,b]$, то для кожного $t \in [a,b]$ вектори $\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t)$ є лінійно залежними. Отже,

$$\forall t \in [a,b] \quad \det\left(\varphi^1(t) \cdots \varphi^n(t)\right) = 0. \qquad \square$$

З цієї теореми одразу випливає достатня умова лінійної незалежності системи вектор-функцій.

**Наслідок 2.1.15.** *Нехай $\varphi^j : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,n}$, та існує $t_0 \in [a,b]$ таке, що $W\left\{\varphi^j\right\}_{j=1}^n (t_0) \neq 0$. Тоді $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ є лінійно незалежними на $[a,b]$.*

*Приклад* 2.1.16. Розглянемо вектор-функції

$$\varphi^1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \varphi^2(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} t \\ |t| \end{pmatrix} \quad \text{на } [-1,1].$$

та обчислимо їх визначник Вронського:

$$W\left\{\varphi^1, \varphi^1\right\}(t) \equiv \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{sgn} t \\ t & |t| \end{vmatrix} \equiv |t| - t \operatorname{sgn} t \equiv |t| - |t| \equiv 0 \quad \text{на } [-1,1].$$

Покажемо, що $\varphi^1, \varphi^2$ є лінійно незалежними на $[-1,1]$. Маємо

$$M_1\varphi^1(t) + M_2\varphi^2(t) \equiv 0 \quad \text{на } [-1,1].$$

де $M_1, M_2 \in \mathbb{R}$. Тобто

$$\begin{cases} M_1 + M_2 \operatorname{sgn} t \equiv 0, \\ M_1 t + M_2 |t| \equiv 0. \end{cases}$$

Отже,

$$M_1 + M_2 = 0, \quad \text{коли } t = 1, \tag{2.1.23}$$

$$M_1 - M_2 = 0, \quad \text{коли } t = -1. \tag{2.1.24}$$

Тому $M_1 = M_2 = 0$, тобто $\varphi^1, \varphi^2$ є лінійно незалежними на $[-1,1]$.

Цей приклад демонструє, що умова нерівності нулю визначника Вронського системи вектор-функцій не є необхідною, а є лише достатньою умовою для лінійної незалежності.

Зафіксуємо $A \in C[a,b]$, $A(t) \in \mathfrak{M}(n,n)$, $t \in [a,b]$. У випадку, коли розглядаємо не просто систему вектор-функцій, а систему функцій із $\mathcal{N}\big(L_n^A\big)$, тобто систему розв'язків *лінійної однорідної системи*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in [a,b], \; x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1.25}$$

ситуація інша. Доведемо необхідну умову лінійної незалежності системи функцій із $\mathcal{N}\big(L_n^A\big)$.

**Теорема 2.1.17.** *Нехай* $\varphi^j : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $j = \overline{1,n}$, *є лінійно незалежними на* $[a,b]$ *та* $\varphi^j \in \mathcal{N}\big(L_n^A\big)$, $j = \overline{1,n}$. *Тоді*

$$\forall t \in [a,b] \quad W\left\{\varphi^j\right\}_{j=1}^n(t) \neq 0. \tag{2.1.26}$$

*Доведення.* Припустимо супротивне. Нехай

$$\exists t_0 \in [a,b] \quad W\left\{\varphi^j\right\}_{j=1}^n(t_0) = 0.$$

Тоді існує $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ таке, що $\sum\limits_{j=1}^n M_j \varphi^j(t_0) = 0$. Отже, функція

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^n M_j \varphi^j(t), \quad t \in [a,b],$$

є розв'язком (2.1.25) (див. твердження 2.1.10) та $\varphi(t_0) = 0$. За теоремою 2.1.6 про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи одержуємо $\varphi(t) \equiv 0$ на $[a,b]$. Тому $\sum\limits_{j=1}^n M_j \varphi^j(t) \equiv 0$ на $[a,b]$, тобто функції $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ є лінійно залежними на $[a,b]$. Одержана суперечність доводить теорему. □

З цієї теореми та наслідку 2.1.15 випливає критерій лінійної незалежності системи функції з $\mathcal{N}(L_n^A)$.

**Наслідок 2.1.18.** *Нехай* $\varphi^j : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_j \in \mathcal{N}\big(L_n^A\big)$, $j = \overline{1,n}$. *Тоді вектор-функції* $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ *є лінійно незалежними на* $[a,b]$ *в тому і лише в тому випадку, коли*

$$\forall t \in [a,b] \quad W\left\{\varphi^j\right\}_{j=1}^n(t) \neq 0. \tag{2.1.27}$$

Звідси одержуємо критерій лінійної залежності системи функції з $\mathcal{N}\big(L_n^A\big)$.

**Наслідок 2.1.19.** *Нехай* $\varphi^j : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\varphi^j \in \mathcal{N}\big(L_n^A\big)$, $j = \overline{1,n}$. *Тоді вектор-функції* $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ *є лінійно залежними на* $[a,b]$ *в тому і лише в тому випадку, коли*

$$\forall t \in [a,b] \quad W\left\{\varphi^j\right\}_{j=1}^n(t) = 0. \tag{2.1.28}$$

Далі нам буде потрібна лема про диференціювання визначника.

**Лема 2.1.20.** *Нехай матриця* $\Gamma = \left\{\gamma_i^j\right\}_{i=\overline{1,n}}^{v=\overline{1,n}} \in D[a,b]$. *Тоді:*

$$(\det\Gamma)' = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \ldots & \gamma_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{i-1}^1 & \gamma_{i-1}^2 & \ldots & \gamma_{i-1}^n \\ (\gamma_i^1)' & (\gamma_i^2)' & \ldots & (\gamma_i^n)' \\ \gamma_{i+1}^1 & \gamma_{i+1}^2 & \ldots & \gamma_{i+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^2 & \ldots & \gamma_n^n \end{vmatrix}.$$

*Доведення.* Маємо $\det\Gamma = \sum\limits_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\gamma_1^{\sigma(1)}\cdots\gamma_n^{\sigma(n)}$, де $S_n$ є множиною всіх підстановок з $n$ елементів.

Тому

$$(\det\Gamma)' = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \sum_{i=1}^n \gamma_1^{\sigma(1)}\cdots\gamma_{i-1}^{\sigma(i-1)}(\gamma_i^{\sigma(i)})'\gamma_{i+1}^{\sigma(i+1)}\cdots\gamma_n^{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \gamma_1^{\sigma(1)} \cdots \gamma_{i-1}^{\sigma(i-1)} (\gamma_i^{\sigma(i)})' \gamma_{i+1}^{\sigma(i+1)} \cdots \gamma_n^{\sigma(n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{i-1}^1 & \gamma_{i-1}^2 & \dots & \gamma_{i-1}^n \\ (\gamma_i^1)' & (\gamma_i^2)' & \dots & (\gamma_i^n)' \\ \gamma_{i+1}^1 & \gamma_{i+1}^2 & \dots & \gamma_{i+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^n \end{vmatrix}. \qquad \square$$

**Теорема 2.1.21** (Ліувілль). *Нехай* $\Phi = \left(\varphi^1 \cdots \varphi^n\right)$, $\varphi^j \in \mathcal{N}\left(L_n^A\right)$, $j = \overline{1,n}$. *Тоді*

$$(\det \Phi(t))' = \det \Phi(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(\tau) d\tau \right\}, \quad t \in [a,b], \quad (2.1.29)$$

*де* $t_0 \in [a,b]$.

*Доведення.* Нехай

$$\Phi = \left(\varphi^1 \cdots \varphi^n\right) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1 & \cdots & \varphi_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n^1 & \cdots & \varphi_n^n \end{pmatrix}, \quad \text{де } \varphi^j = \begin{pmatrix} \varphi_1^i \\ \vdots \\ \varphi_n^j \end{pmatrix}, \ j = \overline{1,n}.$$

Тоді $\dot{\Phi}(t) \equiv A(t)\Phi(t)$ на $[a,b]$, $j = \overline{1,n}$. Тобто

$$\dot{\varphi}_i(t) = \sum_{k=1}^{n} a_i^k(t) \varphi_k(t), \quad t \in [a,b], \ i = \overline{1,n}. \quad (2.1.30)$$

Тут $\varphi_i = (\varphi_i^1, \dots \varphi_i^n)$ є $i$-м рядком матриці $\Phi$, $i = \overline{1,n}$, $A = \left\{a_i^j\right\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$. За лемою 2.1.20 про диференціювання визначника, враховуючи (2.1.30), маємо

$$(\det\Phi(t))' = \sum_{i=1}^{n}\det\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_{i-1}\\ \dot\varphi_i\\ \varphi_{i+1}\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_{i-1}\\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_i^k(t)\varphi_k\\ \varphi_{i+1}\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \vdots\\ \varphi_{i-1}\\ a_i^i(t)\varphi_i\\ \varphi_{i+1}\\ \vdots\\ \varphi_n\end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^i(t)\det\Phi(t) = (\operatorname{tr} A(t))\det\Phi(t), \quad t\in[a,b],$$

отже, (2.1.29) виконано. □

## 2.1.6. Розв'язання лінійних систем

Нуль-множина $\mathcal{N}\big(L_n^A\big)$ оператора $L_n^A$ є, з одного боку, лінійним простором розмірності $n$ (див. твердження 2.1.10 і 2.1.12), а з іншого боку — множиною всіх розв'язків системи (2.1.25). Тому базис простору $\mathcal{N}\big(L_n^A\big)$ дозволяє визначити загальний розв'язок системи (2.1.25). З цим базисом пов'язано поняття фундаментальної матриці розв'язків лінійної системи.

**Означення 2.1.22.** Система лінійно незалежних розв'язків $\varphi^1,\dots,\varphi^n$ системи (2.1.25) називається *фундаментальною системою розв'язків* (2.1.25), а матриця

$$\Phi = \big(\varphi^1\cdots\varphi^n\big) = \begin{pmatrix}\varphi_1^1 & \cdots & \varphi_1^n\\ \vdots & & \vdots\\ \varphi_n^1 & \cdots & \varphi_n^n\end{pmatrix}, \quad \text{де } \varphi^j = \begin{pmatrix}\varphi_1^j\\ \vdots\\ \varphi_n^j\end{pmatrix}, \; j=\overline{1,n},$$

називається *фундаментальною матрицею розв'язків* цієї системи.

Очевидно, $\det\Phi = W\left\{\varphi^j\right\}_{j=1}^n$, якщо $\Phi = \left(\varphi^1 \cdots \varphi^n\right)$.

Далі розглянемо критерій того, що матриця є фундаментальною матрицею розв'язків лінійної однорідної системи.

**Теорема 2.1.23.** *Нехай $\Phi \in D[a,b]$, $\Phi(t) \in \mathfrak{M}(n,n)$, $t \in [a,b]$. Тоді $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.1.25) в тому і лише в тому випадку, коли виконуються дві умови:*

1. $\forall t \in [a,b] \quad \dot{\Phi} = A(t)\Phi(t)$*;*

2. $\forall t \in [a,b] \quad \det\Phi(t) \neq 0$.

*Доведення.* Умова 1 еквівалентна твердженню про те, що кожен стовпець матриці $\Phi$ є розв'язком системи (2.1.25). За наслідком 2.1.18 умова 2 еквівалентна лінійній незалежності стовпців матриці $\Phi$ на $[a,b]$. □

Далі розглянемо теорему про зв'язок фундаментальних матриць розв'язків лінійної однорідної системи.

**Теорема 2.1.24.** *Нехай $\Phi_0$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.1.25). Тоді для будь-якої фундаментальної матриці розв'язків $\Phi$ системи (2.1.25) існує невироджена стала матриця $D$ така, що $\Phi(t) \equiv \Phi_0(t)D$ на $[a,b]$.*

*Доведення.* Не обмежуючи загальності, можна вважати, що стовпці матриці $\Phi_0$ є базисними векторами $N(L_n^A)$, побудованими в твердженні 2.1.12.

Нехай

$$\Phi = \left(\varphi^1 \cdots \varphi^n\right), \quad \Phi_0 = \left(\varphi_0^1 \cdots \varphi_0^n\right).$$

Тоді $\operatorname{lin}(\varphi_0^1, \ldots, \varphi_0^n) = \mathcal{N}\left(L_n^A\right)$, $\varphi^j \in \mathcal{N}\left(L_n^A\right)$, $j = \overline{1,n}$. Тому

$$\forall j = \overline{1,n}\ \exists D^j = \begin{pmatrix} d_1^j \\ \vdots \\ d_n^j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\ \forall i \in [a,b] \quad \varphi^j(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_0^i(t) d_i^j.$$

Отже, $\varphi^j(t) \equiv \Phi_0(t)D^j$ на $[a,b]$. Позначимо $D = \big(D^1 \cdots D^n\big)$. Маємо $D \in \mathfrak{M}(n,n)$ і $\Phi(t) \equiv \Phi_0(t)D$ на $[a,b]$.

Покажемо, що $\det D \neq 0$. За попередньою теоремою маємо $\det \Phi(t) \neq 0$ та $\det \Phi_0(t) \neq 0$, $t \in [a,b]$. Отже, $\det D = \det \Phi(t)/\det \Phi_0(t) \neq 0$. □

Звідси одержуємо теорему про загальний розв'язок лінійної однорідної системи.

**Теорема 2.1.25.** *Нехай* $\Phi = \big(\varphi^1 \cdots \varphi^n\big)$ *є фундаментальною матрицею розв'язків системи* (2.1.25)*. Тоді загальний розв'язок цієї системи має вигляд*

$$x = \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi^j(t) = \Phi(t)C, \quad t \in [a,b], \tag{2.1.31}$$

*де* $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *є довільним сталим вектором.*

*Доведення.* За попередньою теоремою стовпці будь-якої фундаментальної матриці розв'язків (2.1.25) є базисом $N(L_n^A)$. Функція $\psi(t)$, $t \in [a,b]$, є розв'язком (2.1.25) в тому і лише в тому випадку, коли $\psi \in N(L_n^A)$. Тому загальний розв'язок системи (2.1.25) має вигляд 2.1.31. □

*Приклад* 2.1.26. Розглянемо лінійну однорідну систему

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t & \cos t \\ -2\cos t & 1 + 2\cos t \end{pmatrix} x, \quad t \in [-\alpha, \alpha], \ x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.1.32}$$

і знайдемо її загальний розв'язок. Тут $\alpha$ є довільною сталою.

Легко перевірити, що вектор-функції

$$\varphi^1(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t + \sin t}, \quad \varphi^2(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} \quad \text{на } [-\alpha, \alpha],$$

є розв'язками цієї системи. Позначимо

$$\Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} \varphi^1(t) & \varphi^2(t) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} e^{t+\sin t} & e^t \\ 2e^{t+\sin t} & e^t \end{pmatrix} \quad \text{на } [-\alpha, \alpha]. \tag{2.1.33}$$

Маємо

$$\det \Phi(t) \equiv -e^{2t+\sin t} \neq 0 \quad \text{на } [-\alpha, \alpha]. \tag{2.1.34}$$

Тому $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.1.32) (див. критерій того, що матриця є фундаментальною матрицею розв'язків лінійної однорідної системи, тобто теорему 2.1.23). Тому за теоремою 2.1.25 про загальний розв'язок лінійної однорідної системи одержуємо, що

$$x = C_1\varphi^1(t) + C_2\varphi^2(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{t+\sin t} + C_2 e^t \\ 2C_1 e^{t+\sin t} + C_2 e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\alpha, \alpha],$$

де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими, є загальним розв'язком системи (2.1.32).

**Означення 2.1.27.** Будь-який окремо взятий розв'язок системи (2.1.14) називається *частинним розв'язком* цієї системи.

З цієї теореми та твердження 2.1.11 одразу випливає теорема про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи.

**Теорема 2.1.28.** *Нехай $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \cdots \varphi^n \end{pmatrix}$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.1.25), а $\varphi^0(t)$, $t \in [a,b]$, є частинним розв'язком системи (2.1.14). Тоді загальний розв'язок цієї системи має вигляд*

$$x = \varphi^0(t) + \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(t) = \varphi^0(t) + \Phi(t)C, \quad t \in [a,b], \tag{2.1.35}$$

*де* $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ *є довільним сталим вектором.*

## 2.1.7. Матриця Коші лінійної системи. Метод Коші пошуку частинного розв'язку лінійної неоднорідної системи

Розглянемо лінійну неоднорідну систему (2.1.14) та відповідну їй лінійну однорідну систему (2.1.25).

**Означення 2.1.29.** *Матрицею Коші* системи (2.1.25) називається матриця

$$K(t,\tau) = \Phi(t)(\Phi(\tau))^{-1}, \quad (t,\tau) \in [a,b]^2,$$

де $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.1.25).

*Задача* 2.1.30. Довести, що матриця Коші не залежить від вибору фундаментальної матриці розв'язків. (Скористатись теоремою про зв'язок фундаментальних матриць розв'язків.)

Розглянемо критерій того, що матриця є матрицею Коші лінійної однорідної системи.

**Теорема 2.1.31.** *Матриця $K \in C^1\left([a,b]^2\right)$ є матрицею Коші системи* (2.1.25) *в тому і лише в тому випадку, коли*

1. $\forall \tau \in [a,b]$ $K(\cdot,\tau)$ *задовольняє* (2.1.25)*;*
2. $\forall t \in [a,b]$ $K(t,t) = \mathbb{I}$.

*Доведення. Необхідність* 1 *та* 2.

1. Нехай $\tau \in [a,b]$ зафіксовано. Позначимо $C = (\Phi(\tau))^{-1}$. Тоді $K(\cdot,\tau) = \Phi(\cdot)C$. За критерієм того, що матриця є фундаментальною матрицею розв'язків (див. теорему 2.1.23) маємо $\dot{\Phi}(t) \equiv A(t)\Phi(t)$ на $[a,b]$, тому умову 1 виконано.

2. Маємо $K(t,t) \equiv \Phi(t)(\Phi(t))^{-1} \equiv \mathbb{I}$ на $[a,b]$.

*Достатність* 1 *та* 2. Зафіксуємо довільне $\tau \in [a,b]$. З 1 випливає, що $K(\cdot,\tau)$ є матрицею розв'язків (2.1.25). Тому за теоремою Ліувілля (див. теорему 2.1.21)

$$\det K(t,\tau) = \det K(\tau,\tau) \exp\left\{\int_\tau^t \operatorname{tr} A(\xi)d\xi\right\}, \quad t \in [a,b].$$

Оскільки за умовою 2 маємо $\det K(\tau,\tau) \neq 0$, для будь-якого $t \in [a,b]$ маємо $\det K(t,\tau) \neq 0$. Таким чином, за критерієм того, що матриця є фундаментальною матрицею розв'язків лінійної однорідної системи (див. теорему 2.1.23) одержуємо, що $K(\cdot,\tau)$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.1.25). Нехай $\Phi$ є деякою фундаментальною матрицею розв'язків цієї системи. Тоді за теоремою 2.1.24 про зв'язок фундаментальних матриць розв'язків маємо $K(t,\tau) = \Phi(t)C(\tau)$, де $C(\tau) \in \mathfrak{M}(n,n)$, $\det C(\tau) \neq 0$ на $[a,b]$. Скориставшись умовою 2, одержуємо

$$K(\tau,\tau) \equiv \Phi(\tau)C(\tau) \equiv \mathbb{I} \quad \text{на } [a,b],$$

тому

$$K(t,\tau) \equiv \Phi(t)(\Phi(\tau))^{-1} \quad \text{на } [a,b]^2. \qquad \square$$

Наступна теорема дає можливість знайти частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи *методом Коші,* скориставшись матрицею Коші, яка побудована за допомогою фундаментальної матриці розв'язків відповідної лінійної однорідної системи.

**Теорема 2.1.32.** *Нехай $K$ є матрицею Коші системи (2.1.25). Тоді функція*

$$x = \varphi^0(t) \equiv \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in [a,b],$$

*де $t_0 \in [a,b]$, є розв'язком (2.1.14).*

*Доведення.* Маємо (див. умови 1, 2 попередньої теореми)

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^0(t) &\equiv \int_{t_0}^{t} \frac{\partial K(t,\tau)}{\partial t} f(\tau)d\tau + K(t,t)f(t)\\ &\equiv \int_{t_0}^{t} A(t)K(t,\tau)f(\tau)d\tau + f(t) \equiv A(t)\varphi^0(t) + f(t) \quad \text{на } [a,b].\end{aligned}$$

Теорему доведено. $\square$

Звідси одержуємо теорему про розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи.

**Теорема 2.1.33.** *Нехай $K$ є матрицею Коші системи (2.1.25). Тоді розв'язок задачі Коші для (2.1.14) з початковою умовою $x(t_0) = x^0$ є единим і має вигляд*

$$x = K(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in [a, b].$$

*Доведення.* З попередньої теореми та теореми про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи одержуємо (теорема 2.1.28), що загальний розв'язок (2.1.14) має вигляд

$$x = \Phi(t)C + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in [a, b],$$

де $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків (2.1.25), $C \in \mathbb{R}^n$, $K(t, \tau) = \Phi(t)(\Phi(\tau))^{-1}$ на $[a, b]^2$. За початковою умовою маємо $x^0 = x(t_0) = \Phi(t_0)C$. Тому $C = (\Phi(t_0))^{-1}x^0$. Отже,

$$\begin{aligned} x &= \Phi(t)(\Phi(t_0))^{-1}x^0 + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau)f(\tau)d\tau \\ &= K(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t} K(t, \tau)f(\tau)d\tau, \quad t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Теорему доведено. □

*Приклад* 2.1.34. Розглянемо лінійну неоднорідну систему

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 - \cos t & \cos t \\ -2\cos t & 1 + 2\cos t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \ t \in [-\alpha, \alpha], \ x \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1.36)$$

і знайдемо її загальний розв'язок. Тут $\alpha$ є довільною сталою.

Цій системі відповідає лінійна однорідна система (2.1.32), фундаментальну матрицю розв'язків якої було знайдено в прикладі 2.1.26. За теоремою 2.1.28 про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи загальний розв'язок (2.1.36) має вигляд

$$x = \varphi^0(t) + \Phi(t)C, \quad t \in [-\alpha, \alpha], \quad (2.1.37)$$

де $C \in \mathbb{R}^2$ є довільним сталим вектором, $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.1.32) і задана формулою (2.1.33), $\varphi^0(t)$, $t \in [-\alpha, \alpha]$, є окремим розв'язком системи (2.1.36). Цей розв'язок ми можемо знайти методом Коші, і для цього нам знадобиться матриця Коші. Обчислимо її. Спочатку знайдемо обернену для матриці $\Phi$. Маємо

$$\Phi^{-1}(t) \equiv \begin{pmatrix} -e^{-t-\sin t} & e^{-t-\sin t} \\ 2e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{на } [-\alpha, \alpha]. \tag{2.1.38}$$

Тому (див. 2.1.29)

$$\begin{aligned} K(t,\xi) \equiv \Phi(t)\Phi^{-1}(\xi) &\equiv \begin{pmatrix} e^{t+\sin t} & e^t \\ 2e^{t+\sin t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-\xi-\sin \xi} & e^{-\xi-\sin \xi} \\ 2e^{-\xi} & -e^{-\xi} \end{pmatrix} \\ &\equiv e^{t-\xi} \begin{pmatrix} 2 - e^{\sin t - \sin \xi} & e^{\sin t - \sin \xi} - 1 \\ 2\left(1 - e^{\sin t - \sin \xi}\right) & 2e^{\sin t - \sin \xi} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{на } [-\alpha, \alpha]^2. \end{aligned}$$

За теоремою 2.1.32

$$\begin{aligned} \varphi^0(t) &\equiv \int_0^t K(t,\xi) \begin{pmatrix} e^{\xi} \\ e^{\xi} \end{pmatrix} d\xi \equiv \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(\xi) \begin{pmatrix} e^{\xi} \\ e^{\xi} \end{pmatrix} d\xi \\ &\equiv \Phi(t) \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-\xi-\sin \xi} & e^{-\xi-\sin \xi} \\ 2e^{-\xi} & -e^{-\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\xi}\, d\xi \\ &\equiv \begin{pmatrix} e^{t+\sin t} & e^t \\ 2e^{t+\sin t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \int_0^t d\xi \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t \quad \text{на } [-\alpha, \alpha] \end{aligned}$$

є розв'язком системи (2.1.36). З (2.1.37) одержуємо, що

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} e^{t+\sin t} & e^t \\ 2e^{t+\sin t} & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} te^t + C_1 e^{t+\sin t} + C_2 e^t \\ te^t + 2C_1 e^{t+\sin t} + C_2 e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\alpha, \alpha], \end{aligned}$$

є загальним розв'язком системи (2.1.36), $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими.

## 2.1.8. Метод Лаґранжа розв'язання лінійної неоднорідної системи

Ми продовжуємо розглядати системи (2.1.14) та (2.1.25). У цьому підрозділі розглянемо *метод Лаґранжа* розв'язання лінійної неоднорідної системи.

Нехай $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.1.25). Зробимо в системі (2.1.14) заміну змінних:

$$x(t) = \Phi(t)w(t), \quad t \in [a, b]. \tag{2.1.39}$$

З одного боку, маємо

$$\dot{x} = \dot{\Phi}(t)w(t) + \Phi(t)\dot{w}(t) = A(t)\Phi(t)w(t) + \Phi(t)\dot{w}(t), \quad t \in [a, b],$$

а з іншого —

$$\dot{x} = A(t)x(t) = A(t)\Phi(t)w(t) + f(t), \quad t \in [a, b].$$

Тому

$$A(t)\Phi(t)w(t) + \Phi(t)\dot{w}(t) = A(t)\Phi(t)w(t) + f(t), \quad t \in [a, b].$$

Отже,

$$\Phi(t)\dot{w}(t) = f(t), \quad t \in [a, b].$$

Оскільки $\det \Phi(t) \neq 0$, $t \in [a, b]$, система (2.1.14) еквівалентна системі

$$\dot{w}(t) = (\Phi(t))^{-1} f(t), \quad t \in [a, b], \; w \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.40}$$

Розв'язавши цю систему, одержуємо загальний розв'язок системи (2.1.14) за допомогою формули (2.1.39).

*Приклад* 2.1.35. Розглянемо лінійну неоднорідну систему (2.1.36) з прикладу 2.1.34 і знайдемо її загальний розв'язок методом Лаґранжа. Цій системі відповідає лінійна однорідна система

(2.1.32), фундаментальну матрицю розв'язків якої було знайдено в прикладі 2.1.26. Відповідно методу Лаґранжа розглянемо заміну змінних

$$x(t) = \Phi(t)w(t), \quad t \in [-\alpha, \alpha], \tag{2.1.41}$$

де $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.1.32) і задана формулою (2.1.33). Ураховуючи (2.1.38) і (2.1.40), маємо

$$\dot{w}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t-\sin t} & e^{-t-\sin t} \\ 2e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\alpha, \alpha].$$

Отже,

$$w(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\alpha, \alpha],$$

де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими. Ураховуючи (2.1.33) і (2.1.41), звідси одержуємо, що загальний розв'язок системи (2.1.36) має вигляд

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} e^{t+\sin t} & e^t \\ 2e^{t+\sin t} & e^t \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} te^t + C_1 e^{t+\sin t} + C_2 e^t \\ te^t + 2C_1 e^{t+\sin t} + C_2 e^t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\alpha, \alpha], \end{aligned}$$

де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими.

## 2.2. Лінійні диференціальні рівняння

Розглянемо *лінійне неоднорідне рівняння*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t), \quad t \in [a, b], \tag{2.2.1}$$

де $a_j, g \in C[a, b], j = \overline{0, n-1}$, а також відповідне йому *лінійне однорідне рівняння*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \quad t \in [a, b]. \tag{2.2.2}$$

Зробимо заміну $x = \mathfrak{A}_n y$ (див. (1.2.6)). Тоді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & t \in [a,b], \\ \dot{x}_2 = x_3, & t \in [a,b], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n, & t \in [a,b], \\ \dot{x}_n = -a_{n-1}(t)x_n - \dots - a_0(t)x_1 + g(t), & t \in [a,b]. \end{cases}$$

Таким чином, рівняння (2.2.1) є еквівалентним системі

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a,b], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2.3}$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}. \tag{2.2.4}$$

З теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійних систем (див. теорему 2.1.6) одразу одержуємо відповідну теорему для лінійних рівнянь.

Дійсно, умови

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{n-1}(t_0) = y_{n-1} \end{cases} \tag{2.2.5}$$

є еквівалентними умові

$$x(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ураховуючи викладене вище, одержуємо теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійних рівнянь.

**Теорема 2.2.1.** *Існує єдиний розв'язок задачі Коші* (2.2.1), (2.2.5) *на* $[a, b]$.

Розглянемо наступні відображення ($a_n(t) \equiv 1$):

$$\mathfrak{L}_n : D^n[a,b] \to F[a,b], \qquad \mathfrak{L}_n = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^i,$$
$$L_n^A : (D[a,b])^n \to (F[a,b])^n, \qquad L_n^A = \mathbb{I}\frac{d}{dt} - A(t),$$

де $A$ задається формулою (2.2.4). Оскільки

$$L_n^A = \mathfrak{L}_n \mathfrak{A}_n^{-1} \quad \text{та} \quad \mathfrak{L}_n = L_n^A \mathfrak{A}_n, \tag{2.2.6}$$

маємо

$$L_n^A x = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathfrak{L}_n \mathfrak{A}_n^{-1} x = g \quad \text{та} \quad \mathfrak{L}_n y = g \Leftrightarrow L_n^A \mathfrak{A}_n y = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Тому властивості $\mathfrak{L}_n$ можна одержати із властивостей $L_n^A$ та $\mathfrak{A}_n$. Маємо

$$\mathcal{N}(\mathfrak{L}_n) = \{y \in D^n[a,b] \mid \mathfrak{L}_n y = 0\} = \mathfrak{A}_n^{-1}(N(L_n^A)),$$
$$\mathcal{R}(\mathfrak{L}_n) = \{g \in F[a,b] \mid \exists y \in D^n[a,b]\ \mathfrak{L}_n = g\}.$$

## 2.2.1. Властивості $\mathfrak{A}_n$

**Твердження 2.2.2.** $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}_n^{-1}$ *є лінійними операторами.*

*Доведення.* Маємо

$$\mathfrak{A}_n(\alpha y_1 + \beta y_2) = \begin{pmatrix} \alpha y_1 + \beta y_2 \\ (\alpha y_1 + \beta y_2)' \\ \vdots \\ (\alpha y_1 + \beta y_2)^{(n-1)} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha\mathfrak{A}_n y_1 + \beta\mathfrak{A}_n y_2.$$

Також маємо

$$\mathfrak{A}_n^{-1}(\alpha p + \beta z) = [\alpha p + \beta z]_1 = \alpha p_1 + \beta z_1 = \alpha\mathfrak{A}_n p + \beta\mathfrak{A}_n z,$$

де $[u]_1$ означає першу координату вектора $u$. □

З твердження 2.2.2 та (2.2.6) одержуємо наступні твердження.

**Твердження 2.2.3.** *Нехай $x^j = \mathfrak{A}_n y_j$, $j = \overline{1,k}$, де $y_j \in D^{n-1}[a,b]$, $x^j \in (D[a,b])^n$, $j = \overline{1,k}$. Вектор-функції $x^1, \dots, x^n$ є лінійно незалежними в $(F[a,b])^n$ тоді і лише тоді, коли скалярні функції $y_1, \dots, y_n$ є лінійно незалежними в $F[a,b]$.*

*Доведення.* Нехай $M = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k$. Умова

$$\sum_{j=1}^{k} M_j x_j = 0 \quad \text{на } [a,b]$$

еквівалентна умові

$$0 = \mathfrak{A}_n^{-1}\left(\sum_{j=1}^{k} M_j x^j\right) = \sum_{j=1}^{k} M_j \mathfrak{A}_n^{-1} x^j = \sum_{j=1}^{k} M_j y_j \quad \text{на } [a,b].$$

Тому $y_1, \dots, y_n$ є лінійно незалежними на $[a,b]$ в тому і лише в тому випадку, коли $x_1, \dots, x_n$ є лінійно незалежними на $[a,b]$. □

## 2.2.2. Властивості $\mathfrak{L}_n$

З твердження 2.2.2 та (2.2.6) одержуємо наступні твердження.

**Твердження 2.2.4.** *Оператор $\mathfrak{L}_n$ є лінійним.*

**Твердження 2.2.5.** *Нехай* $y_1$ *є розв'язком* $\mathfrak{L}_n y = g_1$, *а* $x_2$ *є розв'язком* $\mathfrak{L}_n y = g_2$. *Тоді для всіх* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *функція* $\alpha y_1 + \beta y_2$ *є розв'язком* $\mathfrak{L}_n y = \alpha g_1 + \beta g_2$. *Зокрема,* $\mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big)$, $\mathcal{R}\big(\mathfrak{L}_n\big)$ *є лінійними просторами.*

**Твердження 2.2.6.** *Нехай* $\mathfrak{L}_n y_0 = g$. *Тоді для будь-якого розв'язку* $y_1$ *рівняння* $\mathfrak{L}_n y = g$ *існує* $y_2$ — *розв'язок* $\mathfrak{L}_n y = 0$ *такий, що* $y_1 = y_0 + y_2$. *Тобто множина розв'язків* $\mathfrak{L}_n y = g$ *має вигляд* $\{y_0\} + \mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big)$.

**Твердження 2.2.7.** *Існує система лінійно незалежних елементів* $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big)$ *така, що* $\operatorname{lin}\{y_1, \ldots, y_n\} = \mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big)$, *тобто* $\dim \mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big) = n$.

### 2.2.3. Визначник Вронського

**Означення 2.2.8.** Нехай $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$. Тоді матриця $\big(\mathfrak{A}_n \varphi_1 \cdots \mathfrak{A}_n \varphi_n\big)$ називається *матрицею Вронського*, а $\mathfrak{W}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \det\big(\mathfrak{A}_n \varphi_1 \cdots \mathfrak{A}_n \varphi_n\big)$ — *визначником Вронського* системи скалярних функцій $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

За цим означенням маємо

$$\mathfrak{W}\{\varphi_j\}_{j=1}^n = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Оскільки властивість системи функцій бути незалежними є інваріантом операторів $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_n^{-1}$ (див. твердження 2.2.3), з відповідних тверджень для вектор-функцій (теорема 2.1.14, наслідок 2.1.15) одразу одержуємо теорему 2.2.9 про визначник Вронського системи лінійно залежних функцій та достатню умову лінійної незалежності системи функцій (наслідок 2.2.10).

**Теорема 2.2.9.** *Нехай скалярні функції* $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$ *є лінійно залежними на* $[a,b]$. *Тоді*

$$\forall t \in [a,b] \quad \mathfrak{W}\{\varphi\}_{j=1}^n(t) = 0.$$

**Наслідок 2.2.10.** *Нехай* $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$ *та*

$$\exists t_0 \in [a,b] \quad \mathfrak{W}\left\{\varphi\right\}_{j=1}^{n}(t_0) \neq 0.$$

*Тоді скалярні функції* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *є лінійно незалежними на* $[a,b]$.

Як бачимо з наступного прикладу, обернене твердження не справджується.

*Приклад* 2.2.11. Нехай $\varphi_1(t) \equiv t^2$, $\varphi_2 \equiv t|t|$, $t \in [-1,1]$. Тоді

$$\mathfrak{W}\left\{t^1, t|t|\right\} \equiv \begin{vmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{vmatrix} \equiv 0,$$

але функції $t^2, t|t|$ лінійно незалежні на $[-1,1]$.

Ураховуючи ще й зв'язок між операторами $L_n^A$ та $\mathfrak{L}_n$ (див. (2.2.6)), наслідки 2.1.18 та 2.1.19, одержуємо критерії лінійної незалежності та лінійної залежності системи розв'язків лінійного однорідного рівняння.

**Наслідок 2.2.12.** *Нехай* $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi_j \in \mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big)$, $j = \overline{1,n}$. *Тоді скалярні функції* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *є лінійно незалежними на* $[a,b]$ *в тому і лише тому випадку, коли*

$$\forall t \in [a,b] \quad W\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^{n}(t) \neq 0.$$

**Наслідок 2.2.13.** *Нехай* $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi_j \in \mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big)$, $j = \overline{1,n}$. *Тоді скалярні функції* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *є лінійно залежними на* $[a,b]$ *в тому і лише тому випадку, коли*

$$\forall t \in [a,b] \quad \mathfrak{W}\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^{n}(t) = 0.$$

З теореми Ліувілля (див. теорему 2.1.21) одержуємо таку теорему.

**Теорема 2.2.14** (Ліувілль–Остроградський). *Нехай* $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi_j \in \mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big)$, $j = \overline{1,n}$. *Тоді*

$$\mathfrak{W}\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^{n}(t) = \mathfrak{W}\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^{n}(t_0) \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} a_n(\tau)\, d\tau\right\}, \quad t \in [a,b],$$

*де* $t_0 \in [a,b]$.

## 2.2.4. Розв'язання лінійних рівнянь

Нуль-множина $\mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big)$ оператора $\mathfrak{L}_n$ є, з одного боку, лінійним простором розмірності $n$ (див. твердження 2.2.5 і 2.2.7), а з іншого боку — множиною всіх розв'язків рівняння (2.2.2). Тому базис простору $\mathcal{N}\big(\mathfrak{L}_n\big)$ дозволяє визначити загальний розв'язок рівняння (2.2.2). З цим базисом пов'язано поняття фундаментальної системи розв'язків лінійного рівняння.

**Означення 2.2.15.** Система розв'язків $\varphi_j : [a,b] \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$, рівняння (2.2.2) на $[a,b]$ називається *фундаментальною системою розв'язків* цього рівняння, якщо функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є лінійно незалежними на $[a,b]$.

З теореми 2.1.25 про загальний розв'язок лінійної однорідної системи, враховуючи зв'язок між операторами $L_n^A$ та $\mathfrak{L}_n$ (див. (2.2.6)), одразу одержуємо теорему про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння.

**Теорема 2.2.16.** *Нехай $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є фундаментальною системою розв'язків рівняння (2.2.2). Тоді загальний розв'язок цього рівняння має вигляд*

$$y = \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(t), \quad t \in [a,b],$$

*де $C_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$.*

*Приклад* 2.2.17. Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$\begin{aligned} y''' - 3\tanh t\, y'' + \big(6\tanh^2 t - 3\big)\, y' \\ + \big(5\tanh t - 6\tanh^3 t\big)\, y = 0, \quad t \in [-\alpha, \alpha], \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

і знайдемо його загальний розв'язок. Тут $\alpha$ є довільною сталою. Легко перевірити, що функції

$$\varphi_1(t) \equiv t^2 \cosh t,\ \varphi_2(t) \equiv t\cosh t,\ \varphi_1(t) \equiv \cosh t \text{ на } [-\alpha, \alpha] \tag{2.2.8}$$

є розв'язками цього рівняння. Обчислимо визначник Вронського для системи функцій $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Маємо

$$\begin{aligned} W\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}(t) \\ &\equiv \begin{vmatrix} t^2 \cosh t & t \cosh t & \cosh t \\ 2t \cosh t + t^2 \sinh t & \cosh t + t \sinh t & \sinh t \\ (2 + t^2) \cosh t + 4t \sinh t & t \cosh t + 2 \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} \\ &\equiv -2 \cosh^3 t \quad \text{на } [-\alpha, \alpha]. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Оскільки цей визначник не дорівнює нулю на $[-\alpha, \alpha]$, функції $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.2.7) (див. наслідок 2.2.12 і означення 2.2.15). За теоремою про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння одержуємо, що загальний розв'язок рівняння (2.2.7) має вигляд

$$\begin{aligned} y &= C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) + C_2 \varphi_2(t) \\ &= \left(C_1 t^2 + C_2 t + C_3\right) \cosh t, \quad t \in [-\alpha, \alpha], \end{aligned}$$

де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими.

**Означення 2.2.18.** Будь-який окремо взятий розв'язок рівняння (2.2.1) називається *частинним розв'язком* цього рівняння.

З теореми 2.1.28 про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи, враховуючи зв'язок між операторами $L_n^A$ та $\mathfrak{L}_n$ (див. (2.2.6)), одразу одержуємо теорему про загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння.

**Теорема 2.2.19.** *Нехай $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є фундаментальною системою розв'язків рівняння (2.2.2), а $\varphi_0(t)$, $t \in [a, b]$, — частинним розв'язком (2.2.1). Тоді загальний розв'язок (2.2.1) має вигляд*

$$y = \varphi_0(t) + \sum_{j=1}^{n} C_j \varphi_j(t), \quad t \in [a, b],$$

*де $C_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$.*

## 2.2.5. Метод Коші розв'язання лінійного неоднорідного рівняння

**Означення 2.2.20.** Нехай $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є фундаментальною системою розв'язків рівняння (2.2.2) на $[a, b]$, $K(t, \xi) = \left\{K_l^j(t, \xi)\right\}_{l=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}} = \Phi(t)\Phi^{-1}(\xi)$, де $\Phi = \left(\mathfrak{A}_n\varphi_1 \cdots \mathfrak{A}_n\varphi_n\right)$. Функція $\mathfrak{K}(t, \xi) = K_1^n(t, \xi)$ (останній елемент першого рядка матриці Коші $K$) називається *функцією Коші* рівняння (2.2.2).

*Зауваження* 2.2.21. Функція Коші не залежить від вибору фундаментальної системи розв'язків.

Доведемо теорему про явний вигляд функції Коші лінійного однорідного рівняння.

**Теорема 2.2.22.** *Нехай $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є фундаментальною системою розв'язків рівняння* (2.2.2) *на* $[a, b]$. *Тоді*

$$\mathfrak{K}(t, \xi) \equiv \frac{1}{\mathfrak{W}\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^n(\xi)} \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi) & \cdots & \varphi_n(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\xi) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(\xi) \\ \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{vmatrix} \quad \text{на } [a, b].$$

*Доведення.* Позначимо $\Phi = \left(\mathfrak{A}_n\varphi_1 \cdots \mathfrak{A}_n\varphi_n\right) = \left\{\Phi_l^j\right\}_{l=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$. Тоді $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.2.3) з $f = 0$ і $A$ вигляду (2.2.4). Позначимо $\overline{\Phi}_j^l$ алгебраїчне доповнення елемента $\Phi_l^j$ матриці $\Phi$. Тоді

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{\det \Phi}\left\{\overline{\Phi}_j^l\right\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}.$$

Тому

$$K(t, \xi) \equiv \left\{K_l^j(t, \xi)\right\}_{l=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}} \equiv \Phi(t)\Phi^{-1}(\xi)$$

$$\equiv \frac{1}{\det \Phi(\xi)} \left\{ \sum_{m=1}^{n} \Phi_l^m(t) \overline{\Phi}_m^j(\xi) \right\}_{l=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}} \quad \text{на } [a,b]^2.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(t,\xi) \equiv K_1^n(t,\xi) &\equiv \frac{1}{\det \Phi(\xi)} \sum_{m=1}^{n} \Phi_1^m(t) \overline{\Phi}_m^n(\xi) \\ &\equiv \frac{1}{\mathfrak{W}\left\{\varphi_j\right\}_{j=1}^n(\xi)} \begin{vmatrix} \varphi_1(\xi) & \cdots & \varphi_n(\xi) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(\xi) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(\xi) \\ \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{vmatrix} \quad \text{на } [a,b]^2. \end{aligned}$$

Теорему доведено. □

Маємо наступний критерій того, що функція є функцією Коші лінійного однорідного рівняння.

**Теорема 2.2.23.** *Функція $\mathfrak{K} \in C^n([a,b]^2)$ є функцією Коші рівняння* (2.2.2) *в тому і лише в тому випадку, коли вона задовольняє дві умови:*

1. $\forall \xi \in [a,b]$ $\mathfrak{K}(\cdot,\xi)$ *задовольняє* (2.2.2)*;*

2. $\forall \xi \in [a,b]$ $\mathfrak{K}(\cdot,\xi)$ *задовольняє умови*

$$\begin{cases} \left. \dfrac{\partial^m}{\partial t^m} \mathfrak{K}(t,\xi) \right|_{\xi=t} = 0, \quad m = \overline{0, n-2}, \\ \left. \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \mathfrak{K}(t,\xi) \right|_{\xi=t} = 1. \end{cases}$$

*Доведення.* З критерію того, що матриця є матрицею Коші лінійної однорідної системи (теорема 2.1.31), одержуємо, що умови 1 та 2 є необхідними для того, щоб функція $\mathfrak{K} \in C^n([a,b]^2)$ була функцією Коші рівняння (2.2.2).

Доведемо тепер достатність умов 1 та 2 для того, щоб функція $\mathfrak{K} \in C^n([a,b]^2)$ була функцією Коші рівняння (2.2.2). Нехай

$\varphi_1, \dots, \varphi_n$ є фундаментальною системою розв'язків цього рівняння. З умови 1 одержуємо

$$\mathfrak{K}(t,\xi) = \sum_{j=1}^{n} m^j(\xi)\varphi_j(t), \quad (t,\xi) \in [a,b]^2. \tag{2.2.10}$$

З умови 2 випливає

$$\sum_{j=1}^{n} m^j(\xi)\varphi_j^{(i)}(\xi) \equiv 0, \qquad \text{на } [a,b],\ i = \overline{0, n-2},$$
$$\sum_{j=1}^{n} m^j(\xi)\varphi_j^{(n-1)}(\xi) \equiv 1, \qquad \text{на } [a,b].$$

Таким чином, одержали алгебраїчну лінійну систему для знаходження $m^1, \dots, m^n$. Маємо

$$m^j = \frac{1}{\mathfrak{W}\{\varphi_j\}_{j=1}^n} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_{j-1} & 0 & \varphi_{j+1} & \cdots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \cdots & \varphi_{j-1}' & 0 & \varphi_{j+1}' & \cdots & \varphi_n' \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \cdots & \varphi_{j-1}^{(n-2)} & 0 & \varphi_{j+1}^{(n-2)} & \cdots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_{j-1}^{(n-1)} & 1 & \varphi_{j+1}^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{2.2.11}$$

Позначимо $\Phi = \left(\mathfrak{A}_n\varphi_1 \cdots \mathfrak{A}_n\varphi_n\right) = \left\{\Phi_l^j\right\}_{l=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}$. Позначимо $\overline{\Phi}_j^l$ алгебраїчне доповнення елемента $\Phi_l^j$ матриці $\Phi$, та позначимо $\overline{\Phi} = \{\overline{\Phi}_j^l\}_{j=\overline{1,n}}^{l=\overline{1,n}}$. Тоді з (2.2.11) одержуємо

$$m^j(\xi) \equiv \overline{\Phi}_j^n(\xi)/\det\Phi(\xi) \quad \text{на } [a,b]].$$

Отже, можемо подати (2.2.10) у вигляді

$$\mathfrak{K}(t,\xi) \equiv \Phi_1(t)\overline{\Phi}^n(\xi)/\det\Phi(\xi) \quad \text{на } [a,b]^2, \tag{2.2.12}$$

де $\Phi_1 = \left(\Phi_1^1 \cdots \Phi_1^n\right) = \left(\varphi_1 \cdots \varphi_n\right)$, $\overline{\Phi}^n = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}_1^n \\ \vdots \\ \overline{\Phi}_n^n \end{pmatrix}$. Оскільки $\Phi^{-1} = \overline{\Phi}/\det\Phi$, співвідношення (2.2.12) означає, що $\mathfrak{K}(t,\xi)$ є останнім елементом першого рядка матриці $\Phi(t)\Phi^{-1}(\xi)$, тому за означенням 2.2.20 функція $\mathfrak{K}$ є функцією Коші рівняння (2.2.2). □

З теореми 2.1.32, яка дає можливість знайти частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи, скориставшись матрицею Коші, одержуємо теорему про пошук частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння *методом Коші.*

**Теорема 2.2.24.** *Нехай $\mathfrak{K}(t,\xi)$ є функцією Коші рівняння (2.2.2). Тоді*

$$y = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{K}(t,\xi) g(\xi)\, d\xi, \quad t \in [a,b],$$

*є розв'язком (2.2.1), тут $t_0 \in [a,b]$.*

Теореми 2.2.19 та 2.2.24 дають можливість знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, якщо для нього знайдено будь-яку фундаментальну систему розв'язків.

*Приклад* 2.2.25. Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння

$$\begin{aligned} y''' - 3\tanh t\, y'' + \left(6\tanh^2 t - 3\right) y' \\ + \left(5\tanh t - 6\tanh^3 t\right) y = 6\cosh t, \quad t \in [-\alpha,\alpha], \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

і знайдемо його загальний розв'язок. Тут $\alpha$ є довільною сталою. Цьому рівнянню відповідає лінійне однорідне рівняння (2.2.7), досліджене в прикладі (2.2.17). За теоремою 2.2.19 про загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння одержуємо, що загальний розв'язок рівняння (2.2.13) має вигляд

$$y = \varphi_0(t) + C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + C_3\varphi_3(t), \quad t \in [-\alpha,\alpha], \tag{2.2.14}$$

де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ є фундаментальною системою розв'язків рівняння (2.2.7) і задана формулами (2.2.8), $\varphi_0$ є розв'язком рівняння (2.2.13). Шукатимемо цей розв'язок методом Коші. Спочатку обчислимо функцію Коші. За теоремою 2.2.22 про явний вигляд функції Коші маємо

$$\mathfrak{K}(t,\xi) \equiv -\frac{1}{2\cosh^3\xi} \begin{vmatrix} \xi^2\cosh\xi & \xi\cosh\xi & \cosh\xi \\ 2\xi\cosh\xi + \xi^2\sinh\xi & \cosh\xi + \xi\sinh\xi & \sinh\xi \\ t^2\cosh t & t\cosh t & \cosh t \end{vmatrix}$$

$$\equiv -\frac{1}{2\cosh^3\xi}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cosh\xi \\ 0 & \cosh\xi & \sinh\xi \\ (t-\xi)^2\cosh t & (t-\xi)\cosh t & \cosh t \end{vmatrix}$$
$$\equiv \frac{1}{2}(t-\xi)^2\frac{\cosh t}{\cosh\xi} \quad \text{на } [-\alpha,\alpha]^2.$$

Тут ми скористалися формулою (2.2.9) для визначника Вронського нашої фундаментальної системи розв'язків. Застосовуючи теорему 2.2.24 про пошук частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння методом Коші, одержуємо, що

$$\varphi_0(t) \equiv \frac{6}{2}\int_0^t (t-\xi)^2\frac{\cosh t}{\cosh\xi}\cosh\xi\,d\xi$$
$$\equiv 3\cosh t\int_0^t (t-\xi)^2\,d\xi \equiv t^3\cosh t \quad \text{на } [-\alpha,\alpha],$$

є розв'язком рівняння (2.2.13). Підставляючи цю функцію і функції $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ (див. (2.2.8)) в (2.2.14), одержуємо загальний розв'язок рівняння (2.2.13)

$$y = t^3\cosh t + \big(C_1t^2 + C_2t + C_3\big)\cosh t, \quad t\in[-\alpha,\alpha],$$

де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими.

### 2.2.6. Метод Лаґранжа розв'язання лінійного неоднорідного рівняння

У цьому підрозділі розглянемо *метод Лаґранжа* розв'язання лінійного неоднорідного рівняння. Нехай $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ є фундаментальною системою розв'язків рівняння (2.2.2) на $[a,b]$, позначимо $\Phi = \big(\mathfrak{A}_n\varphi_1 \cdots \mathfrak{A}_n\varphi_n\big)$. Тоді $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків лінійної однорідної системи (2.2.3) з $A$ і $f$ вигляду (2.2.4). Позначимо $x(t) \equiv \Phi(t)\omega(t)$ на $[a,b]$ та скористаємося методом Лаґранжа розв'язання лінійної неоднорідної системи.

Якщо

$$y = \sum_{j=1}^n \omega_j(t)\varphi_j(t), \quad t\in[a,b], \tag{2.2.15}$$

то рівняння (2.2.1) еквівалентне системі

$$\begin{cases} \varphi_1(t)\dot{\omega}_1(t) + \cdots + \varphi_n(t)\dot{\omega}_n(t) \equiv 0 & \text{на } [a,b], \\ \varphi_1'(t)\dot{\omega}_1(t) + \cdots + \varphi_n'(t)\dot{\omega}_n(t) \equiv 0 & \text{на } [a,b], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \varphi_1^{(n-2)}(t)\dot{\omega}_1(t) + \cdots + \varphi_n^{(n-2)}(t)\dot{\omega}_n(t) \equiv 0 & \text{на } [a,b], \\ \varphi_1^{(n-1)}(t)\dot{\omega}_1(t) + \cdots + \varphi_n^{(n-1)}(t)\dot{\omega}_n(t) \equiv g(t) & \text{на } [a,b]. \end{cases} \tag{2.2.16}$$

Знаходячи з (2.2.16) функцію $\omega(t) \equiv \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \vdots \\ \omega_n(t) \end{pmatrix}$ на $[a,b]$, за допомогою (2.2.15) одержуємо загальний розв'язок рівняння (2.2.1).

*Приклад* 2.2.26. Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння (2.2.13) з прикладу 2.2.25 і розв'яжемо його методом Лаґранжа. Цьому рівнянню відповідає лінійне однорідне рівняння (2.2.7), яке розглянуто в прикладі 2.2.17. Скористаємося його фундаментальною системою розв'язків $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ (див. (2.2.8)) і запишемо розв'язок рівняння (2.2.13) у вигляді (2.2.15):

$$y = \omega_1(t)\varphi_1(t) + \omega_2(t)\varphi_2(t) + \omega_3(t)\varphi_3(t), \quad t \in [-\alpha, \alpha]. \tag{2.2.17}$$

Для пошуку $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ скористаємося системою (2.2.16):

$$\begin{cases} t^2 \cosh t\, \dot{\omega}_1(t) + t \cosh t\, \dot{\omega}_2(t) + \cosh t\, \dot{\omega}_1(t) \equiv 0 & \text{на } [-\alpha, \alpha], \\ \left(2t \cosh t + t^2 \sinh t\right) \dot{\omega}_1(t) & \\ \qquad + (\cosh t + t \sinh t)\, \dot{\omega}_2(t) + \sinh t\, \dot{\omega}_3(t) \equiv 0 & \text{на } [-\alpha, \alpha], \\ \left(2 \cosh t + 4t \sinh t + t^2 \cosh t\right) \dot{\omega}_1(t) & \\ \qquad + (2 \sinh t + t \cosh t)\, \dot{\omega}_2(t) + \cosh t\, \dot{\omega}_3(t) \equiv 6 \cosh t & \text{на } [-\alpha, \alpha]. \end{cases}$$

Звідси одержуємо

$$\dot{\omega}_1(t) \equiv 3, \quad \dot{\omega}_2(t) \equiv -6t, \quad \dot{\omega}_3(t) \equiv 3t^2 \quad \text{на } [-\alpha, \alpha].$$

Тому

$$\omega_1(t) \equiv 3t + C_1, \quad \omega_2(t) \equiv -3t^2 + C_2, \quad \omega_3(t) \equiv t^3 \quad \text{на } [-\alpha, \alpha],$$

де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими. Підставляючи знайдені функції $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ і функції $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ (див. (2.2.8)) в (2.2.17), одержуємо загальний розв'язок рівняння (2.2.13):

$$y = t^3 \cosh t + \left(C_1 t^2 + C_2 t + C_3\right) \cosh t, \quad t \in [-\alpha, \alpha],$$

де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими.

## 2.3. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння вигляду (2.2.2) зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.1}$$

де $a_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1, n}$, та пов'язаний з ним оператор

$$\mathfrak{L}_n : D^n[a, b] \to F[a, b], \quad \mathfrak{L}_n = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\frac{d}{dt}\right)^j,$$

де $a_n = 1$.

Застосовуючи цей оператор до функції $e^{\lambda t}$, одержуємо

$$\mathfrak{L}_n\left(e^{\lambda t}\right) = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\partial^j}{\partial t^j} e^{\lambda t} = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j\right) e^{\lambda t} = \rho(\lambda) e^{\lambda t}, \tag{2.3.2}$$

де

$$\rho(\lambda) = \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 \tag{2.3.3}$$

є характеристичним поліномом рівняння (2.3.1).

Комплексна фундаментальна система розв'язків рівняння (2.3.1) подана в наступній теоремі.

**Теорема 2.3.1.** *Нехай характеристичний поліном* (2.3.3) *має $k$ різних комплексних коренів $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ з кратностями $n_1, \ldots, n_k$. Тоді система*

$$\left\{e^{\lambda_j t}, t e^{\lambda_j t}, \ldots, t^{n_j - 1} e^{\lambda_j t} \mid j = \overline{1, k}\right\} \tag{2.3.4}$$

*є фундаментальною системою розв'язків рівняння* (2.3.1).

*Доведення.* Враховуючи (2.2.16), для $l \in \mathbb{N}_0$ одержуємо

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_n\left(t^l e^{\lambda t}\right) &= \mathfrak{L}_n\left(\frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} e^{\lambda t}\right) = \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l}\mathfrak{L}_n\left(e^{\lambda t}\right) \\ &= \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l}\left(\varphi(\lambda)e^{\lambda t}\right) = \sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}\rho^{(m)}(\lambda)t^{l-m}e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Тому для кожних $j = \overline{1,k}$ та $l = \overline{0, n_j - 1}$ маємо $\mathfrak{L}_n(t^l e^{\lambda_j t}) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Отже, функція $t^l e^{\lambda_j t}$ є розв'язком (2.3.1), $j = \overline{1,k}$ та $l = \overline{0, n_j - 1}$.

Доведемо, що функції (2.3.4) є лінійно незалежними на $\mathbb{R}$.

Спочатку доведемо допоміжне твердження про похідну квазіполінома. Для будь-якого полінома $R(t)$ маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(R(t)e^{\lambda t}\right) \equiv \left(R'(t) + \lambda R(t)\right)e^{\lambda t} \equiv R^1_{(\lambda)}(t)e^{\lambda t},$$

де $R^1_{(\lambda)}(t) \equiv (R'(t) + \lambda R(t))$, і якщо $\lambda \neq 0$, то $\deg R^1_\lambda = \deg R$. Позначимо

$$R^0_{(\lambda)} = R; \quad R^j_{(\lambda)} = \frac{\partial}{\partial t}\left(R^{j-1}_{(\lambda)}\right) + \lambda R^{j-1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\frac{\partial^j}{\partial t^j}\left(R(t)e^{(\lambda t)}\right) \equiv R^j_{(\lambda)}(t)e^{(\lambda t)} \quad \text{на } \mathbb{R}, \tag{2.3.5}$$

де якщо $\lambda \neq 0$, то $\deg R^j_{(\lambda)} = \deg R$, $j \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що існують поліноми $Q_1(t), \dots, Q_n(t)$, $\deg Q_i \leq n_i - 1$, такі, що

$$Q_1(t)e^{\lambda_1 t} + \dots + Q_k(t)e^{\lambda_k t} \equiv 0 \quad \text{на } \mathbb{R}. \tag{2.3.6}$$

Припустимо також, що не всі ці поліноми нульові. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $Q_k \neq 0$. Помноживши (2.3.6) на $e^{-\lambda_1 t}$, диференціюючи $n_1$-разів та враховуючи (2.3.5), одержуємо

$$0 \equiv (Q_2)^{n_1}_{(\lambda_2-\lambda_1)}(t)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \dots + (Q_k)^{n_1}_{(\lambda_k-\lambda_1)}(t)e^{(\lambda_k-\lambda_1)t},$$

де $(Q_s)^{n_1}_{(\lambda_s-\lambda_1)}$ є поліномом,

$$\deg (Q_s)^{n_1}_{(\lambda_s-\lambda_1)} = \deg Q_s, \quad s = \overline{2,k}.$$

Помножуючи останню тотожність на $e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$ та диференціюючи $n_2$-разів, одержуємо

$$0 \equiv \left((Q_3)^{n_1}_{(\lambda_3-\lambda_1)}\right)^{n_2}_{(\lambda_3-\lambda_2)}(t)e^{(\lambda_3-\lambda_2)t} + \dots \\ + \left((Q_k)^{n_1}_{(\lambda_k-\lambda_1)}\right)^{n_2}_{(\lambda_k-\lambda_2)}(t)e^{(\lambda_k-\lambda_2)t},$$

де $\left((Q_k)^{n_1}_{(\lambda_s-\lambda_1)}\right)^{n_2}_{(\lambda_s-\lambda_2)}$ є поліномом,

$$\deg \left((Q_k)^{n_1}_{(\lambda_s-\lambda_1)}\right)^{n_2}_{(\lambda_s-\lambda_2)} = \deg Q_s, \quad s = \overline{3,k}.$$

Продовжуючи цей процес, нарешті одержуємо

$$0 \equiv \left(\left((Q_k)^{n_1}_{(\lambda_k-\lambda_1)}\right)^{n_2}_{(\lambda_k-\lambda_2)} \dots\right)^{n_{k-1}}_{(\lambda_k-\lambda_{k-1})}(t)e^{(\lambda_k-\lambda_{k-1})t},$$

де $\left(\left((Q_k)^{n_1}_{(\lambda_k-\lambda_1)}\right)^{n_2}_{(\lambda_k-\lambda_2)} \dots\right)^{n_{k-1}}_{(\lambda_k-\lambda_{k-1})}$ є поліномом,

$$\deg \left(\left((Q_k)^{n_1}_{(\lambda_k-\lambda_1)}\right)^{n_2}_{(\lambda_k-\lambda_2)} \dots\right)^{n_{k-1}}_{(\lambda_k-\lambda_{k-1})} = \deg Q_k.$$

Отже, $Q_k(t) \equiv 0$, що суперечить нашому припущенню. Таким чином, функції системи (2.3.4) є лінійно незалежними. □

*Зауваження* 2.3.2. Нехай $a_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0,n}$. У цьому випадку, якщо комплексне (не дійсне) число є коренем характеристичного полінома, то комплексно спряжене число також є коренем цього полінома тієї самої кратності. Припустимо, що $\lambda_1, \dots, \lambda_{2p} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $\lambda_{2p+1}, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ є різними коренями характеристичного полінома $\rho$ рівняння (2.3.1) з дійсними коефіцієнтами, тут $\lambda_{2j-1} =$

$\bar{\lambda}_{2j} = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1,p}$. Ураховуючи те, що $e^{(\alpha_j + i\beta_j)t} = e^{\alpha_j t}(\cos(\beta_j t) + i\sin(\beta_j t))$, одержуємо, що дійсна фундаментальна система розв'язків рівняння (2.3.1) з дійсними коефіцієнтами має вигляд

$$\left\{e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), te^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), \dots t^{n_{2j}-1}e^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t) \mid j = \overline{1,p}\right\}$$
$$\bigcup \left\{e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), te^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), \dots t^{n_{2j}-1}e^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t) \mid j = \overline{1,p}\right\}$$
$$\bigcup \left\{e^{\lambda_j t}, te^{\lambda_j t}, \dots, t^{n_j-1}e^{\lambda_j t} \mid j = \overline{2p+1,k}\right\}.$$

Тут ураховано те, що для рівнянь з дійсними коефіцієнтами маємо

$$\mathcal{N}(\mathfrak{L}_n) = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\left\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\right\}\right\},$$

де $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ є функціями системи (2.3.4), $\mathrm{lin}_{\mathbb{C}}\{\cdot\}$ є лінійною оболонкою системи векторів над $\mathbb{C}$.

*Приклад* 2.3.3. Розглянемо лінійне однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{IV} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.7}$$

і знайдемо його загальний розв'язок. Поліном

$$\rho(\lambda) \equiv \lambda^4 - 2\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

є характеристичним для цього рівняння. Легко побачити, що $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, $\lambda_3 = 1$ є його коренями з кратностями $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = 2$. Скориставшись зауваженням 2.3.2, маємо фундаментальну систему розв'язків рівняння (2.3.7):

$$\varphi_1(t) \equiv \cos(2t), \quad \varphi_2(t) \equiv \sin(2t), \quad \varphi_3(t) \equiv e^t, \quad \varphi_4(t) \equiv te^t \text{ на } R.$$

За теоремою 2.2.16 про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння одержуємо, що

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3e^t + C_4te^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

є загальним розв'язком рівняння (2.3.7), де $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими.

## 2.3.1. Лінійні неоднорідні рівняння з квазіполіноміальною правою частиною

Розглянемо рівняння

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = P(t)e^{\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.8}$$

де $P$ є поліномом, $\gamma \in \mathbb{C}$. Функція вигляду $y = P(t)e^{\gamma t}$, $t \in \mathbb{R}$, її дійсна і уявна частини та лінійні комбінації таких функцій називаються *квазіполіномами.*

Звичайно, для пошуку частинного розв'язку цього рівняння можемо скористатися методами Лаґранжа або Коші. Але застосування цих методів у даному випадку призводить, як правило, до необхідності обчислення інтегралів від квазіполіномів, що є досить трудомістким завданням. Існує інший метод, що має назву *метод невизначених коефіцієнтів*, який полягає в тому, що розв'язки спочатку виписуються в певній формі з невідомими параметрами (коефіцієнтами), а потім ці параметри обчислюються. Цей метод розглянуто у цьому підрозділі для розв'язання лінійного неоднорідного рівняння з квазіполіноміальною правою частиною.

Доведемо теорему про частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння з квазіполіноміальною правою частиною.

**Теорема 2.3.4.** *Існує поліном $Q$, $\deg Q = \deg P$, такий що функція $\varphi_0(t) = t^r Q(t)e^{\gamma t}$, $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком рівняння* (2.3.8)*. Тут $r$ є кратністю кореня $\gamma$ в характеристичному поліномі* (2.3.3) *(якщо $\gamma$ не є коренем цього полінома, то $r = 0$).*

*Доведення.* Нехай

$$Q(t) \equiv \sum_{j=0}^{m} q_j t^j,$$

де $m = \deg P$. Ураховуючи (2.3.2), одержуємо

$$\begin{aligned}\big(\mathfrak{L}_n\varphi_0\big)(t) &\equiv \mathfrak{L}_n \sum_{j=0}^{m} q_j t^{j+r} e^{\gamma t} \equiv \sum_{j=0}^{m} q_j \mathfrak{L}_n \left(\frac{\partial^{j+r}}{\partial\gamma^{j+r}} e^{\gamma t}\right)\\ &\equiv \sum_{j=0}^{m} q_j \frac{\partial^{j+r}}{\partial\gamma^{j+r}} \mathfrak{L}_n\left(e^{\gamma t}\right) \equiv \sum_{j=0}^{m} q_j \frac{\partial^{j+r}}{\partial\gamma^{j+r}} \left(\rho(\gamma) e^{\gamma t}\right)\\ &\equiv \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{l=0}^{j+r} \binom{j+r}{l} \rho^{(l)}(\gamma) t^{j+r-l} e^{\gamma t}.\end{aligned}$$

З того, що $\varphi^{(l)}(\gamma) = 0$, $l = \overline{0, r-1}$, випливає

$$\begin{aligned}\big(\mathfrak{L}_n\varphi_0\big)(t) &\equiv \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{l=r}^{j+r} \binom{j+r}{l} \rho^{(l)}(\gamma) t^{j+r-l} e^{\gamma t}\\ &\equiv \sum_{j=0}^{m} q_j \sum_{i=0}^{j} \binom{j+r-i}{j+r} \rho^{(j+r-i)}(\gamma) t^{i} e^{\gamma t}\\ &\equiv \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=i}^{m} q_j \binom{j+r-i}{j+r} \rho^{(j+r-i)}(\gamma)\right) t^{i} e^{\gamma t}.\end{aligned}$$

Оскільки $\varphi_0$ має бути розв'язком (2.3.8), позначивши

$$P(t) \equiv \sum_{i=0}^{m} p_i t^j,$$

одержуємо

$$\sum_{i=0}^{m} p_i t^j e^{\gamma t} \equiv \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=i}^{m} q_j \binom{j+r-i}{j+r} \rho^{(j+r-i)}(\gamma)\right) t^{i} e^{\gamma t}.$$

Отже, $q_j$, $j = \overline{0, m}$, задовольняють трикутну систему

$$q_i \binom{i+r}{i} \rho^{(r)}(\gamma) + \sum_{j=i+1}^{m} q_j \binom{j+r}{i} C_{j+r}^{i} \rho^{(j+r-i)}(\gamma) = p_i, \quad i = \overline{0, m}.$$

Оскільки $\gamma$ є коренем полінома $\rho$ кратності $r$, то $\rho^{(r)}(\gamma) \neq 0$. Тому з цієї системи почергово знаходимо $q_m, q_{m-1}, \ldots, q_0$, розглядаючи рівняння цієї системи для $i = m$, $i = m-1, \ldots, i = 0$. Таким чином, доведено існування полінома $Q$ із бажаними властивостями. $\square$

*Зауваження* 2.3.5. Якщо $\gamma = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то права частина (2.3.8) має вигляд

$$P(t)e^{\gamma t} \equiv P(t)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t).$$

Якщо $P(t)$ та $\mathfrak{L}_n$ мають дійсні коефіцієнти і $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком рівняння (2.3.8), то $\operatorname{Re}\varphi$ є розв'язком рівняння

$$\mathfrak{L}_n y = P(t)e^{\alpha t}\cos\beta t, \quad t \in \mathbb{R},$$

а $\operatorname{Im}\varphi$ є розв'язком рівняння

$$\mathfrak{L}_n y = P(t)e^{\alpha t}\sin\beta t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо рівняння

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y \\ = e^{\alpha t}(G(t)\cos\beta t + H(t)\sin\beta t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

де $G$, $H$ є поліномами з дійсними коефіцієнтами, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{0, n-1}$. Маємо наслідок про частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння з дійсними коефіцієнтами і квазіполіноміальною правою частиною.

**Наслідок 2.3.6.** *Нехай* $m = \max\{\deg G, \deg H\}$. *Існують поліноми* $R$ *та* $S$ *з дійсними коефіцієнтами,* $\deg R \leq m$, $\deg S \leq m$, *такі, що функція*

$$\widetilde{\varphi}(t) = e^{\alpha t}t^r(R(t)\cos\beta t + S(t)\sin\beta t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.10}$$

*є розв'язком* (2.3.9). *Тут* $r$ *є кратністю кореня* $\gamma = \alpha + i\beta$ *в характеристичному поліномі* (2.3.3) *(якщо* $\gamma$ *не є коренем характеристичного полінома, то* $r = 0$*).*

*Доведення.* Розглянемо замість рівняння (2.3.9) наступні два рівняння:

$$\mathfrak{L}_n y = e^{\alpha t} G(t) \cos \beta t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.11}$$
$$\mathfrak{L}_n y = e^{\alpha t} H(t) \sin \beta t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.12}$$

і пов'язані з ними рівняння

$$\mathfrak{L}_n y = e^{\gamma t} G(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.13}$$
$$\mathfrak{L}_n y = e^{\gamma t} H(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.14}$$

де $\gamma = \alpha + i\beta$. Тоді за доведеною теоремою існують поліноми $Q_{\cos}$, $Q_{\sin}$ , $\deg Q_{\cos} \le \deg G$, $\deg Q_{\sin} \le \deg H$, такі, що функції

$$\varphi_{\cos}(t) \equiv e^{\gamma t} t^r Q_{\cos}(t) \quad \text{на } \mathbb{R}$$

та

$$\varphi_{\sin}(t) \equiv e^{\gamma t} t^r Q_{\sin}(t) \quad \text{на } \mathbb{R}$$

є розв'язками рівнянь (2.3.13) та (2.3.14) відповідно. Отже (див. (2.3.5), на $\mathbb{R}$ функції

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_{\cos}(t) \equiv \operatorname{Re} \varphi_{\cos}(t) &\equiv \operatorname{Re}\Big(e^{\alpha t} t^r (\cos \beta t + i \sin \beta t)\big(Q^1_{\cos}(t) + i Q^2_{\cos}(t)\big)\Big) \\ &\equiv e^{\alpha t} t^r \left(Q^1_{\cos}(t) \cos \beta t - i Q^2_{\cos}(t) \sin \beta t\right)\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}_{\sin}(t) \equiv \operatorname{Im} \varphi_{\sin}(t) &\equiv \operatorname{Im}\Big(e^{\alpha t} t^r (\cos \beta t + i \sin \beta t)\big(Q^1_{\sin}(t) + i Q^2_{\sin}(t)\big)\Big) \\ &\equiv e^{\alpha t} t^r \left(Q^1_{\sin}(t) \cos \beta t - i Q^2_{\sin}(t) \sin \beta t\right)\end{aligned}$$

є розв'язками рівнянь (2.3.11) та (2.3.12) відповідно. Тут $Q^1_p(t) \equiv \operatorname{Re} Q_p(t)$, $Q^2_p \equiv \operatorname{Im} Q_p(t)$, $p = \cos, \sin$. Тому $\deg Q^j_p \le m$, $j = 1, 2$, $p = \cos, \sin$. Скориставшись однією з властивостей оператора $\mathfrak{L}_n$ (див. твердження 2.2.5), одержуємо, що функція

$$\widetilde{\varphi}(t) \equiv \widetilde{\varphi}_{\cos}(t) + \widetilde{\varphi}_{\sin}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.15}$$

є розв'язком рівняння (2.3.9). Зрозуміло, що (2.3.15) має вигляд (2.3.10). □

*Зауваження* 2.3.7. Скориставшись твердженням 2.2.5 (див. властивості оператора $\mathfrak{L}_n$) та щойно доведеними теоремою і наслідком, частинний розв'язок рівняння

$$\mathfrak{L}_n y = g_1(t) + \cdots + g_d(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.16}$$

з дійсними коефіцієнтами є сумою частинних розв'язків рівнянь

$$\mathfrak{L}_n y = g_j(t), \quad t \in \mathbb{R}, \ j = \overline{1, d}. \tag{2.3.17}$$

Тут $g_j$, $j = \overline{1, d}$, мають вигляд $P(t)e^{\gamma t}$, де $\gamma \in \mathbb{R}$, коефіцієнти полінома $P$ дійсні, або вигляд $G(t)e^{\alpha t} \cos \beta t + H(t)e^{\alpha t} \sin \beta t$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, коефіцієнти поліномів $H, G$ дійсні. Іншими словами, ми можемо окремо знайти частинний розв'язок кожного з рівнянь (2.3.17), а потім обчислити їх суму, яка і буде частинними розв'язком рівняння (2.3.16). Рівняння (2.3.16) називається *лінійним неоднорідним рівнянням з квазіполіноміальною правою частиною.*

*Приклад* 2.3.8. Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$y^{\mathsf{IV}} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 10e^t + 25\cos(3t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.18}$$

і знайдемо його загальний розв'язок. Лінійне однорідне рівняння, яке йому відповідає, було досліджено в прикладі 2.3.3. Зокрема, там було знайдено корені характеристичного полінома цього рівняння. Спочатку знайдемо частинний розв'язок рівняння (2.3.18), скориставшись методом невизначених коефіцієнтів (див. підрозділ 2.3.1). Беручи до уваги зауваження 2.3.7, можемо окремо шукати частинні розв'язки $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, рівнянь

$$y^{\mathsf{IV}} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 10e^t, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.3.19}$$

$$y^{\mathsf{IV}} - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 25\cos(3t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.3.20}$$

Знайдемо спочатку розв'язок $\psi_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, рівняння (2.3.19). Для цього скористаємося теоремою 2.3.4 про частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння з квазіполіноміальною правою частиною. Беручи до уваги результати прикладу 2.3.3, в термінах цієї теореми маємо

$$P(t) \equiv 10, \quad \deg P = 0, \quad \gamma = 1, \quad r = 2.$$

Тому розв'язок ми шукатимемо у вигляді:

$$\psi_1(t) = qt^2 e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $q \in \mathbb{R}$ є шуканою сталою (поліном $Q$ у нашому випадку має степінь нуль, тобто є ненульовою сталою, яку позначили через $q$). Обчислимо похідні функції $\psi_1$. Маємо

$$\psi_1'(t) \equiv q\left(2t + t^2\right) e^t, \qquad \psi_1''(t) \equiv q\left(2 + 4t + t^2\right) e^t,$$
$$\psi_1'''(t) \equiv q\left(6 + 6t + t^2\right) e^t, \qquad \psi_1^{\text{IV}}(t) \equiv q\left(12 + 8t + t^2\right) e^t.$$

Підставляючи функцію $\psi_1$ та її похідні в (2.3.19), одержуємо

$$q\Big(12 + 8t + t^2 - 2\left(6 + 6t + t^2\right) + 5\left(2 + 4t + t^2\right) - 8\left(2t + t^2\right) + 4t^2\Big)e^t \equiv 10\, e^t.$$

Отже, $q = 1$, тому

$$\psi_1(t) = t^2 e^t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.3.21}$$

Знайдемо тепер розв'язок $\psi_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, рівняння (2.3.20). Для цього скористаємося наслідком 2.3.6 про частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння з дійсними коефіцієнтами і квазіполіноміальною правою частиною. Беручи до уваги результати прикладу 2.3.3, в термінах цього наслідку маємо

$$G(t) \equiv 25, \quad H(t) \equiv 0, \quad m = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad r = 0.$$

Тому розв'язок ми шукатимемо у вигляді:

$$\psi_2(t) = r\cos(3t) + s\sin(3t), \quad t \in \mathbb{R},$$

де $r, s \in \mathbb{R}$ є шуканими сталими (поліноми $R$ і $S$ у нашому випадку мають степінь не більше нуля, тобто є сталими, які позначили через $r$ і $s$). Обчислимо похідні функції $\psi_2$. Маємо

$$\psi_1'(t) \equiv -3r\sin(3t) + 3s\cos(3t), \quad \psi_1''(t) \equiv -9r\cos(3t) - 9s\sin(3t),$$
$$\psi_1'''(t) \equiv 27r\sin(3t) - 27s\cos(3t), \quad \psi_1^{\text{IV}}(t) \equiv 81r\cos(3t) + 81s\sin(3t).$$

Підставляючи функцію $\psi_2$ та її похідні в (2.3.20), одержуємо

$$\begin{aligned}81r\cos(3t) &+ 81s\sin(3t) - 2\big(27r\sin(3t) - 27s\cos(3t)\big)\\ &+5\big(-9r\cos(3t) - 9s\sin(3t)\big) - 8\big(-3r\sin(3t) + 3s\cos(3t)\big)\\ &+ 4\big(r\cos(3t) + s\sin(3t)\big) \equiv 25\cos(3t).\end{aligned}$$

Отже, $r = 0.4$, $s = 0.3$, тому

$$\psi_2(t) = 0.4\cos(3t) + 0.3\sin(3t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.3.22}$$

Скориставшись зауваженням 2.3.7, одержуємо, що функція $\psi_1(t) + \psi_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком лінійного неоднорідного рівняння (2.3.18). Цьому рівнянню відповідає лінійне однорідне рівняння (2.3.7), яке розглянуто в прикладі 2.3.3. Скористаємося його фундаментальною системою розв'язків $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, $\varphi_4$. За теоремою 2.2.19 про загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння одержуємо, що загальний розв'язок рівняння (2.3.18) має вигляд

$$\begin{aligned}y &= \psi_1(t) + \psi_2(t) + C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) + C_3\varphi_2(t) + C_4\varphi_4(t)\\ &= t^2e^t + 0.4\cos(3t) + 0.3\sin(3t)\\ &\qquad + C_1\cos t + C_2\sin t + C_3e^t + C_4te^t, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Зазначимо, що не зважаючи на те, що права частина рівняння (2.3.18) містить лише функцію cos і не містить sin, у розв'язок входять обидві функції: cos і sin.

# 2.4. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами

## 2.4.1. Матричні ряди

Нехай

$$B = \left\{ b_m^k \right\}_{m=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}} \in \mathfrak{M}(n,n),$$

$$B_j = \left\{ \left( b_m^k \right)_{(j)} \right\}_{m=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}} \in \mathfrak{M}(n,n), \quad j = \overline{0,\infty}.$$

**Означення 2.4.1.** Уважаємо, що *матричний ряд* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} B_j$ *збігається* до матриці $B$, якщо

$$\left\| \sum_{j=0}^{p} B_j - B \right\| \to 0, \quad \text{коли } p \to \infty.$$

Це записуємо як $\sum\limits_{j=0}^{\infty} B_j = B$.

*Зауваження* 2.4.2. Враховуючи (2.1.7), одержуємо

$$\begin{array}{ccc} \sum\limits_{j=0}^{\infty} B_j = B & \Leftrightarrow \quad \forall m,k = \overline{1,k} & \sum\limits_{j=0}^{\infty} \left( b_m^k \right)_{(j)} = b_m^k \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \lim\limits_{p\to\infty} \left\| \sum\limits_{j=0}^{p} B_j - B \right\| & \Leftrightarrow \quad \forall m,k = \overline{1,k} & \lim\limits_{p\to\infty} \left| \sum\limits_{j=0}^{p} \left( b_m^k \right)_{(j)} - b_m^k \right| = 0. \end{array}$$

**Означення 2.4.3.** *Матричний ряд* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} B_j$ *збігається абсолютно*, якщо збігається числовий ряд ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|B_j\|$.

Скориставшись оцінкою (2.1.7), одержуємо достатню умову збіжності матричного ряду.

**Теорема 2.4.4.** *Якщо матричний ряд є абсолютно збіжним, то він є збіжним.*

Справедлива наступна необхідна умова збіжності матричного ряду.

**Теорема 2.4.5.** *Якщо ряд* $\sum_{j=0}^{\infty} B_j$ *збігається, то* $\|B_j\| \to 0$*, коли* $j \to \infty$*. Зокрема, існує* $M > 0$ *таке, що*

$$\|B_j\| \leq M, \quad j = \overline{0, \infty}. \tag{2.4.1}$$

*Доведення.* Маємо $B_j = \sum_{l=0}^{j} B_l - \sum_{l=0}^{j-1} B_l \to 0$, отже, $\|B_j\| \to 0$, коли $j \to \infty$. Звідси випливає (2.4.1). □

Справедлива також наступна мажорантна ознака збіжності матричного ряду

**Теорема 2.4.6.** *Нехай* $\|B_j\| \leq \beta_j \in \mathbb{R}$*,* $j = \overline{0, \infty}$*, та нехай ряд* $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j$ *є збіжним. Тоді ряд* $\sum_{j=0}^{\infty} B_j$ *також є збіжним.*

*Доведення.* За мажорантною ознакою збіжності числового ряду одержуємо, що ряд $\sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\|$ є збіжним, тобто ряд $\sum_{j=0}^{\infty} B_j$ є абсолютно збіжним, отже, збіжним. □

### 2.4.2. Мотивація введення функцій від матриць

Розглянемо задачу Коші для лінійного рівняння

$$\dot{x} = ax, \quad x \in \mathbb{R}, \ t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.2}$$

$$x(0) = x^0, \tag{2.4.3}$$

де $a \in \mathbb{R}$, $x^0 \in \mathbb{R}$. Її розв'язок має вигляд

$$x = e^{at}x^0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Зазначимо, що функції $e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$, притаманні такі властивості:

(i) $\left. e^{at}\right|_{t=0} = 1$,

(ii) $\forall t_1 \in \mathbb{R}\ \forall t_1 \in \mathbb{R} \quad e^{a(t_1+t_2)} = e^{at_1}e^{at_2}$,

(iii) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \left(e^{at}\right)^{-1} = e^{-at}$.

Розглянемо також задачу Коші для лінійної системи:

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.4}$$

$$x(0) = x^0, \tag{2.4.5}$$

де $A \in \mathfrak{M}(n,n)$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. За теоремою 2.1.25 про загальний розв'язок лінійної однорідної системи її загальний розв'язок має вигляд

$$x = \Phi(t)C, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.6}$$

де $C \in \mathbb{R}^n$, а $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків цієї системи. З теореми 2.1.24 про про зв'язок фундаментальних матриць розв'язків лінійної однорідної системи випливає, що існує фундаментальна матриця розв'язків $\Phi$ нашої системи, яка задовольняє умову $\Phi(0) = \mathbb{I}$. За цієї умови функція

$$x = \varphi(t) \equiv \Phi(t)x^0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.7}$$

є розв'язком задачі Коші (2.4.4), (2.4.5). Справедлива теорема про властивості нормованої фундаментальної матриці розв'язків лінійної однорідної системи.

**Теорема 2.4.7.** *Існує єдина фундаментальна матриця розв'язків $\Phi$ системи (2.4.4), яка має такі властивості:*

(I) $\Phi(0) = \mathbb{I}$,

(II) $\forall t_1 \in \mathbb{R}\ \forall t_1 \in \mathbb{R} \quad \Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1)\Phi(t_2)$,

(III) $\forall t \in \mathbb{R} \quad \big(\Phi(t)\big)^{-1} = \Phi(-t)$.

*Доведення.* Вище було зазначено, існує фундаментальна матриця розв'язків $\Phi$ системи (2.4.4), яка задовольняє умову $\Phi(0) = \mathbb{I}$. З теореми 2.1.6 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи випливає що така матриця є єдиною. Таким чином, для цієї матриці умову (I) виконано.

Доведемо, що для цієї матриці справедливі й умови (II) та (III). Зафіксуємо будь-який вектор $x^0 \in \mathbb{R}$. Тоді функція $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, задана формулою (2.4.7), є розв'язком задачі Коші (2.4.4), (2.4.5). Зафіксуємо також довільне $t_0 \in \mathbb{R}$ і позначимо

$$\psi(t) = \varphi(t + t_0), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.4.8}$$

Маємо

$$\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t + t_0) = A\varphi(t + t_0) = A\psi(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Отже, функція $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є розв'язком системи (2.4.4) і задовольняє початкову умову

$$x(0) = \psi(0) = \varphi(t_0). \tag{2.4.9}$$

З (2.4.6), ураховуючи (2.4.9), одержуємо

$$\psi(t) = \Phi(t)\psi(0) = \Phi(t)\varphi(t_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)x^0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.4.10}$$

Крім того, з (2.4.7) і (2.4.8) випливає

$$\psi(t) = \varphi(t + t_0) = \Phi(t + t_0)x^0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.4.11}$$

Порівнюючи (2.4.10) і (2.4.11), для будь-яких $t \in \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ одержуємо

$$\forall x^0 \in \mathbb{R} \quad \big(\Phi(t + t_0) - \Phi(t)\Phi(t_0)\big)x^0 = 0.$$

Отже,

$$\forall t \in \mathbb{R}\ \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \Phi(t + t_0) = \Phi(t)\Phi(t_0),$$

тобто (II) виконано. Обираючи $t_0 = -t$ і враховуючи (I), маємо

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{I} = \Phi(t)\Phi(-t).$$

Отже, (III) також виконано. □

*Зауваження* 2.4.8. У щойно розглянутій теоремі для фундаментальної матиці розв'язків $\Phi$ системи (2.4.4) фактично доведено, що з виконання для неї умови (I) випливає виконання умов (II) і (III).

Розглянемо фундаментальну матрицю розв'язків $\Phi$ системи (2.4.4), яка задовольняє умову $\Phi(0) = \mathbb{I}$. Порівнюючи властивості (i)–(iii) функції $e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$, і властивості (I)–(III) матриці $\Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, бачимо, що вони є цілком подібними. Для $n = 1$ маємо також $\Phi(t) = e^{at}$, $t \in \mathbb{R}$. Формально можемо позначити $e^{At} = \Phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, і, таким чином, увести означення для значення функції $e^{\lambda t}$ на матриці $A$. Але це означення не дозволяє ефективно обчислювати значення функції на матриці, тому далі використаємо інший підхід.

## 2.4.3. Основні поняття спектральної теорії лінійних операторів у скінченному просторі

Спочатку нагадаємо деякі відомості з лінійної алгебри (див., наприклад, [7]).

Нехай $P(\lambda) = \sum_{j=1}^{m} p_j \lambda^j$ є поліномом, $A \in \mathfrak{M}(n,n)$ (тобто $A$ є сталою матрицею розміру $n \times n$). Тоді

$$P(A) = \sum_{j=1}^{m} p_j A^j.$$

**Означення 2.4.9.** Поліном $\rho(\lambda) \equiv \det(A - \lambda\mathbb{I})$ називається *характеристичним поліномом матриці* $A$.

**Означення 2.4.10.** Поліном $\psi(\lambda)$ є *анулювальним для матриці* $A$, якщо $\psi(A) = 0$.

**Теорема 2.4.11** (Гамільтон–Келі). *Характеристичний поліном є анулювальним.*

**Означення 2.4.12.** Ненульовий анулювальний поліном матриці $A$ мінімального степеня, старший коефіцієнт якого дорівнює 1, називається *мінімальним поліномом матриці* $A$.

Позначимо мінімальний поліном матриці $A$ так:

$$\mu(\lambda) \equiv \lambda^p + \mu_{p-1}\lambda^{p-1} + \cdots + \mu_0 \equiv \sum_{j=0}^{p} \mu_j \lambda^j, \quad \deg \mu = p,$$

де $\mu_p = 1$.

**Властивості мінімального полінома:**

1) якщо $A \neq 0$, то $0 < p \leq n$;

2) якщо $\psi$ є анулювальним поліномом $A$ та $\deg \psi < p$, то $\psi(\lambda) = 0$;

3) якщо $\psi$ є анулювальним поліномом $A$, то $\psi$ ділиться на $\mu$;

4) мінімальний поліном є єдиним;

5) якщо $\lambda_0$ є коренем $\rho$, то $\lambda_0$ є коренем $\mu$.

Далі для матриці $A$ будемо завжди використовувати такі позначення:

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — різні корені характеристичного полінома (власні значення),

$n_1, \ldots, n_k$ — їх кратності в характеристичному поліномі,

$p_1, \ldots, p_k$ — їх кратності в мінімальному поліномі,

$s_1, \ldots, s_k$ — розмірності їх власних підпросторів.

Тоді

$$\rho(\lambda) \equiv \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{n_j}, \quad \sum_{j=1}^{k} n_j = n. \tag{2.4.12}$$

$$\mu(\lambda) \equiv \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{p_j}, \quad \sum_{j=1}^{k} p_j = p. \tag{2.4.13}$$

Позначимо *клітину Жордана* розміру $\nu \times \nu$ через

$$L_\nu(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}. \tag{2.4.14}$$

**Теорема 2.4.13** (Жордан)**.** *Будь-яку квадратну матрицю $A$ розміру $(n \times n)$ можна звести невиродженим лінійним перетворенням $T$ $(\det T \neq 0)$ до жорданової форми*

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{L}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbb{L}_k \end{pmatrix},$$

*де*

$$\mathbb{L}_j = \begin{pmatrix} L_{\nu_1^{s_j}}(\lambda_j) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & L_{\nu_{s_j}^{s_j}}(\lambda_j) \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1,k},$$

*і* $\sum\limits_{l=1}^{s_j} \nu_l^{s_j} = n_j$, $p_j - 1 \leq n_j - s_j$, $j = \overline{1,k}$.

**Означення 2.4.14.** Нехай є $h$ поліномом. Вектор-рядок

$$h(\Lambda) = \Big(h(\lambda_1), \dots, h^{(p_1-1)}(\lambda_1); \dots; h(\lambda_k), \dots, h^{(p_k-1)}(\lambda_k)\Big) \in \mathbb{C}^{*p}$$

називається *значенням полінома $h$ на спектрі матриці $A$.*

Справедлива наступна теорема про рівність матричних поліномів.

**Лема 2.4.15.** *Нехай $q$ та $h$ є поліномами. Тоді*

$$q(A) = h(A) \Leftrightarrow q(\Lambda) = h(\Lambda).$$

*Доведення.* 1. Нехай $q(\Lambda) = h(\Lambda)$. Тоді для полінома $\psi = q - h$ маємо $\psi(\Lambda) = 0$, тобто $\psi^{(l)}(\lambda_j) = 0$, $l = \overline{0, p_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$. Отже, для кожного $j = \overline{1, k}$ число $\lambda_j$ є коренем $\psi$ кратності $\geq p_j$. Тому $\psi = \omega\mu$, де $\omega$ є поліномом. Звідси випливає, що $\psi(A) = \omega(A)\mu(A) = 0$, тобто $q(A) = h(A)$.

2. Нехай $q(A) = h(A)$. Тоді для $\psi = q - h$ маємо $\psi(A) = 0$, тобто $\psi$ є анулювальним поліномом матриці $A$. Тому він ділиться на $\mu$: $\psi = \omega\mu$, де $\omega$ є поліномом. Оскільки число $\lambda_j$ є коренем полінома $\mu$ кратності $p_j$, це число є коренем полінома $\psi$ кратності $\geq p_j$, $j = \overline{1, k}$ . Отже, $\psi^{(l)}(\lambda_j) = 0$, $l = \overline{0, p_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$, тобто $\psi(\Lambda) = 0$. Тому $q(\Lambda) = h(\Lambda)$. □

Справедлива також теорема про рівність матричних поліномів степеня $\leq p - 1$.

**Лема 2.4.16.** *Нехай $q$ та $h$ є поліномами, $q(\Lambda) = h(\Lambda)$ та $\deg q = \deg h \leq p$. Тоді $q(\lambda) \equiv h(\lambda)$.*

*Доведення.* Оскільки $q(\Lambda) = f(\Lambda) = h(\Lambda)$, за лемою 2.4.15 про рівність матричних поліномів маємо $q(A) = h(A)$. Отже, поліном $\psi = q - h$ є анулювальним для матриці $A$ і $\deg \psi \leq p - 1$, тому $\psi = 0$, тобто $q = h$. □

Перейдемо тепер до розгляду функцій від матриць. З теореми 2.4.11 Гамільтона–Келі ми одержуємо такий наслідок.

**Наслідок 2.4.17.** *Маємо*

$$A^m = \sum_{s=0}^{p-1} a_s^m A^s, \quad m \geq p, \tag{2.4.15}$$

*де* $a_s^m \in \mathbb{R}$, $s = \overline{0, p-1}$, *та*

$$|a_s^m| \le M \frac{m! \max\{a^m, a^{m-p+1}\}}{(m-p+1)!}, \quad s = \overline{0, p-1}, \ m \ge p. \quad (2.4.16)$$

*Тут* $M > 0$ *не залежить від* $s$ *та* $m$, $a = \max\{|\lambda_j| \mid j = \overline{1, k}\}$.

*Доведення.* Нехай $q_s$, $s = \overline{1, p}$, є лінійно незалежними поліномами степеня не вище ніж $p-1$. Доведемо спочатку, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} q_1(\Lambda) \\ \vdots \\ q_p(\Lambda) \end{vmatrix} \ne 0. \quad (2.4.17)$$

Припустимо супротивне. Нехай існує вектор $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такий, що

$$\sum_{s=1}^{p} C_s q_s(\Lambda) = 0.$$

Тоді для полінома

$$q(\lambda) \equiv \sum_{s=1}^{p} C_s q_s(\lambda)$$

маємо $q(\Lambda) = 0$, отже, за лемою 2.4.15 про рівність матричних поліномів $q(A) = 0$. Оскільки $\deg q \le p-1$, за лемою про рівність матричних поліномів степеня $\le p-1$ (див. лему 2.4.16) маємо $q = 0$, тобто поліноми $q_1, \ldots, q_p$ є лінійно залежними, що суперечить нашому припущенню. Таким чином, (2.4.17) доведено.

Позначимо

$$g_l(\lambda) \equiv \lambda^l, \quad l = \overline{0, \infty}.$$

Зафіксуємо $m \ge p$. Визначимо поліном $r_m$ за допомогою співвідношення

$$\begin{vmatrix} r_m(\lambda) & g_m(\Lambda) \\ g_0(\lambda) & g_0(\Lambda) \\ g_1(\lambda) & g_1(\Lambda) \\ \vdots & \vdots \\ g_{p-1}(\lambda) & g_{p-1}(\Lambda) \end{vmatrix} = 0. \tag{2.4.18}$$

Диференціюючи (2.4.18) за $\lambda$ та підставляючи $\lambda_j$, одержуємо

$$\begin{vmatrix} r_m^{(l)}(\lambda_j) & g_m(\Lambda) \\ g_0^{(l)}(\lambda_j) & g_0(\Lambda) \\ \vdots & \vdots \\ g_{p-1}^{(l)}(\lambda_j) & g_{p-1}(\Lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad i = \overline{0, p_j - 1}, \ j = \overline{1, k}.$$

Серед стовпців матриці $\begin{pmatrix} g_0(\Lambda) \\ \vdots \\ g_{p-1}(\Lambda) \end{pmatrix}$ є стовпець $\begin{pmatrix} g_0^{(l)}(\lambda_j) \\ \vdots \\ g_{p-1}^{(l)}(\lambda_j) \end{pmatrix}$. Віднімемо цей стовпець від першого:

$$\begin{vmatrix} r_m^{(l)}(\lambda_j) - g_m^{(l)}(\lambda_j) & g_m(\Lambda) \\ 0 & g_0(\Lambda) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & g_{p-1}(\Lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad l = \overline{0, p_j - 1}, \ j = \overline{1, k}.$$

Ураховуючи (2.4.17) з $q_s = g_{s-1}$, $s = \overline{1, p}$, маємо $r_m^{(l)}(\lambda_j) = g_m^{(l)}(\lambda_j)$, $l = \overline{0, p_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$, тобто $r_m(\Lambda) = g_m(\Lambda)$. Зрозуміло, що $\deg r_m \le p - 1$. За лемою 2.4.15 про рівність матричних поліномів одержуємо

$$A^m = g_m(A) = r_m(A). \tag{2.4.19}$$

З'ясуємо структуру полінома $r_m$. З (2.4.18) одержуємо

$$r_m(\lambda) \equiv \sum_{s=0}^{p-1} (-1)^s \frac{\Delta_s^m}{\Delta} \lambda^s, \tag{2.4.20}$$

де $\Delta_s^m$ є детермінантом матриці одержаної з матриці $\begin{pmatrix} g_m(\Lambda) \\ g_0(\Lambda) \\ \vdots \\ g_{p-1}(\Lambda) \end{pmatrix}$ після викреслення $(s+1)$-го рядка, $s = \overline{0, p-1}$. Отже, маємо

$$a_s^m = (-1)^s \frac{\Delta_s^m}{\Delta} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{p_j - 1} \eta_{js}^l \frac{m!}{(m-l)!} \lambda_j^{m-l}, \tag{2.4.21}$$

де $\eta_{js}^l$ не залежить від $m$, $s = \overline{0, p-1}$, $l = \overline{0, p_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$. З (2.4.19) та (2.4.20) випливає (2.4.15). Оцінка (2.4.16) одразу випливає з (2.4.21). $\square$

## 2.4.4. Функції від матриць

Уведемо поетапно (для різних класів функцій) означення функції від матриці $A$.

**Означення 2.4.18** (*полінома від матриці*)**.** Нехай

$$f(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{m} f_j \lambda^j, \tag{2.4.22}$$

де $f_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, m}$. Тоді

$$f(A) = \sum_{j=0}^{r} f_j A^j. \tag{2.4.23}$$

Далі спробуємо поширити це означення на клас аналітичних функцій. Нехай $f(\lambda)$ є аналітичною функцією, яка задана степеневим рядом

$$f(\lambda) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_m \lambda^m \tag{2.4.24}$$

з радіусом збіжності $0 < R \le \infty$, де $f_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, \infty}$. Нехай також $a = \max\{|\lambda_j| \mid j = \overline{1,k}\} < R$. Дослідимо, чи є збіжним матричний степеневий ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m A^m. \tag{2.4.25}$$

Для цього розглянемо його часткову суму та скористаємося наслідком 2.4.17:

$$\begin{aligned} S_M(A) &= \sum_{m=0}^{M} f_m A^m \\ &= \sum_{m=0}^{M} f_m \sum_{s=0}^{p-1} a_s^m A^s = \sum_{s=0}^{p-1} A^s \left( \sum_{m=0}^{M} f_m a_s^m \right), \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

де для $m = \overline{0, p-1}$ вважаємо $a_s^m = \delta_{sm}$, $s = \overline{0, p-1}$ ($\delta_{sm}$ є символом Кронекера). Дослідімо на збіжність числовий ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m a_s^m. \tag{2.4.27}$$

Маємо

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|f_m a_s^m|} \le \varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|f_m|} \ \varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_s^m|}. \tag{2.4.28}$$

Оскільки радіус збіжності ряду (2.4.24) дорівнює $R$, одержуємо

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|f_m|} = \frac{1}{R}.$$

Скориставшись оцінкою (2.4.16), продовжимо оцінку (2.4.28):

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|f_m a_s^m|} \le \frac{1}{R} \varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{M \frac{m!}{(m-p+1)!} \max\{a^m, a^{m-p+1}\}}. \tag{2.4.29}$$

За допомогою формули Стірлінґа [4]:

$$\sqrt{2\pi}m^{m+1/2}e^{-m}e^{1/(12m+1)} \le m! \le \sqrt{2\pi}m^{m+1/2}e^{-m}e^{1/(12m)},$$

яка справедлива для $m \in \mathbb{N}$, одержуємо

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{m!}{(m-p+1)!}\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\quad \le \frac{m}{m-p+1}\left(\frac{m}{(m-p+1)^{3-2p}}\right)^{\frac{1}{2m}} e^{-\frac{p-1}{m}} e^{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{12m}-\frac{1}{12(m-p+1)+1}\right)} \\
&\quad \sim \left(m(m-p+1)^{2p-3}\right)^{\frac{1}{2m}} \to 1, \quad \text{коли } m \to \infty. \qquad (2.4.30)
\end{aligned}$$

Тому можемо продовжити оцінку (2.4.18):

$$\varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|f_m a_s^m|} \le \frac{1}{R} \varlimsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{\max\{a^m, a^{m-p+1}\}} \le \frac{a}{R}. \qquad (2.4.31)$$

Оскільки $a < R$, ряд (2.4.27) є абсолютно збіжним. Позначивши

$$\alpha_s = \sum_{m=0}^{\infty} f_m a_s^m, \qquad (2.4.32)$$

із (2.4.26) одержуємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m A^m = \lim_{m\to\infty} S_M(A) = \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s A^s. \qquad (2.4.33)$$

Таким чином, матричний ряд (2.4.25) є збіжним (причому абсолютно), а його сума подається деяким поліномом, степеня не більше $p-1$. Позначивши

$$r_A^f(\lambda) \equiv \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s \lambda^s, \qquad (2.4.34)$$

одержуємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} f_m A^m = r_A^f(A). \qquad (2.4.35)$$

**Означення 2.4.19** (*аналітичної функції від матриці*)**.** Нехай $f(\lambda)$ є аналітичною функцією, яка задана степеневим рядом

$$f(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} f_j \lambda^j$$

з радіусом збіжності $0 < R \leq \infty$, де $f_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, \infty}$. Нехай також $\max\{|\lambda_j| \mid j = \overline{1, k}\} < R$. Позначимо

$$f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m A^m.$$

Зрозуміло, що означення 2.4.18 є окремим випадком означення 2.4.19.

Для того щоб поширити це означення на клас, ширший за клас аналітичних функцій, дослідимо властивості полінома $r_A^f$ за умови $a = \max\{|\lambda_j| \mid j = \overline{1, k}\} < R$. Ураховуючи (2.4.32), абсолютну збіжність ряду (2.4.27) та абсолютну збіжність ряду (2.4.22) при $|\lambda| < R$, для $l = \overline{0, \infty}$ маємо

$$\begin{aligned} f^{(l)}(\lambda) - \left(r_A^f\right)^{(l)}(\lambda) &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_m (\lambda^m)^{(l)} - \sum_{s=0}^{p-1} (\lambda^s)^{(l)} \left( \sum_{m=0}^{\infty} f_m a_s^m \right) \\ &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_m (\lambda^m)^{(l)} - \sum_{m=0}^{\infty} f_m \sum_{s=0}^{p-1} a_s^m (\lambda^s)^{(l)} \\ &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} f_m \left( \lambda^m - \sum_{s=0}^{p-1} a_s^m \lambda^s \right)^{(l)} \\ &\equiv \sum_{m=p}^{\infty} f_m \left( \lambda^m - \sum_{s=0}^{p-1} a_s^m \lambda^s \right)^{(l)}. \end{aligned}$$

З (2.4.15) одержуємо, що поліном $\lambda^m - \sum\limits_{s=0}^{p-1} a_s^m \lambda^s$ є анулювальним для матриці $A$, тому для кожного $m = \overline{p, \infty}$ існує поліном $u_m$

такий, що

$$\lambda^m - \sum_{s=0}^{p-1} a_s^m \lambda^s \equiv \mu(\lambda) u_m(\lambda), \quad l = \overline{p, \infty}.$$

Тому

$$f^{(l)}(\lambda) - \left(r_A^f\right)^{(l)}(\lambda) \equiv \sum_{m=p}^{\infty} f_m \left(\mu(\lambda) u_m(\lambda)\right)^{(l)}, \quad l = \overline{0, \infty}. \quad (2.4.36)$$

Ураховуючи (2.4.13), маємо

$$\mu^{(l)}(\lambda_j) = 0, \quad l = \overline{0, p_j - 1}, \ j = \overline{1, k}. \quad (2.4.37)$$

Тому з (2.4.36) одержуємо

$$f^{(l)}(\lambda_j) = \left(r_A^f\right)^{(l)}(\lambda_j), \quad l = \overline{0, p_j - 1}, \ j = \overline{1, k}. \quad (2.4.38)$$

Співвідношення (2.4.38) дозволить нам поширити означення функції від матриці на деякий клас неаналітичних функцій.

**Означення 2.4.20** (*функції, визначеної на спектрі матриці*)**.** Функція $f$ є визначеною на спектрі матриці $A$, якщо

$$\forall j = \overline{1, k} \quad \forall l = \overline{0, p - 1} \quad \exists f^{(l)}(\lambda_j) \in \mathbb{R}.$$

Значення $f$ на спектрі $A$ позначаємо вектором-рядком

$$f(\Lambda) = \left(f(\lambda_1), \ldots, f^{p_1 - 1}(\lambda_1); \ldots; f(\lambda_k), \ldots, f^{(p_k - 1)}(\lambda_k)\right) \in \mathbb{C}^{*p}.$$

**Означення 2.4.21** (*інтерполяційного полінома функції на спектрі матриці*)**.** Нехай функція $f$ визначена на спектрі матриці $A$. Поліном $g_A^f$ називається інтерполяційним поліномом функції $f$ на спектрі матриці $A$, якщо

$$g_A^f(\Lambda) = f(\Lambda).$$

**Означення 2.4.22** (*функції, визначеної на спектрі матриці, від цієї матриці*)**.** Нехай $f$ визначена на спектрі матриці $A$, $g_A^f$ є інтерполяційним поліномом цієї функції на спектрі матриці $A$. Позначимо

$$f(A) = g_A^f(A).$$

Коректність останнього означення випливає з леми 2.4.15.

*Зауваження* 2.4.23. За лемою 2.4.15 про рівність матричних поліномів означення 2.4.18 є окремим випадком означення 2.4.22. У наступній теоремі доведено, що означення 2.4.19 також є окремим випадком означення 2.4.22. Тому далі вважатимемо, що функція від матриці визначається означенням 2.4.22.

**Теорема 2.4.24.** *Нехай*

$$f(\lambda) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} f_j \lambda^j$$

*є аналітичною функцією з радіусом збіжності* $0 < R \leq \infty$, $\max\{|\lambda_j| \mid j = \overline{1,k}\} < R$, $g_A^f$ *є інтерполяційним поліномом цієї функції на спектрі матриці* $A$*. Тоді*

$$f(A) = g_A^f(A) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m A^m.$$

*Доведення.* Скориставшись (2.4.35), (2.4.38) та лемою 2.4.15 про рівність матричних поліномів, одразу одержуємо твердження теореми. $\square$

**Означення 2.4.25** (*інтерполяційного полінома Лаґранжа–Сільвестра*)**.** Нехай $f$ визначена на спектрі матриці $A$. Інтерполяційний поліном $r_A^f$ для функції $f$ на спектрі матриці $A$, який задовольняє умову $\deg r_A^f \leq p-1$, називається інтерполяційним поліномом Лаґранжа–Сільвестра.

Поліном $r_A^f$, що задається формулою (2.4.34), який було побудовано вище, є інтерполяційним поліномом Лаґранжа–Сільвестра (див. (2.4.38)) для аналітичної функції $f$. За лемою про рівність матричних поліномів степеня $\le p-1$ (див. лему 2.4.16) існує лише один поліном Лаґранжа–Сільвестра для заданої функції $f$. Наступна теорема про існування та єдиність інтерполяційного полінома Лаґранжа–Сільвестра дає конструктивний спосіб обчислення полінома Лаґранжа–Сільвестра для будь-якої функції, заданої на спектрі матриці $A$.

**Теорема 2.4.26.** *Нехай $f$ визначена на спектрі матриці $A$. Інтерполяційний поліном Лаґранжа–Сільвестра визначається формулою*

$$\begin{vmatrix} r_A^f(\lambda) & f(\Lambda) \\ q_1(\lambda) & q_1(\Lambda) \\ \vdots & \vdots \\ q_p(\lambda) & q_p(\Lambda) \end{vmatrix} \equiv 0, \tag{2.4.39}$$

*де $q_1, \ldots, q_p$ є довільними лінійно незалежними поліномами такими, що $\deg q_j \le p-1$, $j = \overline{1,p}$.*

*Доведення.* Єдиність полінома Лаґранжа–Сільвестра випливає з леми 2.4.16.

У наслідку 2.4.17 було доведено, що умову (2.4.17) для $q_1, \ldots, q_p$ виконано. Отже співвідношення (2.4.39) визначає поліном $r_A^f$ степеня не вище $p-1$. Диференціюючи (2.4.39) за $\lambda$ та підставляючи $\lambda_j$, одержуємо

$$\begin{vmatrix} \left(r_A^f\right)^{(i)}(\lambda) & f(\Lambda) \\ q_1^{(i)}(\lambda) & q_1(\Lambda) \\ \vdots & \vdots \\ q_p^{(i)}(\lambda) & q_p(\Lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad i = \overline{0, p_j - 1},\ j = \overline{1,k}.$$

Серед стовпців матриці $\begin{pmatrix} q_1(\Lambda) \\ \vdots \\ q_p(\Lambda) \end{pmatrix}$ є стовпець $\begin{pmatrix} q_1^{(i)}(\lambda_j) \\ \vdots \\ q_p^{(i)}(\lambda_j) \end{pmatrix}$. Віднімемо цей стовпець від першого:

$$\begin{vmatrix} \left(r_A^f\right)^{(i)}(\lambda_j) - f^{(i)}(\lambda_j) & f(\Lambda) \\ 0 & q_1(\Lambda) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & q_p(\Lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad i = \overline{0, p_j - 1},\ j = \overline{1, k}.$$

Тому (див.(2.4.17)) маємо

$$\left(r_A^f\right)^{(i)}(\lambda_j) = f^{(i)}(\lambda_j), \quad i = \overline{0, p_j - 1},\ j = \overline{1, k},$$

тобто

$$r_A^f(\Lambda) = f(\Lambda).$$

Зрозуміло, що $\deg r \le p - 1$. Теорему доведено. □

З'ясуємо структуру полінома $r_A^f$. З (2.4.39) одержуємо

$$r_A^f(\lambda) \equiv \sum_{s=0}^{p-1} (-1)^s \frac{\Delta_s^f}{\Delta} q_s(\lambda), \tag{2.4.40}$$

де $\Delta_s^f$ є детермінантом матриці одержаної з матриці $\begin{pmatrix} f(\Lambda) \\ q_1(\Lambda) \\ \vdots \\ q_p(\Lambda) \end{pmatrix}$ після викреслення $(s+1)$-го рядка, $s = \overline{1, p}$. Отже, маємо

$$(-1)^s \frac{\Delta_s^f}{\Delta} = \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{p_j - 1} \eta_{js}^l f^{(l)}(\lambda_j), \tag{2.4.41}$$

де $\eta_{js}^l$ не залежить від $f$, $s = \overline{0, p-1}$, $l = \overline{0, p_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$.

Позначаючи $h_l^j = \sum\limits_{s=0}^{p-1} \eta_{js}^l q_s$, одержуємо

$$r_A^f(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{p_j - 1} h_l^j(\lambda) f^{(l)}(\lambda_j), \tag{2.4.42}$$

де поліном $h_l^j$ не залежить від $f$, $\deg h_l^j \le p-1$, $l=\overline{0,p_j-1}$, $j=\overline{1,k}$. Доведемо, що $h_l^j$, $l=\overline{0,p_j-1}$, $j=\overline{1,k}$, є лінійно незалежними. Розглянемо

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{p_j-1} C_j^l h_l^j(\lambda) \equiv 0 \tag{2.4.43}$$

і знайдемо поліном $\tau$ такий, що $\deg \tau \le p-1$ і

$$\tau(\Lambda) = (C_1^0, \ldots, C_1^{p_1-1}; \ldots; C_k^0, \ldots, C_k^{p_k-1}) =: C. \tag{2.4.44}$$

Тоді $\tau$ є інтерполяційним поліномом Лаґранжа–Сільвестра для себе на спектрі $A$, тому (див.(2.4.42))

$$\tau(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(\lambda)\tau^{(l)}(\lambda_j) \equiv \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{p_j-1} C_j^l h_l^j(\lambda) \equiv 0.$$

Отже, $0=\tau(\Lambda)=C$. Тому $h_l^j$, $l=\overline{0,p_j-1}$, $j=\overline{1,k}$)), є лінійно незалежними.

*Зауваження* 2.4.27. Таким чином, шукаючи на практиці інтерполяційний поліном Лаґранжа–Сільвестра $r_A^f$, зручно скористатися формулою (2.4.42), де $h_l^j$, $l=\overline{0,p_j-1}$, $j=\overline{1,k}$, є лінійно незалежними поліномами, які не залежать від $f$ та $\deg h_l^j \le p-1$, $l=\overline{0,p_j-1}$, $j=\overline{1,k}$. Ми знаємо, що для полінома $g$, $\deg g \le p-1$, інтерполяційним поліномом на спектрі $A$ є саме цей поліном $g$. Для того щоб знайти поліноми $h_l^j$, $l=\overline{0,p_j-1}$, $j=\overline{1,k}$, в формулі (2.4.42) можемо вибрати $p$ поліномів $q_1,\ldots,q_p$, $\deg q_l \le p-1$, $l=\overline{1,p}$, які є лінійно незалежними, та підставити їх у формулу (2.4.42):

$$q_s(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(\lambda) q_s^{(l)}(\lambda_j), \quad s=\overline{1,p}. \tag{2.4.45}$$

Це лінійна алгебраїчна система рівнянь відносно невідомих $h_l^j$,

$l = \overline{0, p_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$, з матрицею коефіцієнтів

$$\begin{pmatrix} q_1(\Lambda) \\ \vdots \\ q_p(\Lambda) \end{pmatrix},$$

детермінант якої не дорівнює 0 (див. (2.4.17)). Тому з (2.4.45) можемо знайти $h_l^j$, $l = \overline{0, p_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$)), а отже, $r_A^f$ для заданої функції $f$.

*Зауваження* 2.4.28. Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ є різними коренями характеристичного полінома $\rho$ матриці $A$ та нехай функція $f$ визначена на спектрі цієї матриці. Зрозуміло, що ці корені є простими ($p_1 = \cdots = p_n = 1$) і степінь мінімального полінома дорівнює степеню характеристичного поліному ($p = n$). У цьому випадку поліном Лаґранжа–Сильвестра має вигляд

$$r_A^f(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{n} h_0^j(\lambda) f(\lambda_j).$$

Позначимо

$$q_s(\lambda) \equiv \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} (\lambda - \lambda_k), \quad s = \overline{1, n}.$$

Для цих поліномів запишемо систему (2.4.45):

$$q_s(\lambda) \equiv h_0^s(\lambda) q_s(\lambda_s), \quad s = \overline{1, n},$$

оскільки $q_s(\lambda_j) = 0$ для $j \neq s$. Отже,

$$h_0^s(\lambda) \equiv \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_s - \lambda_k}, \quad s = \overline{1, n},$$

тому

$$r_A^f(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k} f(\lambda_j).$$

*Зауваження* 2.4.29. Нехай характеристичний поліном $\rho$ матриці $A$ має лише один корінь $\lambda_1$ та нехай функція $f$ визначена на спектрі цієї матриці. Зрозуміло, що $p_1 = p \le n = n_1$. У цьому випадку поліном Лаґранжа–Сильвестра має вигляд

$$r_A^f(\lambda) \equiv \sum_{l=0}^{p-1} h_l^1(\lambda) f^{(l)}(\lambda_1).$$

Позначимо

$$q_s(\lambda) \equiv (\lambda - \lambda_1)^{s-1}, \quad s = \overline{1,p}.$$

Для цих поліномів запишемо систему (2.4.45):

$$q_s(\lambda) \equiv h_{s-1}^1(\lambda)(s-1)!, \quad s = \overline{1,p},$$

оскільки $q_s^{(l)}(\lambda_1) = 0$ для $l \ne s-1$ і $q_s^{(s-1)}(\lambda_1) = (s-1)!$, $s = \overline{1,p}$. Отже,

$$h_l^1(\lambda) \equiv \frac{1}{l!}(\lambda - \lambda_1)^l, \quad l = \overline{0,p-1},$$

тому

$$r_A^f(\lambda) \equiv \sum_{l=0}^{p-1} \frac{1}{l!}(\lambda - \lambda_1)^l f^{(l)}(\lambda_1).$$

Зокрема, для $A = L_\nu(\lambda_1)$ (клітини Жордана розміру $\nu \times \nu$, див. (2.4.14)) маємо

$$f\big(L_\nu(\lambda_1)\big) = \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_1) & \cdots & \frac{1}{(p-1)!}f^{(p-1)}(\lambda_1) \\ 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1) & \cdots & \frac{1}{(p-2)!}f^{(p-2)}(\lambda_2) \\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & \cdots & \frac{1}{(p-3)!}f^{(p-3)}(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_1) \end{pmatrix}. \tag{2.4.46}$$

## 2.4.5. Властивості функцій від матриць

Розглянемо теорему про добуток функцій від матриці.

**Теорема 2.4.30.** *Нехай $f_1$, $f_2$ є визначеними на спектрі матриці $A$ та нехай $f = f_1 f_2$. Тоді*

$$f(A) = f_1(A)f_2(A) = f_2(A)f_1(A).$$

*Доведення.* Нехай $r_1$ та $r_2$ є інтерполяційними поліномами $f_1$ та $f_2$ відповідно. Позначимо $r = r_1 r_2$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} r^{(i)}(\lambda_j) &= (r_1(\lambda_j)r_2(\lambda_j))^{(i)} = \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} r_1^{(l)}(\lambda_j) r_2^{(i-l)}(\lambda_j) \\ &= \sum_{l=0}^{i} \binom{i}{l} f_1^{(l)}(\lambda_j) f_2^{(i-l)}(\lambda_j) = (f_1(\lambda_j)f_2(\lambda_j))^{(i)} \\ &= f^{(i)}(\lambda_j), \quad i = \overline{0, p_j - 1},\ j = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Тому $r$ є інтерполяційним поліномом $f$. Отже,

$$f(A) = r(A) = r_1(A)r_2(A) = f_1(A)f_2(A).$$

Крім цього,

$$f(A) = r(A) = r_2(A)r_1(A) = f_2(A)f_1(A). \qquad \square$$

З цієї теореми одразу одержуємо наслідок про комутативність добутку функцій від матриць.

**Наслідок 2.4.31.** *Нехай $f_1, f_2$ визначені на спектрі матриці $A$. Тоді $f_1(A)f_2(A) = f_2(A)f_1(A)$.*

Доведемо також теорему про функцію від матриці, подібної заданій.

**Теорема 2.4.32.** *Нехай $f$ визначена на спектрі матриці $A$, $T \in \mathfrak{M}(n, n)$, $\det T \neq 0$. Тоді $f$ визначена на спектрі матриці $TAT^{-1}$ і $f\big(TAT^{-1}\big) = Tf(A)T^{-1}$.*

*Доведення.* Спектри матриць $A$ і $TAT^{-1}$ збігаються між собою, тому функція $f$ визначена на спектрі матриці $TAT^{-1}$ і значення цієї функції на спектрі $A$ збігається з її значенням на спектрі $TAT^{-1}$. З теореми 2.4.26 випливає, що інтерполяційні поліноми Лаґранжа–Сильвестра для $f$ на спектрах $A$ і $TAT^{-1}$ є рівними між собою $\left(r_A^f = r_{TAT^{-1}}^f\right)$, отже,

$$\begin{aligned} f\left(TAT^{-1}\right) &= r_{TAT^{-1}}^f\left(TAT^{-1}\right) \\ &= r_A^f\left(TAT^{-1}\right) = Tr_A^f(A)T^{-1} = Tf(A)T^{-1}. \end{aligned}$$

Теорему доведено. $\square$

Далі розглянемо теорему про структуру функції від блокової матриці.

**Теорема 2.4.33.** *Якщо $A$ є блоковою матрицею:*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & A_u \end{pmatrix},$$

*де $A_m \in \mathfrak{M}(r_j, r_j)$, $j = \overline{1, u}$, $\sum\limits_{j=1}^{u} r_j = n$, і функція $f$ визначена на спектрі матриці $A$, то*

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(A_1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & f(A_u) \end{pmatrix}.$$

*Доведення.* Спектр матриці $A$ є об'єднанням спектрів матриць $A_1, \ldots, A_s$. Тому інтерполяційний поліном $g_A^f$ матриці $A$ є також інтерполяційним поліномом матиці $A_j$, $j = \overline{1, u}$. Тому

$$\begin{aligned} f(A) &= g_A^f(A) \\ &= \begin{pmatrix} g_A^f(A_1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & g_A^f(A_u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(A_1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & f(A_u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$ $\square$

*Зауваження* 2.4.34. Застосовуючи теореми 2.4.32, 2.4.33 і зауваження 2.4.29, одержуємо ще один метод обчислення функції від матриці:

1. Невиродженим лінійним перетворенням $T$ ($\det T \neq 0$) матрицю $A$ зводимо до жорданової форми:

$$TAT^{-1} = \begin{pmatrix} L_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & L_u \end{pmatrix},$$

   де $L_j$ є клітиною Жордана (див. (2.4.14)) розміру $r_j \times r_j$, $j = \overline{1, u}$, $\sum\limits_{j=1}^{u} r_j = n$. Це можливо завдяки теоремі Жордана (див. теорему 2.4.13).

2. Для клітини Жордана $L_j$ обчислюємо $f(L_j)$ за формулою (2.4.46), $j = \overline{1, u}$.

3. Застосовуючи теореми 2.4.32 і 2.4.33, одержуємо

$$f(A) = T^{-1} \begin{pmatrix} f(L_1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & f(L_u) \end{pmatrix} T.$$

Таким чином, ми маємо три різні способи для обчислення функції від матриці:

(i) за допомогою інтерполяційного полінома Лаґранжа–Сильвестра (див. означення 2.4.22 і зауваження 2.4.27);

(ii) за допомогою матричного степеневого ряду (див. теорему 2.4.24);

(iii) за допомогою зведення матриці до жорданової форми і обчислення функції від клітини Жордана (див. зауваження 2.4.34)

Методи (i) і (iii) стосуються всіх функцій, визначених на спектрі заданої матриці, а (ii) — лише аналітичних функцій, круг збіжності яких містить спектр цієї матриці. Нижче в теоремі 2.4.40 буде наведено ще один спосіб обчислення, але його можна застосовувати лише для експоненціальної функції.

Для функції $f_t(\lambda) \equiv e^{\lambda t}$ (тут $t \in \mathbb{R}$ є параметром) її значення на матриці $A$ називатимемо *матричною експонентою* і позначатимемо $e^{At}$.

Справедливі такі властивості матричної експоненти.

**Наслідок 2.4.35.** *Для функції* $e^{At}$ *справедливі твердження:*

1) $e^{At}\big|_{t=0} = \mathbb{I}$,

2) $\forall t_1 \in \mathbb{R}\ \forall t_2 \in \mathbb{R} \quad e^{At_1}e^{At_2} = e^{A(t_1+t_2)}$,

3) $\forall t \in \mathbb{R} \quad e^{-At} = \left(e^{At}\right)^{-1}$.

*Доведення.* 1) Маємо $e^{\lambda t}\big|_{t=0} = 1$, тому виконується 1).

2) Позначимо $f_1(\lambda) \equiv e^{\lambda t_1}$, $f_2(\lambda) \equiv e^{\lambda t_2}$. Тоді за теоремою 2.4.30 про добуток функцій від матриці для $f(\lambda) \equiv f_1(\lambda)f_2(\lambda)$ маємо $e^{A(t_1 t_2)} f(A) = f_1(A)f_2(A) = e^{At_1}e^{At_2}$.

3) У 2) позначимо $t_1 = t$, $t_2 = -t$. Тоді, скориставшись 1), одержуємо $e^{At}e^{-At} = e^{At}|_{t=0} = \mathbb{I}$, тому $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$. □

З теореми 2.4.24 одразу одержуємо теорему про подання матричної експоненти степеневим рядом.

**Теорема 2.4.36.** *Маємо*

$$e^{At} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} A^m, \quad t \in \mathbb{R}.$$

З цієї теореми випливає теорема про множення матричної експоненти на числову.

**Теорема 2.4.37.** *Нехай* $\nu \in \mathbb{C}$. *Тоді*

$$e^{-\nu t} e^{At} = e^{(A-\nu\mathbb{I})t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Доведення.* Скориставшись теоремою 2.4.36, одержуємо

$$e^{-\nu t}e^{At} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{t^s}{s!}(-\nu)^s\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}A^k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Позначивши $k = m - s$, маємо

$$\begin{aligned} e^{-\nu t}e^{At} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\sum_{s=0}^{m}\frac{m!}{s!(m-s)!}(-\nu)^s A^{m-s} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}(A-\nu\mathbb{I})^m = e^{(A-\nu\mathbb{I})t}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Теорему доведено. □

Скориставшись формулою (2.4.42), одразу одержуємо теорему про оцінку матричної експоненти.

**Теорема 2.4.38.** *Нехай* $\Lambda = \max\{\operatorname{Re}\lambda_j \mid j = \overline{1,k}\}$. *Тоді*

$$\begin{aligned} \|e^{At}\| &\le C\big(1+\|A\|\big)^{p-1}\big(1+t\big)^{p-1}e^{\Lambda t} \\ &\le C\big(1+\|A\|\big)^{n-1}\big(1+t\big)^{n-1}e^{\Lambda t}, \quad t \in [0,+\infty), \end{aligned}$$

*де* $C > 0$ *є деякою сталою.*

Розглянемо теорему про диференціювання матричної експоненти.

**Теорема 2.4.39.** *Маємо*

$$\big(e^{At}\big)' = Ae^{At} = e^{At}A, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Доведення.* Нехай $r_{[t]}$ є інтерполяційним поліномом Лаґранжа–Сільвестра для функції $f_{[t]}(\lambda) \equiv e^{\lambda t}$ на спектрі матриці $A$. Скориставшись (2.4.42), одержуємо

$$e^{At} \equiv r_{[t]}(A) \equiv \sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(A)t^l e^{\lambda_j t}. \tag{2.4.47}$$

Отже,

$$\left(e^{At}\right)' \equiv \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(A) \left(lt^{l-1} + \lambda_j t^l\right) e^{\lambda_j t}. \qquad (2.4.48)$$

Нехай тепер $q_{[t]}$ є інтерполяційним поліномом Лаґранжа–Сільвестра для функції $g_{[t]}(\lambda) \equiv \lambda e^{\lambda t}$ на спектрі матриці $A$. Тоді

$$\begin{aligned} Ae^{At} \equiv q_{[t]}(A) &\equiv \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(A) \frac{\partial^l}{\partial \lambda^l} \left(\lambda e^{\lambda t}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_j} \\ &\equiv \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(A) \frac{\partial^{l+1}}{\partial \lambda^l \partial t} \left(\lambda e^{\lambda t}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_j} \\ &\equiv \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(A) \frac{\partial}{\partial t} \left(t^l e^{\lambda t}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_j} \\ &\equiv \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(A) \left(lt^{l-1} + \lambda_j t^l\right) e^{\lambda_j t}. \end{aligned} \qquad (2.4.49)$$

Порівнюючи (2.4.48) та (2.4.49), одержуємо $\left(e^{At}\right)' = Ae^{At}$, $t \in \mathbb{R}$. Рівність $Ae^{At} = e^{At}A$, $t \in \mathbb{R}$, випливає з наслідку 2.4.31 про комутативність добутку функцій від матриць. $\square$

Також справедлива теорема про розкладання матричної експоненти в скінченну суму степенів, яка дає ще один спосіб обчислення матричної експоненти.

**Теорема 2.4.40.** *Маємо*

$$e^{At} \equiv \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s(t) A^s \quad \text{на } \mathbb{R}, \qquad (2.4.50)$$

*де* $\alpha_s \in C^\infty(\mathbb{R})$, $s = \overline{0, p-1}$, *та для кожного* $s = \overline{0, p-1}$ *функція* $\alpha_s$ *задовольняє умови*

$$\mu\left(\frac{d}{dt}\right) \alpha_s(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (2.4.51)$$

$$\alpha_s^{(j)}(0) = \delta_{sj}, \quad j = \overline{0, p-1}, \tag{2.4.52}$$

*де $\mu$ є мінімальним поліномом,* $\deg \mu = p$, *$\delta_{sj}$ є символом Кронекера, $s, j \in \mathbb{Z}$.*

*Доведення.* Ураховуючи формулу (2.4.42), за означенням 2.4.22 маємо

$$e^{At} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(A) t^l e^{\lambda_j t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $h_l^j$ є поліномом, $\deg h_l^j \le p-1$, $l = \overline{0, p_j-1}$, $j = \overline{1, k}$. Перегруповуючи за степенями $A^s$, одержуємо

$$e^{At} = \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s(t) A^s, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.53}$$

де $\alpha_s \in C^\infty(\mathbb{R})$ $s = \overline{0, p-1}$).

Залишилось довести, що $\alpha_s$ задовольняють умови (2.4.51) та (2.4.52). Диференціюючи (2.4.53) і користуючись теоремою про диференціювання матричної експоненти 2.4.39, одержуємо

$$A^j e^{At} = \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s^{(j)}(t) A^s, \quad t \in \mathbb{R},\ j = \overline{0, p-1}. \tag{2.4.54}$$

Для кожного $j = \overline{0, p-1}$ множимо тотожність (2.4.54) на $\mu_j$ (див. (2.4.13)) і додаємо ці тотожності одна до одної:

$$0 = \mu(A) e^{At} = \sum_{s=0}^{p-1} \mu\left(\frac{d}{dt}\right) \alpha_s(t) A^s, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Маємо анулювальний поліном степеня менше $p$, тому цей поліном тотожно дорівнює нулю, отже, і всі його коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто (2.4.51) виконано.

Підставляючи $t = 0$ в (2.4.54), одержуємо

$$A^j = \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s^{(j)}(0) A^s, \quad j = \overline{0, p-1},$$

отже,

$$\sum_{\substack{s=0 \\ s \neq j}}^{p-1} \alpha_s^{(j)}(0) + A^s + \left(\alpha_j^{(j)}(0) - 1\right) A^j = 0, \quad j = \overline{0, p-1}.$$

Таким чином, для кожного $j = \overline{0, p-1}$ одержали анулювальний поліном степеня менше $p$, тому всі коефіцієнти цього полінома нульові, тобто умову (2.4.52) також виконано. □

Розглянемо також теорему про про матрицю, спряжену до матричної експоненти.

**Теорема 2.4.41.** *Маємо*

$$\left(e^{At}\right)^* \equiv e^{A^* t} \quad \textit{на } \mathbb{R}. \tag{2.4.55}$$

*Доведення.* За теоремою 2.4.40 про розкладання матричної експоненти в скінченну суму степенів $e^{At}$ має вигляд (2.4.50), де $\alpha_s \in C^\infty(\mathbb{R})$, $s = \overline{0, p-1}$, та для кожного $s = \overline{0, p-1}$ функція $\alpha_s$ задовольняє умови (2.4.51), (2.4.52) (нагадаємо, що $\mu$ є мінімальним поліномом, $\deg \mu = p$), а

$$e^{A^* t} \equiv \sum_{s=0}^{p-1} \beta_s(t) A^s \quad \text{на } \mathbb{R}, \tag{2.4.56}$$

де $\beta_s \in C^\infty(\mathbb{R})$, $s = \overline{0, p-1}$, та для кожного $s = \overline{0, p-1}$ функція $\beta_s$ задовольняє умови

$$\mu^*\left(\frac{d}{dt}\right) \beta_s(t) \equiv 0 \quad \text{на } \mathbb{R}, \qquad s = \overline{0, p-1},$$
$$\beta_s^{(j)}(0) = \delta_{sj}, \qquad j = \overline{0, p-1}, \; s = \overline{0, p-1},$$

$\mu^*$ є мінімальним поліномом матриці $A^*$. Оскільки (див. (2.4.13))

$$\mu(\lambda) \equiv \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \lambda_j)^{p_j}, \quad \sum_{j=1}^{k} p_j = p,$$

маємо

$$\mu^*(\lambda) \equiv \prod_{j=1}^{k} (\lambda - \overline{\lambda}_j)^{p_j}, \quad \sum_{j=1}^{k} p_j = p.$$

Отже, $\beta_s(t) \equiv \overline{\alpha_s(t)}$, $s = \overline{0, p-1}$, тому з (2.4.50) і (2.4.56) одержуємо (2.4.55). □

## 2.4.6. Розв'язання лінійних систем за допомогою матричної експоненти

Розглянемо теорему про фундаментальність матричної експоненти.

**Теорема 2.4.42.** *Позначимо $\Phi(t) \equiv e^{At}$. Тоді $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.4.57}$$

*Доведення.* За критерієм того, що матриця є фундаментальною матрицею системи (2.4.57) (див. теорему 2.1.23), нам досить перевірити виконання двох умов:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.58}$$

$$\det \Phi(t) \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.59}$$

щоб довести бажане. Умова (2.4.58) випливає з теореми 2.4.39 про диференціювання матричної експоненти, а умова (2.4.59) виконується за властивістю 3) матричної експоненти. □

Скориставшись теоремою 2.1.6 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи, з наслідку 2.4.35

про властивості матричної експоненти і теореми 2.4.42 про фундаментальність матричної експоненти одержуємо, що фундаментальна матриця розв'язків, розглянута в теоремі 2.4.7 про властивості нормованої фундаментальної матриці розв'язків лінійної однорідної системи, є матричною експонентою $e^{At}$, $t \in \mathbb{R}$.

З теореми 2.1.25 про загальний розв'язок лінійної однорідної системи та теореми 2.4.42 про фундаментальність матричної експоненти одержуємо наступний наслідок про загальний розв'язок лінійної однорідної системи зі сталими коефіцієнтами.

**Наслідок 2.4.43.** *Загальний розв'язок системи* (2.4.57) *має вигляд*

$$x = e^{At}C, \quad t \in \mathbb{R},$$

*де* $C \in \mathbb{R}^n$.

Розглянемо лінійну неоднорідну систему зі сталими коефіцієнтами:

$$\dot{x} = Ax + f, \quad x \in \mathbb{R}^n, \; t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.60}$$

де $f \in C(\mathbb{R})$, та

З теореми 2.1.28 про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи та теореми 2.4.42 про фундаментальність матричної експоненти одержуємо наступний наслідок про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи зі сталими коефіцієнтами.

**Наслідок 2.4.44.** *Нехай* $\varphi^0(t)$, $t \in [a,b]$, *є частинним розв'язком системи* (2.4.60). *Тоді загальний розв'язок цієї системи має вигляд*

$$x = \varphi^0(t) + e^{At}C, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.61}$$

*де* $C \in \mathbb{R}^n$ *є довільним сталим вектором.*

Доведемо також наслідок про розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи зі сталими коефіцієнтами.

**Наслідок 2.4.45.** *Розв'язок задачі Коші для рівняння (2.4.60) з початковою умовою $x(t_0) = x^0$, де $x^0 \in \mathbb{R}^n$, має вигляд*

$$x = e^{A(t-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)} f(\xi)d\xi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Доведення.* З означення 2.1.29 матриці Коші, теореми 2.4.35 про властивості матричної експоненти та теореми 2.4.42 про фундаментальність матричної експоненти одержуємо, що

$$K(t,\xi) \equiv e^{At}e^{-A\xi} \equiv e^{A(t-\xi)}$$

є матрицею Коші системи (2.4.60). Тому за теоремою 2.1.33 про розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи маємо

$$\begin{aligned} x &= K(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} K(t,\xi)f(\xi)d\xi \\ &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\xi)} f(\xi)d\xi, \quad t \in [a,b]. \end{aligned}$$ □

Маємо також теорему про фундаментальну матрицю розв'язків лінійної однорідної системи.

**Теорема 2.4.46.** *Кожна фундаментальна матриця системи (2.4.57) може бути записана в формі*

$$\Phi(t) \equiv \sum_{j=1}^{k} Q_j(t)e^{\lambda_j t}, \tag{2.4.62}$$

*де $Q_j(t)$ є поліномом з матричними коефіцієнтами,* $\deg Q_j = p_j - 1, j = \overline{1,k}$.

*Доведення.* Нехай $\Phi_0(t) \equiv e^{At}$. Тоді за теоремою 2.1.24 про зв'язок фундаментальних матриць розв'язків лінійної однорідної системи для кожної фундаментальної матриці розв'язків $\Phi(t)$ існує матриця $B$, $\det B \neq 0$, така, що $\Phi(t) \equiv \Phi_0(t)B \equiv e^{At}B$. Маємо

$$e^{At} \equiv \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{p_j-1} h_l^j(A)t^l e^{\lambda_j t},$$

де $h_l^j$, $l = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{1, k}$, є лінійно незалежними поліномами, $\deg h_l^j \le p - 1$, $l = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{1, k}$. Тому

$$\Phi(t) \equiv \sum_{j=1}^{k} \left( \sum_{l=0}^{p_j - 1} h_l^l(A) B t^l \right) e^{\lambda_j t} \equiv \sum_{j=1}^{k} Q_j(t) e^{\lambda_j t},$$

де $Q_j(t) \equiv \sum\limits_{l=0}^{p_j-1} h_l^l(A) B t^l$, $j = \overline{1, k}$.

Доведемо тепер, що $\deg Q_j = p_j - 1$, $j = \overline{1, k}$, тобто $h_{p_j-1}^j(A)B \neq 0$, $j = \overline{1, k}$. Якщо б $h_{p_j-1}^j(A)B = 0$ для деякого $j = \overline{1, k}$, то поліном $h_{p_j-1}^j$ був би анулювальним поліномом степеня менше $p - 1$, отже, $h_{p_j-1}^j(\lambda) \equiv 0$, що суперечило б тому, що $h_l^j$, $l = \overline{0, p-1}$, $j = \overline{1, k}$, є лінійно незалежними. Таким чином, $h_{p_j-1}^j(A)B \neq 0$, отже, $\deg Q_j = p_j - 1$, $j = \overline{1, k}$. □

У наступних двох прикладах скористаємося схемою, наведеною в зауваженні 2.4.27, для обчислення матричної експоненти і розв'язання лінійної однорідної системи.

*Приклад* 2.4.47. Знайдемо загальний розв'язок системи

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} x, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.4.63}$$

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{2.4.64}$$

Обчислимо спочатку матричну експоненту $e^{At}$. Маємо

$$\rho(\lambda) \equiv \det(A - \lambda \mathbb{I}) \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv (2-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+11)-(2-\lambda)\\
&\equiv -\lambda^3+8\lambda^2-22\lambda+20\\
&\equiv -(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+10)\\
&\equiv -(\lambda-2)(\lambda-(3+i))(\lambda-(3-i)).
\end{aligned}$$

Таким чином, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3+i$, $\lambda_2 = 3-i$ є власними значеннями матриці $A$. Оскільки маємо три різні корені характеристичного полінома, одержуємо $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Отже, формула (2.4.42) у нашому випадку набуває вигляду

$$r_A^f(\lambda) \equiv h_1(\lambda)f(2) + h_2(\lambda)f(3+i) + h_3(\lambda)f(3-i). \tag{2.4.65}$$

Виберемо три довільні лінійно незалежні поліноми степеня не більше ніж $p-1$ (у нашому випадку $p-1 = 2$), наприклад, $q_1(\lambda) \equiv \lambda-2$, $q_2(\lambda) \equiv \lambda-3-i$, $q_3(\lambda) \equiv \lambda^2-6\lambda+10$. Тоді система (2.4.45) має вигляд

$$\begin{aligned}
&q_1(\lambda) \equiv \lambda-2 \equiv (1+i)h_2(\lambda) + (1-i)h_3(\lambda),\\
&q_2(\lambda) \equiv \lambda-3-i \equiv (-1-i)h_1(\lambda) + (-2i)h_3(\lambda),\\
&q_3(\lambda) \equiv \lambda^2-6\lambda+10 \equiv 2h_1(\lambda).
\end{aligned}$$

Звідси одержуємо

$$\begin{aligned}
h_1(\lambda) &\equiv \frac{1}{2}\left(\lambda^2-6\lambda+10\right),\\
h_2(\lambda) &\equiv \frac{1}{4i}\left(\lambda^2-4\lambda+4-i(\lambda^2-6\lambda+8)\right),\\
h_3(\lambda) &\equiv -\frac{1}{4i}\left(\lambda^2-4\lambda+4+i(\lambda^2-6\lambda+8)\right).
\end{aligned}$$

Підставляючи знайдені значення та функцію $f(\lambda) = e^{\lambda t}$ ($t$ є параметром) в (2.4.65), одержуємо

$$\begin{aligned}
r_A^f(\lambda) \equiv \frac{1}{2}&\left(\lambda^2-6\lambda+10\right)e^{2t}\\
&+\frac{1}{4i}\left(\lambda^2-4\lambda+4-i(\lambda^2-6\lambda+8)\right)e^{(3+i)t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{4i}\left(\lambda^2 + 4\lambda + 4 - i(\lambda^2 - 6\lambda + 8)\right) e^{(3+i)t} \\
\equiv\ & \frac{1}{2}\left(\lambda^2 - 6\lambda + 10\right) e^{2t} - \frac{1}{2}(\lambda^2 - 6\lambda + 8)e^{3t}\cos t \\
&+ \frac{1}{2}(\lambda^2 - 4\lambda + 4)e^{3t}\sin t.
\end{aligned}
$$

Оскільки

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 6 & 8 & -6 \\ -3 & 11 & 7 \end{pmatrix},
$$

$$
A^2 - 6A + 10\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix},
$$

$$
A^2 - 6A + 8\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix},
$$

$$
A^2 - 4A + 4\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},
$$

маємо

$$
\begin{aligned}
e^{At} \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} e^{2t} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} e^{3t}\cos t \\
+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} e^{3t}\sin t. \qquad (2.4.66)
\end{aligned}
$$

Таким чином, загальний розв'язок системи (2.4.63) з матрицею (2.4.64) має вигляд

$$
x = e^{At}C, \quad t \in \mathbb{R},
$$

де $C \in \mathbb{R}^n$, а $e^{At}$ задається формулою (2.4.66).

*Приклад* 2.4.48. Знайдемо загальний розв'язок системи

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} x, \quad t \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.4.67}$$

Позначимо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{2.4.68}$$

Обчислимо спочатку матричну експоненту $e^{At}$. Маємо

$$\begin{aligned} \rho(\lambda) \equiv \det(A - \lambda\mathbb{I}) &\equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -2 \\ -1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &\equiv (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda) + (2-2\lambda) - (1-\lambda) \\ &\equiv -(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) \equiv -(\lambda-1)^3. \end{aligned}$$

Таким чином, $\lambda_1 = 1$ є власним значенням матриці $A$, $n_1 = 3$. Обчислимо його кратність у мінімальному поліномі цієї матриці. Для цього можемо, наприклад, скористатися формулою $p_j - 1 \leq n_j - s_j$. Якщо $n \leq 3$ (у нас матриця $A$ має розмір $3 \times 3$), то замість знака нерівності стоїть знак рівності, тобто $p_j - 1 = n_j - s_j$. Тому в нашому випадку маємо

$$s_1 = n - \operatorname{rank}(A - \lambda_1\mathbb{I}) = 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

$$p_1 = n_1 - s_1 + 1 = 3 - 2 + 1 = 2 = p.$$

Отже, формула (2.4.42) у нашому випадку має вигляд

$$r_A^f(\lambda) \equiv h_1(\lambda)f(1) + h_2(\lambda)f'(1). \tag{2.4.69}$$

Виберемо два довільні лінійно незалежні поліноми степеня не більше ніж $p-1$ (у нашому випадку маємо $p-1 = 1$), наприклад, $q_1(\lambda) \equiv 1$, $q_2(\lambda) \equiv \lambda - 1$. Тоді система (2.4.45) набуває вигляду

$$q_1(\lambda) \equiv 1 \equiv h_1(\lambda),$$

$$q_2(\lambda) \equiv \lambda - 1 \equiv h_2(\lambda).$$

Підставляючи знайдені значення та функцію $f(\lambda) \equiv e^{\lambda t}$ ($t$ є параметром) в (2.4.69), одержуємо

$$r_A^f(\lambda) \equiv e^t + (\lambda - 1)te^t.$$

Тому

$$e^{At} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} te^t. \tag{2.4.70}$$

Таким чином, загальний розв'язок системи (2.4.67) з матрицею (2.4.68) має вигляд

$$x = e^{At}C, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $C \in \mathbb{R}^n$, а $e^{At}$ задається формулою (2.4.70).

Для обчислення матричної експоненти в наступних двох прикладах скористаємося теоремою про розкладання матричної експоненти в скінченну суму степенів 2.4.40.

*Приклад* 2.4.49. Знайдемо загальний розв'язок системи (2.4.63) з прикладу 2.4.47, скориставшись методом розкладання матричної експоненти в скінченну суму степенів. Матриця визначена формулою (2.4.64). У прикладі 2.4.47 було одержано, що, що $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3 + i$, $\lambda_2 = 3 - i$ є власними значеннями матриці $A$ і $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. З умови (2.4.51) теореми 2.4.40 одержуємо

$$e^{At} \equiv \alpha_0(t)\mathbb{I} + \alpha_1(t)A + \alpha_2(t)A^2. \tag{2.4.71}$$

Для запису $\alpha_j$ скористаємося теоремою 2.3.1 про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння та зауваженням 2.3.2 до неї, а також тим фактом, що характеристичний поліном рівняння (2.4.51) є мінімальним поліномом матриці $A$. Для $j = 0, 1, 2$ маємо

$$\alpha_j(t) \equiv C_j^1 e^{2t} + C_j^2 e^{3t} \cos t + C_j^3 e^{3t} \sin t, \tag{2.4.72}$$

$$\alpha_j'(t) \equiv 2C_j^1 e^{2t} + (3C_j^2 + C_j^3)e^{3t}\cos t + (-C_j^2 + 3C_j^3)e^{3t}\sin t,$$
$$\alpha_j''(t) \equiv 4C_j^1 e^{2t} + (8C_j^2 + 6C_j^3)e^{3t}\cos t + (-6C_j^2 + 8C_j^3)e^{3t}\sin t.$$

Підставляючи $t = 0$, для $j = 0, 1, 2$ одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha_j(0) &= C_j^1 + C_j^2, \\ \alpha_j'(0) &= 2C_j^1 + 3C_j^2 + C_j^3, \\ \alpha_j''(0) &= 4C_j^1 + 8C_j^2 + 6C_j^3. \end{aligned}$$

Для $j = 0, 1, 2$ з умов (2.4.52) теореми 2.4.40 випливає

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1, \\ \alpha_0'(0) = 0, \\ \alpha_0''(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0, \\ \alpha_1'(0) = 1, \\ \alpha_1''(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_2(0) = 0, \\ \alpha_2'(0) = 0, \\ \alpha_2''(0) = 1. \end{cases}$$

Для $j = 0, 1, 2$ маємо

$$\begin{aligned} C_j^1 &= \frac{1}{2}\left(10\alpha_j(0) - 6\alpha_j'(0) + \alpha_j''(0)\right), \\ C_j^2 &= \frac{1}{2}\left(-8\alpha_j(0) + 6\alpha_j'(0) - \alpha_j''(0)\right), \\ C_j^3 &= \frac{1}{2}\left(4\alpha_j(0) - 4\alpha_j'(0) + \alpha_j''(0)\right). \end{aligned}$$

Тому, підставляючи знайдені значення в (2.4.72), одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &\equiv \frac{1}{2}\left(10e^{2t} - 8e^{3t}\cos t + 4e^{3t}\sin t\right), \\ \alpha_1(t) &\equiv \frac{1}{2}\left(-6e^{2t} + 6e^{3t}\cos t - 4e^{3t}\sin t\right), \\ \alpha_2(t) &\equiv \frac{1}{2}\left(e^{2t} - e^{3t}\cos t + e^{3t}\sin t\right). \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (2.4.71), маємо

$$\begin{aligned} e^{At} \equiv{} & \frac{1}{2}\left(10e^{2t} - 8e^{3t}\cos t + 4e^{3t}\sin t\right)\mathbb{I} \\ & + \frac{1}{2}\left(-6e^{2t} + 6e^{3t}\cos t - 4e^{3t}\sin t\right)A \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\left(e^{2t}-e^{3t}\cos t+e^{3t}\sin t\right)A^2\\
\equiv{}&\frac{1}{2}\left(A^2-6A+10\mathbb{I}\right)e^{2t}\\
&-\frac{1}{2}\left(A^2-6A+8\mathbb{I}\right)e^{3t}\cos t+\frac{1}{2}\left(A^2-4A+4\mathbb{I}\right)e^{3t}\sin t\\
\equiv{}&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\0&0&0\\3&-1&-1\end{pmatrix}e^{2t}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&-2&0\\3&-1&-3\end{pmatrix}e^{3t}\cos t\\
&\qquad+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\1&3&-1\end{pmatrix}e^{3t}\sin t.
\end{aligned}
\tag{2.4.73}
$$

Тут ми скористалися обчисленнями значень відповідних поліномів, зроблених для одержання формули (2.4.66) у прикладі 2.4.47. Таким чином, загальний розв'язок системи (2.4.63) з матрицею (2.4.64) має вигляд

$$x=e^{At}C,\quad t\in\mathbb{R},$$

де $C\in\mathbb{R}^n$, а $e^{At}$ задається формулою (2.4.73), що збігається з результатом прикладу 2.4.47.

*Приклад* 2.4.50. Знайдемо загальний розв'язок системи (2.4.67) з прикладу 2.4.48, скориставшись методом розкладання матричної експоненти в скінченну суму степенів. Матриця визначена формулою (2.4.68). У прикладі 2.4.48 було одержано, що $\lambda_1=1$ і $p=p_1=2$. З умови (2.4.51) теореми 2.4.40 одержуємо

$$e^{At}\equiv\alpha_0(t)\mathbb{I}+\alpha_1(t)A. \tag{2.4.74}$$

Для запису $\alpha_j$ ми скористаємося теоремою 2.3.1 про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння та зауваженням 2.3.2 до неї, а також тим фактом, що характеристичний поліном рівняння (2.4.51) є мінімальним поліномом матриці $A$. Для $j=0,1$ маємо

$$\alpha_j(t)\equiv C_j^1e^t+C_j^2te^t, \tag{2.4.75}$$

$$\alpha_j'(t) \equiv C_j^1 e^t + C_j^2 (t+1) e^t.$$

Підставляючи $t = 0$, для $j = 0, 1$ одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha_j(0) &= C_j^1, \\ \alpha_j'(0) &= C_j^1 + C_j^2. \end{aligned}$$

Для $j = 0, 1$, з умов (2.4.52) теореми 2.4.40 випливає

$$\begin{cases} \alpha_0(0) = 1, \\ \alpha_0'(0) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1(0) = 0, \\ \alpha_1'(0) = 1, \end{cases}$$

Для $j = 0, 1$, маємо

$$\begin{aligned} C_j^1 &= \alpha_j(0), \\ C_j^2 &= \alpha_j'(0) - \alpha_j(0). \end{aligned}$$

Тому, підставляючи знайдені значення в (2.4.75), одержуємо

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &\equiv e^t - te^t, \\ \alpha_1(t) &\equiv te^t. \end{aligned}$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в (2.4.74), маємо

$$\begin{aligned} e^{At} &\equiv \left(e^t - te^t\right) \mathbb{I} + te^t A = \mathbb{I}e^t + (A - I)te^t \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} te^t. \end{aligned} \tag{2.4.76}$$

Таким чином, загальний розв'язок системи (2.4.67) з матрицею (2.4.68) має вигляд

$$x = e^{At} C, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $C \in \mathbb{R}^n$, а $e^{At}$ задається формулою (2.4.76), що збігається з результатом прикладу 2.4.48.

## 2.4.7. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами і квазіполіноміальною правою частиною

Розглянемо лінійну систему (2.4.60) зі спеціальною правою частиною та доведемо теорему про частинний розв'язок лінійної системи з елементарним квазіполіномом (див. с. 75) у правій частині.

**Теорема 2.4.51.** *Нехай*

$$f(t) = bt^m e^{\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

*де* $b \in \mathbb{C}^n$, $\gamma \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Тоді існує поліном* $Q$ *з векторними коефіцієнтами,* $Q(t) \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\deg Q \leq m + r$, *такий, що функція*

$$\varphi^0(t) = Q(t)e^{\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.77}$$

*є розв'язком системи* (2.4.60). *Тут* $r$ *є кратністю кореня* $\gamma$ *в мінімальному поліномі* $\mu$ *матриці* $A$ *(якщо* $\gamma$ *не є коренем, то* $r = 0$*).*

*Доведення.* Скориставшись теоремою Жордана (див. теорему 2.4.13), знайдемо матрицю $T$ розміру $n \times n$ таку, що $\det T \neq 0$ та

$$TAT^{-1} = \widetilde{A} = \begin{pmatrix} L_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & L_u \end{pmatrix},$$

де $L_j$ є клітиною Жордана розміру $r_j \times r_j$, $j = \overline{1, u}$. Позначивши $\widetilde{x} = Tx$, $\widetilde{b} = Tb$, бачимо, що система (2.4.60) еквівалентна системі

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{A}x + \widetilde{b}t^m e^{\gamma t}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.4.78}$$

Розглянемо функцію

$$\widetilde{\varphi}^0(t) = \widetilde{Q}(t)e^{\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.79}$$

де $\widetilde{Q}$ є поліномом з векторними коефіцієнтами, $\widetilde{Q}(t) \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\deg \widetilde{Q} \le m + r$. Розіб'ємо матриці $\widetilde{A}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{x}$, $\widetilde{\varphi}^0$ на такі блоки:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} L_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_u \end{pmatrix}, \quad \widetilde{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_u \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_u \end{pmatrix}, \quad \widetilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_u \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\varphi}^0 = \begin{pmatrix} \varphi_1^0 \\ \vdots \\ \varphi_u^0 \end{pmatrix},$$

де $b_j \in \mathbb{R}^{r_j}$, $Q_j(t) \in \mathbb{R}^{r_j}$, $x_j(t) \in \mathbb{R}^{r_j} \in \mathbb{R}^{r_j}$, $\varphi_j^0(t) \in \mathbb{R}^{r_j} \in \mathbb{R}^{r_j}$, $t \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, u}$. Для доведення теореми досить перевірити, що для системи

$$\dot{x}_j = L_j x_j + b_j t^m e^{\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.80}$$

існує поліном $Q_j$ з векторними коефіцієнтами такий, що функція

$$\varphi^0(t) = Q_j(t) e^{\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.4.81}$$

є розв'язком (2.4.80), до того ж, якщо $\gamma$ збігається з діагональним елементом $L_j$, то $\deg Q_j \le m + r_j$, інакше $\deg Q_j = m$. Перевіримо це. Зафіксуємо $j = \overline{1, u}$. Тоді

$$L_j = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix},$$

де $\lambda \in \mathbb{C}$ є деяким власним значенням матриці $A$. Підставляючи (2.4.81) в (2.4.80), одержуємо

$$\dot{Q}(t) \equiv (L_j - \gamma \mathbb{I}) Q(t) + b_j t^m, \quad \text{на } \mathbb{R}. \tag{2.4.82}$$

Розглянемо два випадки: 1) $\gamma \ne \lambda$; 2) $\gamma = \lambda$.

1) Нехай $\gamma \ne \lambda$. Позначивши

$$Q_j(t) \equiv \sum_{s=0}^{m} q_s t^s \quad \text{на } \mathbb{R},$$

з (2.4.82) одержуємо

$$\sum_{s=0}^{m-1} q_{s+1}(s+1)t^s \equiv \sum_{s=0}^{m}(L_j-\gamma\mathbb{I})q_s t^s + b_j t^m \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Отже,

$$q_m = (L_j-\gamma\mathbb{I})^{-1}b_j, \quad q_s = (L_j-\gamma\mathbb{I})^{-1}q_{s+1}(s+1), \quad s=\overline{0,m-1}.$$

Оскільки $q_m \neq 0$, $\deg Q_j = m$. Таким чином, поліном $Q_j$ з векторними коефіцієнтами такий, що функція (2.4.81) є розв'язком (2.4.80), у випадку $\gamma \neq \lambda$ побудовано.

2) Нехай $\gamma = \lambda$. Тоді кратність $\gamma$ в мінімальному поліномі матриці $L_j$ дорівнює $r_j$. За наслідком 2.4.45 про розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи зі сталими коефіцієнтами задача Коші для системи (2.4.82) з початковою умовою $Q_j(0)=0$ має єдиний розв'язок:

$$Q_j(t) \equiv \int_0^t e^{(L_j-\gamma\mathbb{I})(t-\xi)}b_j\xi^m\,d\xi \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

З теореми 2.4.36 про подання матричної експоненти степеневим рядом одержуємо

$$\begin{aligned} Q_j(t) &\equiv \sum_{s=0}^{\infty}(L_j-\gamma\mathbb{I})^s b_j \frac{1}{s!}\int_0^t (t-\xi)^s\xi^m\,d\xi \\ &\equiv \sum_{s=0}^{r_j-1}(L_j-\gamma\mathbb{I})^s b_j \frac{1}{s!}\int_0^t (t-\xi)^s\xi^m\,d\xi \quad \text{на } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

тому, що $(L_j-\gamma\mathbb{I})^s = 0$, $s=\overline{r_j,\infty}$. Оскільки на $\mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-\xi)^s\xi^m\,d\xi &\equiv t^{s+m+1}\int_0^1 (1-\mu)^s\mu^m\,d\mu \\ &\equiv t^{s+m+1}\mathrm{B}(s+1,m+1) = \frac{t^{s+m+1}s!\,m!}{(s+m+1)!}, \end{aligned}$$

де $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ є бета-функцією Ейлера (див. [2, с. 258, розділ 6]), звідси одержуємо

$$Q_j(t) \equiv \sum_{s=0}^{r_j-1} (L_j - \gamma\mathbb{I})^s b_j \frac{t^{s+m+1} m!}{(s+m+1)!} \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Зрозуміло, що $\deg Q_j \le r_j + m$. Таким чином, поліном $Q_j$ з векторними коефіцієнтами такий, що функція (2.4.81) є розв'язком (2.4.80), побудовано і у випадку $\gamma = \lambda$.

Отже, для поліноміального вектора $\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_u \end{pmatrix}$ функція (2.4.79) є розв'язком системи (2.4.78), при цьому, $\deg \widetilde{Q} \le m + r$. Таким чином, функція

$$\varphi^0(t) = T^{-1}\widetilde{\varphi}^0(t) = T^{-1}\widetilde{Q}(t)e^{\gamma t} = Q(t)e^{\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

є розв'язком системи (2.4.60), де $Q = T^{-1}\widetilde{Q}$ — поліном з векторними коефіцієнтами, $\deg Q \le m + r$. $\square$

З цієї теореми одразу випливають два наслідки. Перший з них — про частинний розв'язок лінійної системи з квазіполіноміальною правою частиною.

**Наслідок 2.4.52.** *Нехай*

$$f(t) = P(t)e^{\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

*де $P$ є поліномом з векторними коефіцієнтами, $P(t) \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{C}$. Нехай також $m = \deg P$. Тоді існує поліном $Q$ з векторними коефіцієнтами, $Q(t) \in \mathbb{C}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\deg Q \le m + r$ такий, що функція*

$$\varphi^0(t) = Q(t)e^{\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

*є розв'язком системи (2.4.60). Тут $r$ — кратність кореня $\gamma$ в мінімальному поліномі $\mu$ матриці $A$ (якщо $\gamma$ не є коренем, то $r = 0$). Якщо $\gamma$, коефіцієнти матриці $A$ і полінома $P$ є дійсними, то коефіцієнти полінома $Q$ також є дійсними.*

Другий наслідок — про дійсний частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи з дійсними коефіцієнтами і квазіполіноміальною правою частиною, доводимо цілком аналогічно наслідку 2.3.6 про частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння з дійсними коефіцієнтами і квазіполіноміальною правою частиною.

**Наслідок 2.4.53.** *Нехай*

$$f(t) = (G(t)\cos(\beta t) + H(t)\sin(\beta t))e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

*де* $G$*,* $H$ *є поліномами з дійсними векторними коефіцієнтами,* $G(t), H(t) \in \mathbb{R}^n$*,* $t \in \mathbb{R}$*,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Нехай також* $m = \max\{\deg G, \deg H\}$*. Тоді існують поліноми* $R$*,* $S$ *з дійсними векторними коефіцієнтами,* $R(t), S(t) \in \mathbb{R}^n$*,* $t \in \mathbb{R}$*,* $\deg R \le m + r$*,* $\deg S \le m + r$ *такі, що функція*

$$\varphi^0(t) = (R(t)\cos(\beta t) + S(t)\sin(\beta t))e^{\alpha t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

*є розв'язком системи* (2.4.60)*. Тут* $r$ *— кратність кореня* $\gamma = \alpha + i\beta$ *в мінімальному поліномі* $\mu$ *матриці* $A$ *(якщо* $\gamma$ *не є коренем, то* $r = 0$*).*

*Зауваження* 2.4.54. Нехай матриця $A$ має дійсні коефіцієнти. Скориставшись твердженням 2.1.10 (див. властивості оператора $L_n^A$) та наслідками 2.4.52 і 2.4.53, частинний розв'язок системи

$$L_n^A x = f_1(t) + \cdots + f_d(t), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4.83}$$

є сумою частинних розв'язків систем

$$L_n^A x = f_j(t), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ j = \overline{1, d}. \tag{2.4.84}$$

Тут $f_j$, $j = \overline{1, d}$, мають вигляд $P(t)e^{\gamma t}$, де $\gamma \in \mathbb{R}$, $P$ є поліномом з дійсними векторними коефіцієнтами, або вигляд $G(t)e^{\alpha t}\cos\beta t + H(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$, де $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $H, G$ є поліномами з дійсними векторними коефіцієнтами. Іншими словами, ми можемо окремо знайти частинний розв'язок кожної із систем (2.4.84), а потім обчислити їх суму, яка і буде частинними розв'язком системи (2.4.83).

Зазначимо, що система вигляду (2.4.83) називається *лінійною неоднорідною системою з квазіполіноміальною правою частиною.* Метод пошуку частинного розв'язку такої системи, в якому розв'язки спочатку виписуються в певній формі з невідомими параметрами (коефіцієнтами), називається *методом невизначених коефіцієнтів.* У наслідках 2.4.52 і 2.4.53, фактично, стверджується, що частинний розв'язок лінійної неоднорідної системи з квазіполіноміальною правою частиною може бути знайденим методом невизначених коефіцієнтів.

*Приклад* 2.4.55. Розглянемо лінійну неоднорідну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{x} = Ax + f_1(t) + f_2(t), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.4.85}$$

і знайдемо її загальний розв'язок. Тут

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad f_1(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \quad f_2(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos t.$$

Лінійну однорідну систему, яка їй відповідає, було досліджено в прикладі 2.4.48. Зокрема, там було знайдено корені мінімального полінома матриці $A$. Цей поліном має лише один корінь $\lambda_1 = 0$ кратності 2. Позначимо

$$p^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ g^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \xi^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що вектори $\xi^1$, $\xi^2$, $\xi^3$ утворюють базис в $\mathbb{R}^3$, $\xi^1$ і $\xi^2$ є власними векторами матриці $A$, які відповідають власному значенню $\lambda_1$, і утворюють базис власного підпростору цієї матриці, який відповідає цьому власному значенню, оскільки розмірність цього власного підпростору дорівнює двом (див. приклад 2.4.48).

Спочатку знайдемо частинний розв'язок рівняння (2.4.85), скориставшись методом невизначених коефіцієнтів (див. підрозділ 2.4.7). Беручи до уваги зауваження 2.4.54, можемо окремо шукати частинні розв'язки $\psi^1(t)$, $\psi^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, систем

$$\dot{x} = Ax + f_1(t), \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.4.86}$$

$$\dot{x} = Ax + f_2(t), \qquad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^2. \tag{2.4.87}$$

Знайдемо спочатку частинний розв'язок $\psi^1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, системи (2.4.86) методом невизначених коефіцієнтів. Для цього скористаємося наслідком 2.4.52. Маємо

$$P(t) \equiv p^0 = \xi^2 + \xi^3, \quad m = \deg P = 0, \quad \gamma = 1, \quad r = 2.$$

Маємо $f_1(t) \equiv p^0 e^t$ на $\mathbb{R}$. Тому можемо знайти частинний розв'язок системи у такому вигляді:

$$\psi^1(t) \equiv \left(q^0 + q^1 t + q^2 t^2\right) e^t \quad \text{на } \mathbb{R}, \tag{2.4.88}$$

де $q^0, q^1, q^2 \in \mathbb{R}^3$ є шуканими векторами. Для того щоб їх знайти, підставимо $\psi^1$ в систему (2.4.86). Маємо

$$\left(q^0 + q^1 + (q^1 + 2q^2)t + q^2 t^2\right)e^t \equiv A\left(q^0 + q^1 t + q^2 t^2\right)e^t + p^0 e^t.$$

Отже,

$$q^0 + q^1 = Aq^0 + p^0, \tag{2.4.89}$$

$$q^1 + 2q^2 = Aq^1, \tag{2.4.90}$$

$$q^2 = Aq^2. \tag{2.4.91}$$

Для розв'язання системи (2.4.89)–(2.4.91) ми можемо кожен з векторів $q^0$, $q^1$, $q^2$ записати покоординатно відносно стандартного базису $\{e^1, e^2, e^3\}$ в $\mathbb{R}^3$ (див. с. 30) і одержати лінійну алгебраїчну систему з 9 рівняннями, матриця якої є виродженою, для знаходження 9 змінних (координат векторів $q^0$, $q^1$, $q^2$). Але вибір базису $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ замість стандартного базису значно спрощує ситуацію, оскільки $\xi^1$ і $\xi^2$ є власними векторами матриці $A$.

Рівняння (2.4.91) означає, що $q^3$ є власним вектором матриці $A$, який відповідає власному значенню $\lambda_1$, і розкладається за базисом $\{\xi^1, \xi^2\}$ власного підпростору цієї матриці. Скориставшись тим, що $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ є базисом в $\mathbb{R}^3$, запишемо

$$\begin{aligned} q^0 &= \mu_1\xi^1 + \mu_2\xi^2 + \mu_3\xi^3, \\ q^1 &= \nu_1\xi^1 + \nu_2\xi^2 + \nu_3\xi^3, \\ q^2 &= \eta_1\xi^1 + \eta_2\xi^2. \end{aligned}$$

Підставляємо ці $q^0$, $q^1$, $q^2$ в (2.4.89), (2.4.90). Одержана лінійна алгебраїчна система 6 рівнянь відносно 8 змінних $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \eta_1, \eta_2)$ має вироджену матрицю. Розмірність підпростору розв'язків цієї системи не більша 5. З рівняння (2.4.89), ураховуючи $p^0 = \xi^2 + \xi^3$, одержуємо

$$\nu_1 = \mu_3, \quad \nu_2 = \mu_3 + 1, \quad \nu_3 = 1.$$

З рівняння (2.4.90) одержуємо

$$\eta_1 = \frac{1}{2}\nu_3 = \frac{1}{2}, \quad \eta_2 = \frac{1}{2}\nu_3 = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, змінні $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_2$ залишилися довільними після розв'язання нашої лінійної алгебраїчної системи. Оскільки ми шукаємо частинний (а не загальний) розв'язок лінійної неоднорідної системи (2.4.86), ці змінні можемо обрати довільно за власним бажанням. Покладемо $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$. Тоді

$$q^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q^1 = \xi^2 + \xi^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q^2 = \frac{1}{2}(\xi^1 + \xi^2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Звідси, скориставшись (2.4.88), одержуємо розв'язок системи (2.4.86):

$$\psi^1(t) \equiv \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} t^2 \right) e^t \quad \text{на } \mathbb{R}. \tag{2.4.92}$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок $\psi^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, системи (2.4.87) методом невизначених коефіцієнтів. Для цього скористаємося наслідком 2.4.53. Маємо

$$G(t) \equiv g^0,\ H(t) \equiv 0,\ m = \max\{\deg G, \deg H\} = 0,\ \gamma = i,\ r = 0.$$

Крім того, $f_2(2) = g^0 \cos t$. Тому можемо знайти частинний розв'язок системи у такому вигляді:

$$\psi^2(t) \equiv r^0 \cos t + s^0 \sin t \quad \text{на } \mathbb{R}, \tag{2.4.93}$$

де $r^0, s^0 \in \mathbb{R}^3$ є шуканими векторами. Для того щоб їх знайти, підставимо $\psi^2$ в систему (2.4.87). Маємо

$$s^0 \cos t - r^0 \sin t \equiv \left(Ar^0 + g^0\right) \cos t + As^0 \sin t.$$

Отже,

$$s^0 = Ar^0 + g^0, \tag{2.4.94}$$
$$r^0 = -As^0. \tag{2.4.95}$$

Підставляючи (2.4.95) в (2.4.94), одержуємо

$$\left(A^2 + \mathbb{I}\right)s^0 = g^0.$$

У прикладі 2.4.48 було показано, що степінь мінімального полінома матриці $A$ дорівнює 2 і $\lambda_1 = 1$ є єдиним власним значенням цієї матриці. Тому $A^2 - 2A + \mathbb{I} = 0$. Отже, $A^2 + \mathbb{I} = 2A$ і

$$2As^0 = g^0.$$

Звідси одержуємо

$$s^0 = \frac{1}{2}A^{-1}g^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи $s^0$ в (2.4.95), маємо

$$r^0 = -As^0 = -\frac{1}{2}g^0 = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Звідси, скориставшись (2.4.93), одержуємо розв'язок системи (2.4.87):

$$\psi^2(t) \equiv \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}\sin t - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cos t\right) \quad \text{на } \mathbb{R}. \tag{2.4.96}$$

Зазначимо, що не зважаючи на те, що вектор-функція $f_2$ в правій частині системи (2.4.87) містить лише функцію cos і не містить sin, у розв'язок входять обидві функції: cos і sin.

Таким чином, функція $\psi(t) = \psi^1(t)+\psi^2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, є частинним розв'язком системи (2.4.85) (див. зауваження 2.4.54). За теоремою 2.4.42 про фундаментальність матричної експоненти матриця

$$e^{At} \equiv \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}te^t \quad \text{на } \mathbb{R},$$

яку було обчислено в прикладі 2.4.48, є фундаментальною матрицею розв'язків лінійної однорідної системи, яка відповідає неоднорідній системі (2.4.85). За наслідком 2.4.44 про загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи зі сталими коефіцієнтами, враховуючи (2.4.92) і (2.4.96), одержуємо загальний розв'язок системи (2.4.85):

$$x = \psi(t) + e^{At}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2t+t^2\\2t+2t^2\\-2t-t^2\end{pmatrix}e^t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sin t\\3\sin t-\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}$$
$$+\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}e^t + \begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&-2&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}te^t\right)\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^3$ є довільними сталими.

## 2.5. Крайова задача

Оскільки диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь мають нескінченну кількість розв'язків, для відокремлення розв'язків таких рівнянь та систем використовуються додаткові умови. Наприклад, початкові умови, які разом із рівнянням або системою утворюють задачу Коші. Замість початкових умов ми можемо розглядати крайові умови, які разом з рівнянням або системою утворюють крайову задачу. Саме вивченню таких задач і присвячено цей підрозділ.

### 2.5.1. Крайова задача та матриця Ґріна для лінійних систем

Розглянемо крайову задачу

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad t \in (a, b), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5.1}$$
$$Mx(a) + Nx(b) = x^0, \tag{2.5.2}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$; $A(t) \in \mathfrak{M}(n, n)$, $f(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [a, b]$; $A \in C[a, b]$, $f \in C[a, b]$; $M, N \in \mathfrak{M}(n, n)$ є сталими матрицями, $\operatorname{rank}(M, N) = 2$.

Розглянемо також однорідну крайову задачу, яка відповідає (2.5.1), (2.5.2):

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in (a, b), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.5.3}$$
$$Mx(a) + Nx(b) = 0. \tag{2.5.4}$$

Зрозуміло, що ця задача є окремим випадком задачі (2.5.1), (2.5.2).

**Означення 2.5.1.** Задача пошуку розв'язку системи (2.5.1), який задовольняє умову (2.5.2), називається *крайовою задачею* для системи (2.5.1), а умова (2.5.2) називається *крайовою умовою*.

Розглянемо теорему про єдиність розв'язку крайової задачі для лінійної системи.

**Теорема 2.5.2.** *Нехай* $\Phi$ *є фундаментальною матрицею розв'язків системи* (2.5.3) *та нехай* $\Delta = M\Phi(a) + N\Phi(b)$. *Тоді наступні три умови є еквівалентними:*

(i) $\det\Delta \neq 0$*;*

(ii) *задача* (2.5.3), (2.5.4) *має лише нульовий розв'язок;*

(iii) *якщо задача* (2.5.1), (2.5.2) *має розв'язок, то він єдиний.*

*Задача* 2.5.3. Довести, що для будь-яких фундаментальних матриць $\Phi_1$ та $\Phi_2$ системи (2.5.3) відповідні матриці $\Delta_1$ та $\Delta_2$ або обидві задовольняють умову (i) теореми, або обидві її не задовольняють.

*Доведення.* Будемо доводити теорему 2.5.2 за схемою:

$$\text{(i)} \overset{1)}{\Leftrightarrow} \text{(ii)} \overset{2)}{\Leftrightarrow} \text{(iii)}.$$

1) Доведемо (i) $\Leftrightarrow$ (ii). За теоремою 2.1.25 про загальний розв'язок лінійної однорідної системи будь-який розв'язок (2.5.3) має вигляд $x = \Phi(t)C$, $t \in [a, b]$, де $C \in \mathbb{R}^n$. Підставляючи цей розв'язок у (2.5.4), одержуємо $0 = M\Phi(a)C + N\Phi(b)C = \Delta C$. Ця алгебраїчна система має лише тривіальний розв'язок $C = 0$ в тому і лише в тому випадку, коли $\det\Delta \neq 0$. Тому задача (2.5.3), (2.5.4) має лише нульовий розв'язок у тому і лише в тому випадку, коли $\det\Delta \neq 0$. Таким чином, (i) $\Leftrightarrow$ (ii) доведено.

2) Доведемо (ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Нехай $x = \varphi_1(t)$, $x = \varphi_2(t)$, $t \in [a, b]$ — два розв'зки задачі (2.5.1), (2.5.2). Тоді $x = \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, $t \in [a, b]$, є розв'язком задачі (2.5.3), (2.5.4). Якщо задача (2.5.3), (2.5.4) має лише нульовий розв'язок, то $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$ на $[a, b]$, тобто (2.5.1), (2.5.2) не може мати двох різних розв'язків. Отже, доведено, що (ii) $\Rightarrow$ (iii)

Якщо ж будь-які два розв'язки (2.5.1), (2.5.2) збігаються між собою ($\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$ на $[a, b]$), то задача (2.5.3), (2.5.4) має лише єдиний розв'язок $x = 0$, $t \in [a, b]$. Отже, доведено (iii) $\Rightarrow$ (ii). $\square$

**Означення 2.5.4.** Нехай $\Omega_+ = \{(t,\xi) \in [a,b]^2 \mid \xi > t\}$ та $\Omega_- = \{(t,\xi) \in [a,b]^2 \mid \xi < t\}$ (див. рис. 2.1). Матричнозначна функція $G : \Omega_- \cup \Omega_+ \to \mathfrak{M}(n,n)$ називається *матрицею Ґріна* задачі (2.5.3), (2.5.4), якщо вона задовольняє умови:

$$G \in C^1(\Omega_- \cup \Omega_+) \tag{2.5.5}$$

$$G(\xi^+,\xi) - G(\xi^-,\xi) = \mathbb{I}, \qquad \xi \in [a,b]; \tag{2.5.6}$$

$$A(t)G(t,\xi) = \frac{\partial}{\partial t}G(t,\xi), \qquad (t,\xi) \in \Omega_- \cup \Omega_+; \tag{2.5.7}$$

$$MG(a,\xi) + NG(b,\xi) = 0, \qquad \xi \in [a,b]. \tag{2.5.8}$$

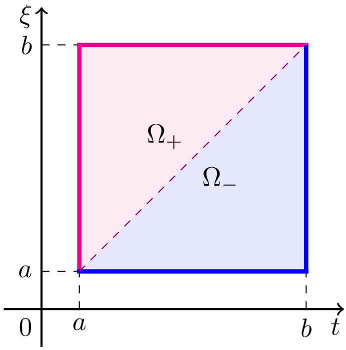



Рис. 2.1. $\Omega_+$ та $\Omega_-$

Далі розглянемо теорему про існування і єдиність розв'язку неоднорідної крайової задачі для лінійної системи.

**Теорема 2.5.5.** *Нехай $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи* (2.5.3), *нехай $\Delta = M\Phi(a) + N\Phi(b)$ та нехай*

$$\det \Delta \neq 0. \tag{2.5.9}$$

*Тоді*

(i) *матриця*

$$G(t,\xi) = \begin{cases} -\Phi(t)\Delta^{-1}N\Phi(b)\Phi^{-1}(\xi), & (t,\xi) \in \Omega_+, \\ \Phi(t)\Delta^{-1}M\Phi(a)\Phi^{-1}(\xi), & (t,\xi) \in \Omega_-, \end{cases} \tag{2.5.10}$$

*є матрицею Ґріна задачі* (2.5.3), (2.5.4)*;*

(ii) *функція*

$$x = \Phi(t)\Delta^{-1}x^0 + \int_a^b G(t,\xi)f(\xi)d\xi, \quad t \in [a,b], \tag{2.5.11}$$

*є єдиним розв'язком задачі* (2.5.1), (2.5.2).

*Задача* 2.5.6. Довести, що матриця Ґріна $G$, яка обчислюється за формулою (2.5.10), не залежить від вибору фундаментальної матриці розв'язків $\Phi$ системи (2.5.3).

*Доведення.* (i) Для побудови матриці Ґріна $G$ скористаємося її означенням. Застосовуючи теорему 2.1.25 про загальний розв'язок лінійної однорідної системи, з (2.5.7) одержуємо

$$G(t,\xi) = \begin{cases} \Phi(t)\Delta_+(\xi), & (t,\xi) \in \Omega_+, \\ \Phi(t)\Delta_-(\xi), & (t,\xi) \in \Omega_-. \end{cases} \tag{2.5.12}$$

З (2.5.6) випливає, що

$$\mathbb{I} \equiv \Phi(\xi)\big(\Delta_-(\xi) - \Delta_+(\xi)\big) \quad \text{на } [a,b],$$

отже,

$$\Delta_-(\xi) - \Delta_+(\xi) \equiv \Phi^{-1}(\xi) \quad \text{на } [a,b]. \tag{2.5.13}$$

Скориставшись (2.5.8), маємо

$$M\Phi(a)\Delta_+(\xi) + N\Phi(b)\Delta_-(\xi) \equiv 0 \quad \text{на } [a,b].$$

Ураховуючи (2.5.13), звідси одержуємо

$$\begin{aligned} 0 &\equiv M\Phi(a)\Delta_+(\xi) + N\Phi(b)\big(\Phi^{-1}(\xi) + \Delta_+(\xi)\big) \\ &\equiv \Delta\Delta_+(\xi) + N\Phi(b)\Phi^{-1}(\xi) \quad \text{на } [a,b]. \end{aligned}$$

Отже,

$$\Delta_+(\xi) \equiv -\Delta^{-1}N\Phi(b)\Phi^{-1}(\xi) \quad \text{на } [a,b]. \tag{2.5.14}$$

Ще раз скориставшись (2.5.13), звідси маємо

$$\Delta_-(\xi) \equiv \big(\mathbb{I} - \Delta^{-1} N\Phi(b)\big)\Phi^{-1}(\xi) \equiv \Delta^{-1}\big(\Delta - N\Phi(b)\big)\Phi^{-1}(\xi)$$
$$\equiv \Delta^{-1} M\Phi(a)\big(\Phi^{-1}(\xi) \quad \text{на } [a,b]. \tag{2.5.15}$$

Підставляючи (2.5.14) і (2.5.15) в (2.5.12), одержуємо (2.5.10).

(ii) Покажемо спочатку, що функція

$$\varphi_1(t) \equiv \int_a^b G(t,\xi)f(\xi)d\xi \equiv \int_a^t G(t,\xi)f(\xi)d\xi + \int_t^b G(t,\xi)f(\xi)d\xi$$

є розв'язком задачі (2.5.1), (2.5.4). Маємо

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) \equiv G(t,t^-)f(t) + \int_a^t G_t(t,\xi)f(\xi)\,d\xi \\ - G(t,t^+)f(t) + \int_t^b G_t(t,\xi)f(\xi)\,d\xi \\ \equiv \mathbb{I}f(t) + A(t)\varphi_1(t) \quad \text{на } [a,b], \end{aligned}$$

тобто $\varphi_1(t)$, $t \in [a,b]$, є розв'язком (2.5.1). Далі маємо

$$M\varphi_1(a) + N\varphi_1(b) = \int_a^b \big(MG(a,\xi) + NG(b,\xi)\big)f(\xi)d\xi = 0.$$

Таким чином, $\varphi_1(t)$, $t \in (a,b)$, є розв'язком (2.5.1), (2.5.4).

Доведемо, що $\varphi_2(t) \equiv \Phi(t)\Delta^{-1}x^0$, $t \in (a,b)$, є розв'язком задачі (2.5.3), (2.5.2). Очевидно, $\varphi_2(t)$ , $t \in (a,b)$, задовольняє (2.5.3). Маємо

$$M\varphi_2(a) + N\varphi_2(b) = \big(M\Phi(a) + N\Phi(b)\big)\Delta^{-1}x^0 = \Delta\Delta^{-1}x^0 = x^0,$$

тобто $\varphi_2(t)$, $t \in [a,b]$, є розв'язком (2.5.3), (2.5.2).

Отже, $x = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$, $t \in (a,b)$, є розв'язком задачі (2.5.1), (2.5.2). За теоремою єдиності (див. теорему 2.5.5) цей розв'язок є єдиним. □

З теореми 2.5.5 одразу одержуємо твердження.

**Твердження 2.5.7.** *Матриця Ґріна задовольняє умову*

$$G(t,t^-) - G(t,t^+) \equiv \mathbb{I} \quad \text{на } [a,b].$$

*Приклад* 2.5.8. Розглянемо крайову задачу

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1-\cos t & \cos t \\ -2\cos t & 1+2\cos t \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}, \; t \in (0,\pi), \; x \in \mathbb{R}^2, \tag{2.5.16}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x(\pi) = \begin{pmatrix} \pi e^\pi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.5.17}$$

і знайдемо її розв'язок. Тут

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $\operatorname{rank}(M,N) = 2$. У прикладі 2.1.26 було знайдено фундаментальну матрицю розв'язків лінійного однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (2.5.16) (див. (2.1.33)):

$$\Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} e^{t+\sin t} & e^t \\ 2e^{t+\sin t} & e^t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,\pi].$$

Маємо

$$M\Phi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N\Phi(\pi) = e^\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.18}$$

Тому

$$\Delta = M\Phi(0) + N\Phi(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & e^\pi \\ e^\pi & 1 \end{pmatrix}$$

і $\det \Delta = 1 - e^{2\pi} \neq 0$, отже, з теореми 2.5.5 про існування і єдиність розв'язку неоднорідної крайової задачі для лінійної системи одержуємо, що крайова задача (2.5.16), (2.5.17) має єдиний розв'язок. Знайдемо його. Маємо

$$\Delta^{-1} = \frac{1}{1-e^{2\pi}} \begin{pmatrix} 1 & -e^\pi \\ -e^\pi & 1 \end{pmatrix}.$$

Скориставшись формулами (2.5.18), обчислимо матриці $D_+ := \Delta^{-1}N\Phi(\pi)$ і $D_- := \Delta^{-1}M\Phi(0)$:

$$D_+ = \frac{e^\pi}{1-e^{2\pi}}\begin{pmatrix} 1 & -e^\pi \\ -e^\pi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{e^\pi}{1-e^{2\pi}}\begin{pmatrix} -e^\pi & 1 \\ 1 & -e^\pi \end{pmatrix},$$
$$D_- = \frac{1}{1-e^{2\pi}}\begin{pmatrix} 1 & -e^\pi \\ -e^\pi & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1-e^{2\pi}}\begin{pmatrix} 1 & -e^\pi \\ -e^\pi & 1 \end{pmatrix}.$$

З пункту (i) теореми 2.5.5 про існування і єдиність розв'язку неоднорідної крайової задачі для лінійної системи випливає, що матриця Ґріна, яка відповідає задачі (2.5.16), (2.5.17), має вигляд:

$$G(t,\xi) = \Phi(t)\begin{cases} -D_+\Phi^{-1}(\xi), & \xi > t, \\ \phantom{-}D_-\Phi^{-1}(\xi), & \xi < t. \end{cases}$$

Маємо

$$\Phi^{-1}(t) \equiv \begin{pmatrix} -e^{-t-\sin t} & e^{-t-\sin t} \\ 2e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,\pi].$$

Позначаючи неоднорідну частину рівняння (2.5.16) через $f$, одержуємо

$$\Phi^{-1}(\xi)f(\xi) \equiv \begin{pmatrix} -e^{-\xi-\sin\xi} & e^{-\xi-\sin\xi} \\ 2e^{-\xi} & -e^{-\xi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,\pi].$$

Маємо

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi G(t,\xi)f(\xi)\,d\xi \\ &\qquad = \Phi(t)\left(D_-\int_0^t \Phi^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi - D_+\int_t^\pi \Phi^{-1}(\xi)f(\xi)\,d\xi\right) \\ &\qquad = \Phi(t)\left(D_-\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\int_0^t d\xi - D_+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\int_t^\pi d\xi\right) \\ &\qquad = \frac{1}{1-e^{2\pi}}\Phi(t)\left(\begin{pmatrix} -e^\pi \\ 1 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 1 \\ -e^\pi \end{pmatrix} e^\pi(\pi - t)\right). \end{aligned} \tag{2.5.19}$$

Крім того, позначаючи праву частину крайової умови (2.5.17) через $x^0$, одержуємо

$$\begin{aligned}\Phi(t)\Delta^{-1}x^0 &= \frac{\pi e^{\pi}}{1-e^{2\pi}}\Phi(t)\begin{pmatrix}1 & -e^{\pi}\\ -e^{\pi} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\ &= \frac{\pi e^{\pi}}{1-e^{2\pi}}\Phi(t)\begin{pmatrix}1\\ -e^{\pi}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.5.20}$$

Застосовуючи пункт (ii) теореми 2.5.5 про існування і єдиність розв'язку неоднорідної крайової задачі для лінійної системи і враховуючи (2.5.19), (2.5.20), бачимо, що функція

$$\begin{aligned}x &= \Phi(t)\Delta^{-1}x_0 + \int_0^{\pi} G(t,\xi)f(\xi)\,d\xi\\ &= \frac{1}{1-e^{2\pi}}\Phi(t)\left(\begin{pmatrix}1\\ -e^{\pi}\end{pmatrix}\pi e^{\pi} + \begin{pmatrix}-e^{\pi}\\ 1\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}1\\ -e^{\pi}\end{pmatrix}e^{\pi}(\pi-t)\right)\\ &= t\Phi(t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}e^{t+\sin t} & e^t\\ 2e^{t+\sin t} & e^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}te^t, \quad t\in[0,\pi],\end{aligned}$$

є єдиним розв'язком крайової задачі (2.5.16), (2.5.17).

*Зауваження* 2.5.9. Якщо $A(t)\equiv A$ (стала матриця), то $\Phi(t)\equiv e^{At}$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.5.3) за теоремою 2.4.42 про фундаментальність матричної експоненти і $\Delta = Me^{Aa}+Ne^{Ab}$.

Тому матриця Ґріна набуває вигляду

$$G(t,\xi) = \begin{cases} -e^{At}\Delta^{-1}Ne^{A(b-\xi)}, & (t,\xi)\in\Omega_+,\\ e^{At}\Delta^{-1}Me^{A(a-\xi)}, & (t,\xi)\in\Omega_-.\end{cases}\tag{2.5.21}$$

Отже, розв'язок задачі (2.5.1), (2.5.2) має вигляд

$$\begin{aligned}x = e^{At}\Delta^{-1}\Bigg(x^0 &+ M\int_a^t e^{A(a-\xi)}f(\xi)d\xi\\ &- N\int_t^b e^{A(b-\xi)}f(\xi)d\xi\Bigg), \quad t\in[a,b].\end{aligned}\tag{2.5.22}$$

## 2.5.2. Крайова задача та функція Ґріна для лінійних рівнянь $n$-го порядку

Розглянемо крайову задачу

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots \\ + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \quad t \in (a,b]), \tag{2.5.23}$$

$$M \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} (a) + N \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} (b) = y^0, \tag{2.5.24}$$

де $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $y^0 \in \mathbb{R}^n$; $a_j \in C[a,b]$, $j = \overline{0, n-1}$, $f \in C[a,b]$ $M, N \in \mathfrak{M}(n,n)$ є сталими матрицями, $\operatorname{rank}(M,N) = 2$.

Розглянемо також однорідну крайову задачу, яка відповідає (2.5.23), (2.5.24):

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots \\ + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \quad t \in (a,b), \tag{2.5.25}$$

$$M \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} (a) + N \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} (b) = 0. \tag{2.5.26}$$

**Означення 2.5.10.** Задача пошуку розв'язку рівняння (2.5.23), який задовольняє умову (2.5.24), називається *крайовою задачею* для рівняння (2.5.23), а умова (2.5.24) називається *крайовою умовою.*

Зробивши в (2.5.23) заміну $x = \mathfrak{A}_n y$ (див. (1.2.6)), одержуємо систему вигляду (2.5.1), де матриця $A$ і вектор-функція $f$ мають вигляд (2.2.4). Скориставшись теоремою про існування та єдиність розв'язку крайової задачі для лінійної системи (див. теорему 2.5.2), одержуємо наступну теорему про єдиність розв'язку крайової задачі для лінійного рівняння $n$-порядку.

**Теорема 2.5.11.** *Нехай* $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ *є фундаментальною системою розв'язків рівняння* (2.5.25) *та нехай*

$$\Delta = M\big(\mathfrak{A}_n\varphi^1, \dots \mathfrak{A}_n\varphi^n\big)(a) + N\big(\mathfrak{A}_n\varphi^1, \dots \mathfrak{A}_n\varphi^n\big)(b).$$

*Тоді наступні три умови є еквівалентними:*

(i) $\det \Delta \neq 0$*;*

(ii) *задача* (2.5.25), (2.5.26) *має лише нульовий розв'язок;*

(iii) *якщо задача* (2.5.23), (2.5.24) *має розв'язок, то він єдиний.*

**Означення 2.5.12.** Нехай $\Omega_+ = \{(t,\xi) \in [a,b]^2 \mid \xi > t\}$ та $\Omega_- = \{(t,\xi) \in [a,b]^2 \mid \xi < t\}$ (див. рис. 2.1). Функція $\mathfrak{g} : \Omega_- \cup \Omega_+ \to \mathbb{R}$ називається *функцією Ґріна* задачі (2.5.25), (2.5.26), якщо вона задовольняє умови:

$$\mathfrak{g} \in C^n(\Omega_- \cup \Omega_+) \tag{2.5.27}$$

$$\frac{\partial^i}{\partial t^i}\mathfrak{g}(\xi^+,\xi) - \frac{\partial^i}{\partial t^i}\mathfrak{g}(\xi^-,\xi) = 0, \quad \xi \in [a,b],\ i = \overline{0, n-2}; \tag{2.5.28}$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\mathfrak{g}(\xi^+,\xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\mathfrak{g}(\xi^-,\xi) = 1, \quad \xi \in [a,b]; \tag{2.5.29}$$

$$\begin{split}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathfrak{g}(t,\xi) + a_{n-1}(t)\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\mathfrak{g}(t,\xi) + \cdots \\ + a_1(t)\frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{g}(t,\xi) + a_0(t)\mathfrak{g}(t,\xi) = 0, \quad (t,\xi) \in \Omega_- \cup \Omega_+;\end{split} \tag{2.5.30}$$

$$M\big(\mathfrak{A}_n\mathfrak{g}\big)(a,\xi) + N\big(\mathfrak{A}_n\mathfrak{g}\big)(b,\xi) = 0, \quad \xi \in [a,b], \tag{2.5.31}$$

де оператор $\mathfrak{A}_n$ застосовано до функції $\mathfrak{g}(\cdot,\xi)$ при фіксованому $\xi \in (a,b)$.

З теореми про існування і єдиність розв'язку неоднорідної крайової задачі для лінійної системи (див. теорему 2.5.5) одержуємо наступну теорему про існування і єдиність розв'язку крайової задачі для лінійного рівняння $n$-го порядку.

**Теорема 2.5.13.** *Нехай* $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ *є фундаментальною системою розв'язків рівняння* (2.5.25), *нехай*

$$\Delta = M \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_n\varphi^1 & \cdots & \mathfrak{A}_n\varphi^n \end{pmatrix}(a) + N \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_n\varphi^1 & \cdots & \mathfrak{A}_n\varphi^n \end{pmatrix}(b)$$

*та нехай*

$$\det \Delta \neq 0. \tag{2.5.32}$$

*Тоді існує функція Ґріна* $\mathfrak{g}(t,\xi)$ *задачі* (2.5.25), (2.5.26), *і функція*

$$y = \int_a^b \mathfrak{g}(t,\xi) f(\xi)\, d\xi, \quad t \in [a,b],$$

*є единим розв'язком задачі* (2.5.23), (2.5.26).

*Зауваження* 2.5.14. Нехай $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ є фундаментальною системою розв'язків рівняння (2.5.25). З означення функції Ґріна випливає, що вона має вигляд

$$\mathfrak{g}(t,\xi) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^n p_j(\xi)\varphi_j(t), & (t,\xi) \in \Omega_+, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n q_j(\xi)\varphi_j(t), & (t,\xi) \in \Omega_-, \end{cases}$$

де $p_j$, $q_j$, $j = \overline{1,n}$, можуть бути знайдені з умов (2.5.28), (2.5.29), (2.5.31).

*Приклад* 2.5.15. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} y''' - 3\tanh t\, y'' + \left(6\tanh^2 t - 3\right) y' \\ + \left(5\tanh t - 6\tanh^3 t\right) y = 6\cosh t, \quad t \in (-1,1), \end{aligned} \tag{2.5.33}$$

$$\begin{aligned} \cosh^2 1\, y(-1) - \left(4\cosh^2 1 + 2\right) y(1) \\ - 2\sinh 1 \cosh 1\, y'(1) + \cosh^2 1\, y''(1) = 0, \end{aligned} \tag{2.5.34}$$

$$\begin{aligned} \sinh 1 \cosh 1\, y(-1) + \cosh^2 1\, y'(-1) + \left(2\cosh^2 1 + 2\right) y(1) \\ + 2\sinh 1 \cosh 1\, y'(1) - \cosh^2 1\, y''(1) = 0, \end{aligned} \tag{2.5.35}$$

$$\left(\cosh^2 1 - 2\right) y(-1) + 2\sinh 1\cosh 1\, y'(-1) + \cosh^2 1\, y''(-1) \\ - 2\sinh 1\cosh 1\, y(1) + 2\cosh^2 1\, y'(1) = 0 \qquad (2.5.36)$$

і знайдемо її розв'язок. Маємо

$$M = \begin{pmatrix} \cosh^2 1 & 0 & 0 \\ \sinh 1\cosh 1 & \cosh^2 1 & 0 \\ \cosh^2 1 - 2 & 2\sinh 1\cosh 1 & \cosh^2 1 \end{pmatrix},$$
$$N = \begin{pmatrix} -4\cosh^2 1 - 2 & -2\sinh 1\cosh 1 & \cosh^2 1 \\ 2\cosh^2 1 + 2 & 2\sinh 1\cosh 1 & -\cosh^2 1 \\ -2\sinh 1\cosh 1 & 2\cosh^2 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що $\operatorname{rank}(M, N) = 2$. У прикладі 2.2.17 було знайдено фундаментальну систему розв'язків лінійного однорідного рівняння, яке відповідає рівнянню (див. (2.2.8)). На $[-1, 1]$ позначимо

$$\Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_3\varphi_1 & \mathfrak{A}_3\varphi_2 & \mathfrak{A}_3\varphi_3 \end{pmatrix} \\ \equiv \begin{pmatrix} t^2\cosh t & t\cosh t & \cosh t \\ 2t\cosh t + t^2\sinh t & \cosh t + t\sinh t & \sinh t \\ \left(2 + t^2\right)\cosh t + 4t\sinh t & t\cosh t + 2\sinh t & \cosh t \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\Delta = M\Phi(-1) + N\Phi(1) = \cosh^3 1 \begin{pmatrix} -2 & -6 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det\Delta = 8\cos^9 1 \neq 0$, за теоремою 2.5.13 про існування і єдиність розв'язку крайової задачі для лінійного рівняння $n$-го порядку крайова задача (2.5.33)–(2.5.36) має єдиний розв'язок. Для знаходження цього розв'язку обчислимо функцію Ґріна $g$ цієї задачі, скориставшись зауваженням 2.5.14. На $[-1, 1]^2$ маємо

$$\mathfrak{g}(t, \xi) \equiv \cosh t \begin{cases} g_+(t, \xi), & \xi > t, \\ g_-(t, \xi), & \xi < t, \end{cases}$$

де

$$g_+(t,\xi) \equiv \left(p_0(\xi) + p_1(\xi)t + p_2(\xi)t^2\right),$$
$$g_-(t,\xi) \equiv \left(q_0(\xi) + q_1(\xi)t + q_2(\xi)t^2\right).$$

Знайдемо $p_0$, $p_1$, $p_2$, $q_0$, $q_1$, $q_2$ з умов (2.5.28), (2.5.29), (2.5.31). Оскільки

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g_+(t,\xi)\cosh t\right) \equiv \left(p_1(\xi) + 2p_2(\xi)t\right)\cosh t + \left(p_0(\xi) + p_1(\xi)t + p_2(\xi)t^2\right)\sinh t, \quad \xi > t,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(g_-(t,\xi)\cosh t\right) \equiv \left(q_1(\xi) + 2q_2(\xi)t\right)\cosh t + \left(q_0(\xi) + q_1(\xi)t + q_2(\xi)t^2\right)\sinh t, \quad \xi < t,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(g_+(t,\xi)\cosh t\right) \equiv \left(2p_2(\xi) + p_0(\xi) + p_1(\xi)t + p_2(\xi)t^2\right)\cosh t + \left(2p_1(\xi) + 4p_2(\xi)t\right)\sinh t, \quad \xi > t,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(g_-(t,\xi)\cosh t\right) \equiv \left(2q_2(\xi) + q_0(\xi) + q_1(\xi)t + q_2(\xi)t^2\right)\cosh t + \left(2q_1(\xi) + 4q_2(\xi)t\right)\sinh t, \quad \xi < t,$$

з умов (2.5.28), (2.5.29) одержуємо

$$\left(q_0(\xi) - p_0(\xi)\right) + \left(q_1(\xi) - p_1(\xi)\right)\xi + \left(q_2(\xi) - p_2(\xi)\right)\xi^2 \equiv 0,$$
$$\left(q_1(\xi) - p_1(\xi)\right) + 2\left(q_2(\xi) - p_2(\xi)\right)\xi \equiv 0,$$
$$2\left(q_2(\xi) - p_2(\xi)\right) \equiv \frac{1}{\cosh\xi},$$

а з умов (2.5.31) —

$$p_0(\xi) - p_1(\xi) + p_2(\xi) - 5q_0(\xi) - 5q_1(\xi) - 3q_2(\xi) \equiv 0,$$
$$p_1(\xi) - 2p_2(\xi) + 3q_0(\xi) + 3q_1(\xi) + q_2(\xi) \equiv 0,$$
$$-p_0(\xi) + p_1(\xi) - p_2(\xi) + 2q_1(\xi) + 4q_2(\xi) \equiv 0.$$

Звідси на $[-1,1]$ маємо

$$p_0(\xi) \equiv \frac{\left(-17\xi^2 + 6\xi + 5\right)}{8\cosh\xi}, \qquad q_0(\xi) \equiv \frac{\left(-13\xi^2 + 6\xi + 5\right)}{8\cosh\xi},$$

$$p_1(\xi) \equiv \frac{\big(9\xi^2 + 2\xi - 5\big)}{8\cosh\xi}, \qquad q_1(\xi) \equiv \frac{\big(9\xi^2 - 6\xi - 5\big)}{8\cosh\xi},$$
$$p_2(\xi) \equiv \frac{\big(-3\xi^2 + 2\xi - 1\big)}{8\cosh\xi}, \qquad q_2(\xi) \equiv \frac{\big(-3\xi^2 + 2\xi + 3\big)}{8\cosh\xi}.$$

Отже,

$$\mathfrak{g}(t,\xi) \equiv \frac{\cosh t}{\cosh\xi} \begin{cases} \widetilde{g}_+(t,\xi), & \xi > t, \\ \widetilde{g}_-(t,\xi), & \xi < t, \end{cases}$$

де

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_+(t,\xi) \equiv \frac{1}{8}\Big( &- 17\xi^2 + 6\xi + 5 + \big(9\xi^2 + 2\xi - 5\big)\,t \\ &+ \big(-3\xi^2 + 2\xi - 1\big)\,t^2\Big) \quad \text{на } [-1,1], \\ \widetilde{g}_-(t,\xi) \equiv \frac{1}{8}\Big( &- 13\xi^2 + 6\xi + 5 + \big(9\xi^2 - 6\xi - 5\big)\,t \\ &+ \big(-3\xi^2 + 2\xi + 3\big)\,t^2\Big) \quad \text{на } [-1,1]. \end{aligned}$$

За теоремою 2.5.13 про існування і єдиність розв'язку крайової задачі для лінійного рівняння $n$-го порядку функція

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &\equiv 6\int_{-1}^{1} \mathfrak{g}(t,\xi)\cosh\xi\,d\xi \\ &\equiv \frac{3}{4}\cosh t\left(\int_{-1}^{t} \widetilde{g}_-(t,\xi)\,d\xi + \int_{t}^{1} \widetilde{g}_+(t,\xi)\,d\xi\right) \\ &\equiv t^3\cosh t \quad \text{на } [-1,1] \end{aligned}$$

є єдиним розв'язком задачі (2.5.33)–(2.5.36).

## 2.6. Інтегрування диференціальних рівнянь та систем степеневими рядами

Одним із важливих методів розв'язання диференціальних рівнянь є метод інтегрування за допомогою степеневих рядів.

## 2.6.1. Матричні ряди спеціального вигляду

Розглянемо ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} G_j (z - z_0)^j,$$

де $z \in \mathbb{C}$, $G_j = \{g_{lj}^m\}_{l=\overline{1,n}}^{m=\overline{1,n}} \in \mathfrak{M}(n,n)$, $g_{lj}^m \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $z_0 = 0$, тобто можемо розглядати ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} G_j z^j.$$

**Теорема 2.6.1** (Абель)**.** *Нехай ряд* $\sum_{j=0}^{\infty} G_j z_0^j$ *збігається для деякого* $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Тоді для кожного* $z \in \mathbb{C}$ *такого, що* $|z| < |z_0|$, *ряд* $\sum_{j=0}^{\infty} G_j z^j$ *абсолютно збігається.*

*Доведення.* За необхідною ознакою збіжності степеневого ряду (див. теорему 2.4.5) існує $M > 0$ таке, що $\|G_j z_0^j\| \le M$, $j = \overline{0,\infty}$. Зафіксуємо будь-яке $z \in \mathbb{C}$ таке, що $|z| \le |z_0|$ і позначимо $r = \dfrac{|z|}{|z_0|}$. Тоді $0 < r < 1$ та

$$\left\|G_j z^j\right\| = \left\|G_j z_0^j \left(\frac{z}{z_0}\right)^j\right\| \le \left\|G_j z_0^j\right\| r^j \le M r^j, \quad j = \overline{0,\infty}.$$

За мажорантною умовою збіжності матричного ряду зі збіжності ряду $\sum_{j=0}^{\infty} M r^j$ випливає абсолютна збіжність ряду $\sum_{j=0}^{\infty} G_j z^j$. $\square$

*Зауваження* 2.6.2. За теоремою Абеля множина збіжності степеневого ряду з матричними коефіцієнтами є кругом.

**Означення 2.6.3.** Радіус круга збіжності степеневого ряду з матричними коефіцієнтами називається *радіусом збіжності степеневого ряду.*

*Зауваження* 2.6.4. За зауваженням 2.4.2 ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} G_j z^j$ є збіжним в тому і лише в тому випадку, коли для кожного $m = \overline{1,n}$ ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} g_{lj}^m z^j$ є збіжним. Тому радіус збіжності ряду $\sum\limits_{j=0}^{\infty} G_j z^j$ є мінімумом від радіусів збіжності рядів $\sum\limits_{j=0}^{\infty} g_{lj}^m z^j$, коли $m, l = \overline{1,n}$.

*Зауваження* 2.6.5. Скориставшись зауваженням 2.4.2, можемо перенести всі теореми про неперервність, диференційовність, інтегрованість степеневих рядів та теореми про їх почленне диференціювання та інтегрування.

### 2.6.2. Лінійні однорідні системи з аналітичними коефіцієнтами

Розглянемо *лінійну однорідну систему з аналітичними коефіцієнтами*

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in (-R, R), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.6.1}$$

де $R > 0$,

$$A(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j t^j, \quad t \in (-R, R), \tag{2.6.2}$$

$A_j \in \mathfrak{M}(n,n)$, $j = \overline{0, \infty}$. Доведемо спочатку допоміжну лему про аналітичність розв'язку задачі Коші для деякого рівняння 1-го порядку.

**Лема 2.6.6.** *Нехай послідовність* $\{C_j\}_{j=0}^{\infty}$ *визначена умовами*

$$C_0 = 1, \tag{2.6.3}$$

$$(j+1)C_{j+1} = \sum_{m=0}^{j} \frac{M}{r^m} C_{j-m}, \quad j = \overline{0,\infty}, \tag{2.6.4}$$

*де* $M > 0$, $r > 0$. *Тоді* $C_j > 0$, $j = \overline{0,\infty}$, *і радіус збіжності ряду* $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j t^j$ *дорівнює* $r$.

*Доведення.* Позначимо (формально)

$$y(t) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} C_j t^j. \tag{2.6.5}$$

Умова (2.6.3) означає, що $y(0) = 1$. З умови (2.6.4) випливає

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &\equiv \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j t^j\right)' \equiv \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)C_{j+1}t^j \equiv \sum_{j=0}^{\infty} t^j \sum_{m=0}^{j} \frac{M}{r^m} C_{j-m} \\ &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{M}{r^m} t^m \sum_{j=m}^{\infty} C_{j-m} t^{j-m} \equiv \frac{Mr}{r-t} y(t).\end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Таким чином, функція $y$, яка задається рядом (2.6.5), є розв'язком задачі Коші:

$$\dot{y} = \frac{Mr}{r-t} y, \quad t \in (-r, r), \tag{2.6.7}$$

$$y(0) = 1. \tag{2.6.8}$$

Отже, одержуємо

$$y(t) = C(r-t)^{-Mr} = Cr^{-Mr}\left(1 - \frac{t}{r}\right)^{-Mr}, \quad t \in (-r, r).$$

За (2.6.8) маємо

$$1 = y(0) = Cr^{-Mr},$$

отже, $C = r^{Mr}$ та

$$y = \frac{1}{(1 - t/r)^{Mr}}, \quad t \in (-r, r),$$

є розв'язком (єдиним) задачі Коші (2.6.7), (2.6.8). Отже, співвідношення (2.6.6) справедливі для $t \in (-r, r)$ і радіус збіжності ряду (2.6.6) дорівнює $r$. $\square$

Розглянемо теорему про фундаментальну матрицю розв'язків лінійної однорідної системи з аналітичними коефіцієнтами.

**Теорема 2.6.7.** *Будь-яка фундаментальна матриця розв'язків* $\Phi$ *системи* (2.6.1) *може бути записана у вигляді*

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j t^j, \quad t \in (-R, R), \tag{2.6.9}$$

*де* $\Phi_j \in \mathfrak{M}(n, n)$, $j = \overline{0, \infty}$, *зокрема* $\Phi$ *є дійсно-аналітичною в околі нуля.*

*Доведення.* Нехай спочатку $\Phi$ є такою фундаментальною матрицею розв'язків, що

$$\Phi(0) = \mathbb{I}. \tag{2.6.10}$$

За критерієм того, що матриця є фундаментальною матрицею розв'язків лінійної однорідної системи (див. теорему 2.1.23), маємо

$$\dot{\Phi}(t) \equiv A(t)\Phi(t) \quad \text{на } (-R, R). \tag{2.6.11}$$

Спробуємо подати $\Phi$ у вигляді (2.6.9). Підставимо (2.6.9) в (2.6.11):

$$\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\Phi_{j+1}t^j \equiv A(t)\sum_{j=0}^{\infty}\Phi_j t^j \equiv \sum_{m=0}^{\infty} A_j t^j \sum_{k=0}^{\infty}\Phi_j t^j$$
$$\equiv \sum_{j=0}^{\infty} t^j \sum_{m=0}^{j} A_m \Phi_{j-m} \quad \text{на } (-R, R).$$

За припущенням (2.6.10) $\Phi_0 = \mathbb{I}$. Маємо

$$\Phi_{j+1}(j+1) = \sum_{m=0}^{j} A_m \Phi_{j-m}, \quad j = \overline{0, \infty}. \tag{2.6.12}$$

Покажемо тепер, що для таких $\Phi_j$ ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \Phi_j t^j$ збігається на $(-R, R)$. Зафіксуємо будь-яке $r \in (0, R)$. За необхідною умовою збіжності матричного ряду (див. теорему 2.4.5) та (2.6.2) одержуємо, що існує $M > 0$ таке, що

$$\|A_m r^m\| = \|A_m\| r^m \leq M, \quad m = \overline{0, \infty}. \tag{2.6.13}$$

Нехай $C_j$ задовольняють умови (2.6.3) і (2.6.4) з щойно обраними $r$ і $M$. Покажемо, що

$$\|\Phi_j\| \leq C_j, \quad j = \overline{0, \infty}. \tag{2.6.14}$$

Для доведення цієї оцінки використаємо метод математичної індукції. *База індукції*: $\|\Phi_0\| = 1 = C_0$. Зробимо *індуктивний перехід* $k \rightsquigarrow k+1$:

$$\|\Phi_{k+1}\| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{k} \|A_m\| \|\Phi_{j-1}\| \leq \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{k} \frac{M}{r^m} = C_{k+1}.$$

Таким чином, (2.6.14) доведено.

Оскільки ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} C_j t^j$ збігається і має радіус збіжності $r$, за мажорантною ознакою збіжності ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \Phi_j t^j$ також збігається і має радіус збіжності не менше $r$. Оскільки $r$ є довільним числом з проміжку $(0, R)$, радіус збіжності $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \Phi_j t^j$ не менше $R$. Тобто функція

$$\Phi(t) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j t^j$$

визначена на $(-R, R)$ і є розв'язком системи (2.6.1).

Оскільки $\Phi(0) = \mathbb{I}$, маємо $\det \Phi(t) \neq 0$, $t \in (-R, R)$ (див. теорему 2.1.21). За критерієм того, що матриця є фундаментальною матрицею розв'язків лінійної однорідної системи (див. теорему 2.1.23) $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (2.6.1), яка задовольняє умову $\Phi(0) = \mathbb{I}$.

Скориставшись теоремою 2.1.24 про зв'язок фундаментальних матриць розв'язків лінійної однорідної системи, одержуємо, що для будь-якої фундаментальної матриці розв'язків $\Phi_1$ системи (2.6.1) існує невироджена стала матриця $B$ така, що

$$\Phi_1(t) \equiv \Phi(t)B \quad \text{на } (-R, R).$$

Тому

$$\Phi_1(t) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j B t^j \quad \text{на } (-R, R),$$

де $\|\Phi_j B\| \leq \|\Phi_j\| \|B\| \leq C_j \|B\|$. □

З цієї теореми одразу одержуємо наслідок про аналітичність розв'язків лінійної однорідної системи з аналітичними коефіцієнтами.

**Наслідок 2.6.8.** *Будь-який розв'язок системи* (2.6.1) *є дійсно-аналітичною в околі нуля функцією, причому, радіус збіжності відповідного степеневого ряду не менше $R$.*

*Приклад* 2.6.9. Розглянемо систему

$$\dot{x} = 2tAx, \quad t \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.6.15}$$

де $A \in \mathfrak{M}(n, n)$. Це система з аналітичними коефіцієнтами $(2tA)$ з радіусом збіжності $R = \infty$. Тому за наслідком 2.6.8 будь-який її розв'язок має вигляд

$$x = \sum_{m=0}^{\infty} b_m t^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.6.16}$$

де $b_m \in \mathbb{R}^n$, $m = \overline{0, \infty}$. Підставимо цей розв'язок у систему (2.6.15):

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{m+1}(m+1)t^m = 2\sum_{m=1}^{\infty} Ab_m t^m, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Маємо

$$\begin{aligned} m = 0: &\quad b_1 = 0, \\ m \geq 1: &\quad b_{m+1}(m+1) = 2Ab_{m-1}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} b_{2k+1} &= 0, & k &= \overline{0, \infty}, \\ b_{2k} &= \frac{1}{k} Ab_{2(k-1)}, & k &= \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Продовжуючи останню рівність, одержуємо

$$b_{2k} = \frac{1}{k} Ab_{2(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)} A^2 b_{2(k-2)} = \cdots = \frac{1}{k!} A^k b_0,$$

де $b_0 \in \mathbb{R}^n$ є довільним вектором. Підставляючи знайдені коефіцієнти в (2.6.16), одержуємо загальний розв'язок системи (2.6.15):

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} A^k b_0 = e^{At^2} b_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

## 2.6.3. Лінійні однорідні рівняння з аналітичними коефіцієнтами

Розглянемо *лінійне однорідне рівняння з аналітичними коефіцієнтами*

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \cdots \\ + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0, \quad t \in (-R, R), \end{aligned} \qquad (2.6.17)$$

де $R > 0$,

$$a_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^j t^k, \quad t \in (-R, R),\ j = \overline{0, n-1}, \tag{2.6.18}$$

$a_k^j \in \mathbb{R}$, $k = \overline{0, \infty}$, $j = \overline{0, n-1}$.

Зробивши заміну $x = \mathfrak{A}_n y$ (див. (1.2.6)), одержуємо систему вигляду (2.6.1), де матриця $A$ має вигляд (2.2.4), тому задовольняє умову (2.6.2). Скориставшись наслідком 2.6.8, одержуємо наступну теорему про аналітичність розв'язків лінійного однорідного рівняння $n$-го порядку з аналітичними коефіцієнтами.

**Теорема 2.6.10.** *Будь-який розв'язок рівняння* (2.6.17) *є дійсно-аналітичною в околі нуля функцією, причому радіус збіжності відповідного степеневого ряду не менше $R$.*

## 2.6.4. Функції Бесселя

Розглянемо функції Бесселя $\alpha$-го порядку в двох випадках: $\alpha \notin \mathbb{Z}$ і $\alpha \in \mathbb{Z}$.

1. Нехай $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Позначимо

$$J_\alpha(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Це *функція Бесселя 1-го роду $\alpha$-го порядку.* Тут $\Gamma$ є гама-функцією Ейлера (див. [2, с. 258, розділ 6]). Покажемо, що степеневий ряд, який множиться на $(t/2)^\alpha$ в означенні цієї функції, має радіус збіжності $\infty$. Дійсно, маємо

$$\left| \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\alpha+1)2^{2k}} \right| \le \frac{M}{k!2^{2k}}, \quad k = \overline{0, \infty},$$

з деяким $M > 0$, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!2^{2k}}$$

має радіус збіжності $\infty$, отже, досліджуваний ряд також має радіус збіжності $\infty$.

Доведемо, що $J_\alpha$ та $J_{-\alpha}$ є лінійно незалежними на $(0, +\infty)$. Для цього розглянемо їх довільну лінійну комбінацію:

$$C_\alpha J_\alpha(t) + C_{-\alpha} J_{-\alpha}(t) \equiv 0 \quad \text{на } (0, +\infty).$$

Переходячи до границі, коли $t \to 0^+$, одержуємо, що $C_{-|\alpha|} = 0$. Тому $C_{|\alpha|} J_{|\alpha|}(t) \equiv 0$ на $(0, +\infty)$. Але тоді $C_{|\alpha|} = 0$ тому, що $J_{|\alpha|}(t) \not\equiv 0$ на $(0, +\infty)$. Таким чином, ми довели, що $J_\alpha$ та $J_{-\alpha}$ є лінійно незалежними на $(0, +\infty)$.

Розглянемо також функцію

$$Y_\alpha(t) = \frac{J_\alpha(t)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(t)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad t \in (0, +\infty).$$

Це *функція Бесселя 2-го роду $\alpha$-го порядку.* Її ще називають функцією Ноймана або функцією Вебера.

Зрозуміло, що $J_\alpha$ та $Y_\alpha$ є лінійно незалежними на $(0, +\infty)$.

2. Нехай $\alpha \in \mathbb{Z}$. У цьому випадку позначимо

$$\begin{aligned} J_\alpha(t) &= \lim_{\nu \to \alpha} J_\nu(t), \quad t \in (0, +\infty), \\ Y_\alpha(t) &= \lim_{\nu \to \alpha} Y_\nu(t), \quad t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

Позначивши $n = |\alpha|$, одержуємо

$$\begin{aligned} J_n(t) &= \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad t \in (0, +\infty), \\ J_{-n}(t) &= \left(\frac{t}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \\ &= (-1)^n \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2p} \\ &= (-1)^n J_n(t), \quad t \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

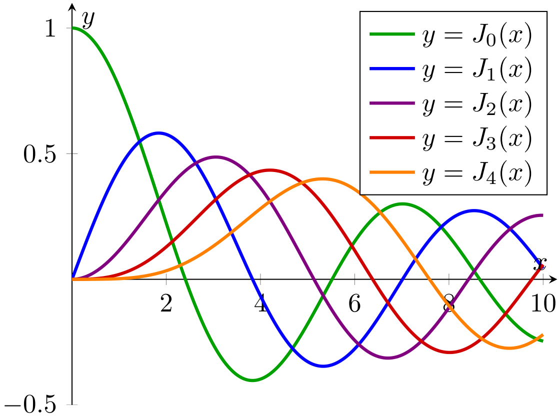



Рис. 2.2. Функції Бесселя 1-го роду

Це *функції Бесселя 1-го роду $n$-го та $-n$-го порядку* (див. графіки на рис. 2.2). Зрозуміло, що степеневий ряд, який множиться на $(t/2)^\alpha$ в означенні цих функцій, має радіус збіжності $\infty$.

Позначивши $\nu = n + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0,1)$, маємо

$$\begin{aligned}
Y_\nu(t) &= \frac{J_{n+\varepsilon}(t)\cos((n+\varepsilon)\pi) - J_{-n-\varepsilon}(t)}{\sin((n+\varepsilon)\pi)} \\
&= \frac{(-1)^n}{\sin(\varepsilon\pi)}\big(J_{n+\varepsilon}(t)(-1)^n\cos(\varepsilon\pi) - J_{-n-\varepsilon}(t)\big) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sin(\varepsilon\pi)}\big((-1)^n J_{n+\varepsilon}(t) - J_{-n-\varepsilon}(t)\big) \\
&\quad - \frac{(-1)^n}{\sin(\varepsilon\pi)}\big(1-\cos(\varepsilon\pi)\big)J_{n+\varepsilon}(t) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sin(\varepsilon\pi)}\big((-1)^n J_{n+\varepsilon}(t) - J_{-n-\varepsilon}(t)\big) \\
&\quad - (-1)^n\frac{\sin(\varepsilon\pi/2)}{\cos(\varepsilon\pi/2)}J_{n+\varepsilon}(t) \\
&\underset{\varepsilon\to 0}{\sim} \frac{1}{\pi}\left(\frac{J_{n+\varepsilon}(t) - J_n(t)}{\varepsilon} + (-1)^n\frac{J_{-n}(t) - J_{-n-\varepsilon}(t)}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(t)\bigg|_{\nu=n} + (-1)^n\,\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(t)\bigg|_{\nu=-n}\right), \quad t\in(0,\infty).$$

Таким чином,

$$Y_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(t)\bigg|_{\nu=n} + (-1)^n\,\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(t)\bigg|_{\nu=-n}\right), \quad t\in(0,\infty). \tag{2.6.19}$$

Для кожного фіксованого $t\in(0,\infty)$ обчислимо похідну $J_\nu$ за $\nu$ у точці $\nu=n$:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(t) = \ln\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \\ - \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma^2(\nu+k+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}.$$

Маємо (див. [2, с. 258, формули 6.3.1 і 6.3.2])

$$\Gamma'(m+1) = m!\psi(m+1), \quad m=\overline{0,\infty},$$

де

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(k+1) = -\gamma + \sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p}, \quad k\in\mathbb{N},$$

$\gamma$ є сталою Ейлера:

$$\gamma = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{p=1}^{k}\frac{1}{p} - \ln k\right) \approx 0,5772156649\ldots$$

Тому

$$\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(t)\bigg|_{\nu=n} = \ln\frac{t}{2}J_n(t) \\ - \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\psi(n+k+1)\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad t\in(0,\infty). \tag{2.6.20}$$

Далі для кожного фіксованого $t \in (0, \infty)$ обчислимо похідну $J_\nu$ за $\nu$ у точці $\nu = -n$. Ураховуючи те, що

$$\frac{1}{\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}\Gamma(z), \quad z \notin \mathbb{Z},$$

одержуємо

$$\begin{aligned} J_\nu(t) &= \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}\right) \\ &= \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \left(-\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!}\Gamma(-k-\nu)\frac{\sin(\pi(\nu+k))}{\pi} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}\right), \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(t) &= \ln\frac{t}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \\ &\quad - \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\Gamma'(-\nu-k)\frac{\sin(\pi(\nu+k))}{\pi} \right. \\ &\qquad \left. + \Gamma(-\nu-k)\cos(\pi(\nu+k))\right) \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \\ &\quad - \left(\frac{t}{2}\right)^\nu \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma'(\nu+k+1)}{\Gamma^2(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Тому

$$\left.\frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(t)\right|_{\nu=-n} = \ln\frac{t}{2} J_n(t)$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\frac{t}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} (-1)^{n-k} \Gamma(n-k) \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \\
&\quad - \left(\frac{t}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \psi(k-n+1) \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \\
&= (-1)^n \left( \ln\frac{t}{2} J_n(t) - \left(\frac{t}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{t}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \psi(k+1) \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \right), \ t \in (0, \infty). \quad (2.6.21)
\end{aligned}
$$

Скориставшись (2.6.19)–(2.6.21), одержуємо

$$
\begin{aligned}
Y_n(t) = \frac{2}{\pi} J_n(t) \ln\frac{t}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\frac{t}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \\
- \frac{1}{\pi} \left(\frac{t}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} (\psi(k+1) \\
+ \psi(k+n+1)) \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad t \in (0, +\infty).
\end{aligned}
$$

Це *функція Бесселя 2-го роду n-го порядку*, її ще називають функцією Ноймана або функцією Вебера (див. графіки на рис. 2.3).

Доведемо, що ряд

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)] \left(\frac{t}{2}\right)^{2k} \qquad (2.6.22)
$$

має радіус збіжності $\infty$. Для $\psi(k+1)$ маємо

$$
\psi(k+1) - 1 + \gamma = \sum_{p=2}^{k} \frac{1}{p} \le \int_1^k \frac{dx}{x} = \ln k,
$$

тобто

$$
\psi(k+1) \le -\gamma + 1 + \ln k, \quad k \in \mathbb{N}.
$$

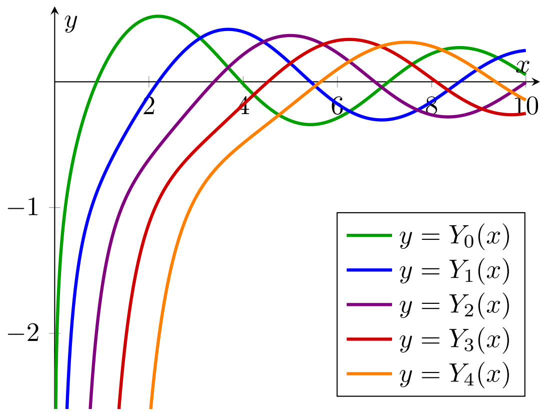



Рис. 2.3. Функції Бесселя 2-го роду

Тому загальний член степеневого ряду (2.6.22) має оцінку зверху:

$$\left|\frac{(-1)^l(\psi(k+1)+\psi(k+n+1))}{k!(k+n)!2^{2k}}\right| \leq \frac{2+\ln k+\ln(k+n)}{k!(k+n)!2^{2k}} \leq \frac{M}{k!(k+n)!} \leq \frac{M}{k!2^{2k}}.$$

З того, що ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{k!2^{2k}} t^{2k}$$

має радіус збіжності $\infty$, випливає, що і ряд (2.6.22) має радіус збіжності $\infty$. Таким чином, функція $Y_n$ визначена на $(0, +\infty)$.

Перевіримо тепер, що $J_n$ та $Y_n$ є лінійно незалежними на $(0, +\infty)$. Розглянемо їх довільну лінійну комбінацію:

$$C_1 J_n(t) + C_2 Y_n(t) \equiv 0 \quad \text{на } (0, +\infty).$$

Переходячи до границі при $t \to 0^+$, одержуємо $C_2 = 0$, отже, $C_1 J_n(t) \equiv 0$, тому $C_1 = 0$.

Аналогічно одержуємо формулу для $Y_{-n}$:

$$Y_{-n}(t) = (-1)^n Y_n(t), \quad t \in (0, \infty).$$

Зрозуміло, що $J_{-n}$ та $Y_{-n}$ є лінійно незалежними на $(0, +\infty)$.

Для $\nu \in \mathbb{R}$ позначимо також

$$H_\nu^{(1)}(t) = J_\nu(t) + iY_\nu(t), \quad t \in (0, \infty),$$
$$H_\nu^{(2)}(t) = J_\nu(t) - iY_\nu(t), \quad t \in (0, \infty).$$

Це *функції Бесселя 3-го роду $\nu$-го порядку*, їх ще називають функціями Ганкеля.

## 2.6.5. Рівняння Бесселя

Розглянемо *рівняння Бесселя*

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0, \quad t > 0, \tag{2.6.23}$$

де $\nu \geq 0$, яке є рівнянням так званого *класу Фукса* (див., наприклад, [8, гл. 4, § 5]), та розглянемо теорему про загальний розв'язок рівняння Бесселя.

**Теорема 2.6.11.** *Функція*

$$y = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t), \quad t \in (0, +\infty),$$

*де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, є загальним розв'язком рівняння Бесселя (2.6.23).*

*Зауваження* 2.6.12. Фактично маємо два випадки.

1. Якщо $\nu \notin \mathbb{Z}$, то загальний розв'язок рівняння (2.6.23) має вигляд

$$y = C_1 J_\nu(t) + C_2 J_{-\nu}(t), \quad t \in (0, +\infty), \tag{2.6.24}$$

   де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Якщо $\nu \in \mathbb{Z}$, то загальний розв'язок рівняння (2.6.23) має вигляд

$$y = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t), \quad t \in (0, +\infty), \tag{2.6.25}$$

   де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

*Доведення теореми 2.6.11.* Припустимо, що розв'язок рівняння (2.6.23) можна в деякому правому околі нуля подати узагальненим степеневим рядом:

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^{j+\alpha}.$$

Тоді

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j[(j+\alpha)(j+\alpha-1)+(j+\alpha)-\nu^2]t^{j+\alpha} + \sum_{j=2}^{\infty} a_{j-2}t^{j+\alpha} \equiv 0.$$

Маємо

$$j=0: \quad a_0(\alpha^2-\nu^2)=0, \tag{2.6.26}$$

$$j=1: \quad a_1((\alpha+1)^2-\nu^2)=0, \tag{2.6.27}$$

$$j\geq 2: \quad a_j[(\alpha+j)^2-\nu^2]+a_{j+2}=0. \tag{2.6.28}$$

Позначимо $\alpha=\nu$. Тоді $a_1=0$, отже (див.(2.6.28)), маємо $a_{2k+1}=0$, $k\geq 0$. З (2.6.28) також випливає

$$\begin{aligned} a_{2k} &= -\frac{a_{2(k-1)}}{4k(k+\nu)} = \frac{a_{2(k-2)}}{4^2k(k+\nu)(k-1)(k+\nu-1)} \\ &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}k!(k+\nu)(k+\nu-1)\cdots(\nu+1)} \\ &= \frac{(-1)^k a_0 2^\nu \Gamma(\nu+1)}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+\nu+1)}, \quad k\geq 0. \end{aligned}$$

Позначивши $a_0 = \dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$, одержуємо, що функція

$$y_1(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu} \equiv J_\nu(t) \quad \text{на } (0,+\infty)$$

є розв'язком (2.6.23).

Далі розглянемо два випадки: $\nu\notin\mathbb{Z}$ та $\nu\in\mathbb{Z}$.

1. Припустимо, що $\nu \notin \mathbb{Z}$ та позначимо $\alpha = -\nu$. Тоді з (2.6.26)–(2.6.28) маємо

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= 0, \quad k \geq 0, \\ a_{2k} &= \frac{-a_{2(k-1)}}{4k(k-\nu)} = \frac{a_{2(k-2)}}{4^k k(k-\nu)(k-1)(k-\nu-1)} \\ &= \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(k-\nu)(k-\nu-1)\cdots(1-\nu)} \\ &= \frac{(-1)^k a_0 2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}{2^{2k-\nu} k!\Gamma(k-\nu+1)}, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Отже, при $a_0 = \dfrac{1}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)}$ одержуємо, що

$$y_2(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k-\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k-\nu} \equiv J_{-\nu}(t) \quad \text{на } (0,+\infty)$$

є розв'язком (2.6.23).

Оскільки $J_\nu$ та $J_{-\nu}$ є лінійно незалежними на $(0,+\infty)$, загальний розв'язок (2.6.23) у цьому випадку має вигляд (2.6.24).

2. Нехай тепер $\nu \in \mathbb{Z}$. Як доведено вище і в цьому випадку функція $y_1(t) \equiv J_\nu(t)$, $t \in (0,+\infty)$, є розв'язком (2.6.23).

Знайдемо розв'язок $y_2$ рівняння (2.6.23) такий, що $y_1$ та $y_2$ є лінійно незалежними на $(0,+\infty)$. Скориставшись теоремою Ліувілля–Остроградського (див. теорему 2.2.14), одержуємо

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \equiv \exp\left\{-\int \frac{dt}{t}\right\} \equiv \frac{K}{t} \quad \text{в правому околі нуля,}$$

де $K \in \mathbb{R}$ буде вибрано далі. Маємо

$$\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)' \equiv \frac{t}{t y_1^2(t)} \equiv \frac{K}{t^{2\nu+1}\varphi^2(t)} \quad \text{в правому околі нуля.} \tag{2.6.29}$$

Тут ми позначили

$$J_\nu(t) = t^\nu \varphi(t), \quad t \in (0,+\infty). \tag{2.6.30}$$

Зрозуміло, що $\varphi$ є парною дійсно-аналітичною на $\mathbb{R}$ функцією та $\varphi(0) \neq 0$. Тому функція $1/\varphi^2$ є парною дійсно-аналітичною в деякому правому околі нуля, тобто

$$\frac{1}{\varphi^2(t)} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^{2k} \quad \text{в правому околі нуля.}$$

Отже (див.(2.6.29)),

$$\left(\frac{y_2(t)}{y_1(t)}\right)' \equiv K \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^{2k-2\nu-1} \quad \text{в правому околі нуля,}$$

тому

$$y_2(t) \equiv K y_1(t) \left( M + \sum_{\substack{k=0\\k\neq\nu}}^{\infty} \frac{p_k}{2(k-\nu)} t^{2(k-\nu)} + p_\nu \ln t \right)$$
$$\text{в правому околі нуля.}$$

Таким чином, шуканий розв'язок $y_2$ має вигляд

$$y_2(t) \equiv bJ_\nu(t) \ln t + \mu(t) \quad \text{в правому околі нуля,} \tag{2.6.31}$$

де

$$\mu(t) \equiv t^{-\nu} \widetilde{\mu}(t).$$

Тут $\widetilde{\mu}$ є парною дійсно-аналітичною в околі нуля функцією. Підставимо тепер (2.6.31) в (2.6.23):

$$\begin{aligned} bt^2 J_\nu''(t) \ln t + 2bt^2 J_\nu'(t) \frac{1}{t} - bt^2 J\nu(t) \frac{1}{t^2} + t^2 \mu''(t) + btJ_\nu'(t) \ln t \\ + btJ_\nu(t) \frac{1}{t} + t\mu'(t) + b\left(t^2 - \nu^2\right) J_\nu(t) \ln t \\ + \left(t^2 - \nu^2\right) \mu(t) \equiv 0 \quad \text{в правому околі нуля.} \end{aligned}$$

Звідси одержуємо, що $\mu$ задовольняє співвідношення

$$t^2\mu'' + t\mu' + \left(t^2 - \nu^2\right) \mu \equiv -\frac{4}{\pi} t J_\nu'(t) \text{ в правому околі нуля.} \tag{2.6.32}$$

Тут вибрано $b = 2/\pi$. З (2.6.31) одержуємо, що

$$\mu(t) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} m_k t^{2k-\nu} \quad \text{в правому околі нуля.}$$

Підставляючи цей вираз в (2.6.32), одержуємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k[(2k-\nu)^2 - \nu^2]t^{2k-\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} m_{k-1}t^{2k-\nu}$$
$$\equiv -\frac{4}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l(2l+\nu)}{2^{2l+\nu}l!(l+\nu)!}t^{2l+\nu}$$
$$\equiv -\frac{4}{\pi}\sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^{k-\nu}(2k-\nu)}{2^{2k-\nu}(k-\nu)!k!}t^{2k-\nu} \quad \text{в правому околі нуля.}$$

Звідси маємо

$k = \overline{1, \nu-1}:$

$$m_k = -\frac{m_{k-1}}{4k(k-\nu)} = \frac{m_k}{4k(\nu-k)} = \frac{m_0(\nu-k-1)!}{2^{2k}k!(\nu-1)!}, \tag{2.6.33}$$

$k = \nu:$

$m_\nu$ є довільним,

$$m_{\nu-1} = -\frac{4\nu}{\pi 2^\nu \nu!} = -\frac{4}{\pi 2^\nu(\nu-1)!}, \tag{2.6.34}$$

$k = \overline{\nu+1, \infty}:$

$$m_k = \left(\frac{m_{k-1}}{4k(k-\nu)} + \frac{4(-1)^{k-\nu}(2k-\nu)}{\pi 2^{2k-\nu}(k-\nu)!k!4k(k-\nu)}\right)$$
$$= -\left(\frac{m_{l+\nu-1}}{4l(l+\nu)} + \frac{4(-1)^l(2l+\nu)}{\pi 2^{2l+\nu}(l+\nu)!l!4(l+\nu)l}\right)$$
$$= -\frac{1}{4l(l+\nu)}\left(-\frac{m_{l+\nu-2}}{4(l-1)(l+\nu-1)}\right.$$
$$\left.-\frac{4(-1)^{l-1}(2l+\nu-2)}{\pi 2^{2l+\nu-2}(l+\nu-1)!(l-1)!4(l+\nu-1)(l-1)}\right)$$

$$- \frac{4(-1)^l(2l+\nu)}{\pi 2^{2l+\nu}(l+\nu)!l!4(l+\nu)l}$$
$$= \frac{(-1)^l \nu! m_\nu 2^\nu}{2^{2l+\nu} l!(l+\nu)!} - \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^l}{2^{2l+\nu} l!(l+\nu)!} \sum_{j=0}^{l} \frac{2j+\nu}{j(j+\nu)}$$
$$= \frac{(-1)^l \nu! m_\nu 2^\nu}{2^{2l+\nu} l!(l+\nu)!}$$
$$- \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^l}{2^{2l+\nu} l!(l+\nu)!} \big(\gamma + \psi(l+1)$$
$$+ \psi(l+\nu+1) - \psi(\nu+1)\big), \tag{2.6.35}$$

де $\gamma$ є сталою Ейлера. З (2.6.33) та (2.6.34) одержуємо

$$\frac{m_0}{2^{2\nu-2}((\nu-1)!)^2} = m_{\nu-1} = \frac{4}{\pi 2^\nu (\nu-1)!},$$

отже,

$$m_0 = -\frac{2^\nu(\nu-1)!}{\pi}. \tag{2.6.36}$$

Покладемо

$$m_\nu = \frac{1}{2^\nu \nu! \pi} \left(\gamma - \psi(\nu+1) - 2\ln 2\right).$$

Тоді

$$y_2(t) \equiv \frac{2}{\pi} J_\nu(t) \ln t - \frac{1}{\pi} \left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-l-1)!}{l!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2l}$$
$$+ \frac{1}{\pi} \left(\gamma - \psi(\nu+1) - 2\ln 2\right) \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+\nu)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2l}$$
$$- \frac{1}{\pi} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+\nu)!} \big(\gamma + \psi(l+1)$$
$$+ \psi(l+\nu+1) - \psi(\nu+1)\big) \left(\frac{t}{2}\right)^{2l}$$

$$
\begin{aligned}
&\equiv \frac{2}{\pi} J_\nu(t) \ln\frac{t}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{2}\right)^{-\nu} \sum_{l=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-l-1)!}{l!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2l} \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(l+\nu)!}\big(\psi(l+1)+\psi(l+\nu+1)\big)\left(\frac{t}{2}\right)^{2l} \\
&\equiv Y_\nu(t) \quad \text{на } (0,+\infty).
\end{aligned}
$$

Таким чином, одержали розв'язок $y_2$ рівняння (2.6.23).

Оскільки $J_\nu$ та $Y_\nu$ є лінійно незалежними на $(0,+\infty)$, загальний розв'язок (2.6.23) у цьому випадку має вигляд (2.6.24). Таким чином, теорему доведено. □

## 2.6.6. Модифіковані функції Бесселя

Розглянемо модифіковані функції Бесселя. Доведення їх властивостей цілком аналогічні доведенням властивостей відповідних функцій Бесселя, тому їх не наводитимо. Розглянемо два випадки.

1. Нехай $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Позначимо

$$
I_\alpha(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad t \in (0,+\infty).
$$

Це *модифікована функція Бесселя 1-го роду $\alpha$-го порядку.*

Функції $I_\alpha$ та $I_{-\alpha}$ є лінійно незалежними на $(0,+\infty)$.

Розглянемо також функцію

$$
K_\alpha(t) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\alpha}(t) - I_\alpha(t)}{\sin(\alpha\pi)}, \quad t \in (0,+\infty).
$$

Це *модифікована функція Бесселя 2-го роду $\alpha$-го порядку.*

Зрозуміло, що $I_\alpha$ та $K_\alpha$ є лінійно незалежними на $(0,+\infty)$.

2. Нехай $\alpha \in \mathbb{Z}$. Позначимо

$$
I_\alpha(t) = \lim_{\nu\to\alpha} I_\nu(t), \quad t \in (0,+\infty),
$$
$$
K_\alpha(t) = \lim_{\nu\to\alpha} K_\nu(t), \quad t \in (0,+\infty).
$$

Позначивши $n = |\alpha|$, одержуємо

$$\begin{aligned}
I_n(t) &= \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \qquad t \in (0,+\infty),\\
I_{-n}(t) &= \left(\frac{t}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!(k-n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}\\
&= \left(\frac{t}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(p+n)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2p}\\
&= I_n(t), \qquad t \in (0,+\infty).
\end{aligned}$$

Це *модифікована функції Бесселя 1-го роду n-го та −n-го порядку* (див. графіки на рис. 2.4).

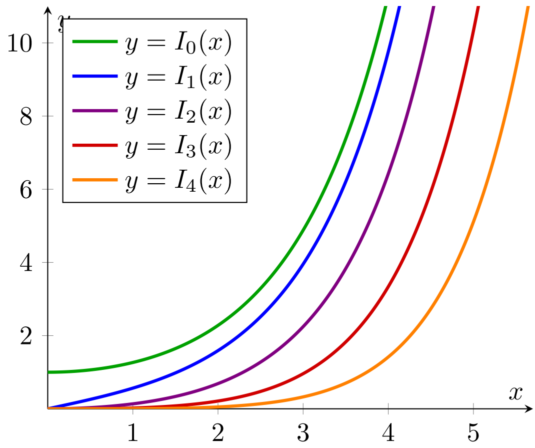



Рис. 2.4. Модифіковані функції Бесселя 1-го роду

Маємо

$$\begin{aligned}
K_n(t) &= (-1)^{n+1} I_n(t) \ln \frac{t}{2}\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}(-1)^k \left(\frac{t}{2}\right)^{2k}
\end{aligned}$$

$$+\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+n)!}[\psi(k+1)$$

$$+\psi(k+n+1)]\left(\frac{t}{2}\right)^{2k}, \quad t\in(0,+\infty).$$

Це *функція Бесселя 2-го роду n-го порядку*, її ще називають функцією Макдональда (див. графіки на рис. 2.5).

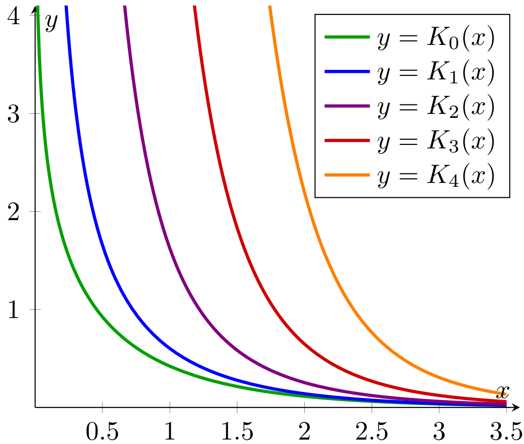



Рис. 2.5. Модифіковані функції Бесселя 2-го роду

Функції $I_n$ та $K_n$ є лінійно незалежними на $(0,+\infty)$.

Для $K_{-n}$ маємо

$$K_{-n}(t) = K_n(t), \quad t\in(0,\infty).$$

Зрозуміло, що $I_{-n}$ та $K_{-n}$ є лінійно незалежними на $(0,+\infty)$.

## 2.6.7. Модифіковане рівняння Бесселя

Розглянемо тепер *модифіковане рівняння Бесселя*

$$t^2y'' + ty' - (t^2+\nu^2)y = 0, \quad t>0, \tag{2.6.37}$$

де $\nu \geq 0$, яке є рівнянням класу Фукса (див., наприклад, [8, гл. 4, § 5]).

Аналогічно теоремі 2.6.11 про загальний розв'язок рівняння Бесселя, одержуємо наступну теорему про загальний розв'язок модифікованого рівняння Бесселя.

**Теорема 2.6.13.** *Функція*

$$y = C_1 I_\nu(t) + C_2 K_\nu(t), \quad t \in (0, +\infty),$$

*де* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$*, є загальним розв'язком модифікованого рівняння Бесселя* (2.6.37)*.*

*Зауваження* 2.6.14. Фактично маємо два випадки.

1. Якщо $\nu \notin \mathbb{Z}$, то загальний розв'язок рівняння (2.6.37) має вигляд

$$y = C_1 I_\nu(t) + C_2 I_{-\nu}(t), \quad t \in (0, +\infty), \tag{2.6.38}$$

де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

2. Якщо $\nu \in \mathbb{Z}$, то загальний розв'язок рівняння (2.6.37) має вигляд

$$y = C_1 I_\nu(t) + C_2 K_\nu(t), \quad t \in (0, +\infty), \tag{2.6.39}$$

де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

# Розділ 3

# Нелінійні системи

## 3.1. Теореми про існування та єдиність розв'язку

Розглянемо задачу Коші

$$\dot{x} = f(t,x), \quad (t,x) \in \Omega, \tag{3.1.1}$$

$$x(t_0) = x^0, \tag{3.1.2}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ є областю (відкритою зв'язною множиною), $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\bigl(t_0, x^0\bigr) \in \Omega$. Тут система (3.1.1) є *нелінійною* в загальному випадку.

Спочатку доведемо лему про еквівалентність задачі Коші інтегральному рівнянню.

**Лема 3.1.1.** *Нехай $f \in C(\Omega)$. Функція $x = \varphi(t)$, $t \in I$, є розв'язком задачі Коші* (3.1.1), (3.1.2) *в тому і лише тому випадку, коли вона є неперервним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad (t,x) \in \Omega. \tag{3.1.3}$$

*Доведення.* Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in I$, є розв'язком (3.1.1), (3.1.2), тобто

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in I, \quad \varphi(t_0) = x^0.$$

Інтегруючи цю рівність в межах $[t_0, t]$, $t \in I$, одержуємо

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) \equiv \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau)) d\tau,$$

отже, $x = \varphi(t)$ є розв'язком (3.1.3).

Нехай тепер $x = \varphi(t)$, $t \in I$, є неперервним розв'язком (3.1.3), тобто

$$\varphi(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau, \quad t \in I.$$

Диференціюючи цю рівність, одержуємо

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in I.$$

Підставляючи $t = t_0$, маємо $\varphi(t_0) = x^0$. Тобто $x = \varphi(t)$, $t \in I$ є розв'язком задачі Коші (3.1.1), (3.1.2). $\square$

**Означення 3.1.2.** Функція $g$ називається *ліпшицевою* в $D \subset \mathbb{R}^k$ з константою Ліпшиця $L$ ($g \in \mathrm{Lip}(D, L)$), якщо

$$\forall u \in D\ \forall v \in D \quad |g(u) - g(v)| \le L|u - v|.$$

**Означення 3.1.3.** Функція $f$ називається *ліпшицевою за $x$* в $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ з константою Ліпшиця $L$ ($f \in \mathrm{Lip}_x(\Omega, L)$), якщо

$$\forall (t, \xi) \in \Omega\ \forall (t, \eta) \in \Omega \quad |f(t, \xi) - f(t, \eta)| \le L|\xi - \eta|.$$

Розглянемо теорему про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нелінійної системи.

**Теорема 3.1.4** (Пікар–Ліндельоф)**.** *Нехай*

$$\widetilde{\Omega} = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \left|t - t_0\right| \le a \wedge \left|x - x^0\right| \le b\right\} \subset \Omega$$

*і* $f \in C\big(\widetilde{\Omega}\big) \cap \mathrm{Lip}_x\big(\widetilde{\Omega}, L\big)$. *Нехай також*

$$M \ge \max_{(t,x)\in\widetilde{\Omega}} |f(t, x)|, \quad h < \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\}.$$

*Тоді на множині* $T_h = [t_0 - h, t_0 + h]$ *існує єдиний розв'язок задачі Коші* (3.1.1), (3.1.2).

*Доведення.* За щойно доведеною лемою можемо замінити задачу Коші (3.1.1), (3.1.2) інтегральним рівнянням (3.1.3).

Розглянемо повний лінійний нормований простір $C(T_h)$ з нормою

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| \mid t \in T_h\}.$$

Множина

$$C_b(T_h) = \{x \in C(T_h) \mid \|x - x^0\| \leq b\}$$

є замкненою в $C(T_h)$. Отже, $C_b(T_h)$ в свою чергу утворює повний метричний простір з метрикою $p(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|$. Розглянемо оператор $B : C_b(T_h) \to C(T_h)$ з областю визначення $D(B) = C_b(T_h)$, який діє за правилом

$$(Bx)(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \quad t \in T_h, \quad x \in D(B).$$

Для $x \in C_b(T_h)$ маємо

$$\begin{aligned} |(Bx - x^0)(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau))|\, d\tau \right| \leq M(t - t_0) \leq Mh \leq b. \end{aligned}$$

Отже, $B : C_b(T_h) \to C_b(T_h)$.

Покажемо, що $B$ є стискальним оператором. Нехай $x, \tilde{x} \in C_b(T_h)$. Тоді

$$\begin{aligned} |(Bx - B\tilde{x})(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, \tilde{x}(\tau))|\, d\tau \right| \\ &\leq L \left| \int_{t_0}^{t} |x(\tau) - \tilde{x}(\tau)|\, d\tau \right| \leq L \left| \int_{t_0}^{t} \|x - \tilde{x}\| d\tau \right| \\ &\leq L|t - t_0| \|x - \tilde{x}\| \leq Lh\|x - \tilde{x}\|. \end{aligned}$$

Оскільки $Lh < 1$, оператор $B$ є стискальним. Отже, рівняння

$$x = Bx$$

має в $C_b(T_h)$ розв'язок $\varphi$, причому єдиний, оскільки стискальний оператор $B : C_b(T_h) \to C_b(T_h)$ має єдину нерухому точку $\varphi$ в просторі $C_b(T_h)$ за теоремою Банаха [10, гл. 10, § 5]. Отже, $\varphi(t)$, $t \in T_h$, є єдиним розв'язком інтегрального рівняння (3.1.3), а тому (за лемою 3.1.1) і єдиним розв'язком задачі Коші (3.1.1), (3.1.2). □

Доведемо тепер достатню умову ліпшицевості.

**Теорема 3.1.5.** *Нехай $f \in C^1\big(\widehat{\Omega}\big)$, де $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+p}$ є компактом. Тоді $f \in \mathrm{Lip}_x\big(\widehat{\Omega}, L\big)$ для деякого $L > 0$.*

*Доведення.* Маємо (за теоремою Лаґранжа)

$$\forall (\xi, x) \in \widehat{\Omega}\ \forall (\xi, \tilde{x}) \in \widehat{\Omega} \quad |f(\xi, x) - f(\xi, \tilde{x})| \le L|x - \tilde{x}|.$$

де $L = \sup\limits_{(\xi,x)\in\widehat{\Omega}} \left|\dfrac{\partial f(\xi, x)}{\partial x}\right|$. Оскільки $\widehat{\Omega}$ є компактом, супремум є скінченною величиною. □

Розглянемо приклад, який ілюструє цю теорему.

*Приклад* 3.1.6. Розглянемо задачу Коші:

$$\dot{x} = \frac{3}{4}x^{2/3}, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}, \tag{3.1.4}$$

$$x(3) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3.375. \tag{3.1.5}$$

Тут $t_0 = 3$ і $x^0 = 3.375$. Візьмемо $a = 1.5$ і $b = 2.375$. Тоді множина $\widetilde{\Omega}$ з теореми 3.1.4 має вигляд $\widetilde{\Omega} = [1.5, 4.5] \times [1, 5.75]$. Знайдемо сталі $M$, $L$ і $h$ з цієї теореми. Маємо

$$M = \max_{x\in[1,5.75]} \left|\frac{3}{4}x^{2/3}\right| = 0.75 \times 5.75^{2/3}.$$

З теореми 3.1.5 одержуємо

$$L = \max_{x\in[1,5.75]} \left|\frac{1}{2}x^{-1/3}\right| = 0.5 \times 1^{-1/3} = 0.5.$$

Тому

$$\min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\right\} = \min\left\{1.5, \frac{2.375}{0.75 \times 5.75^{2/3}}, 2\right\} > 0.98 =: h.$$

За теоремою 3.1.4 на відрізку $[t_0 - h, t_0 + h] = [2.02, 3.98]$ існує єдиний розв'язок задачі Коші (3.1.4), (3.1.5).

Можемо також безпосередньо обчислити загальний розв'язок рівняння (3.1.4) та задачі Коші (3.1.4), (3.1.5). Дійсно, загальний розв'язок має вигляд

$$x = 0, \quad x = \frac{1}{64}(t - C)^3, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.1.6}$$

де $C \in \mathbb{R}$ є довільною сталою, а розв'язок задачі Коші (3.1.4), (3.1.5) — вигляд

$$x = \frac{1}{64}(t + 3)^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Як бачимо, у дійсності розв'язок задачі Коші (3.1.4), (3.1.5) існує на множині більшій за ту, яку одержуємо в теоремі 3.1.4. Питанням глобального продовження локальних розв'язків присвячено підрозділ 3.2 (див. нижче).

Ситуацію, що розглянута в цьому прикладі, зображено на рис. 3.1.

*Приклад* 3.1.7. Розглянемо для рівняння (3.1.4) задачу Коші з умовою

$$x(0) = 0. \tag{3.1.7}$$

У попередньому прикладі було знайдено загальний розв'язок рівняння (3.1.4) (див. (3.1.6)). Звідси одержуємо, що задача Коші (3.1.4), (3.1.7) має безліч розв'язків в будь-якому околі точки $(0, 0)$. Але це не суперечить теоремі 3.1.4 тому, що для цього рівняння умову Ліпшиця не виконано в жодному околі точки $(0, 0)$.

Розглянемо тепер теорему про існування і єдиність розв'язку задачі Коші для нелінійного рівняння.

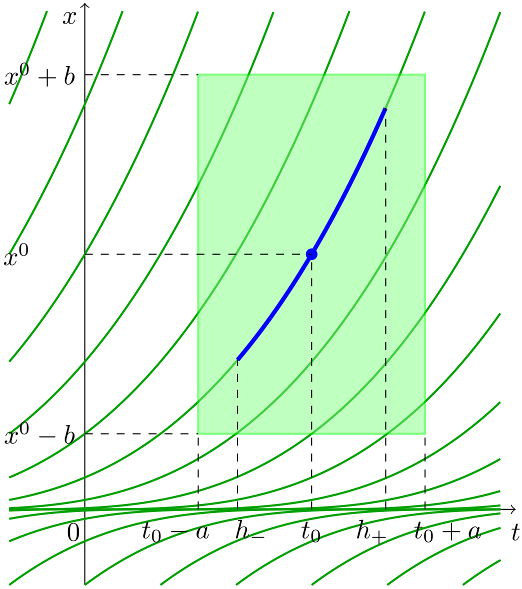



Рис. 3.1. Інтегральні траєкторії рівняння (3.1.4) і розв'язок задачі Коші (3.1.4), (3.1.5) на відрізку $[h_-, h_+] = [t_0 - h, t_0 + h]$

**Теорема 3.1.8.** *Нехай*

$$\widetilde{\Omega} = \left\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \left|t - t_0\right| \leq a \wedge \left|x - x^0\right| \leq b\right\}$$

*і* $g \in C\big(\widetilde{\Omega}\big) \cap \operatorname{Lip}_x\big(\widetilde{\Omega}, L\big)$. *Нехай також*

$$M \geq \max_{(t,x)\in\widetilde{\Omega}} |g(t,x)|, \quad h < \min\left\{a, \frac{b}{\sqrt{(|x^0| + b)^2 + M^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + L^2}}\right\}.$$

*Тоді на множині* $T_h = [t_0 - h, t_0 + h]$ *існує єдиний розв'язок задачі Коші:*

$$y^{(n)} = g\big(t, y, y', ..., y^{(n-1)}\big), \tag{3.1.8}$$

$$\begin{cases} y(t_0) = x_1^0, \\ y'(t_0) = x_2^0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(t_0) = x_n^0. \end{cases} \tag{3.1.9}$$

*Доведення.* За допомогою оператора $\mathfrak{A}_n$ (див. с. 26) зводимо задачу Коші (3.1.8), (3.1.9) до еквівалентної їй задачі Коші вигляду (3.1.1), (3.1.2), де $x = \mathfrak{A}_n y$,

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ g(t,x) \end{pmatrix}.$$

Для цієї функції $f$ маємо

$$\begin{aligned} |f(t,x)| &\le \sqrt{|x|^2 + |g(t,x)|^2} \\ &\le \sqrt{(|x^0| + b)^2 + M^2}, \quad (t,x) \in \widetilde{\Omega}, \\ |f(t,\xi) - f(t,\eta)| &\le \sqrt{|\xi - \eta|^2 + |g(t,\xi) - g(t,\eta)|^2} \\ &\le \sqrt{|\xi - \eta|^2 + L^2|\xi - \eta|^2} \\ &\le \sqrt{1 + L^2}|\xi - \eta|, \quad (t,\xi), (t,\eta) \in \widetilde{\Omega}. \end{aligned}$$

Застосовуючи теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для нелінійної системи (3.1.1), (3.1.2) (див. теорему 3.1.4), одержуємо, що існує єдиний розв'язок $\varphi(t)$, $t \in T_h$ цієї системи. Отже, $\psi(t) = \big(\mathfrak{A}_n^{-1}\varphi\big)(t)$, $t \in T_h$, є єдиним розв'язком задачі Коші (3.1.8), (3.1.9). □

## 3.1.1. Теореми про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів та початкових умов

Розглянемо залежну від параметрів задачу Коші

$$\dot{x} = f(t,x,\omega), \quad (t,x,w) \in \Omega, \tag{3.1.10}$$

$$x(\xi) = \nu, \tag{3.1.11}$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_w^k$, $\omega = (\xi, \nu, \mu) \in \mathbb{R}^k = \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}_\nu^n \times \mathbb{R}_\mu^s$, $s \ge 0$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

Розглянемо теорему про неперервну залежність розв'язку задачі Коші від параметрів та початкових умов.

**Теорема 3.1.9.** *Нехай*

$$\begin{aligned}\widehat{\Omega} = \big\{(t,x,\omega) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^k_w \mid \omega = (\xi,\nu,\mu) \in \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}^n_\nu \times \mathbb{R}^s_\mu = \mathbb{R}^k \\ \wedge \left|t - t_0\right| \le a \wedge \left|x - x^0\right| \le b \\ \wedge \left|\xi - t_0\right| \le a \wedge \left|\nu - x^0\right| \le b \wedge \left|\mu - \mu^0\right| \le c\big\},\end{aligned}$$

$\big(t_0, x^0, \omega^0\big) \in \Omega$, $\omega^0 = \big(t_0, x^0, \mu^0\big)$ *і* $f \in C\big(\widehat{\Omega}\big) \cap \mathrm{Lip}_x\big(\widehat{\Omega}, L\big)$. *Нехай також*

$$M \ge \max_{(t,x,w)\in\widehat{\Omega}} |f(t,x,w)|, \quad h < \min\left\{a, \frac{2b}{3M+1}, \frac{2}{3L}\right\}.$$

*Тоді розв'язок* $x = \varphi(t,w)$, $t \in T_h = [t_0 - h, t_0 + h]$, *задачі* (3.1.10), (3.1.11) *належить* $C(\Omega_h)$, *де*

$$\begin{aligned}\Omega_h = \big\{(t,w) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^k_w \mid \left|t - t_0\right| \le h \wedge \left|\xi - t_0\right| \le h/2 \\ \wedge \left|\nu - x^0\right| < h/2 \wedge \left|\mu - \mu^0\right| \le c\big\}.\end{aligned}$$

*Доведення.* За лемою 3.1.1 про еквівалентність задачі Коші інтегральному рівнянню можемо замінити задачу Коші (3.1.10), (3.1.11) інтегральним рівнянням

$$x(t,\omega) = \nu + \int_\xi^t f\big(\tau, x(\tau,\omega), \omega\big)d\tau, \quad (t,x,\omega) \in \widehat{\Omega}. \tag{3.1.12}$$

Розглянемо повний лінійний нормований простір $C(\Omega_h)$ з нормою

$$\|x\| = \sup\{|x(t,w)| \mid (t,w) \in \Omega_h\}.$$

Множина $C_b(\Omega_h) = \big\{x \in C(\Omega_h) \mid \left\|x - x^0\right\| \le b\big\}$ є компактною в $C(\Omega_h)$. Тому $C_b(\Omega_h)$ утворює повний метричний простір з метрикою $\rho(\zeta,\eta) = \|\zeta - \eta\|$. Розглянемо оператор $B : C_b(\Omega_h) \to C(\Omega_h)$ з областю визначення $D(B) = C_b(\Omega_h)$, який діє за правилом

$$(Bx)(t,\omega) = \nu + \int_\xi^t f\big(\tau, x(\tau,\omega), \omega\big)\, d\tau, \quad (t,\omega) \in \Omega_h, \quad x \in D(B).$$

Для $x \in C_b(\Omega_h)$ маємо

$$\begin{aligned}\left|\left(Bx - x^0\right)(t,w)\right| &= \left|\nu - x^0\right| + \left|\int_\xi^t f(\tau, x(\tau,w), w)d\tau\right| \\ &\le \frac{1}{2}h + \frac{3}{2}hM \le h\frac{3M+1}{2} \le b.\end{aligned}$$

Отже, $B : C_b(\Omega_h) \to C(\Omega_h)$.

Покажемо, що $B$ є стискальним оператором. Нехай $x, \tilde{x} \in C_b(\Omega_h)$. Тоді

$$\begin{aligned}|(Bx - B\tilde{x})(t,\omega)| &\le \left|\int_\xi^t \big(f(\tau, x(\tau,\omega),\omega) - f(\tau,\tilde{x}(\tau,\omega),\omega)\big)\, d\tau\right| \\ &\le L\left|\int_\xi^t \|x - \tilde{x}\| d\tau\right| \le \frac{3}{2}Lh\|x-\tilde{x}\|.\end{aligned}$$

Оскільки $\frac{3}{2}Lh < 1$, оператор $B$ є стискальним. Отже, рівняння

$$x = Bx$$

має в $C_b(\Omega_h)$ розв'язок $\varphi$, причому єдиний, оскільки стискальний оператор $B : C_b(\Omega_h) \to C_b(\Omega_h)$ має єдину нерухому точку $\varphi$ в просторі $C_b(\Omega_h)$ за теоремою Банаха [10, гл. 10, § 5]. Отже, функція $\varphi(t,\omega)$, $(t,\omega) \in \Omega_h$ є єдиним розв'язком інтегрального рівняння (3.1.12), а тому (за лемою 3.1.1) і розв'язком задачі Коші (3.1.10), (3.1.11). □

### 3.1.2. Теореми про диференційовність розв'язку задачі Коші за параметрами та початковими умовами

Розглянемо залежну від параметрів задачу Коші (3.1.10), (3.1.11).

Для доведення теореми про диференційовність розв'язку задачі Коші від параметрів та початкових умов нам знадобиться така лема про приріст вектор-функції.

**Лема 3.1.10.** *Нехай* $u : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}^m$, $u \in C^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, *де* $\Omega_1 \subset \mathbb{R}_z^n$ *є опуклою відкритою множиною,* $\Omega_2 \subset \mathbb{R}_\gamma^k$. *Тоді існує матрично-значна функція* $U \in C(\Omega_1^2 \times \Omega_2)$ *така, що* $U(x, y, \gamma) \in \mathfrak{M}(m, k)$, $(x, y, \gamma) \in \Omega_1^2 \times \Omega_2$, *та*

$$u(x, \gamma) - u(y, \gamma) = U(x, y, \gamma)(x - y), \quad (x, y, \gamma) \in \Omega_1^2 \times \Omega_2. \quad (3.1.13)$$

*Доведення.* Зафіксуємо довільні $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_1$, $\gamma \in \Omega_2$ і позначимо $\varphi(\lambda) = u(y + \lambda(x - y), \gamma)$, $\lambda \in [0, 1]$. Тоді

$$\begin{aligned} u(x, \gamma) - u(y, \gamma) &= \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(\lambda)\, d\lambda \\ &= \left( \int_0^1 \frac{\partial u(z, \gamma)}{\partial z} \bigg|_{z = y + \lambda(x-y)} d\lambda \right) (x - y) \\ &= U(x, y, \gamma)(x - y), \end{aligned}$$

де

$$U(x, y, \gamma) = \int_0^1 \frac{\partial u(z, \gamma)}{\partial z} \bigg|_{z = y + \lambda(x-y)} d\lambda,$$

тобто співвідношення (3.1.13) має місце. Зрозуміло, що $U \in C(\Omega_1^2 \times \Omega_2)$. Лему доведено. □

Розглянемо теорему про диференційовність розв'язку задачі Коші за параметрами та початковими умовами.

**Теорема 3.1.11.** *Нехай* $f \in C^1(\Omega)$ *і* $(t_0, x^0, \omega^0) \in \Omega$, $\omega^0 = (t_0, x^0, \mu^0)$. *Тоді існує таке* $h > 0$, *що для*

$$\begin{aligned} \Omega_h = \big\{ (t, \omega) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\omega^k \mid \left| t - t_0 \right| < h \wedge \left| \xi - t_0 \right| < h \\ \wedge \left| \nu - x^0 \right| < h \wedge \left| \mu - \mu^0 \right| < h \big\} \subset \Omega \end{aligned}$$

*існує єдиний розв'язок* $x = \varphi(t, \omega)$, $(t, \omega) \in \Omega_h$, *задачі Коші* (3.1.10), (3.1.11), *крім того,* $\varphi \in C^1(\Omega_h)$.

*Доведення.* За теоремою 3.1.9 існує таке $h > 0$, що для $\Omega_h$ існує єдиний розв'язок $x = \varphi(t,\omega)$, $(t,\omega) \in \Omega_h$, задачі Коші (3.1.10), (3.1.11), крім того, $\varphi \in C(\Omega_h)$. Маємо

$$\dot{\varphi}(t,\omega) = f\big(t, \varphi(t,\omega), \omega\big), \quad (t,\omega) \in \Omega_h,$$
$$\varphi(\xi,\omega) = \varphi(\xi,\xi,\nu,\mu) = \nu, \quad (\xi,\omega) \in \Omega_h.$$

Позначивши $\widetilde{\varphi}(\tau,\omega) = \varphi(\tau+\xi,\omega)$, $u(\tau,x,\omega) = f(\tau+\xi,x,\omega)$, звідси одержуємо

$$\dot{\widetilde{\varphi}}(\tau,\omega) = u\big(\tau, \widetilde{\varphi}(\tau,\omega), \omega\big), \quad (\tau,\omega) \in \widetilde{\Omega}_h, \tag{3.1.14}$$
$$\widetilde{\varphi}(0,\omega) = \varphi(\xi,\xi,\nu,\mu) = \nu, \quad (0,\omega) \in \widetilde{\Omega}_h, \tag{3.1.15}$$

де $\widetilde{\Omega}_h = \big\{(\tau,\omega) \in \mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^k_\omega \mid \big|\tau + \xi - t_0\big| < h \wedge \big|\xi - t_0\big| < h \wedge \big|\nu - x^0\big| < h \wedge \big|\mu - \mu^0\big| < h\big\}$. Зрозуміло, що $u \in C^1\big(\widetilde{\Omega}_h\big)$.

Позначимо $\big\{e^0, e^1, \ldots, e^n, e^{n+1}, \ldots, e^{n+s}\big\}$ — стандартний базис в $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}^n_\nu \times \mathbb{R}^s_\mu$ (див. с. 30). Зафіксуємо $j = \overline{1,k}$ та розглянемо приріст $\Delta$ за змінною $\omega_j$, де $|\Delta| > 0$ є достатньо малим. Маємо

$$\begin{aligned} &\dot{\widetilde{\varphi}}\big(\tau, \omega + \Delta e^j\big) \\ &\quad = u\big(\tau, \widetilde{\varphi}\big(\tau, \omega + \Delta e^j\big), \omega + \Delta e^j\big), \quad (\tau,\omega) \in \widetilde{\Omega}_h, \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

$$\begin{aligned} &\widetilde{\varphi}\big(0, \omega + \Delta e^j\big) \\ &\quad = \begin{cases} \nu, & j = 0,\ j = \overline{n+1, n+s} \\ \nu + \Delta e^j, & j = \overline{1,n} \end{cases}, \quad (0,\omega) \in \widetilde{\Omega}_h. \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

Позначивши $\Delta_j \tilde{x}(\tau,\omega) = \tilde{x}(\tau,\omega+\Delta e^j) - \tilde{x}(\tau,\omega)$, з (3.1.14), (3.1.16) одержуємо

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\Delta_j \widetilde{\varphi}(\tau,\omega)}{\Delta}\right) \\ &= \frac{1}{\Delta}\Big(u\big(\tau, \widetilde{\varphi}\big(\tau, \omega + \Delta e^j\big), \omega + \Delta e^j\big) - u\big(\tau, \widetilde{\varphi}(\tau,\omega), \omega\big)\Big), \ (\tau,\omega) \in \widetilde{\Omega}_h. \end{aligned}$$

Скориставшись лемою 3.1.10, бачимо, що існують функції $G$ і $g$, неперервні за всіма змінними, коли $(\tau,\omega)\in\widetilde{\Omega}_h$ і $|\Delta|>0$ є достатньо малим, такі, що

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\Delta_j\widetilde{\varphi}(\tau,\omega)}{\Delta}\right) = G(\tau,\omega,\Delta)\frac{\Delta_j\widetilde{\varphi}(\tau,\omega)}{\Delta}+g(\tau,\omega,\Delta),\quad (\tau,\omega)\in\widetilde{\Omega}_h. \tag{3.1.18}$$

З (3.1.15), (3.1.17) для достатньо малих $|\Delta|>0$ одержуємо

$$\frac{\Delta_j\widetilde{\varphi}(0,\omega)}{\Delta}=\begin{cases}0, & j=0,\ j=\overline{n+1,n+s}\\ e^j, & j=\overline{1,n}\end{cases},\ (0,\omega)\in\widetilde{\Omega}_h. \tag{3.1.19}$$

Розглянемо для достатньо малих $|\Delta|\geq 0$ задачу Коші

$$\dot{z}=G(\tau,\omega,\Delta)z+g(\tau,\omega,\Delta),\quad (\tau,\omega)\in\widetilde{\Omega}_h, \tag{3.1.20}$$

$$z(0,\omega,\Delta)=\begin{cases}0, & j=0,\ j=\overline{n+1,n+s}\\ e^j, & j=\overline{1,n}\end{cases},\ (0,\omega)\in\widetilde{\Omega}_h. \tag{3.1.21}$$

За теоремою 3.1.9 існує таке $h_1>0$, що на $\Omega_{h_1}\times(-h_1,h_1)$ існує єдиний розв'язок $z(\tau,\omega,\Delta)$ задачі Коші (3.1.20), (3.1.21), до того ж $z\in C(\Omega_{h_1}\times(-h_1,h_1))$. Для $\Delta\neq 0$ маємо $\Delta_j\widetilde{\varphi}(\tau,\omega)/\Delta = z(\tau,\omega,\Delta)$, тому

$$\frac{\partial\widetilde{\varphi}(\tau,\omega)}{\partial\omega_j}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta_j\widetilde{\varphi}(\tau,\omega)}{\Delta}=z(\tau,\omega,0),\quad (\tau,\omega)\in\Omega_{h_1}.$$

Таким чином, $\dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial\omega_j}\in C(\Omega_{h_1})$, $j=\overline{1,k}$, отже, $\varphi\in C^1(\Omega_{h_1})$. Теорему доведено. □

## 3.2. Продовження розв'язків

Розглянемо задачу Коші (3.1.1), (3.1.2). Далі будемо вважати, що ⦇ означає будь-яку з дужок: (, [, а ⦈ — будь-яку з дужок ), ].

**Означення 3.2.1.** Розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in ([a, b])$, рівняння (3.1.1) називається *продовжуваним вправо*, якщо існує розв'язок цього рівняння $x = \psi(t)$, $t \in ([a, b_1])$, який задовольняє умови

(i) $b < b_1$;

(ii) $\psi(t) = \varphi(t)$, $t \in ([a, b])$.

**Означення 3.2.2.** Розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in ([a, b])$, рівняння (3.1.1) називається *продовжуваним вліво*, якщо існує розв'язок цього рівняння $x = \psi(t)$, $t \in ([a_1, b])$, який задовольняє умови

(i) $a_1 < a$;

(ii) $\psi(t) = \varphi(t)$, $t \in ([a, b])$.

**Означення 3.2.3.** Розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in (\omega_-, \omega_+)$, рівняння (3.1.1) називається *непродовжуваним*, якщо він не є продовжуваним ані вліво, ані вправо.

**Означення 3.2.4.** Функція $f$ називається *локально ліпшицевою за* $x$ в $\Omega$ (позначається $f \in \mathrm{Lip}_x^{\mathrm{loc}}(\Omega)$), якщо для будь-якої точки $x^0 \in \Omega$ існують окіл $U\big(x^0\big)$ і стала $L > 0$, для яких $f \in \mathrm{Lip}_x\big(U\big(x^0\big), L\big)$.

Розглянемо критерій продовжуваності вправо.

**Лема 3.2.5.** *Нехай $f \in C(\Omega) \cap \mathrm{Lip}_x^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [a, b)$, рівняння* (3.1.1) *є продовжуваним вправо у тому і лише тому випадку, коли існує границя*

$$\lim_{t \to b^-} \varphi(t) = \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.1}$$

*де $(b, \eta) \in \Omega$.*

*Доведення.* 1. *Необхідність* існування границі (3.2.1) одразу випливає з означення 3.2.1.

2. *Достатність* існування границі (3.2.1). Нехай умову (3.2.1) виконано. Тоді за теоремою про існування та єдиність

розв'язку задачі Коші для нелінійної системи (див. теорему 3.1.4) для рівняння (3.1.1) існує єдиний розв'язок $x = \varphi^1(t)$, $t \in (b - \alpha, b + \alpha)$, задачі Коші з початковою умовою

$$x(b) = \eta, \tag{3.2.2}$$

де $\alpha > 0$ є досить малим. Позначимо $b_1 = b + \alpha$,

$$\psi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b), \\ \varphi^1(t), & t \in [b, b_1), \end{cases}$$

та покажемо, що $x = \psi(t)$, $t \in [a, b_1)$, є неперервним розв'язком інтегрального рівняння

$$x(t) = \psi(a) + \int_a^t f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [a, b_1). \tag{3.2.3}$$

Зрозуміло, що для $t \in [a, b)$ функція $\psi$ є розв'язком цього рівняння. Нехай $t \in [b, b_1)$. Підставимо $\psi$ в праву частину (3.2.3):

$$\psi(a)+\int_a^t f\big(\tau, \psi(\tau)\big)\, d\tau = \varphi(a)+\int_a^b f\big(\tau, \varphi(\tau)\big)\, d\tau+\int_b^t f\big(\tau, \varphi^1(\tau)\big)\, d\tau.$$

Скориставшись лемою 3.1.1 про еквівалентність задачі Коші інтегральному рівнянню, означенням $\psi$, (3.2.1) та (3.2.2), одержуємо

$$\begin{aligned} &\psi(a) + \int_a^t f\big(\tau, \psi(\tau)\big)\, d\tau \\ &\qquad = \varphi(b^-) + \int_b^t f\big(\tau, \varphi^1(\tau)\big)\, d\tau = \eta + \int_b^t f\big(\tau, \varphi^1(\tau)\big)\, d\tau \\ &\qquad = \varphi^1(b) + \int_b^t f\big(\tau, \varphi^1(\tau)\big)\, d\tau = \varphi^1(t) = \psi(t), \quad t \in [b, b_1). \end{aligned}$$

Знову застосовуючи лему 3.1.1 про еквівалентність задачі Коші інтегральному рівнянню, бачимо, що $x = \psi(t)$, $t \in [a, b_1)$, є розв'язком рівняння (3.1.1). $\square$

Зрозуміло, що аналогічний критерій має місце і для продовжуваності вліво.

**Лема 3.2.6.** *Нехай* $f \in C(\Omega) \cap \mathrm{Lip}_x^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Розв'язок* $x = \varphi(t)$, $t \in (a, b]$, *рівняння* (3.1.1) *є продовжуваним вліво у тому і лише тому випадку, коли існує границя*

$$\lim_{t \to a^+} \varphi(t) = \theta \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2.4}$$

*де* $(a, \theta) \in \Omega$.

Далі розглянемо лему про зв'язок локальної та глобальної ліпшицевості.

**Лема 3.2.7.** *Нехай* $f \in C(\Omega) \cap \mathrm{Lip}_x^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Тоді для будь-якого компакту* $G \Subset \Omega$ *існує* $L_G > 0$ *таке, що* $f \in \mathrm{Lip}_x(G, L_G)$.

*Доведення.* Припустимо супротивне. Нехай існує компакт $G \Subset \Omega$, послідовність $\{L_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ така, що

$$L_k \to +\infty, \quad \text{коли } k \to \infty,$$

і послідовності точок $\bigl\{\bigl(t_k, x^k\bigr)\bigr\}_{k \in \mathbb{N}} \subset G$ і $\bigl\{\bigl(t_k, \bar{x}^k\bigr)\bigr\}_{k \in \mathbb{N}} \subset G$ такі, що

$$\Bigl| f\bigl(t_k, x^k\bigr) - f\bigl(t_k, \bar{x}^k\bigr) \Bigr| > L_k \bigl| x^k - \bar{x}^k \bigr|. \tag{3.2.5}$$

З послідовностей $\bigl\{\bigl(t_k, x^k\bigr)\bigr\}_{k \in \mathbb{N}}$ і $\bigl\{\bigl(t_k, \bar{x}^k\bigr)\bigr\}_{k \in \mathbb{N}}$ можемо вибрати збіжні підпослідовності $\bigl\{\bigl(t_{k_m}, x^{k_m}\bigr)\bigr\}_{m \in \mathbb{N}}$ і $\bigl\{\bigl(t_{k_m}, \bar{x}^{k_m}\bigr)\bigr\}_{m \in \mathbb{N}}$, оскільки $G$ є компактом. Нехай

$$\bigl(t_{k_m}, x^{k_m}\bigr) \to \bigl(t_0, x^0\bigr) \text{ і } \bigl(t_{k_m}, \bar{x}^{k_m}\bigr) \to \bigl(t_0, \bar{x}^0\bigr), \quad \text{коли } m \to \infty.$$

Розглянемо функцію $F : V \to \mathbb{R}^n$, де $V \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ складається з точок околу $U\bigl(t_0, x^0, \bar{x}^0\bigr)$ в $\mathbb{R}^{2n+1}$, для яких $x \neq \bar{x}$, визначену формулою

$$F(t, x, \bar{x}) = \frac{|f(t, x) - f(t, \bar{x})|}{|x - \bar{x}|}.$$

Якщо окіл $U\big(t_0, x^0, \bar{x}^0\big)$ є досить малим, то функція $F$ є обмеженою на $V$. Дійсно, для точок $x = \bar{x}$ це випливає з виконання умови Ліпшиця в околі точки $\big(t_0, x^0\big)$, а для $x \neq \bar{x}$ це випливає з неперервності $f$. Але обмеженість $F$ суперечить (3.2.5), що і доводить лему. □

Наступною є лема про область існування розв'язків з початковими даними на компакті.

**Лема 3.2.8.** *Нехай $f \in C(\Omega) \cap \mathrm{Lip}_x^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Для будь-якого компакту $G \Subset \Omega$ існує $\mu > 0$ таке, що для будь-якої точки $\big(t_0, x^0\big) \in G$ існує єдиний розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu]$, задачі Коші* (3.1.1), (3.1.2).

*Доведення.* Позначимо

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2}\delta &= \mathrm{dist}(G, \partial\Omega) \\ &= \inf\left\{\big|(\tau, \xi) - (t, x)\big| \mid (\tau, \xi) \in \partial\Omega \wedge (t, x) \in G\right\}. \end{aligned}$$

Тоді для

$$\widehat{G} = \Big\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathrm{dist}(\{(t, x)\}, G) \leq \sqrt{2}\delta\Big\}$$

маємо (див. рис. 3.2)

$$G \subset \widehat{G} \subset \Omega.$$

Зрозуміло, що множина $\widehat{G}$ є обмеженою і замкненою, отже, $\widehat{G}$ є компактною множиною. З леми 3.2.7 випливає, що існує стала $L > 0$ така, що $f \in \mathrm{Lip}_x(\widehat{G}, L)$. Позначимо

$$\begin{aligned} \widehat{\Omega}\big(t_0, x^0\big) = \big\{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid& \\ &\big|t - t_0\big| \leq \delta \wedge \big|x - x^0\big| \leq \delta\big\}, \quad \big(t_0, x^0\big) \in G. \end{aligned}$$

Тоді

$$\widehat{\Omega}\big(t_0, x^0\big) \subset \widehat{G} \subset \Omega, \quad \big(t_0, x^0\big) \in G.$$

Позначимо також

$$M = \max_{(t,x) \in \widehat{G}} |f(t, x)|, \quad \mu = \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{L}\right\}.$$

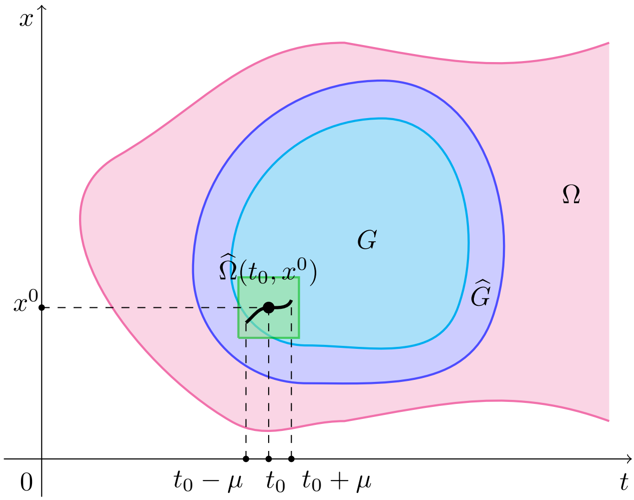



Рис. 3.2. Схема розташування множин $G$, $\widehat{G}$, $\Omega$ та $\widehat{\Omega}\big(t_0, x^0\big)$

Застосовуючи для будь-якої фіксованої точки $\big(t_0, x^0\big) \in G$ теорему 3.1.4 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для нелінійної системи в $\widehat{\Omega}\big(t_0, x^0\big)$, одержуємо, що існує єдиний розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu]$, задачі Коші (3.1.1), (3.1.2). Лему доведено. □

Далі розглянемо лему про продовжуваність розв'язку за межі компакту.

**Лема 3.2.9.** *Нехай* $f \in C(\Omega) \cap \mathrm{Lip}_x^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *та нехай* $G \subset \Omega$ *є компактом. Тоді для будь-якої фіксованої точки* $\big(t_0, x^0\big) \in G$ *задача Коші* (3.1.1), (3.1.2) *має єдиний розв'язок* $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$, *крім того,* $\big(t_0 + \varepsilon, \varphi(t_0 + \varepsilon)\big) \in \Omega \setminus G$.

*Доведення.* За теоремою 3.1.4 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для нелінійної системи в деякому околі будь-якої фіксованої точки $\big(t_0, x^0\big) \in \Omega$ існує єдиний розв'язок задачі Коші (3.1.1), (3.1.2). Ми завжди зважатимемо на цей факт упродовж доведення.

Побудуємо розв'язок, інтегральна траєкторія якого виходить за межі компакту $G$. Схему побудови цього розв'язку проілюстровано рис. 3.3. Зафіксуємо будь-яку точку $\left(t_0, x^0\right) \in G$. За лемою 3.2.8 про область існування розв'язків з початковими даними на компакті існує $\mu > 0$ та існує єдиний розв'язок $x = \varphi^0(t)$, $t \in [t_0 - \mu, t_0 + \mu]$, задачі Коші (3.1.1), (3.1.2). Якщо

$$\left(t_1, x^1\right) = \left(t_0 + \mu, \varphi^0(t_0 + \mu)\right) \in \Omega \setminus G,$$

то лему доведено. Якщо ж $\left(t_1, x^1\right) \in G$, то розглянемо для рівняння (3.1.1) задачу Коші з початковою умовою

$$x(t_1) = x^1.$$

Знову застосовуючи лему 3.2.8 про область існування розв'язків з початковими даними на компакті, бачимо, що існує єдиний розв'язок $x = \psi^1(t)$, $t \in [t_1 - \mu, t_1 + \mu]$, цієї задачі Коші. Отже,

$$\varphi^1(t) = \begin{cases} \varphi^0(t), & t \in [t_0, t_0 + \mu], \\ \psi^1(t), & t \in [t_0 + \mu, t_0 + 2\mu], \end{cases}$$

є єдиним розв'язком задачі Коші (3.1.1), (3.1.2) на $[t_0, t_0 + 2\mu]$. Якщо

$$\left(t_2, x^2\right) = \left(t_1 + \mu, \varphi^1(t_1 + \mu)\right) \in \Omega \setminus G,$$

то лему доведено. Якщо ж $(t_1, x^1) \in G$, то зробимо наступний крок. На $m$-му кроці одержуємо, що для задачі Коші для рівняння (3.1.1) з початковою умовою

$$x(t_m) = x^m$$

існує єдиний розв'язок $x = \psi^m(t)$, $t \in [t_m - \mu, t_m + \mu]$, отже,

$$\varphi^m(t) = \begin{cases} \varphi^{m-1}(t), & t \in [t_0, t_0 + m\mu], \\ \psi^m(t), & t \in [t_0 + m\mu, t_0 + (m+1)\mu], \end{cases}$$

є єдиним розв'язком задачі Коші (3.1.1), (3.1.2) на проміжку $[t_0, t_0 + (m+1)\mu]$. Позначимо

$$\left(t_{m+1}, x^{m+1}\right) = \left(t_m + \mu, \varphi^m(t_m + \mu)\right)$$

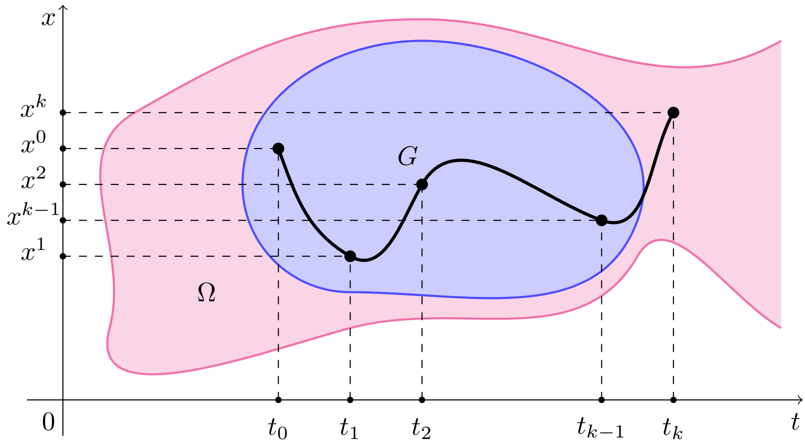



Рис. 3.3. Побудова розв'язку, що виходить за межі компакту $G$

$$= \big(t_0 + (m+1)\mu, \varphi^m(t_0 + (m+1)\mu)\big).$$

Зрозуміло, що $\big|\big(t_0, x^0\big) - \big(t_{m+1}, x^{m+1}\big)\big| \geq (m+1)\mu$. Оскільки компакт $G$ є обмеженим, для деякого $k \in \mathbb{N}$ маємо $\big(t_k, x^k\big) \in \Omega \setminus G$. Лему доведено. □

Нарешті розглянемо теорему про існування та єдиність непродовжуваного розв'язку.

**Теорема 3.2.10.** *Нехай $f \in C(\Omega) \cap \mathrm{Lip}_x^{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Для будь-якої точки $\big(t_0, x^0\big) \in \Omega$ задача Коші (3.1.1), (3.1.2) має єдиний непродовжуваний розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in (\omega_-, \omega_+)$.*

*Доведення.* З теореми 3.1.4 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші випливає, що умова $f \in C(\Omega) \cap \mathrm{Lip}_x^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ гарантує існування та єдиність розв'язку задачі Коші (3.1.1), (3.1.2) для будь-якої точки $\big(t_0, x^0\big) \in \Omega$ в деякому околі цієї точки. Ми завжди зважатимемо на цей факт упродовж доведення.

Побудуємо непродовжуваний розв'язок задачі Коші (3.1.1), (3.1.2). Схему побудови цього розв'язку проілюстровано рис. 3.4. Зафіксуємо будь-яку точку $\big(t_0, x^0\big) \in \Omega$. Доведемо спочатку існування непродовжуваного вправо розв'язку $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \omega_+)$, задачі Коші (3.1.1), (3.1.2). Позначимо

$$G_n = \left\{(t,x) \in \Omega \mid |(t,x)| \le n \wedge \operatorname{dist}\left(\{(t,x)\}, \partial\Omega\right) \ge 1/n\right\}.$$

Зрозуміло, що

$$G_n \text{ є компактом}, \ G_n \subset \Omega, n \in \mathbb{N}, \ \text{та} \ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n = \Omega.$$

Для точки $\left(t_0, x^0\right)$ знайдемо $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $\left(t_0, x^0\right) \in G_{n_0}$. Скориставшись лемою 3.2.9 про продовження розв'язку за межі компакту, знайдемо розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_0]$ задачі Коші (3.1.1), (3.1.2), для якого виконано умову

$$\left(t_1, x^1\right) = \left(t_0 + \varepsilon_0, \varphi^0(t_0 + \varepsilon_0)\right) \notin G_{n_0}.$$

Далі для кожного $m \in \mathbb{N}$ здійснимо наступну процедуру. Знайдемо $n_m \in \mathbb{N}$ таке, що $\left(t_m, x^m\right) \in G_{n_m}$, $n_m > n_{m-1}$. Знову скориставшись лемою 3.2.9 про продовження розв'язку за межі компакту, знайдемо розв'язок задачі Коші $x = \psi^m(t)$, $t \in [t_m, t_m + \varepsilon_m]$, для рівняння (3.1.1) з початковою умовою

$$x(t_m) = x^m,$$

для якого виконано умову

$$\left(t_{m+1}, x^{m+1}\right) = \left(t_m + \varepsilon_m, \psi^m(t_m + \varepsilon_m)\right) \notin G_{n_m}.$$

Позначивши

$$\varphi^m(t) = \begin{cases} \varphi^{m-1}(t), & t \in [t_0, t_m], \\ \psi^m(t), & t \in [t_m, t_{m+1}] = [t_m, t_m + \varepsilon_m], \end{cases}$$

бачимо, що $x = \varphi^m(t)$ є розв'язком задачі Коші (3.1.1), (3.1.2) на відрізку $[t_0, t_{m+1}]$ та

$$\left(t_m, x^m\right) \in G_{n_m} \quad \text{і} \quad \left(t_{m+1}, x^{m+1}\right) = \left(t_{m+1}, \varphi^m(t_{m+1})\right) \notin G_{n_m}.$$

Зрозуміло, що послідовність $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ є зростальною, а послідовність $\{(t_m, x^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$, де $x^m = \varphi^{m-1}(t_m)$, має наступну властивість:

$$G_{n_{m-1}} \not\ni (t_m, x^m) \in G_{n_m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Позначимо

$$\omega_+ = \lim_{m\to\infty} t_m = \sup\{t_m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

та позначимо

$$\varphi(t) = \varphi^m(t), \quad t \in [t_0, t_{m+1}].$$

Зрозуміло, що $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \omega_+)$, є єдиним розв'язком задачі Коші (3.1.1), (3.1.2). Покажемо, що цей розв'язок є непродовжуваним вправо.

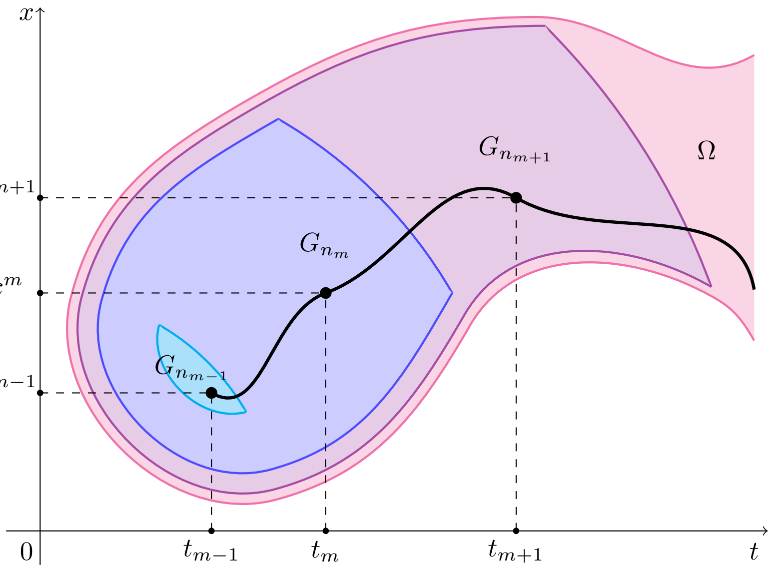



Рис. 3.4. Схема розташування областей $G_{n_m}$ та точок $(t_m, x^m)$ в області $\Omega$

Якщо $\omega_+ = +\infty$, то розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \omega_+)$, є непродовжуваним вправо за означенням 3.2.2.

Якщо $\omega_+ \in \mathbb{R}$ та не існує скінченної границі $\lim\limits_{t\to\omega^+} \varphi(t)$, то розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \omega_+)$, є непродовжуваним вправо за лемою 3.2.5 (критерієм продовжуваності розв'язку вправо).

Якщо $\omega_+ \in \mathbb{R}$ та існує скінченна границя $\lim\limits_{t\to\omega^+} \varphi(t) = x^+ \in \mathbb{R}$, то за побудовою послідовності $\{(t_m, x^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ маємо $(t_m, x^m) \to (\omega_+, x^+)$ і $(\omega_+, x^+) \notin \Omega$ (тобто $(\omega_+, x^+) \in \partial\Omega$). З леми 3.2.5 (критерію продовжуваності розв'язку вправо) випливає, що розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \omega_+)$, є непрдовжуваним вправо.

Таким чином, побудований нами розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \omega_+)$, задачі Коші (3.1.1), (3.1.2) є непродовжуваним вправо.

Існування непродовжуваного вліво розв'язку задачі Коші (3.1.1), (3.1.2) доводиться цілком аналогічно. □

Розглянемо тепер задачу Коші (3.1.1), (3.1.2) в області $\Omega$, в якій $f \in C(\Omega)$, але умову $f \in \mathrm{Lip}_x^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ не виконано. Тоді єдиність розв'язку в цій області не гарантується, але в околі точки $(t_0, x^0) \in \Omega$ існує хоча б один розв'язок задачі Коші (3.1.1), (3.1.2), тобто справедлива наступна теорема про існування розв'язку задачі Коші для нелінійної системи, доведення якою можна подивитися в [3, гл. 2, теорема 2.1].

**Теорема 3.2.11** (Пеано). *Нехай $f \in C(\Omega)$. Тоді існує $h > 0$ таке, що на множині $T_h = [t_0 - h, t_0 + h]$ існує розв'язок задачі Коші (3.1.1), (3.1.2).*

Крім того, для цієї задачі справедлива теорема про існування непродовжуваного розв'язку [3, гл. 2, теорема 3.1].

**Теорема 3.2.12.** *Нехай $f \in C(\Omega)$. Тоді для будь-якої точки $(t_0, x^0) \in \Omega$ задача Коші (3.1.1), (3.1.2) має непродовжуваний розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in (\omega_-, \omega_+)$.*

## 3.3. Загальні інтеграли нелінійних систем

Розглянемо нелінійну систему (3.1.1) і будемо вважати, що через кожну точку $(t_0, x^0) \in \Omega$ проходить єдиний розв'язок цієї системи і $f \in C(\Omega)$.

**Означення 3.3.1.** Функція $w : \Omega \to \mathbb{R}$, $w \in C^1(\Omega)$, називається *першим інтегралом системи* (3.1.1), якщо кожний розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in I$, цієї системи задовольняє умову $w\big(t, \varphi(t)\big) \equiv \mathrm{const}$ на $I$.

**Означення 3.3.2.** Нехай $v : \Omega \to \mathbb{R}$, $v \in C^1(\Omega)$. Тоді *похідною $v$ в силу системи* (3.1.1) називається

$$\begin{aligned}\dot{v}\big|_f (t,x) &= \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} f(t,x) \\ &= \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v(t,x)}{\partial x_j} f_j(t,x), \quad (t,x) \in \Omega.\end{aligned}$$

*Приклад* 3.3.3. Розглянемо систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3, \\ \dot{x}_2 = -x_1, & (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Тут $f(t, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$. Функція

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

є її загальним розв'язком. Покажемо, що $w(t, x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$, є першим інтегралом цієї системи. Маємо

$$\begin{aligned}w\big(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t)\big) &\equiv (C_1 \cos t + C_2 \sin t)^2 + (-C_1 \sin t + C_2 \cos t)^2 \\ &\equiv C_1^2 + C_2^2 \quad \text{на } \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Знайдемо також похідну $w$ в силу цієї системи:

$$\begin{aligned}\dot{w}\big|_f (t, x_1, x_2) &\equiv 0 + \big(2x_1, \quad 2x_2\big) \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \\ &\equiv 2x_1x_2 - 2x_2x_1 \equiv 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

У цьому прикладі похідна першого інтеграла системи в силу цієї системи тотожно дорівнює нулю. Як бачимо з наступної теореми, це не випадковість, а закономірність.

Розглянемо критерій того, що функція є першим інтегралом нелінійної системи.

**Теорема 3.3.4.** *Нехай $w : \Omega \to \mathbb{R}$, $w \in C^1(\Omega)$. Тоді $w$ є першим інтегралом системи (3.1.1) в тому і лише тому випадку, коли виконано умову*

$$\dot{w}\big|_f (t,x) \equiv 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{3.3.1}$$

*Доведення. Необхідність* (3.3.1). Нехай $w$ є першим інтегралом системи (3.1.1). Зафіксуємо будь-яку точку $\left(t_0, x^0\right) \in \Omega$ і знайдемо розв'язок цієї системи $x = \varphi(t)$, $t \in I$, який проходить через цю точку. Тоді

$$w\big(t, \varphi(t)\big) \equiv \text{const} \quad \text{на } I.$$

Продиференціюємо цю рівність за $t$:

$$\frac{\partial w(t,\varphi(t))}{\partial t} \equiv \left.\frac{\partial w(t,x)}{\partial t}\right|_{x=\varphi(t)} + \left.\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right|_{x=\varphi(t)} \dot{\varphi}(t) \equiv 0 \quad \text{на } I.$$

Ураховуючи те, що $x = \varphi(t)$, $t \in I$, є розв'язком системи (3.1.1), та підставляючи $t = t_0$, звідси одержуємо

$$0 = \frac{\partial w\big(t_0, x^0\big)}{\partial t} = \frac{\partial w\big(t_0, x^0\big)}{\partial t} + \frac{\partial w\big(t_0, x^0\big)}{\partial x} f\big(t_0, x^0\big) = \dot{w}\big(t_0, x^0\big)\big|_f .$$

Оскільки $\left(t_0, x^0\right)$ є довільною точкою області $\Omega$, умову (3.3.1) виконано.

*Достатність* (3.3.1). Нехай умову (3.3.1) виконано. Візьмемо будь-який розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in I$, системи (3.1.1). З (3.3.1) одержуємо

$$\frac{\partial w(t,\varphi(t))}{\partial t} \equiv \left.\frac{\partial w(t,x)}{\partial t}\right|_{x=\varphi(t)} + \left.\frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\right|_{x=\varphi(t)} \dot{\varphi}(t)$$

$$\equiv \left( \dot{w}|_f\,(t,x)\right)\Big|_{x=\varphi(t)} \equiv 0 \quad \text{на } I.$$

Отже,

$$w\big(t,\varphi(t)\big) \equiv \mathrm{const} \quad \text{на } I.$$

Тому $w$ є першим інтегралом системи (3.1.1). □

**Означення 3.3.5.** Нехай $u_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1,n}$. Функції $u_1, \ldots, u_n$ називаються *функціонально незалежними* за $x$ в $\Omega$, якщо

$$\det \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \neq 0, \quad (t,x) \in \Omega.$$

**Означення 3.3.6.** Функція $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $u \in C^1(\Omega)$, називається *загальним інтегралом системи* (3.1.1), якщо $u_j$ є першим інтегралом цієї системи, $j = \overline{1,n}$, і функції $u_1, \ldots, u_n$ є функціонально незалежними за $x$ в $\Omega$.

З теореми 3.3.4 одразу одержуємо наступний критерій того, що функція є загальним інтегралом нелінійної системи.

**Наслідок 3.3.7.** *Нехай у деякому околі точки* $\big(t_0, x^0\big) \in \Omega$ $u$ *є вектор-функцією зі значеннями в* $\mathbb{R}^n$ *і належить класу* $C^1$ *в цьому околі. Тоді* $u$ *є загальним інтегралом системи* (3.1.1) *в деякому околі точки* $\big(t_0, x^0\big)$ *тоді і лише тоді, коли виконано дві умови:*

(i) $\dot{u}|_f\,(t,x) \equiv 0$ *в околі точки* $\big(t_0, x^0\big)$;

(ii) $\det \dfrac{\partial u\big(t_0, x^0\big)}{\partial x} \neq 0.$

Розглянемо теорему про існування загального інтеграла нелінійної системи.

**Теорема 3.3.8.** *Нехай* $f \in C^1(\Omega)$. *Тоді в околі кожної точки* $\big(t_0, x^0\big) \in \Omega$ *існує загальний інтеграл системи* (3.1.1).

*Доведення.* Розглянемо для системи (3.1.1) задачу Коші з початковою умовою

$$x(\xi) = \nu. \tag{3.3.2}$$

За теоремою 3.1.11 про диференційовність розв'язку задачі Коші за параметрами та початковими умовами існує таке $h > 0$, що для кожного $(\xi, \nu) \in U_h\bigl(t_0, x^0\bigr) = \bigl\{(\eta, \mu) \mid \bigl|\eta - t_0\bigr| < h \wedge \bigl|\mu - x^0\bigr| < h\bigr\}$ існує єдиний розв'язок $x = \varphi(t, \xi, \nu)$, $t \in T_h(t_0) = (t_0 - h, t_0 + h)$, задачі Коші (3.1.1), (3.3.2), причому $\varphi \in C^1\bigl(T_h(t_0) \times U_h\bigl(t_0, x^0\bigr)\bigr)$ та

$$\varphi(\xi, \xi, \nu) = \nu, \quad (\xi, \xi, \nu) \in T_h(t_0) \times U_h\bigl(t_0, x^0\bigr). \tag{3.3.3}$$

Позначимо $u(t, x) = \varphi(t_0, t, x)$, $(t, x) \in U_h\bigl(t_0, x^0\bigr)$, та перевіримо, що $u$ є загальним інтегралом системи (3.1.1) в околі точки $\bigl(t_0, x^0\bigr)$. Нехай $x = \psi(t)$, $t \in I$, є розв'язком цієї системи в $U_h\bigl(t_0, x^0\bigr)$. Тоді для кожного $\xi \in I$ цей розв'язок задовольняє початкову умову вигляду (3.3.3):

$$x(\xi) = \psi(\xi).$$

Тому $\psi(t) = \varphi\bigl(t, \xi, \psi(\xi)\bigr)$, $\xi \in I$, за теоремою 3.1.4 існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Отже,

$$u\bigl(t, \psi(t)\bigr) \equiv \varphi\bigl(t_0, t, \psi(t)\bigr) \equiv \psi(t_0) = \mathrm{const} \quad \text{на } I.$$

Тобто кожна з компонент $u$ є першим інтегралом системи (3.1.1).

Залишилося довести, що $\det \dfrac{\partial u\bigl(t_0, x^0\bigr)}{\partial x} \neq 0$. Маємо

$$\frac{\partial u\bigl(t_0, x^0\bigr)}{\partial x} = \left.\frac{\partial \varphi\bigl(t_0, t_0, x\bigr)}{\partial x}\right|_{x = x^0} = \frac{\partial x}{\partial x} = \mathbb{I}.$$

Отже, $\det \dfrac{\partial u\bigl(t_0, x^0\bigr)}{\partial x} = 1 \neq 0$. Теорему доведено. □

Розглянемо теорему про зв'язок загального інтеграла з розв'язками нелінійної системи.

**Теорема 3.3.9.** *Нехай $f \in C^1(\Omega)$. Тоді в околі будь-якої точки $(t_0, x^0) \in \Omega$ існує загальний інтеграл $u$ системи (3.1.1). Крім того, якщо $v^0 = u(t_0, x^0)$, то існують околи $U(x^0), W(v^0)$, $T(t_0)$ такі, що*

(i) *функція $x = \varphi(t, v)$, $t \in T(t_0)$, неявно задана рівнянням*

$$u(t, x) = v, \quad t \in T(t_0),\ x \in U(x^0),\ v \in W(v^0), \tag{3.3.4}$$

*для будь-якого фіксованого $v \in W(v^0)$ є розв'язком системи (3.1.1);*

(ii) *для будь-якого розв'язку $x = \psi(t)$, $t \in I \subset T(t_0)$, системи (3.1.1) в $T(t_0) \times U(x^0)$ існує єдине $v \in W(v^0)$ таке, що*

$$u(t, \psi(t)) \equiv v \quad \text{на } t \in I. \tag{3.3.5}$$

*Доведення.* За теоремою 3.3.8 в деякому околі $V(t_0, x^0)$ будь-якої точці $(t_0, x^0) \in \Omega$ існує загальний інтеграл $u$ системи (3.1.1), зокрема, в цьому околі компоненти $u$ є першими інтегралами системи (3.1.1). Розглянемо рівняння (3.3.4) для $(t, x) \in V(t_0, x^0)$. Оскільки

$$\det \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \neq 0, \quad (t, x) \in V(t_0, x^0), \tag{3.3.6}$$

за теоремою про неявне відображення (див., наприклад, [10, гл. 12, § 2]) існують околи $U(x^0), W(v^0)$, $T(t_0)$ такі, що $T(t_0) \times U(x^0) \subset V(t_0, x^0)$, та рівняння (3.3.4) визначає єдину неявно задану функцію $x = \varphi(t, v)$, $t \in T(t_0)$, яка задовольняє умову $\varphi \in C^1(T(t_0) \times U(x^0))$.

(i) Покажемо, що для будь-якого фіксованого $v \in W(v^0)$ функція $x = \varphi(t, v)$, $t \in T(t_0)$, є розв'язком системи (3.1.1). Маємо

$$u(t, \varphi(t, v)) \equiv v \quad \text{в } T(t_0) \times W(v^0).$$

Тому

$$\frac{\partial u(t, \varphi(t, v))}{\partial t} \equiv \left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|_{x = \varphi(t, v)}$$

$$+ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=\varphi(t,v)} \frac{\partial \varphi(t,v)}{\partial t} \equiv 0 \ \text{ в } T\big(t_0\big) \times W\big(v^0\big).$$

Отже (див. (3.3.6)),

$$\frac{\partial \varphi(t,v)}{\partial t} \equiv - \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^{-1} \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{x=\varphi(t,v)} \quad \text{в } T\big(t_0\big) \times W\big(v^0\big). \tag{3.3.7}$$

З іншого боку, за наслідком 3.3.7 маємо

$$0 \equiv \dot{u}|_f\,(t,x) \equiv \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} f(t,x) \quad \text{в } T\big(t_0\big) \times U\big(x^0\big).$$

Тому (див. (3.3.6))

$$f(t,x) \equiv \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \quad \text{в } T\big(t_0\big) \times U\big(x^0\big).$$

Порівнюючи останню рівність з (3.3.7), одержуємо

$$\frac{\partial \varphi(t,v)}{\partial t} \equiv f(t, \varphi(t,v)) \quad \text{в } T\big(t_0\big) \times W\big(v^0\big),$$

тобто функція $x = \varphi(t,v)$, $t \in T\big(t_0\big)$, для будь-якого фіксованого $v \in W\big(v^0\big)$ є розв'язком системи (3.1.1). Твердження (i) доведено.

(ii) Нехай $x = \psi(t)$, $t \in I \subset T\big(t_0\big)$, є розв'язком системи (3.1.1) в $T\big(t_0\big) \times U\big(x^0\big)$. Зафіксуємо довільну точку $t^* \in I$ та позначимо $x^* = \psi(t^*)$, $v^* = u(t^*, x^*)$. Тоді $x = \varphi(t, v^*)$, $t \in T\big(t_0\big)$ є розв'язком системи (3.1.1) та $\varphi(t^*, v^*) = x^*$. За теоремою 3.1.4 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для системи (3.1.1) маємо

$$\psi(t) \equiv \varphi(t, v^*) \quad \text{на } I.$$

Оскільки функція $x = \varphi(t,v)$, $(t,v) \in T\big(t_0\big) \times W\big(v^0\big)$, неявно визначена рівнянням (3.3.4), співвідношення (3.3.5) виконано для $v = v^*$. Таким чином, твердження (ii) доведено. Отже, доведення теореми завершено. □

Звідси одразу одержуємо наслідок про загальний розв'язок нелінійної системи.

**Наслідок 3.3.10.** *Нехай* $f \in C^1(\Omega)$. *Тоді в околі будь-якої точки* $(t_0, x^0) \in \Omega$ *існує загальний інтеграл* $u$ *системи* (3.1.1) *і загальний розв'язок цієї системи неявно задається рівнянням*

$$u(t,x) = v, \quad \text{де } v \text{ пробігає деякий окіл точки } v^0 = u\big(t_0, x^0\big).$$

Розглянемо також теорему про загальний вигляд першого інтеграла нелінійної системи.

**Теорема 3.3.11.** *Нехай* $f \in C^1(\Omega)$ *і* $u$ *є загальним інтегралом системи* (3.1.1) *в околі точки* $(t_0, x^0) \in \Omega$. *Тоді функція* $w$ *класу* $C^1$ *є першим інтегралом системи* (3.1.1) *в околі точки* $(t_0, x^0) \in \Omega$ *тоді і лише тоді, коли існує функція* $\Phi$ *класу* $C^1$ *в околі точки* $v^0 = u(t_0, x^0)$ *така, що*

$$w(t,x) \equiv \Phi\big(u(t,x)\big) \quad \text{в околі точки } \big(t_0, x^0\big). \tag{3.3.8}$$

*Доведення. Необхідність* (3.3.8). Нехай функція $w$ класу $C^1$ є першим інтегралом системи (3.1.1) в околі $V(t_0, x^0)$ точки $(t_0, x^0) \in \Omega$. Як і в теоремі 3.3.9, знайдемо околи $U(x^0), W(v^0)$, $T(t_0)$ такі, що $T(t_0) \times U(x^0) \subset V(t_0, x^0)$ та рівняння (3.3.4) визначає єдину неявно задану функцію $x = \varphi(t, v)$, $t \in T(t_0)$, яка задовольняє умову $\varphi \in C^1(T(t_0) \times U(x^0))$.

За теоремою 3.3.9 для будь-якого $v \in W(v^0)$ функція $x = \varphi(t,v)$, $t \in T(t_0)$, є розв'язком системи (3.1.1) в $T(t_0) \times U(x^0)$ (за теоремою 3.3.9). Скориставшись означенням першого інтеграла, знаходимо

$$\Phi(v) := w\big(t, \varphi(t,v)\big), \quad t \in T\big(t_0\big), \; v \in W\big(v^0\big). \tag{3.3.9}$$

Оскільки $\varphi \in C^1(T(t_0) \times W(v^0))$ і $w \in C^1(T(t_0) \times U(x^0))$, маємо $\Phi \in C^1(W(v^0))$. Покажемо, що виконано (3.3.8). З (3.3.4) та (3.3.9) одержуємо

$$\Phi\big(u(t,x)\big) \equiv w\big(t, \varphi(t, u(t,x))\big) \equiv w(t,x) \quad \text{в } T\big(t_0\big) \times U\big(x^0\big),$$

тобто (3.3.8).

*Достатність* (3.3.8). Обчислимо похідну в силу системи (3.1.1) функції $w(t,x) \equiv \Phi(u(t,x))$ в околі $V\big(t_0, x^0\big)$. Маємо

$$\begin{aligned}\dot{w}\big|_f(t,x) &\equiv \left.\frac{\Phi(v)}{\partial v}\right|_{v=u(t,x)} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \left.\frac{\Phi(v)}{\partial v}\right|_{v=u(t,x)} \frac{\partial u(t,x)}{\partial x} f(t,x) \\ &\equiv \left.\frac{\Phi(v)}{\partial v}\right|_{v=u(t,x)} \dot{u}(t,x)\big|_f \quad \text{в } V\big(t_0, x^0\big).\end{aligned}$$

Скориставшись наслідком 3.3.7, одержуємо

$$\dot{u}\big|_f(t,x) \equiv 0 \quad \text{в } V\big(t_0, x^0\big),$$

тому

$$\dot{w}\big|_f(t,x) \equiv 0 \quad \text{в } V\big(t_0, x^0\big).$$

За теоремою 3.3.4 $w$ є першим інтегралом системи (3.1.1) в околі $V\big(t_0, x^0\big)$. Теорему доведено. □

## 3.3.1. Нелінійні системи, записані в симетричній формі

Систему (3.1.1) можна записати так:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1(t,x)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(t,x)}, \quad (t,x) \in \Omega.$$

Позначивши

$$x_0 = t, \quad f_0(t,x) = 1, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

одержуємо, що система (3.1.1) еквівалентна *нелінійній системі, записаній в симетричній формі:*

$$\frac{dx_0}{f_0(\bar{x})} = \frac{dx_1}{f_1(\bar{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(\bar{x})}, \quad \bar{x} \in \Omega. \tag{3.3.10}$$

Зазначимо також, що довільну систему вигляду (3.3.10) можна локально звести до системи вигляду (3.1.1), якщо

$$\bar{f} \in C(\Omega) \quad \text{і} \quad \left|\bar{f}(\bar{x})\right| \neq 0, \quad \bar{x} \in \Omega. \tag{3.3.11}$$

Далі розглядатимемо систему (3.3.10) з довільною функцією $f_0$. Сформулюємо означення розв'язку, інтегральної траєкторії, загального розв'язку, першого інтегралу, похідної в силу системи і загального інтеграла для нелінійної системи (3.3.10) (записаної в симетричній формі). Ці означення узагальнюють відповідні означення, сформульовані для системи (3.1.1) .

Нехай $m = \overline{0, n}$. Позначимо через $\widetilde{x}_m$ вектор, одержаний з вектора $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ після викреслення елемента $x_m$. Зрозуміло, що $\widetilde{x}_m \in \mathbb{R}^n$.

**Означення 3.3.12.** Нехай $m = \overline{0, n}$, $\bar{x}^0 \in \Omega$, $f_m\big(\bar{x}^0\big) \neq 0$. Вектор-функція $\widetilde{x}_m = \varphi_m(x_m)$, $x_m \in I$, називається *розв'язком* системи (3.3.10), якщо $f_m(\bar{x})\big|_{\widetilde{x}_m = \varphi(x_m)} \neq 0$, $x_m \in I$, і ця вектор-функція є розв'язком системи

$$\dot{x}_k = \frac{f_k(\bar{x})}{f_m(\bar{x})}, \quad m = \overline{0, n}, \ k \neq m,$$

в деякому околі точки $\bar{x}^0$ (див. означення (1.2.1)).

**Означення 3.3.13.** Нехай $m = \overline{0, n}$ зафіксовано. Множина $\{\mu(x_m) \mid x_m \in I\}$ називається *інтегральною траєкторією* системи (3.3.10), якщо $\mu_m(x_m) \equiv x_m$ і вектор-функція $\widetilde{x}_m = \widetilde{\mu}_m(x_m)$, $x_m \in I$, є розв'язком цієї системи. Тут $\widetilde{\mu}_m$ є вектором, одержаним з вектора $\mu = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$ після викреслення елемента $\mu_m$.

**Означення 3.3.14.** *Загальним розв'язком* системи (3.3.10) називається множина всіх її розв'язків.

**Означення 3.3.15.** Функція $w : \Omega \to \mathbb{R}$, $w \in C^1(\Omega)$, називається *першим інтегралом* системи (3.3.10), якщо для кожного розв'язку $\widetilde{x}_m = \varphi_m(x_m)$, $x_m \in I$, цієї системи маємо

$$w(\bar{x})\big|_{\widetilde{x}_m = \varphi_m(x_m)} \equiv 0 \quad \text{на } I, \quad m = \overline{0, n}.$$

**Означення 3.3.16.** Нехай $v : \Omega \to \mathbb{R}$, $v \in C^1(\Omega)$. Тоді *похідною $v$ в силу системи* (3.3.10) називається

$$\dot{v}|_{\bar{f}}(\bar{x}) = \frac{\partial v(\bar{x})}{\partial \bar{x}} f(\bar{x}) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial v(\bar{x})}{\partial x_j} \bar{f}_j(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \Omega.$$

З теореми 3.3.4 для системи (3.3.10) одразу одержуємо критерій того, що функція є першим інтегралом нелінійної системи, записаної в симетричній формі.

**Наслідок 3.3.17.** *Нехай виконано умову* (3.3.11). *Тоді функція $w \in C^1(\Omega)$ є першим інтегралом системи* (3.3.10) *тоді і лише тоді, коли виконано умову*

$$\frac{\partial w(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \bar{f}(\bar{x}) \equiv 0 \quad \text{в } \Omega. \tag{3.3.12}$$

**Означення 3.3.18.** Нехай $u_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n}$. Функції $u_1, \ldots, u_n$ називаються *функціонально незалежними* в $\Omega$, якщо

$$\operatorname{rank} \frac{\partial u(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = n, \quad \bar{x} \in \Omega.$$

**Означення 3.3.19.** Функція $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $u \in C^1(\Omega)$, називається *загальним інтегралом системи* (3.3.10), якщо $u_j$ є першим інтегралом цієї системи, $j = \overline{1, n}$, і функції $u_1, \ldots, u_n$ є функціонально незалежними в $\Omega$.

З наслідку 3.3.7 одразу випливає критерій того, що функція є загальним інтегралом нелінійної системи, записаної в симетричній формі.

**Наслідок 3.3.20.** *Нехай виконано* (3.3.11). *Нехай також $u$ є вектор-функцією зі значеннями в $\mathbb{R}^n$ і належить класу $C^1$ у деякому околі точки $\bar{x}^0 \in \Omega$. Тоді $u$ є загальним інтегралом системи* (3.3.10) *в деякому околі точки $\bar{x}^0$ тоді і лише тоді, коли виконано дві умови:*

(i) $\dfrac{\partial u(\bar{x})}{\partial \bar{x}} \bar{f}(\bar{x}) \equiv 0$ *в околі точки $\bar{x}^0$;*

(ii) $\operatorname{rank} \dfrac{\partial u\big(\bar{x}^0\big)}{\partial \bar{x}} = n.$

*Приклад* 3.3.21. Розглянемо нелінійну систему

$$\frac{dx_1}{x_1x_2} = \frac{dx_2}{-x_2^2} = \frac{dx_3}{2x_1x_3^2}, \quad x \in \Omega = (0, +\infty)^3. \tag{3.3.13}$$

До кінця цього прикладу ми розглядатимемо $x \in \Omega$. З

$$\frac{dx_1}{x_1x_2} = \frac{dx_2}{-x_2^2}$$

одержуємо

$$x_1x_2 = C_1, \tag{3.3.14}$$

де $C_1 \in \mathbb{R}$ є довільною сталою. З

$$\frac{dx_1}{x_1x_2} = \frac{dx_3}{2x_1x_3^2},$$

ураховуючи (3.3.14), маємо

$$2x_1\, dx = C_1 \frac{dx_3}{x_3^2},$$

отже,

$$x_1^2 = -\frac{C_1}{x_3} + C_2.$$

Ще раз застосовуючи (3.3.14), одержуємо

$$x_1^2 + \frac{x_1x_2}{x_3} = C_2, \tag{3.3.15}$$

де $C_2 \in \mathbb{R}$ є довільною сталою. Зрозуміло, що функції, які знаходяться в лівих частинах рівностей (3.3.14) і (3.3.15), є першими інтегралами системи (3.3.13). Позначимо

$$u(x_1, x_2, x_3) \equiv \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_1 x_2 / x_3 \end{pmatrix} \quad \text{в } \Omega \tag{3.3.16}$$

і покажемо, що $u$ є загальним інтегралом нашої системи. Для цього використаємо наслідок 3.3.20. Умову (i) виконано за побудовою. Перевіримо умову (ii):

$$\det \frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2)} \equiv \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ 2x_1 - x_2/x_3 & -x_1/x_3 \end{vmatrix} \equiv -2x_1^2 \neq 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Таким чином, $u$ є загальним інтегралом нашої системи в $\Omega$. Тому за наслідком 3.3.10 загальний розв'язок системи (3.3.13) в $\Omega$ має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = C_1, \\ x_1^2 + \dfrac{x_1 x_2}{x_3} = C_2. \end{cases}$$

## 3.4. Лінійні та квазілінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

Наслідок 3.3.17 пов'язує нелінійне рівняння (3.3.10) та лінійне рівняння з частинними похідними першого порядку (3.3.12). Далі скористаємося цим зв'язком.

### 3.4.1. Лінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

Розглянемо *лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку*

$$\frac{\partial z}{\partial x} A(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{3.4.1}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in C^1(\Omega)$, $|A(x)| \neq 0$ в $\Omega$. Рівняння (3.4.1) може бути записано в розгорнутому вигляді:

$$a_1(x)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots a_n(x)\frac{\partial z}{\partial x_n} = 0, \quad x \in \Omega.$$

Зіставимо з ним наступну систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, яка називається *системою характеристик:*

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x)}, \quad x \in \Omega. \tag{3.4.2}$$

Інтегральні траєкторії системи (3.4.2) називаються *характеристиками* рівняння (3.4.1).

**Означення 3.4.1.** Функція $z = w(x)$, $x \in D \subset \Omega$, називається *розв'язком* рівняння (3.4.1), якщо

$$\forall x \in D \quad \frac{\partial w(x)}{\partial x}A(x) = 0.$$

**Означення 3.4.2.** Поверхня $S = \{(x, w(x)) \mid x \in D\}$, $D \subset \Omega$, називається *інтегральною поверхнею* рівняння (3.4.1), якщо функція $z = w(x)$, $x \in D$, є розв'язком цього рівняння.

**Означення 3.4.3.** *Загальним розв'язком* рівняння (3.4.1) називається множина всіх його розв'язків.

Розглянемо критерій того, що функція є розв'язком лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку.

**Теорема 3.4.4.** *Для того щоб функція $z = w(x)$, $x \in D \subset \Omega$, була розв'язком рівняння* (3.4.1), *необхідно і досить, щоб вона була першим інтегралом системи* (3.4.2).

*Доведення.* Твердження цієї теореми одразу випливає з критерію того, що функція є першим інтегралом системи, записаної в симетричній формі (див. наслідок 3.3.17). □

З цієї теореми і теореми 3.3.11 про загальний вигляд першого інтеграла одразу одержуємо наступний наслідок про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку.

**Наслідок 3.4.5.** *Нехай $u$ є загальним інтегралом системи (3.4.2) в околі точки $x^0 \in \Omega$. Тоді функція $z = w(x)$ є розв'язком рівняння (3.4.1) в околі точки $x^0$ у тому і лише в тому випадку, коли існує функція $\Phi$ класу $C^1$ в околі точки $s^0 = u\big(x^0\big)$ така, що $w(x) \equiv \Phi\big(u(x)\big)$ в околі точки $x^0$.*

Таким чином, розв'язання лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку (3.4.1), фактично, зводиться до розв'язання нелінійної системи звичайних диференціальних рівнянь (3.4.2), яка є його системою характеристик.

*Приклад* 3.4.6. Розглянемо лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

$$x_1 x_2 \frac{\partial z}{\partial x_1} - x_2^2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + 2x_1 x_3 \frac{\partial z}{\partial x_3} = 0, \quad x \in \Omega = (0, +\infty)^3, \quad (3.4.3)$$

і знайдемо його загальний розв'язок. Нелінійна система (3.3.13) є системою характеристик цього рівняння. У прикладі 3.3.21 було доведено, що вектор-функція (3.3.16):

$$u(x_1, x_2, x_3) \equiv \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_1 x_2 / x_3 \end{pmatrix} \quad \text{в } \Omega$$

є загальним інтегралом системи характеристик (3.3.13). За наслідком 3.4.5 про загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння з частинними похідними першого порядку одержуємо, що загальний розв'язок рівняння (3.4.3) має вигляд:

$$z = \Phi\left(x_1 x_2, x_1^2 + \frac{x_1 x_2}{x_3}\right) \quad \text{в околі точки } x^0,$$

де $\Phi$ є довільною функцією класу $C^1$ в околі точки $s^0 = u\big(x^0\big)$ для довільної точки $x^0 \in \Omega$.

## 3.4.2. Квазілінійні рівняння з частинними похідними першого порядку

Розглянемо квазілінійне рівняння з частинними похідними першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}A(x,z) = b(x,z), \quad (x,z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_z, \tag{3.4.4}$$

де $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in C^1(\Omega)$, $b \in C^1(\Omega)$, $|A(x,z)| \neq 0$ в $\Omega$. Рівняння (3.4.1) може бути записано в розгорнутому вигляді:

$$a_1(x,z)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \cdots a_n(x,z)\frac{\partial z}{\partial x_n} = b(x,z), \quad (x,z) \in \Omega.$$

Зіставимо з ним систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, яка називається *системою характеристик:*

$$\frac{dx_1}{a_1(x,z)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x,z)} = \frac{dz}{b(x,z)}, \quad (x,z) \in \Omega. \tag{3.4.5}$$

Інтегральні траєкторії системи (3.4.5) називаються *характеристиками* рівняння (3.4.4).

**Означення 3.4.7.** Функція $z = \psi(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, називається *розв'язком* рівняння (3.4.4), якщо

(i) $\forall x \in D \quad (x, \psi(x)) \in \Omega$;

(ii) $\forall x \in D \quad \dfrac{\partial \psi(x)}{\partial x}A(x,\psi(x)) = b(x,\psi(x))$.

**Означення 3.4.8.** Поверхня $S = \{(x,\psi(x)) \mid x \in D\} \subset \Omega$, $D \subset \mathbb{R}^n$, називається *інтегральною поверхнею* рівняння (3.4.4), якщо функція $z = \psi(x)$, $x \in D$, є розв'язком цього рівняння.

**Означення 3.4.9.** *Загальним розв'язком* рівняння (3.4.4) називається множина всіх його розв'язків.

Розглянемо також допоміжне лінійне рівняння з частинними похідними першого порядку, для якого система (3.4.5) є системою характеристик:

$$\frac{\partial w}{\partial x}A(x,z) + \frac{\partial w}{\partial z}b(x,z) = 0, \quad (x,z) \in \Omega, \tag{3.4.6}$$

і розглянемо теорему про зв'язок квазілінійного та лінійного рівнянь з частинними похідними.

**Теорема 3.4.10.** *Нехай* $(x^0, z^0) \in \Omega$.

1. *Нехай* $z = \psi(x)$ *є розв'язком рівняння* (3.4.4) *в деякому околі точки* $\left(x^0, z^0\right)$, *де* $z^0 = \psi\left(x^0\right)$. *Тоді існує розв'язок* $w = \varphi(x,z)$ *рівняння* (3.4.6) *в деякому околі точки* $\left(x^0, z^0\right)$, *де* $\varphi\left(x^0, z^0\right) = 0$, *такий, що*

   (i) $\varphi(x, \psi(x)) \equiv 0$ *в досить малому околі точки* $x^0$*;*

   (ii) $\dfrac{\partial \varphi\left(x^0, z^0\right)}{\partial z} \neq 0.$

2. *Нехай* $w = \varphi(x,z)$ *є розв'язком рівняння* (3.4.6) *в деякому околі точки* $\left(x^0, z^0\right)$, *що задовольняє умову* (ii), *крім того* $\varphi\left(x^0, z^0\right) = 0$. *Тоді функція* $z = \psi(x)$, *яку неявно задано рівнянням*

   (iii) $\varphi(x,z) = 0$ *в досить малому околі точки* $\left(x^0, z^0\right)$,

   *є розв'язком рівняння* (3.4.4) *в деякому околі точки* $\left(x^0, z^0\right)$.

*Доведення.* 1. Оскільки $z = \psi(x)$ є розв'язком рівняння (3.4.4) в деякому околі точки $\left(x^0, z^0\right)$, одержуємо

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}A(x,\psi(x)) \equiv b(x,\psi(x)) \quad \text{в околі точки } x^0. \tag{3.4.7}$$

Маємо $\left|A\left(x^0, z^0\right)\right| \neq 0$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що

$$a_1\left(x^0, z^0\right) \neq 0. \tag{3.4.8}$$

Нехай $\widehat{u}(x,z)$ є загальним інтегралом системи характеристик (3.4.5) в околі точки $\left(x^0,z^0\right)$. Тоді за критерієм того, що функція є загальним інтегралом нелінійної системи (див. наслідок 3.3.20), маємо

$$\dot{\widehat{u}}\Big|_{\binom{A}{b}}(x,z) \equiv \frac{\partial\widehat{u}(x,z)}{\partial x}A(x,z) + \frac{\partial\widehat{u}(x,z)}{\partial z}b(x,z) \equiv 0 \tag{3.4.9}$$

в околі точки $\left(x^0,z^0\right)$ та

$$\operatorname{rank}\frac{\partial\widehat{u}\left(x^0,z^0\right)}{\partial(x,z)} = n.$$

Застосовуючи (3.4.8), одержуємо

$$\det\frac{\partial\widehat{u}\left(x^0,z^0\right)}{\partial(x_2,\ldots,x_n,z)} \neq 0. \tag{3.4.10}$$

Позначимо

$$u(x,z) := \left(\frac{\partial\widehat{u}\left(x^0,z^0\right)}{\partial(x_2,\ldots,x_n,z)}\right)^{-1}\widehat{u}(x,z) \quad \text{в околі точки } \left(x^0,z^0\right).$$

Тоді, враховуючи (3.4.9) та (3.4.10), в околі точки $\left(x^0,z^0\right)$ одержуємо

$$\frac{\partial u(x,z)}{\partial x}A(x,z) + \frac{\partial u(x,z)}{\partial z}b(x,z) \equiv 0, \tag{3.4.11}$$

$$\frac{\partial u\left(x^0,z^0\right)}{\partial(x_2,\ldots,x_n,z)} = \mathbb{I}_n, \tag{3.4.12}$$

де $\mathbb{I}_k$ є одиничною матрицею розміру $k\times k$, $k\in\mathbb{N}$. Скориставшись (3.4.7), з (3.4.11), одержуємо

$$0 \equiv \frac{\partial u(x,z)}{\partial x}\bigg|_{z=\psi(x)}A(x,\psi(x)) + \frac{\partial u(x,z)}{\partial z}\bigg|_{z=\psi(x)}\frac{\partial\psi(x)}{\partial z}A(x,\psi(x))$$
$$\equiv \frac{\partial}{\partial x}\big(u(x,\psi(x))\big)A(x,\psi(x)) \quad \text{в околі точки } x^0.$$

Позначивши $\widetilde{u}(x) := u\big(x, \psi(x)\big)$, $\widetilde{A}(x) := A(x, \psi(x))$, звідси одержуємо

$$\frac{\widetilde{u}(x)}{\partial x}\widetilde{A}(x) \equiv 0 \quad \text{в околі точки } x^0. \tag{3.4.13}$$

З (3.4.12) маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\widetilde{u}\big(x^0\big)}{\partial x} &= \frac{\partial u\big(x^0, z^0\big)}{\partial x} + \frac{\partial u\big(x^0, z^0\big)}{\partial z}\frac{\partial \psi\big(x^0\big)}{\partial x} \\
&= \frac{\partial u\big(x^0, z^0\big)}{\partial(x, z)}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_n \\ \dfrac{\partial \psi\big(x^0\big)}{\partial x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u\big(x^0, z^0\big)}{\partial x_1} & \mathbb{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbb{I}_n \\ \dfrac{\partial \psi\big(x^0\big)}{\partial x}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} * & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} * & \mathbb{I}_{n-1} \\ * & * \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Ураховуючи (3.4.13), одержуємо, що

$$\operatorname{rank}\frac{\widetilde{u}\big(x^0\big)}{\partial x} = n - 1.$$

Нехай

$$p(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

є загальним інтегралом системи характеристик, яка відповідає рівнянню (3.4.13), в околі точки $x^0$. Тоді

$$\frac{\partial p(x)}{\partial x}\widetilde{A}(x) \equiv 0 \text{ в околі точки } x^0, \tag{3.4.15}$$

$$\operatorname{rank}\frac{\partial p\big(x^0\big)}{\partial x} = n - 1, \tag{3.4.16}$$

$$\tilde{u}(x) \equiv \Phi\big(p(x)\big) \text{ в околі точки } x^0, \tag{3.4.17}$$

де $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix}$ є деякою функцією зі значеннями а $\mathbb{R}^n$ класу $C^1$ в околі точки $s^0 = p\big(x^0\big) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Тут ми скористалися критерієм того, що функція є загальним інтегралом нелінійної системи (див. наслідок 3.3.20) та наслідком 3.4.5 про загальний розв'язок лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку. З (3.4.14) та (3.4.17) одержуємо

$$\begin{pmatrix} * & \mathbb{I}_{n-1} \\ * & * \end{pmatrix} = \frac{\widetilde{u}\big(x^0\big)}{\partial x} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1\big(s^0\big)}{\partial s} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_{n-1}\big(s^0\big)}{\partial s} \\ \dfrac{\partial \Phi_n\big(s^0\big)}{\partial s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial p\big(x^0\big)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial p\big(x^0\big)}{\partial (x_2, \ldots, x_n)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1\big(s^0\big)}{\partial s} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_{n-1}\big(s^0\big)}{\partial s} \end{pmatrix} \dfrac{\partial p\big(x^0\big)}{\partial (x_2, \ldots, x_n)} \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1\big(s^0\big)}{\partial s} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_{n-1}\big(s^0\big)}{\partial s} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ та } \det \frac{\partial p\big(x^0\big)}{\partial (x_2, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Позначимо

$$v^0 = \Phi\big(s^0\big), \quad \widehat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \widehat{v}^0 = \begin{pmatrix} v_1^0 \\ \vdots \\ v_{n-1}^0 \end{pmatrix}.$$

Звідси, застосовуючи теорему про неявне відображення (див., наприклад, [10, гл. 12, § 2]), бачимо, що в досить малому околі точки $\big(s^0, \hat{v}^0\big)$ співвідношення

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(s) \\ \vdots \\ \Phi_{n-1}(s) \end{pmatrix} = \hat{v}$$

визначає єдине бієктивне відображення $\mu$ класу $C^1$ в області визначення таке, що

$$\begin{pmatrix} \Phi_1\big(\mu(\hat{v})\big) \\ \vdots \\ \Phi_{n-1}\big(\mu(\hat{v})\big) \end{pmatrix} = \hat{v}.$$

Тому

$$\Phi(s) = v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} s = \mu(\hat{v}) & \text{в околі точки } \big(s^0, \hat{v}^0\big), \\ \Phi_n\big(\mu(\hat{v})\big) = v_n & \text{в околі точки } \big(s^0, \hat{v}^0\big). \end{cases} \tag{3.4.18}$$

Позначимо

$$\Phi_0(v) := \big(\Phi_n \circ \mu\big)(\hat{v}) - v_n \quad \text{в околі точки } v^0$$

і розглянемо функцію $\varphi(x, z) := \Phi_0\big(u(x, z)\big)$ в околі точки $\big(x^0, z^0\big)$. За наслідком 3.4.5 про загальний розв'язок лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку функція $w = \varphi(x, z)$ є розв'язком (3.4.6) в досить малому околі точки $\big(x^0, z^0\big)$. Враховуючи (3.4.17), одержуємо

$$\Phi\big(p(x)\big) \equiv \tilde{u}(x) \equiv u\big(x, \psi(x)\big) \quad \text{в досить малому околі точки } x^0.$$

Скориставшись означенням функцій $\Phi_0$ і $\varphi$ та співвідношенням (3.4.18), звідси одержуємо

$$\Phi\big(p(x)\big) \equiv u\big(x, \psi(x)\big)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p(x) \equiv \mu\big(u_1(x,\psi(x)),\dots,u_{n-1}(x,\psi(x))\big) & \text{в околі точки } x^0, \\ \varphi\big(x,\psi(x)\big) \equiv \Phi_0\big(u(x,\psi(x))\big) \equiv 0 & \text{в околі точки } x^0, \end{cases}$$

тобто умову (i) для функції $w = \varphi(x,z)$ виконано. Покажемо, що для неї виконано і умову (ii). Застосовуючи (3.4.12), одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi\big(x^0,z^0\big)}{\partial z} &= \frac{\partial\Phi_0\big(v^0\big)}{\partial v}\frac{\partial u\big(x^0,z^0\big)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial\Phi_0\big(v^0\big)}{\partial v}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{\partial\Phi_0\big(v^0\big)}{\partial v_n} = -1 \neq 0, \end{aligned}$$

тобто умову (ii) для функції $w = \varphi(x,z)$ також виконано. Таким чином, пункт 1 теореми доведено.

2. Оскільки функція $z = \psi(x)$ визначається рівнянням (iii), одержуємо

$$\varphi\big(x,\psi(x)\big) \equiv 0 \quad \text{в околі точки } x^0.$$

Тому в цьому околі маємо

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{\partial}{\partial x}\big(\varphi(x,\psi(x))\big) \\ &\equiv \left(\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z}\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}\right)\bigg|_{z=\psi(x)}. \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Крім того, оскільки функція $w = \varphi(x,z)$ є розв'язком рівняння (3.4.6) в околі точки $\big(x^0,z^0\big)$, в цьому околі маємо

$$\left(\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial x}A(x,z) + \frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z}b(x,z)\right)\bigg|_{z=\psi(x)} \equiv 0. \tag{3.4.20}$$

Помноживши (3.4.19) на $A(x,\psi(x))$ справа та віднявши від нього (3.4.20), одержуємо

$$\left(\frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x}A(x,z) - b(x,z)\right)\right)\bigg|_{z=\psi(x)} \equiv 0 \text{ в околі точки } x^0.$$

Звідси, скориставшись (ii), одержуємо, що функція $z = \psi(x)$ є розв'язком рівняння (3.4.4) в околі точки $x^0$. Таким чином, пункт 2 теореми доведено, отже, теорему повністю доведено. $\square$

З цієї теореми, застосовуючи до (3.4.6) наслідок 3.4.5 про загальний розв'язок лінійного рівняння з частинними похідними першого порядку, одержуємо наслідок про загальний розв'язок квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку.

**Наслідок 3.4.11.** *Нехай $\big(x^0, z^0\big) \in \Omega$ та нехай $u$ є загальним інтегралом системи характеристик* (3.4.5) *в околі точки $\big(x^0, z^0\big)$. Тоді загальний розв'язок системи* (3.4.4) *в околі точки $\big(x^0, z^0\big)$ неявно визначається рівнянням*

$$\Phi\big(u(x,z)\big) = 0,$$

*де $\Phi$ є довільною функцією класу $C^1$ в околі точки $v^0 = u\big(x^0, z^0\big)$, яка задовольняє умови:*

$$\Phi\big(v^0\big) = 0 \quad \text{та} \quad \frac{\partial}{\partial z}\Big(\Phi\big(u(x,z)\big)\Big)\Big|_{(x,z)=(x^0,z^0)} \neq 0.$$

*Зауваження* 3.4.12. Фактично для будь-якого розв'язку $z = \psi(x)$ рівняння (3.4.4) в околі точки $\big(x^0, z^0\big)$ та загального інтеграла $u \in C^1$ системи характеристик (3.4.5) в околі цієї точки після вилучення змінних $x$, $z$ в системі

$$\begin{cases} u(x,z) = s, \\ z = \psi(x), \end{cases}$$

де $s^0 = u\big(x^0, z^0\big)$, одержуємо співвідношення

$$\Phi(s) = 0 \quad \text{в околі точки } s^0,$$

яке неявно визначає розв'язок $z = \psi(x)$ в околі точки $\big(x^0, z^0\big)$:

$$\Phi\big(u(x,z)\big) = 0,$$

де $\Phi \in C^1$ в околі точки $s^0$, $\Phi\big(s^0\big) = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial z}\Phi\big(u\big(x^0, z^0\big)\big) \neq 0$.

*Приклад* 3.4.13. Розглянемо рівняння

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=z,\quad (x,z)\in\Omega=(0,+\infty)\times\mathbb{R}^2, \tag{3.4.21}$$

і знайдемо його загальний розв'язок. Система

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dz}{z},\quad (x,z)\in\Omega,$$

є системою характеристик цього рівняння. Функції

$$u_1(x,z)\equiv x_2/x_1,\quad u_2(x,z)\equiv z/x_1 \quad \text{в } \Omega$$

є першими інтегралами системи характеристик. Оскільки

$$\det\frac{\partial u(x,z)}{\partial(x_2,z)}\equiv\begin{vmatrix}1/x_1 & 0\\ 0 & 1/x_1\end{vmatrix}\equiv\frac{1}{x_1^2}\neq 0 \quad \text{в } \Omega,$$

вектор-функція

$$u(x,z)=\begin{pmatrix}x_2/x_1\\ x_2/x_1\end{pmatrix}\quad \text{в } \Omega \tag{3.4.22}$$

є загальним інтегралом системи характеристик. За наслідком 3.4.11 про загальний розв'язок квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку одержуємо, що загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1},\frac{z}{x_1}\right)=0 \quad \text{в околі точки } \left(x^0,z^0\right), \tag{3.4.23}$$

де $\Phi$ є довільною функцією класу $C^1$ в околі точки $v^0 = u\left(x^0,z^0\right)$ для довільної точки $\left(x^0,z^0\right)\in\Omega$ та задовольняє умову $\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\Big(\Phi\big(u(x,z)\big)\Big)\right|_{(x,z)=(x^0,z^0)}\neq 0.$

### 3.4.3. Зв'язок між інтегральними поверхнями та характеристиками диференціальних рівнянь з частинними похідними

Продовжуємо розглядати рівняння (3.4.4). Також розглянемо параметризовану систему характеристик:

$$\frac{dx_1}{a_1(x,z)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x,z)} = \frac{dz}{b(x,z)} = \frac{d\tau}{1}, \quad (x,z,\tau) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{3.4.24}$$

Її розв'язки подаватимемо у вигляді:

$$x = X(\tau), \quad z = Z(\tau), \quad \tau \in (\alpha, \beta).$$

Розглянемо теорему про поверхню, якої торкається кожна характеристика, яка через неї проходить.

**Теорема 3.4.14.** *Нехай $S = \{(x, \zeta(x)) \mid x \in D\}$ є поверхнею в $\Omega$, $\zeta \in C^1(D)$. Якщо для будь-якої точки $\left(x^0, z^0\right) \in S$ характеристика, яка проходить через цю точку, торкається $S$, то $S$ є інтегральною поверхнею рівняння* (3.4.4).

*Доведення.* Обчислимо вектор нормалі до поверхні $S$ у довільній точці $\left(x^0, z^0\right) \in S$. Маємо

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \partial\zeta\left(x^0\right)/\partial x \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Якщо характеристика $x = X(\tau)$, $z = Z(\tau)$, $\tau \in (\alpha, \beta)$, проходить через точку $\left(x^0, z^0\right)$ і торкається в цій точці поверхні $S$, то для деякого $\tau_0 \in (\alpha, \beta)$ маємо

$$x^0 = X(\tau_0), \quad z^0 = Z(\tau_0)$$

та вектор $\begin{pmatrix} dX(\tau_0)/d\tau \\ dZ(\tau_0)/d\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\left(x^0, z^0\right) \\ b\left(x^0, z^0\right) \end{pmatrix}$ є дотичним до поверхні $S$ у точці $\left(x^0, z^0\right)$ і ортогональним нормалі $\mathbf{n}$. Тому

$$0 = \begin{pmatrix} \partial\zeta\left(x^0\right)/\partial x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A\left(x^0, z^0\right) \\ b\left(x^0, z^0\right) \end{pmatrix} = \frac{\partial\zeta\left(x^0\right)}{\partial x} A\left(x^0, z^0\right) - b\left(x^0, z^0\right).$$

Оскільки $(x^0, z^0)$ є довільною точкою поверхні $S$, поверхня $S$ є інтегральною поверхнею рівняння (3.4.4). □

Також розглянемо теорему про характеристику, яка перетинає інтегральну поверхню.

**Теорема 3.4.15.** *Нехай $S = \{(x, \zeta(x)) \mid x \in D\}$ є інтегральною поверхнею рівняння (3.4.4) в $\Omega$. Нехай $(x^0, z^0) \in S$. Якщо характеристика $x = X(\tau)$, $z = Z(\tau)$, $\tau \in (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta)$, рівняння (3.4.4) перетинає інтегральну поверхню $S$ у точці $(x^0, z^0)$, де $x^0 = X(\tau_0)$ та $z^0 = Z(\tau_0)$, то вона цілком лежить на цій поверхні для достатньо малих $\delta > 0$.*

*Доведення.* Позначимо $u(\tau) = \zeta(X(\tau))$, $\tau \in (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta)$, де $\delta > 0$ є досить малим (настільки, щоб суперпозиція $\zeta \circ X$ була визначеною). Для доведення теореми досить довести, що

$$Z(\tau) = u(\tau), \quad \tau \in (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta). \tag{3.4.25}$$

Оскільки $x = X(\tau)$, $z = Z(\tau)$, $\tau \in (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta)$, є характеристикою, а $S$ є інтегральною поверхнею рівняння (3.4.4), маємо

$$\begin{aligned}\frac{du(\tau)}{d\tau} &= \left.\frac{\partial \zeta(x)}{\partial x}\right|_{x=X(\tau)} \frac{dX(\tau)}{d\tau} = \left.\frac{\partial \zeta(x)}{\partial x} A(x,z)\right|_{\substack{x=X(\tau)\\ z=Z(\tau)}} \\ &= b(X(\tau), Z(\tau)) = \frac{dZ(\tau)}{d\tau}, \quad \tau \in (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta).\end{aligned}$$

Отже,

$$Z(\tau) + C = u(\tau), \quad \tau \in (\tau_0 - \delta, \tau_0 + \delta).$$

Маємо

$$z^0 = \zeta(X(\tau_0)) = u(\tau_0) = Z(\tau_0) + C = z^0 + C.$$

Тому $C = 0$ і (3.4.25) виконано. □

## 3.4.4. Задача Коші для квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку

Розглянемо квазілінійне диференціальне рівняння з частинними похідними (3.4.4) за умови

$$z(x)|_S = \varphi(x), \tag{3.4.26}$$

де $S = \{x \in \Omega \mid \gamma(x) = 0\}$, $\gamma \in C^1(\Omega)$, $|\partial\gamma(x)/\partial x| \neq 0$, $x \in S$.

**Означення 3.4.16.** Задача пошуку розв'язку рівняння (3.4.4), який задовольняє умову (3.4.26), називається *задачею Коші* для цього рівняння, а умови (3.4.26) називаються *умовами Коші*.

Справедлива наступна теорема про розв'язок задачі Коші для квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними.

**Теорема 3.4.17.** *Нехай* $\left(x^0, z^0\right) \in \Omega$, $\gamma\left(x^0\right) = 0$. *Нехай* $u$ *є загальним інтегралом системи характеристик* (3.4.5). *Нехай також*

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u\left(x^0, z^0\right)}{\partial x} & \dfrac{\partial u\left(x^0, z^0\right)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \gamma\left(x^0\right)}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \tag{3.4.27}$$

$\Phi(s) = \mu(s) - \varphi\big(\nu(s)\big)$, *де* $x = \nu(s)$ *та* $z = \mu(s)$ *класу* $C^1$ *в околі точки* $s^0 = u\left(x^0, z^0\right)$ *однозначно визначається в цьому околі системою*

$$\begin{cases} u(x, z) = s, \\ \gamma(x) = 0. \end{cases} \tag{3.4.28}$$

*Тоді рівняння*

$$\Phi\big(u(x, z)\big) = 0 \tag{3.4.29}$$

*визначає в околі точки* $\left(x^0, z^0\right)$ *функцію* $z = \psi(x)$, *яка є єдиним розв'язком задачі Коші* (3.4.4), (3.4.26).

*Доведення.* Нехай $z = \psi(x)$ є розв'язком задачі Коші (3.4.4), (3.4.26) в околі точки $\big(x^0, z^0\big)$. За наслідком 3.4.11 про загальний розв'язок квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку цей розв'язок визначається рівнянням

$$\Phi\big(u(x,z)\big) = 0 \quad \text{в околі точки } \big(x^0, z^0\big), \tag{3.4.30}$$

де $\Phi$ одержуємо в околі точки $\big(x^0, z^0, s^0\big)$ вилученням змінних $x$ та $z$ з системи

$$\begin{cases} u(x,z) = s, \\ \gamma(x) = 0, \\ z = \varphi(x). \end{cases} \tag{3.4.31}$$

Застосовуючи теорему про неявне відображення (див., наприклад, [10, гл. 12, § 2]) та враховуючи (3.4.27), одержуємо, що перші два рівняння цієї системи однозначно визначають в околі точки $(x^0, z^0, s^0)$ неявні функції:

$$\begin{cases} x = \nu(s), \\ z = \mu(s), \end{cases}$$

де $\nu$ та $\mu$ є функціями класу $C^1$ в околі точки $s^0$. Отже, беручи до уваги останнє рівняння системи (3.4.31), одержуємо

$$\Phi(s) = \mu(s) - \varphi\big(\nu(s)\big) \quad \text{в околі точки } s^0. \tag{3.4.32}$$

Таким чином, наш розв'язок задовольняє рівняння (3.4.30) з функцією $\Phi$, заданою (3.4.32).

Перевіримо тепер, що рівняння (3.4.30) з функцією $\Phi$, заданою (3.4.32), визначає єдиний розв'язок рівняння (3.4.4) в околі точки $\big(x^0, z^0\big)$ і цей розв'язок задовольняє крайову умову (3.4.26). В околі точки $\big(x^0, z^0, s^0\big)$ за побудовою функцій $\nu$ та $\mu$ маємо

$$\begin{cases} x = \nu\big(u(x,z)\big), \\ z = \mu\big(u(x,z)\big), \\ \gamma(x) = 0. \end{cases} \tag{3.4.33}$$

Тому

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\nu\big(s^0\big)}{\partial s}\dfrac{\partial u\big(x^0,z^0\big)}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial\mu\big(s^0\big)}{\partial s}\dfrac{\partial u\big(x^0,z^0\big)}{\partial z}=1.\end{cases}$$

Отже,

$$\frac{\partial}{\partial z}\Big(\Phi\big(u(x,z)\big)\Big)\Big|_{(x,z)=(x^0,z^0)}$$
$$=\frac{\partial\mu\big(s^0\big)}{\partial s}\frac{\partial u\big(x^0,z^0\big)}{\partial z}-\frac{\partial\varphi\big(x^0\big)}{\partial x}\frac{\partial\nu\big(s^0\big)}{\partial s}\frac{\partial u\big(x^0,z^0\big)}{\partial z}=1.$$

З наслідку 3.4.11 про загальний розв'язок квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку випливає, що рівняння (3.4.30) з функцією $\Phi$, заданою (3.4.32), визначає єдиний розв'язок рівняння (3.4.4) в околі точки $\big(x^0,z^0\big)$. З (3.4.33) випливає, що для цього розв'язку умову (3.4.26) виконано. □

*Зауваження* 3.4.18. Якщо умову (3.4.27) теореми 3.4.17 не виконано, то потрібні додаткові дослідження.

*Приклад* 3.4.19. Розглянемо рівняння (3.4.21):

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=z,\quad (x,z)\in\Omega=(0,+\infty)\times\mathbb{R}^2,$$

з однією з трьох умов:

(а) $\begin{cases} x_1^2+x_2^2=1\\ z=1\end{cases}$ в околі точки $(1,0,1)$;

або

(б) $\begin{cases} x_2=0\\ z=x_1\end{cases}$ в околі точки $(1,0,1)$;

або

(в) $\begin{cases} x_1-x_2=0\\ z=1\end{cases}$ в околі точки $(1,1,1)$.

У прикладі 3.4.13 було знайдено загальний інтеграл системи характеристик рівняння (3.4.21) (див. (3.4.22)):

$$u(x,z) = \begin{pmatrix} x_2/x_1 \\ z/x_1 \end{pmatrix}.$$

Далі ми по черзі розглянемо умови (а)–(в).

(а) Маємо $\gamma(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$, $\varphi(x_1,x_2) = 1$,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_2/x_1^2 & 1/x_1 & 0 \\ -z/x_1^2 & 0 & 1/x_1 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{x_1^3}\left(x_1^2 + x_2^2\right).$$

Цей детермінант не дорівнює нулю в точці $(1,0,1)$, тобто умову (3.4.27) теореми 3.4.17 про розв'язок задачі Коші для квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними виконано. Отже, в околі точки $(1,0,1)$ існує єдиний розв'язок задачі Коші (3.4.21), (а). Знайдемо цей розв'язок. Для цього в системі

$$\begin{cases} x_2/x_1 = s_1, \\ z/x_1 = s_2, \\ x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ z = 1 \end{cases}$$

виразимо змінні $x_1$, $x_2$, $z$ через $s_1$ і $s_2$. Маємо

$$\Phi(s_1,s_2) \equiv s_1^2 - s_2^2 + 1 = 0.$$

Тому згідно зі згаданою вище теоремою розв'язок задачі Коші (3.4.21)(а) задається рівнянням

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{z}{x_1}\right) = 0 \quad \text{в околі точки } (1,0,1),$$

тобто

$$x_1^2 + x_2^2 = z^2 \quad \text{в околі точки } (1,0,1).$$

Ураховуючи те, що ми розглядаємо розв'язок в околі точки $(1, 0, 1)$, маємо

$$z = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{в околі точки } (1, 0, 1).$$

(б) Маємо $\gamma(x_1, x_2) = x_2$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1$,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_2/x_1^2 & 1/x_1 & 0 \\ -z/x_1^2 & 0 & 1/x_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{x_2}{x_1^3}.$$

Цей детермінант дорівнює нулю в точці $(1, 0, 1)$, тобто умову (3.4.27) теореми 3.4.17 про розв'язок задачі Коші для квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними не виконано. Тому застосувати цю теорему для дослідження задачі Коші (3.4.21)(б) неможливо.

У прикладі 3.4.13 було знайдено загальний розв'язок рівняння (3.4.21) (див. (3.4.23)). Скориставшись ним, одержуємо, що будь-який розв'язок цього рівняння в околі точки $(1, 0, 1)$ має вигляд

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{z}{x_1}\right) = 0 \quad \text{в околі точки } (1, 0, 1),$$

де $\Phi \in C^1$ в околі точки $(0, 1)$ та $\dfrac{\partial \Phi(0, 1)}{\partial s_2} \neq 0$. Знайдемо відповідне $\Phi$. З крайових умов (б), одержуємо

$$\Phi(0, 1) = 0.$$

Тому множина розв'язків задачі Коші (3.4.21)(б) задається співвідношенням

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{z}{x_1}\right) = 0 \quad \text{в околі точки } (1, 0, 1),$$

де $\Phi \in C^1$ в околі точки $(0, 1)$, $\Phi(0, 1) = 0$ та $\dfrac{\partial \Phi(0, 1)}{\partial s_2} \neq 0.$

(в) Маємо $\gamma(x_1, x_2) = x_1 - x_2$, $\varphi(x_1, x_2) = 1$,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \gamma}{\partial x_2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x_2/x_1^2 & 1/x_1 & 0 \\ -z/x_1^2 & 0 & 1/x_1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{x_1^3}(x_1 - x_2).$$

Цей детермінант дорівнює нулю в точці $(1, 1, 1)$, тобто умову (3.4.27) теореми 3.4.17 про розв'язок задачі Коші для квазілінійного диференціального рівняння з частинними похідними не виконано. Тому застосувати цю теорему для дослідження задачі Коші (3.4.21)(в) неможливо.

У прикладі 3.4.13 було знайдено загальний розв'язок рівняння (3.4.21) (див. (3.4.23)). Скориставшись ним, одержуємо, що будь-який розв'язок цього рівняння в околі точки $(1, 1, 1)$ має вигляд

$$\Phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{z}{x_1}\right) = 0 \quad \text{в околі точки } (1, 1, 1),$$

де $\Phi$ є функцією класу $C^1$ в околі точки $(1, 1)$ та $\dfrac{\partial \Phi(0, 1)}{\partial s_2} \neq 0$. Знайдемо відповідне $\Phi$. З крайових умов (в) одержуємо, що для розв'язку $z = \psi(x)$ задачі Коші (3.4.21)(в) в околі точки $(1, 1, 1)$ виконано співвідношення

$$\Phi\left(1, \frac{1}{x_1}\right) \equiv 0 \quad \text{в околі точки } (1, 1, 1).$$

Отже,

$$\Phi(s_1, s_2) = \Phi_0(s_1) \quad \text{в околі точки } (1, 1),$$

де $\Phi_0(1) = 0$ та $\Phi_0 \in C^1$ в околі точки 1, тобто $\Phi$ не залежить від $s_2$ в околі точки $(1, 1)$. Таким чином, розв'язок задачі Коші (3.4.21)(в) має задаватися співвідношенням

$$\Phi_0\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = 0 \quad \text{в околі точки } (1, 1, 1).$$

Але таке співвідношення не визначає жодного розв'язку рівняння (3.4.21), отже, задача Коші (3.4.21)(в) не має розв'язків в околі точки $(1, 1, 1)$.

# Розділ 4

# Стійкість за Ляпуновим

## 4.1. Загальні відомості

Розглянемо систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \tag{4.1.1}$$

де $\Omega$ є областю, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.

**Означення 4.1.1.** Розв'язок $x = \varphi^0(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системи (4.1.1) називається *стійким за Ляпуновим* (див. рис. 4.1, 4.2), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для будь-якого $x^0 \in \mathbb{R}^n$, такого, що $\big(t_0, x^0\big) \in \Omega$ та $\big|\varphi^0(t_0) - x^0\big| < \delta$, будь-який розв'язок $x = \varphi(t)$, який задовольняє умову $\varphi(t_0) = x^0$, є визначеним на $[t_0, +\infty)$ та задовольняє нерівність

$$\big|\varphi(t) - \varphi^0(t)\big| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{4.1.2}$$

**Означення 4.1.2.** Розв'язок $x = \varphi^0(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системи (4.1.1) називається *асимптотично стійким за Ляпуновим* (див. рис. 4.3), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для будь-якого $x^0 \in \mathbb{R}^n$, такого, що $\big(t_0, x^0\big) \in \Omega$ та $\big|\varphi^0(t_0) - x^0\big| < \delta$, будь-який розв'язок $x = \varphi(t)$, який задовольняє умову $\varphi(t_0) = x^0$, є визначеним на $[t_0, +\infty)$ та задовольняє нерівність (4.1.2) і умову

$$\big|\varphi(t) - \varphi^0(t)\big| \to 0, \quad \text{коли } t \to +\infty. \tag{4.1.3}$$

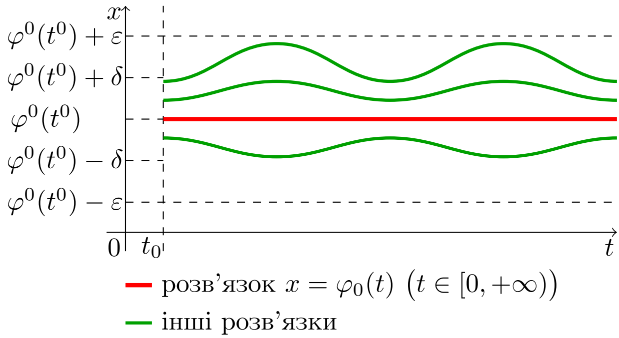



Рис. 4.1. Стійкий за Ляпуновим розв'язок

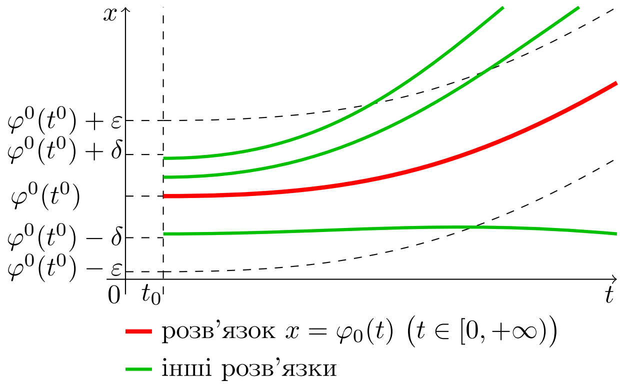



Рис. 4.2. Нестійкий за Ляпуновим розв'язок

З цих означень одразу випливає, що якщо розв'язок системи (4.1.1) є асимптотично стійким за Ляпуновим, то він є стійким за Ляпуновим.

**Означення 4.1.3.** Точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ називається *стаціонарною точкою (точкою спокою, станом рівноваги)* системи (4.1.1), якщо $f\big(t, x^0\big) = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$. Якщо $x^0 = 0$, то $x^0$ називається нульовою стаціонарною точкою системи (4.1.1).

Зрозуміло, що якщо $x^0$ є стаціонарною точкою, то $x = x^0$, $t \in [t_0, +\infty)$, є розв'язком системи (4.1.1).

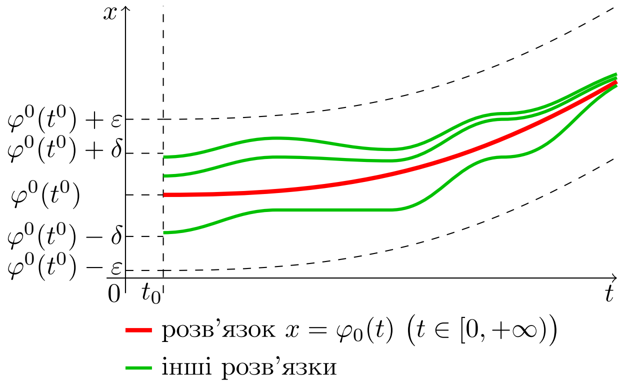



Рис. 4.3. Асимптотично стійкий за Ляпуновим розв'язок

Дослідження на стійкість будь-якого розв'язку системи (4.1.1) можна звести до дослідження на стійкість нульової стаціонарної точки деякої іншої системи вигляду (4.1.1).

Покажемо це. Припустимо, що ми хочемо дослідити на стійкість за Ляпуновим розв'язок $x=\varphi^0(t)$, $t\in[t_0,+\infty)$, системи (4.1.1). Розглянемо довільний розв'язок $x=\varphi(t)$, $t\in[t_0,+\infty)$, цієї ж системи і позначимо $\psi(t)=\varphi(t)-\varphi^0(t)$, $t\in[t_0,+\infty)$. Маємо

$$\begin{aligned}\dot\psi(t)&=\dot\varphi(t)-\dot\varphi^0(t)=f\big(t,\varphi(t)\big)-f\big(t,\varphi^0(t)\big)\\&=f\big(t,\psi(t)+\varphi^0(t)\big)-f\big(t,\varphi^0(t)\big),\quad t\in[t_0,+\infty).\end{aligned}$$

Позначимо $\Omega_{\varphi^0}=\big\{\big(\tau,\xi+\varphi^0(\tau)\big)\mid(\tau,\xi)\in\Omega\big\}$,

$$F(t,z)=f\big(t,z+\varphi^0(t)\big)-f\big(t,\varphi^0(t)\big),\quad (t,z)\in\Omega_{\varphi^0}.$$

Тоді функція $z=\psi(t)$, $t\in[t_0,+\infty)$, є розв'язком системи

$$\dot z=F(t,z),\quad (t,z)\in\Omega_{\varphi^0},\tag{4.1.4}$$

яка є системою типу (4.1.1). Зрозуміло, що співвідношення

$$z=x-\varphi^0(t),\quad t\in[t_0,+\infty),$$

задає взаємно-однозначне відображення між множинами розв'язків систем (4.1.1) та (4.1.4). Крім того, розв'язок $x = \varphi^0(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системи (4.1.1) переходить у розв'язок $z = \psi^0(t) \equiv 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, системи (4.1.4) та 0 є стаціонарною точкою системи (4.1.4). Крім того, розв'язок $x = \varphi^0(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системи (4.1.1) є стійким (асимптотично стійким) за Ляпуновим у тому і лише тому випадку, коли стійким (відповідно, асимптотично стійким) за Ляпуновим є нульовий розв'язок системи (4.1.4).

Важливим підкласом систем вигляду (4.1.1) є *автономні системи,* тобто системи вигляду

$$\dot{x} = g(x), \quad x \in \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}^n, \ t \in [t_0, +\infty), \tag{4.1.5}$$

де $\widehat{\Omega}$ є областю, $g(x) \in \mathbb{R}^n$, $x \in \widehat{\Omega}$.

**Означення 4.1.4.** Простір $\mathbb{R}^n$ є для системи (4.1.5) називається *фазовим простором,* а проекції інтегральних траєкторій (які містяться у множині $\Omega = [t_0, +\infty) \times \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x$) на фазовий простір називаються *фазовими траєкторіями.*

Далі ми зосередимо увагу на дослідженні нульових стаціонарних точок.

**Означення 4.1.5.** Будемо вважати, що нульова стаціонарна точка системи (4.1.1) є *стійкою (асимптотично стійкою, нестійкою) за Ляпуновим,* якщо таким є розв'язок $x = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, цієї системи.

## 4.2. Прямий метод Ляпунова

Позначимо $U(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$.

**Означення 4.2.1.** Нехай $r > 0$, $[t_0, +\infty) \times U(r) \subset \Omega$. Функція $V \in C^1\big(U(r)\big)$ називається *функцією Ляпунова* системи (4.1.1) в околі $U(r)$, якщо вона задовольняє наступні три умови:

(i) $V(0) = 0$;

(ii) $V(x) > 0$, $x \in U(r) \setminus \{0\}$;

(iii) $\dot{V}\big|_f(t,x) \le 0$, $t \in [t_0, +\infty)$, $x \in U(r)$.

Тут і далі $\dot{V}\big|_f$ означає похідну функції $V$ в силу системи (4.1.1) (див. означення 3.3.2).

*Задача* 4.2.2. Нехай $f \in C^1(\Omega)$, 0 є стаціонарною точкою системи (4.1.1), $V$ є функцією Ляпунова цієї системи на деякій множині $U(r)$, такої, що $[t_0, +\infty) \times U(r) \subset \Omega$. Тоді існує $\delta > 0$ таке, що для кожного $x^0 \in U(\delta)$ існує єдиний розв'язок системи (4.1.1), який задовольняє початкову умову $x(t_0) = x^0$ і, крім того, цей розв'язок є визначеним на $[t_0, \infty)$.

Спочатку доведемо теорему Ляпунова про стійкість.

**Теорема 4.2.3** (Ляпунов). *Нехай $r > 0$, $[t_0, +\infty) \times U(r) \subset \Omega$. Нехай $f \in C^1([t_0, +\infty) \times U(r))$ та 0 є стаціонарною точкою системи (4.1.1). Нехай також $V$ є функцією Ляпунова системи (4.1.1) в околі $U(r)$. Тоді нульова стаціонарна точка системи (4.1.1) є стійкою за Ляпуновим.*

*Доведення.* З умови (ii) означення 4.2.1 випливає, що

$$m(\varepsilon) = \inf\{V(x) \mid |x| = \varepsilon\} > 0, \quad \varepsilon \in (0, r). \tag{4.2.1}$$

Беручи до уваги умову (i) означення 4.2.1, знайдемо $\delta \in (0, \varepsilon)$ так, щоб

$$V(x) < \frac{m(\varepsilon)}{2}, \quad x \in U(\delta). \tag{4.2.2}$$

Зафіксуємо довільне $x^0 \in U(\delta)$ і, скориставшись теоремою 3.2.10 про існування та єдиність непродовжуваного розв'язку, знайдемо єдиний непродовжуваний вправо розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \omega_+)$, системи (4.1.1), що задовольняє початкову умову $x(t_0) = x^0$. Зрозуміло, що

$$|\varphi(t_0)| < \varepsilon. \tag{4.2.3}$$

Покажемо, що $\omega_+ = +\infty$ і

$$|\varphi(t)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{4.2.4}$$

Припустимо супротивне, тобто припустимо, що існує $t^* > t_0$ таке, що

$$|\varphi(t^*)| = \varepsilon \quad \text{та} \quad |\varphi(t)| < \varepsilon,\ t \in [t_0, t^*).$$

Позначимо

$$g(t) = V\big(\varphi(t)\big), \quad t \in [t_0, t^*].$$

Ураховуючи умову (iii) означення 4.2.1, маємо

$$\dot g(t) = \Big(\dot V\big|_f(t,x)\Big)\Big|_{x=\varphi(t)} \le 0, \quad t \in [t_0, t^*].$$

Отже, $g$ є незростальною на $[t_0, t^*]$. Звідси, беручи до уваги (4.1.2) та (4.2.2), одержуємо

$$\frac{m(\varepsilon)}{2} > V\big(x^0\big) = g(t_0) \ge g(t^*) = V\big(\varphi(t^*)\big) \ge m(\varepsilon) > 0.$$

Одержана суперечність доводить (4.2.4) та те, що $\omega_+ = +\infty$.

Таким чином, теорему доведено. □

Далі доведемо теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість.

**Теорема 4.2.4** (Ляпунов). *Нехай $r > 0$, $[t_0, +\infty) \times U(r) \subset \Omega$. Нехай $f \in C^1\big([t_0, +\infty) \times U(r)\big)$ та $0$ є стаціонарною точкою системи* (4.1.1). *Нехай також $V$ є функцією Ляпунова системи* (4.1.1) *в околі $U(r)$ та задовольняє умову*

$$\forall \alpha > 0\ \exists \beta > 0\ \forall x \in U(r)\ \forall t \in [t_0, +\infty)$$
$$\Big(|x| \ge \alpha \Rightarrow \dot V\big|_f(t,x) \le -\beta\Big). \qquad (4.2.5)$$

*Тоді нульова стаціонарна точка системи* (4.1.1) *є асимптотично стійкою за Ляпуновим.*

*Доведення.* Так само, як і в теоремі 4.2.3, функція $m(\varepsilon) > 0$ визначається співвідношенням (4.2.1), а $\delta \in (0, \varepsilon)$ вибрано так, щоб було виконано (4.2.2). Зафіксуємо довільне $x^0 \in U(\delta)$ і, скориставшись теоремою 3.2.10 про існування та єдиність непродовжуваного розв'язку, знайдемо єдиний непродовжуваний вправо розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, системи (4.1.1), що задовольняє початкову умову $x(t_0) = x^0$. У теоремі 4.2.3 доведено, що цей розв'язок задовольняє умову (4.2.4).

Позначимо

$$g(t) = V\big(\varphi(t)\big), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Ураховуючи умову (iii) означення 4.2.1, маємо

$$\dot{g}(t) = \Big(\dot{V}\big|_f(t, x)\Big)\Big|_{x=\varphi(t)} \leq 0, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Отже,

$$g \text{ є незростальною на } [t_0, +\infty). \tag{4.2.6}$$

Оскільки $g(t) \geq 0$, $[t_0, +\infty)$ (див. умови (i) та (ii) означення 4.2.1),

$$\exists \lim_{t \to +\infty} g(t) = \omega \in [0, +\infty). \tag{4.2.7}$$

Покажемо, що $\omega = 0$. Припустимо супротивне. Нехай $\omega > 0$. Тоді існує $\alpha \in (0, \varepsilon)$ таке, що

$$V(x) < \omega, \quad x \in U(\alpha).$$

Крім того, з (4.2.6) і (4.2.7) випливає, що

$$V\big(\varphi(t)\big) = g(t) \geq \omega, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Звідси, враховуючи (4.2.4), одержуємо

$$\alpha \leq \varphi(t) < \varepsilon, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{4.2.8}$$

З (4.2.5) випливає, що існує $\beta > 0$ таке, що

$$\dot{g}(t) = \Big(\dot{V}\big|_f(t, x)\Big)\Big|_{x=\varphi(t)} \leq -\beta, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Інтегруючи цю нерівність в межах від $t_0$ до $t$, одержуємо

$$g(t) - g(t_0) \leq -\beta(t - t_0), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Отже, для всіх досить великих $t$ маємо

$$V\big(\varphi(t)\big) < 0,$$

що суперечить умові (ii) означення 4.2.1. Тому $\omega = 0$, отже (див. (4.2.7)),

$$0 = \lim_{t\to+\infty} g(t) = \lim_{t\to+\infty} V\big(\varphi(t)\big).$$

З умов (i)–(iii) означення 4.2.1 випливає

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0.$$

Ураховуючи (4.2.2), звідси одержуємо, що нульовий розв'язок системи (4.1.1) є асимптотично стійким за Ляпуновим. □

Нарешті доведемо теорему Четаєва про нестійкість.

**Теорема 4.2.5** (Четаєв)**.** *Нехай $r > 0$, $[t_0, +\infty) \times U(r) \subset \Omega$. Нехай $f \in C^1\big([t_0, +\infty) \times U(r)\big)$ та $0$ є стаціонарною точкою системи* (4.1.1)*. Нехай також $V \in C^1\big(U(r)\big)$ задовольняє умови*

(I) $V(0) = 0$;

(II) $S_+ = \{x \in U(r) \mid V(x) > 0\} \neq \varnothing$ *та* $\overline{S}_+ \ni 0$;

(III) $\forall \alpha > 0 \ \exists \beta > 0 \ \forall x \in S_+ \ \forall t \in [t_0, +\infty)$
$$\Big(|x| \geq \alpha \Rightarrow \dot{V}\big|_f(t, x) \geq \beta\Big).$$

*Тоді нульова стаціонарна точка системи* (4.1.1) *є нестійкою за Ляпуновим.*

*Доведення.* Припустимо супротивне, а саме, припустимо, що нульовий розв'язок системи (4.1.1) є стійким за Ляпуновим. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для кожного $x^0 \in U(\delta) \cap S_+$ (ця множина є непорожньою за (II)) існує розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, цієї системи, який задовольняє початкову умову $x(t_0) = x^0$ та умову (4.2.4) за означенням 4.1.1.

Позначимо $\omega = V\big(x^0\big)$. З (II) випливає, що $\omega > 0$. Позначимо також

$$g(t) = V(\varphi(t)), \quad t \in [t_0, +\infty),$$

і покажемо, що

$$g(t) > 0 \text{ і } \varphi(t) \in S_+, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Зрозуміло, що це справедливо для $t$, близьких до $t_0$. Припустимо, що існує $t^* > t_0$ таке, що

$$g(t^*) = 0 \text{ і } g(t) > 0, \quad t \in [t_0, t^*).$$

Також маємо

$$\dot{g}(t) = \left(\dot{V}\big|_f(t,x)\right)\Big|_{x=\varphi(t)} \geq 0, \quad t \in [t_0, t^*)$$

(див. (III)), отже, $g$ є неспадною на $[t_0, t^*)$. Тому

$$0 < \omega = V\left(x^0\right) = V(\varphi(t_0)) = g(t_0) \leq g(t^*) = V(\varphi(t^*)) = 0.$$

Одержана суперечність доводить, що

$$g(t) > 0 \text{ і } \varphi(t) \in S_+, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Отже, $g$ є неспадною на $[t_0, +\infty)$, тому

$$V(\varphi(t)) = g(t) \geq g(t_0) = V\left(x^0\right) = \omega, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Скориставшись умовою (I), знайдемо $\alpha$ таке, що

$$V(x) < \omega, \quad x \in U(\alpha).$$

Ураховуючи (4.2.4), одержуємо

$$\varepsilon > |\varphi(t)| \geq \alpha, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{4.2.9}$$

Скориставшись умовою (III), знайдемо $\beta > 0$ таке, що

$$\dot{g}(t) = \left(\dot{V}\big|_f(t,x)\right)\Big|_{x=\varphi(t)} \geq 0, \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Інтегруючи цю нерівність у межах від $t_0$ до $t$, одержуємо

$$g(t) - g(t_0) \geq \beta(t - t_0), \quad t \in [t_0, +\infty).$$

Отже,

$$g(t) \to +\infty, \quad \text{коли } t \to +\infty. \tag{4.2.10}$$

Але $g(t) = V(\varphi(t))$, $t \in [t_0, +\infty)$, де $\varphi$ задовольняє оцінку (4.2.9). Тому

$$|g(t)| = |V(\varphi(t))| \leq \max_{|x| \leq \varepsilon} |V(x)| < +\infty,$$

що суперечить (4.2.10).

Таким чином, нульовий розв'язок системи (4.1.1) є нестійким за Ляпуновим. □

Розглянемо декілька прикладів застосування теорем 4.2.3–4.2.5.

*Приклад* 4.2.6. Дослідимо на стійкість нульову стаціонарну точку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right). \end{cases} \tag{4.2.11}$$

Спробуємо скористатися однією з теорем 4.2.3–4.2.5. Розглянемо функцію $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ і обчислимо її похідну в силу системи (4.2.11). Маємо

$$\begin{aligned} \dot{V}\big|_{(4.2.11)}(x) &\equiv 2x_1 \left(x_2 - x_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) + 2x_2 \left(-x_1 - x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) \\ &\equiv -2 \left(x_1^2 + x_2^2\right)^2. \end{aligned}$$

Таким чином, для цієї функції виконано умови (i)–(iii) означення 4.2.1, тобто вона є функцією Ляпунова, і виконано умову (4.2.5). Тому, застосовуючи теорему 4.2.4, одержуємо, що нульова стаціонарна точка системи (4.2.11) є асимптотично стійкою за Ляпуновим.

*Приклад* 4.2.7. Дослідимо на стійкість нульову стаціонарну точку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right). \end{cases} \tag{4.2.12}$$

Спробуємо скористатися однією з теорем 4.2.3–4.2.5. Розглянемо функцію $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ і обчислимо її похідну в силу системи (4.2.12). Маємо

$$\begin{aligned}\dot{V}\big|_{(4.2.12)}(x) &\equiv 2x_1\left(x_2 + x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right) + 2x_2\left(-x_1 + x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right)\right)\\ &\equiv 2\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2.\end{aligned}$$

Таким чином, для цієї функції виконано умови (I)–(III) теореми 4.2.5. Тому, застосовуючи цю теорему, одержуємо, що нульова стаціонарна точка системи (4.2.11) є нестійкою за Ляпуновим.

*Приклад* 4.2.8. Дослідимо на стійкість нульову стаціонарну точку системи

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 - x_1\left(x_1^2 - x_2^2\right),\\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2\left(x_1^2 - x_2^2\right).\end{cases} \tag{4.2.13}$$

Спробуємо скористатися однією з теорем 4.2.3–4.2.5. Розглянемо функцію $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ і обчислимо її похідну в силу системи (4.2.13). Маємо

$$\begin{aligned}\dot{V}\big|_{(4.2.13)}(x) &\equiv 2x_1\left(x_2 - x_1\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right) + 2x_2\left(-x_1 + x_2\left(x_1^2 - x_2^2\right)\right)\\ &\equiv -2\left(x_1^2 - x_2^2\right)^2.\end{aligned}$$

Таким чином, для цієї функції виконано умови (i)–(iii) означення 4.2.1, тобто вона є функцією Ляпунова, а умову (4.2.5) не виконано. Тому, застосовуючи теорему 4.2.3, одержуємо, що нульова стаціонарна точка системи (4.2.13) є стійкою за Ляпуновим. Теорему 4.2.4 ми тут застосувати не можемо.

## 4.3. Лінійні системи зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійну систему

$$\dot{z} = Az + b(t), \quad (t, z) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n, \tag{4.3.1}$$

де $A \in \mathfrak{M}(n,n)$, $b(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, +\infty)$.

Дослідження на стійкість будь-якого розв'язку $z = \varphi^0(t)$, $t \in [t_0, +\infty)$, за допомогою заміни змінних $x = z - \varphi$ можна звести до дослідження на стійкість нульової стаціонарної точки системи

$$\dot{x} = Ax, \quad (t, x) \in [t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n. \tag{4.3.2}$$

Зокрема, для системи (4.3.1) виконується лише одна з трьох умов: або всі її розв'язки є стійкими, але не асимптотично, або всі її розв'язки є асимптотично стійкими, або всі її розв'язки є нестійкими за Ляпуновим.

Дослідимо на стійкість нульову стаціонарну точку системи (4.3.2), розглянувши теорему про стійкість для лінійної системи зі сталими коефіцієнтами.

**Теорема 4.3.1.** *Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ є різними власними значеннями матриці $A$, а $p_1, \ldots, p_k$ є їх кратностями в її мінімальному поліномі. Тоді*

(i) *нульова стаціонарна точка системи (4.3.2) є асимптотично стійкою за Ляпуновим тоді і лише тоді, коли*

$$\forall j = \overline{1,k} \quad \operatorname{Re} \lambda_j < 0;$$

(ii) *нульова стаціонарна точка системи (4.3.2) є стійкою за Ляпуновим тоді і лише тоді, коли*

$$\forall j = \overline{1,k} \quad \bigl(\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \vee (\operatorname{Re} \lambda_j = 0 \wedge p_j = 1)\bigr).$$

*Зауваження* 4.3.2. Нульова стаціонарна точка системи (4.3.2) є нестійкою за Ляпуновим тоді і лише тоді, коли

$$\exists j_0 = \overline{1,k} \quad \bigl(\operatorname{Re} \lambda_{j_0} > 0 \vee (\operatorname{Re} \lambda_{j_0} = 0 \wedge p_{j_0} > 1)\bigr).$$

*Доведення теореми* 4.3.1. З формули (2.4.42) одержуємо

$$e^{tA} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{p_j - 1} h_l^j(A) t^l e^{t\lambda_j}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.3.3}$$

де поліноми $h_l^j$, $l = \overline{0, p_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$, є лінійно незалежними, $\deg h_l^j \le p-1$, $l = \overline{0, p_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$. Загальний розв'язок системи (4.3.2) можна подати у вигляді

$$x = \varphi(t) \equiv e^{(t-t_0)A} x^0, \quad t \in [t_0, +\infty) \tag{4.3.4}$$

Зрозуміло, що цей розв'язок задовольняє початкову умову

$$x(t_0) = x^0. \tag{4.3.5}$$

**(а)** Нехай

$$\forall j = \overline{1, k} \quad \operatorname{Re} \lambda_j < 0.$$

З теореми 2.4.38 про оцінку матричної експоненти одразу маємо, що

$$\left\| e^{tA} \right\| \le C(1+t)^{p-1} e^{\Lambda t}, \quad t \in [0, +\infty), \tag{4.3.6}$$

де $\Lambda = \max\{\operatorname{Re} \lambda_j \mid j = \overline{1, k}\} < 0$. Звідси, враховуючи (4.3.4), (4.3.5), одержуємо

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\le \left\| e^{(t-t_0)A} \right\| \left| x^0 \right| \le C(1 + (t - t_0))^{p-1} e^{\Lambda(t-t_0)} \left| x^0 \right| \\ &\le C_1 \left| x^0 \right|, \quad t \in [t_0, +\infty), \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

де $C_1 > 0$. Крім того,

$$C\big(1 + (t - t_0)\big)^{p-1} e^{\Lambda(t-t_0)} \left| x^0 \right| \to 0, \quad \text{коли } t \to +\infty.$$

Отже, нульова стаціонарна точка системи (4.3.2) є асимптотично стійкою за Ляпуновим.

**(б)** Нехай

$$\forall j = \overline{1, k} \quad \big(\operatorname{Re} \lambda_j < 0 \vee (\operatorname{Re} \lambda_j = 0 \wedge p_j = 1)\big) \\ \wedge \big(\exists j_0 = \overline{1, k} \ \operatorname{Re} \lambda_{j_0} = 0\big).$$

З (4.3.3) випливає, що

$$\left\| e^{tA} \right\| \le \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_j < 0}}^{k} \sum_{l=0}^{p_j - 1} h_l^j(A) t^l e^{t\lambda_j} \right\| + \left\| \sum_{\substack{j=1 \\ \operatorname{Re} \lambda_j = 0}}^{k} h_0^j(A) e^{t\lambda_j} \right\|$$

$$\leq C_1(1+t)^{p-1}e^{\Lambda_1 t} + C_2, \quad t \in [0,+\infty),$$

де $\Lambda_1 = \max\{\operatorname{Re}\lambda_j \mid \operatorname{Re}\lambda_j < 0 \wedge j = \overline{1,k}\} < 0$. Звідси, враховуючи (4.3.4), (4.3.5), одержуємо

$$|\varphi(t)| \leq \left\| e^{(t-t_0)A} \right\| \left| x^0 \right| \leq C \left| x^0 \right|, \quad t \in [t_0,+\infty), \tag{4.3.8}$$

де $C > 0$. Отже, нульова стаціонарна точка системи (4.3.2) є стійкою за Ляпуновим. Покажемо, що вона не є асимптотично стійкою за Ляпуновим. Нехай $v_0$ є одиничним власним вектором матриці $A$, який відповідає власному значенню $\lambda_{j_0}$. Позначимо $x^\delta = \delta v_0$. Тоді

$$x = \varphi^\delta(t) \equiv e^{\lambda_{j_0}(t-t_0)}\delta v^0, \quad t \in [t_0,+\infty), \tag{4.3.9}$$

де $\delta > 0$, є розв'язком системи (4.3.2) та задовольняє умову (4.3.5) з $x^0 = x^\delta$:

$$\dot\varphi^\delta(t) \equiv e^{\lambda_{j_0}(t-t_0)}\lambda_{j_0}\delta v^0 \equiv e^{\lambda_{j_0}(t-t_0)}A\delta v^0 = A\varphi^\delta(t) \quad \text{на } [t_0,+\infty).$$

Для нашого розв'язку маємо

$$\left|\varphi^\delta(t)\right| = \delta, \quad t \in [t_0,+\infty). \tag{4.3.10}$$

Тому нульовий розв'язок системи (4.3.2) не є асимптотично стійким за Ляпуновим.

**(в)** Нехай

$$\exists j_0 = \overline{1,k} \quad \operatorname{Re}\lambda_{j_0} = 0 \wedge p_{j_0} > 1.$$

Умова $p_{j_0} > 1$ означає, що розмірність власного підпростору, який відповідає власному значенню $\lambda_{j_0}$, менше кратності цього значення в характеристичному поліномі матриці $A$, отже, ця матриця має ненульовий приєднаний вектор $v^1$, який відповідає цьому власному значенню:

$$(A - \mathbb{I}\lambda_{j_0})v^1 = v^0, \tag{4.3.11}$$

де $v^0 \neq 0$ є власним вектором матриці $A$, який відповідає власному значенню $\lambda_{j_0}$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\|v^1\| = 1$. Розглянемо функцію

$$x = \varphi^\delta(t) \equiv \delta\big(v^0(t - t_0) + v^1\big)e^{\lambda_{j_0}(t-t_0)}, \quad t \in [t_0, +\infty),$$

де $\delta > 0$. Позначимо $x^\delta = \delta v^1$. Тоді $\varphi^\delta$ задовольняє умову (4.3.5) з $x^0 = x^\delta$. Скориставшись (4.3.11), одержуємо

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^\delta(t) &\equiv \delta\big(\lambda_{j_0}v^0(t - t_0) + \lambda_{j_0}v^1 + v^1\big)e^{\lambda_{j_0}(t-t_0)} \\ &\equiv A\delta\big(v^0(t - t_0) + v^1\big)e^{\lambda_{j_0}(t-t_0)} \equiv A\varphi^\delta(t) \quad \text{на } [t_0, +\infty),\end{aligned}$$

тобто $\varphi^\delta$ є розв'язком системи (4.3.2). Для цього розв'язку маємо

$$|\varphi^\delta(t_0)| = \delta, \tag{4.3.12}$$

$$|\varphi^\delta(t)| = \delta\big|v^0(t - t_0) + v^1\big| \to +\infty, \quad \text{коли } t \to +\infty. \tag{4.3.13}$$

Тому нульовий розв'язок системи (4.3.2) не є стійким за Ляпуновим.

**(г)** Нехай

$$\exists j_0 = \overline{1,k} \quad \operatorname{Re}\lambda_{j_0} > 0.$$

Нехай $v_0$ є одиничним власним вектором матриці $A$, який відповідає власному значенню $\lambda_{j_0}$. Позначимо $x^\delta = \delta v_0$. Тоді

$$x = \varphi^\delta(t) \equiv e^{\lambda_{j_0}(t-t_0)}\delta v^0, \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{4.3.14}$$

де $\delta > 0$, є розв'язком системи (4.3.2) та задовольняє умову (4.3.5) з $x^0 = x^\delta$. Для нашого розв'язку маємо

$$\big|\varphi^\delta(t_0)\big| = \delta, \tag{4.3.15}$$

$$\big|\varphi^\delta(t)\big| = \delta e^{\operatorname{Re}\lambda_{j_0}(t-t_0)} \to +\infty, \quad \text{коли } t \to +\infty. \tag{4.3.16}$$

Тому нульовий розв'язок системи (4.3.2) не є стійким за Ляпуновим.

У пунктах **(б)**, **(в)**, **(г)** доведення ми, фактично, допустили до розгляду комплекснозначні розв'язки системи (4.3.2). Але у випадку дійсної матриці $A$ бажано обмежитися дійснозначними розв'язками. Покажемо, що наслідки цих пунктів залишаються правильними у разі розгляду лише дійснозначних розв'язків системи (4.3.2).

Для розв'язків $x = \varphi^\delta(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, з пунктів **(б)**, **(в)**, **(г)** системи (4.3.2) (які можуть бути комплекснозначними) позначимо

$$\varphi_1^\delta(t) \equiv \operatorname{Re} \varphi^\delta(t), \quad \varphi_2^\delta(t) \equiv \operatorname{Im} \varphi^\delta(t) \quad \text{на } [t_0, +\infty).$$

Оскільки коефіцієнти матриці $A$ є дійсними, функції $x = \varphi_1^\delta(t)$, $x = \varphi_2^\delta(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, є розв'язками системи (4.3.2) та задовольняють умову $|\varphi_j^\delta(t_0)| \le \delta$, $j = 1, 2$ (див. 4.3.10, 4.3.12, 4.3.15).

У пункті **(б)** з умови (4.3.10) випливає, що

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \left|\varphi_1^\delta(t)\right| \ne 0 \quad \text{або} \quad \varlimsup_{t \to +\infty} \left|\varphi_2^\delta(t)\right| \ne 0,$$

тому асимптотичної стійкості нульового розв'язку системи (4.3.2) немає.

У пунктах **(в)** та **(г)** з умов (4.3.13) та (4.3.16), відповідно, випливає, що

$$\varlimsup_{t \to +\infty} |\varphi_1^\delta(t)| = +\infty \quad \text{або} \quad \varlimsup_{t \to +\infty} \left|\varphi_2^\delta(t)\right| = +\infty,$$

тому стійкості нульового розв'язку системи (4.3.2) немає в обох випадках. Теорему повністю доведено. □

## 4.4. Стійкість за першим наближенням

Розглянемо систему

$$\dot{x} = Ax + R(t, x), \quad (t, x) \in \Omega = [t_0, +\infty) \times \widehat{\Omega} \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \quad (4.4.1)$$

де $\widehat{\Omega}$ є областю; $A \in \mathfrak{M}(n, n)$; $R(t, x) \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in \Omega$; $R \in C^1(\Omega)$; $R(t, 0) = 0$, $t \ge t_0$; $R$ задовольняє умову

$$|R(t, x)| \le \gamma(|x|)|x|, \quad (t, x) \in \Omega. \quad (4.4.2)$$

Тут $\gamma \in C[0, +\infty)$; $\gamma(r) \to 0$, коли $r \to 0^+$.

Лінійна однорідна система зі сталими коефіцієнтами

$$\dot{x} = Ax, \quad (t, x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \tag{4.4.3}$$

називається *системою першого наближення* для системи (4.4.1).

Розглянемо теорему про стійкість за першим наближенням.

**Теорема 4.4.1.** *Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ є різними власними значеннями матриці $A$. Якщо*

$$\forall j = \overline{1, k} \quad \operatorname{Re} \lambda_j < 0,$$

*то нульова стаціонарна точка системи (4.4.1) є асимптотично стійкою за Ляпуновим.*

Для доведення цієї теореми нам знадобиться наступна лема про еквівалентність наближуваної системи інтегральному рівнянню.

**Лема 4.4.2.** *Функція $x = \varphi(t)$, $t \in I$, є розв'язком системи (4.4.1), який задовольняє умову $x(t_0) = x^0$ в в тому і лише тому випадку, коли вона є неперервним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = e^{(t-t_0)A} x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A} R(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad (t, x) \in \Omega. \tag{4.4.4}$$

*Тут $\left(t_0, x^0\right) \in \Omega$.*

*Доведення.* **1.** Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in I$, є неперервним розв'язком рівняння (4.4.4). Тоді

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= Ae^{tA}\left(e^{t_0 A} + \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A} R(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau\right) + e^{tA} e^{-tA} R(t, \varphi(t)) \\ &= A\varphi(t) + R(t, \varphi(t)), \quad t \in I.\end{aligned}$$

Отже, $x = \varphi(t)$, $t \in I$, є розв'язком системи (4.4.1).

**2.** Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in I$, є розв'язком системи (4.4.1). Тоді

$$e^{-tA}\dot{\varphi}(t) = e^{-tA}A\varphi(t) + e^{-tA}R(t, \varphi(t)), \quad t \in I.$$

Скориставшись теоремою 2.4.39 про диференціювання матричної експоненти, одержуємо

$$\left(e^{-tA}\varphi(t)\right)' = e^{-tA}R(t, \varphi(t)), \quad t \in I.$$

Тому

$$e^{-tA}\varphi(t) = e^{-t_0A}x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\tau A}R(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \in I,$$

де $x^0 = \varphi(t_0)$. Отже, $x = \varphi(t)$, $t \in I$, є неперервним розв'язком рівняння (4.4.4). $\square$

*Доведення теореми* 4.4.1. Нехай $x = \varphi(t)$, $t \in [t_0, \omega_+)$, є непродовжуваним вправо розв'язком системи (4.4.1), який задовольняє умову $x(t_0) = x^0$. Існування такого розв'язку випливає з теореми 3.2.10 про існування та єдиність непродовжуваного розв'язку. За лемою 4.4.2 маємо

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}x^0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}R(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau, \quad t \in [t_0, \omega_+).$$

З оцінки (4.3.6) одержуємо

$$\left\|e^{tA}\right\| \le Le^{t\Lambda/2}, \quad t \in [0, +\infty),$$

де $L > 0$, $\Lambda = \max\{\operatorname{Re}\lambda_j \mid j = \overline{1, k}\} < 0$. Тому

$$|\varphi(t)| \le Le^{(t-t_0)\Lambda/2} \times \left(\left|x^0\right| + \int_{t_0}^{t} e^{(t_0-\tau)\Lambda/2}\left|R(\tau, \varphi(\tau))\right| d\tau\right), \ t \in [t_0, \omega_+). \quad (4.4.5)$$

Покажемо, що для будь-якого досить малого $\varepsilon > 0$ і $\delta = \varepsilon/(2L)$, якщо $\left|x^0\right| < \delta$, то $\omega_+ = +\infty$ і

$$|\varphi(t)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, +\infty). \quad (4.4.6)$$

Припустимо супротивне. Нехай $\left|x^0\right| < \delta$ та існує $t^* > t_0$ таке, що

$$|\varphi(t)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, t^*) \quad \text{та} \quad |\varphi(t^*)| = \varepsilon.$$

З (4.4.2) одержуємо, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що

$$|\gamma(r)| < \frac{|\Lambda|}{4L}, \quad r \in (0, \varepsilon_0).$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, враховуючи (4.4.2), маємо

$$\left|R(\tau, \varphi(\tau))\right| \le \gamma(|\varphi(\tau)|)|\varphi(\tau)| \le \frac{|\Lambda|}{4L}|\varphi(\tau)|, \quad \tau \in [t_0, t^*].$$

Підставляючи цю оцінку в оцінку (4.4.5), одержуємо

$$e^{(t_0-t)\Lambda/2}|\varphi(t)| \le L\left|x^0\right| + \int_{t_0}^{t} \frac{|\Lambda|}{4} e^{(t_0-\tau)\Lambda/2}|\varphi(\tau)|\,d\tau, \quad t \in [t_0, t^*].$$

Скориставшись нерівністю Ґронуолла–Беллмана (див. теорему 2.1.3), маємо

$$e^{(t_0-t)\Lambda/2}|\varphi(t)| \le L\left|x^0\right| e^{(t-t_0)|\Lambda|/4}, \quad t \in [t_0, t^*].$$

Тому

$$|\varphi(t)| \le L\left|x^0\right| e^{-(t-t_0)|\Lambda|/4} \le L\delta, \quad t \in [t_0, t^*]. \tag{4.4.7}$$

Отже,

$$\varepsilon = |\varphi(t^*)| \le L\delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Одержана суперечність доводить, що (4.4.6) виконується і оцінку (4.4.7) виконано на $[t_0, +\infty)$. Зокрема,

$$|\varphi(t)| \to 0, \quad \text{коли } t \to +\infty.$$

Таким чином, нульовий розв'язок системи (4.4.1) є асимптотично стійким за Ляпуновим. Теорему доведено. $\square$

Розглянемо також теорему про нестійкість за першим наближенням.

**Теорема 4.4.3.** *Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ є різними власними значеннями матриці $A$. Якщо*

$$\exists j_0 = \overline{1,k} \quad \operatorname{Re} \lambda_{j_0} > 0,$$

*то нульова стаціонарна точка системи (4.4.1) є нестійкою за Ляпуновим.*

Для доведення цієї теореми нам знадобляться наступні дві леми.

Позначимо через $\mathfrak{M}^*(n)$ лінійний простір самоспряжених матриць розміру $n \times n$ з дійсними коефіцієнтами. Нагадаємо, що матриця $A$ називається самоспряженою, якщо $A = A^*$; символом $A^*$ позначається спряжена матриця. Зрозуміло, що $\dim \mathfrak{M}^*(n) = n(n+1)/2$. Нехай $A \in \mathfrak{M}(n,n)$ є довільною матрицею з дійсними коефіцієнтами. Ми будемо позначати скрізь одним і тим самим символом лінійний оператор, який діє з $\mathbb{R}^p$ в $\mathbb{R}^p$ і відповідну йому матрицю розміру $p \times p$ з дійсними коефіцієнтами.

Нехай $\mathcal{L}_A : \mathfrak{M}^*(n) \to \mathfrak{M}^*(n)$ є лінійним оператором, який діє за правилом

$$\mathcal{L}_A B = A^* B + BA, \quad B \in \mathfrak{M}^*(n).$$

Доведемо лему про власні значення оператора $\mathcal{L}_A$.

**Лема 4.4.4.** *Нехай $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ є власними значеннями оператора $A$. Тоді $\xi_{lj} = \lambda_l + \lambda_j$, $l = \overline{1,n}$, $j = \overline{l,n}$, є власними значеннями оператора $\mathcal{L}_A$.*

*Доведення.* Знайдемо для матриці $A$ розклад Шура (див., наприклад, [1, гл. 7, теорема 7.1.3]), тобто знайдемо унітарну матрицю $T$ ($T^*T = \mathbb{I}$) таку, що

$$\widetilde{A} = T^* A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \cdots & \alpha_1^n \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_2^3 & \cdots & \alpha_2^n \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \alpha_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тоді $A = T\widetilde{A}T^*$ і

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_A B = \lambda B \;&\Leftrightarrow\; A^*B + BA = \lambda B\\ &\Leftrightarrow\; \widetilde{A}^*\left(T^*BT\right) + \left(T^*BT\right)\widetilde{A} = \lambda\left(T^*BT\right)\\ &\Leftrightarrow\; \mathcal{L}_{\widetilde{A}}\widetilde{B} = \lambda\widetilde{B},\end{aligned}$$

де $B \in \mathfrak{M}^*(n)$, $\widetilde{B} = T^*BT \in \mathfrak{M}^*(n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Отже, множини власних значень операторів $\mathcal{L}_A$ і $\mathcal{L}_{\widetilde{A}}$ збігаються. Тому далі будемо досліджувати власні значення оператора $\mathcal{L}_{\widetilde{A}}$.

Лінійний простір $\mathfrak{M}^*(n)$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Відповідний ізоморфізм здійснюється оператором $\mathfrak{P} : \mathfrak{M}^*(n) \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$, який діє за правилом

$$\mathfrak{P}B = \begin{pmatrix} B_1\\ B_2\\ B_3\\ \vdots\\ B_n\end{pmatrix},$$

де

$$B = \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 & \cdots & b_1^n\\ b_1^2 & b_2^2 & b_2^3 & \cdots & b_2^n\\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & \cdots & b_3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_1^n & b_2^n & b_3^n & \cdots & b_n^n\end{pmatrix} \in \mathfrak{M}^*(n),\;\; B_p = \begin{pmatrix} b_p^p\\ b_p^{p+1}\\ b_p^{p+2}\\ \vdots\\ b_p^n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-p+1}.$$

Фактично, $B_p$ є $p$-м стовпцем матриці $B$, в якому викреслено всі наддіагональні елементи. Позначивши $L = \mathfrak{P}\mathcal{L}_{\widetilde{A}}\mathfrak{P}^{-1}$, одержуємо

$$\mathcal{L}_{\widetilde{A}}B = \lambda B \;\Leftrightarrow\; Lb = \lambda b, \quad B \in \mathfrak{M}^*(n),\; b = \mathfrak{P}B \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}},\; \lambda \in \mathbb{C}.$$

Отже, множини власних значень операторів $\mathcal{L}_{\widetilde{A}}$ та $L$ збігаються. Тому далі будемо досліджувати власні значення оператора $L$. Маємо

$$\mathcal{L}_{\widetilde{A}}B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1^2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \alpha_3^n & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 & \cdots & b_1^n \\ b_1^2 & b_2^2 & b_2^3 & \cdots & b_2^n \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & \cdots & b_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^n & b_2^n & b_3^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 & b_1^3 & \cdots & b_1^n \\ b_1^2 & b_2^2 & b_2^3 & \cdots & b_2^n \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & \cdots & b_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^n & b_2^n & b_3^n & \cdots & b_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \cdots & \alpha_1^n \\ 0 & \lambda_2 & \alpha_2^3 & \cdots & \alpha_2^n \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & \alpha_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тоді для $b = \mathfrak{P}B$, $B \in \mathfrak{M}^*(n)$, маємо

$$Lb = \begin{pmatrix} \Lambda_1(B_1) \\ \vdots \\ \Lambda_p(B_p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & \Lambda_n \end{pmatrix} b,$$

де

$$\Lambda_p(B_p) = \begin{pmatrix} (\lambda_p + \lambda_p)b_p^p + \sum\limits_{k=1}^{p-1} c_k^{p,p} b_p^k \\ (\lambda_p + \lambda_{p+1})b_p^{p+1} + \sum\limits_{k=1}^{p} c_k^{p,p+1} b_p^k \\ (\lambda_p + \lambda_{p+2})b_p^{p+2} + \sum\limits_{k=1}^{p+1} c_k^{p,p+2} b_p^k \\ \vdots \\ (\lambda_p + \lambda_n)b_p^n + \sum\limits_{k=1}^{n-1} c_k^{pn} b_p^k \end{pmatrix}, \quad p = \overline{1, n},$$

$c_k^{p+s} \in \mathbb{R}$ є коефіцієнтами, які не залежать від $b_p^k$, $k = \overline{1, s-1}$, $s =$

$\overline{p,n}$, $p = \overline{1,n}$,

$$\Lambda_p = \begin{pmatrix} \lambda_p + \lambda_p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \lambda_p + \lambda_{p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & \lambda_p + \lambda_{n-1} & 0 \\ * & \cdots & * & * & \lambda_p + \lambda_n \end{pmatrix}, \quad p = \overline{1,n}.$$

Отже, власні значення $L$ мають вигляд $\xi_{lj} = \lambda_l + \lambda_j$, $l = \overline{1,n}$, $j = \overline{l,n}$. Ці ж числа є власними значеннями операторів $\mathcal{L}_{\widetilde{A}}$ та $\mathcal{L}_A$. Лему доведено. □

Далі розглянемо лему про існування квадратичної форми.

**Лема 4.4.5.** *Нехай $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ є власними значеннями оператора $A$ та нехай $\operatorname{Re}\lambda_{j_0} > 0$ для деякого $j_0 = \overline{1,n}$. Тоді існують $\alpha \geq 0$ і квадратична форма $V$, які задовольняють умову*

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} Ax = \alpha V(x) + \langle x, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.4.8}$$

*та такі, що $V(x) > 0$ для деякого $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Доведення.* Нехай $V(x) = \langle Bx, x \rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$, де $B \in \mathfrak{M}^*(n)$. Спробуємо підібрати $B \in \mathfrak{M}^*(n)$ так, щоб було виконано умову (4.4.8). Для $k = \overline{1,n}$ маємо

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_k} = \big\langle B^k, x \big\rangle + \big\langle Bx, e^k \big\rangle = 2\big\langle Bx, e^k \big\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{4.4.9}$$

де $B^k$ є $k$-м стовпцем матриці $B$, $e^1, \ldots, e^n$ є стандартним базисом в $\mathbb{R}^n$ (див. с. 30). Отже,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} Ax = 2\langle Bx, Ax \rangle &= \langle (A^*B + BA)x, x \rangle \\ &= \alpha V(x) + \langle x, x \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Тому $A^*B + BA = \alpha B + \mathbb{I}$. Звідси випливає

$$\mathcal{L}_{A - \frac{\alpha}{2}\mathbb{I}} B = \Big( A - \frac{\alpha}{2}\mathbb{I} \Big)^* B + B \Big( A - \frac{\alpha}{2}\mathbb{I} \Big) = \mathbb{I}. \tag{4.4.10}$$

Власні значення матриці $A - \dfrac{\alpha}{2}\mathbb{I}$ мають вигляд $\lambda_l - \dfrac{\alpha}{2}$, $l = \overline{1,n}$. Тому за лемою 4.4.4 власні значення оператора $\mathcal{L}_{A-\frac{\alpha}{2}\mathbb{I}}$ мають вигляд $\xi_{lj} = \lambda_l + \lambda_j - \alpha$, $l = \overline{1,n}$, $j = \overline{l,n}$. Нехай $j_0 = \overline{1,n}$. Оберемо $\alpha \geq 0$ так, щоб $2\operatorname{Re}\lambda_{j_0} - \alpha > 0$ і $\xi_{lj} \neq 0$, $l, j = \overline{1,n}$. Тоді оператор $\mathcal{L}_{A-\frac{\alpha}{2}\mathbb{I}}$ є оборотним і $B = \mathcal{L}^{-1}_{A-\frac{\alpha}{2}\mathbb{I}}\mathbb{I}$ є єдиним розв'язком (4.4.10), а квадратична форма $V(x) = \langle Bx, x\rangle$ є розв'язком (4.4.8).

Покажемо, що існує $x \in \mathbb{R}^n$ таке, що $V(x) > 0$. Припустимо супротивне, тобто припустимо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}^n$ маємо $V(x) \leq 0$. Розглянемо два випадки.

1. Нехай $V$ є від'ємно визначеною. Тоді $-V$ є додатно визначеною. Обчислимо її похідну в силу системи

$$\dot{x} = \left(A - \frac{\alpha}{2}\mathbb{I}\right)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}. \tag{4.4.11}$$

Скориставшись (4.4.9), одержуємо

$$\begin{aligned} -\dot{V}\big|_{(A-\frac{\alpha}{2}\mathbb{I})x}(x) &= -2\left\langle Bx, \left(A - \frac{\alpha}{2}\mathbb{I}\right)x\right\rangle \\ &= -\left\langle \left(\left(A - \frac{\alpha}{2}\mathbb{I}\right)^* B + B\left(A - \frac{\alpha}{2}\mathbb{I}\right)\right)x, x\right\rangle \\ &= -\langle x, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

Застосовуючи теорему Ляпунова про асимптотичну стійкість (теорему 4.2.4), одержуємо, що нульовий розв'язок системи (4.4.11) є асимптотично стійким, що суперечить припущенню про те, що одне з власних значень матриці $\left(A - \dfrac{\alpha}{2}\mathbb{I}\right)$, а саме, $\lambda_{j_0} - \dfrac{\alpha}{2}$, має додатну дійсну частину (за теоремою 4.3.1 про стійкість для лінійної системи зі сталими коефіцієнтами жоден розв'язок такої системи не може бути стійким). Одержана суперечність доводить, що $V$ не може бути невід'ємно визначеною.

2. Припустимо тепер, що $V$ є недодатно визначеною та існує $x^0 \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ таке, що $V(x_0) = 0$. Знайдемо розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [0, +\infty)$, системи (4.4.11), який задовольняє умову $x(0) = x^0$ та позначимо $g(t) = V(\varphi(t))$, $t \in [0, +\infty)$. Скориставшись (4.4.12),

одержуємо

$$\dot{g}(t) = \dot{V}\big|_{(A-\frac{\alpha}{2}\mathbb{I})x}(\varphi(t)) = |\varphi(t)|^2, \quad t \in [0, +\infty).$$

Оскільки $|\varphi(0)|^2 = \left|x^0\right|^2 > 0$, існує $\delta > 0$ таке, що $|\varphi(t)|^2 > 0$ при $t \in [0, \delta]$. Отже, $\dot{g}(t) > 0$, $t \in [0, \delta]$. Тому $g$ є зростальною на $[0, \delta]$. Тоді

$$0 = V\left(x^0\right) = g(0) < g(\delta) = V(\varphi(\delta)),$$

що суперечить тому, що $V$ є недодатно визначеною.

Таким чином, існує $x \in \mathbb{R}^n$ $V(x) > 0$. Лему доведено. □

*Доведення теореми* 4.4.3. Скориставшись лемою 4.4.4, знайдемо $\alpha \geq 0$ та квадратичну форму $V$, які задовольняють рівняння (4.4.8) та $x^0 \in \mathbb{R}$, для якого

$$V\left(x^0\right) > 0. \tag{4.4.13}$$

Маємо

$$\dot{V}\big|_{Ax+R(t,x)}(t, x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x}\big(Ax + R(t, x)\big), \quad (t, x) \in \Omega.$$

З (4.4.8) одержуємо

$$\begin{aligned}\dot{V}\big|_{Ax+R(t,x)}(t, x) = \langle x, x\rangle + \alpha V(x)& \\ + \frac{\partial V(x)}{\partial x} R(t, x), \quad (t, x) \in \Omega.&\end{aligned} \tag{4.4.14}$$

Знайдемо $B \in \mathfrak{M}^*(n)$ таке, що $V(x) = \langle Bx, x\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тоді, скориставшись (4.4.2), маємо

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial V(x)}{\partial x} R(t, x)\right| &\leq 2|Bx|\,|R(t, x)| \leq \|B\||x|\gamma(|x|)|x| \\ &\leq \frac{1}{2}|x|^2, \quad (t, x) \in [t_0, +\infty) \times U(\delta_0),\end{aligned}$$

де $\delta_0 > 0$ є досить малим. Тому з (4.4.14) випливає

$$\dot{V}\big|_{Ax+R(t,x)}(t, x) \geq |x|^2 - \frac{1}{2}|x|^2 = \frac{1}{2}|x|^2, \quad (t, x) \in [t_0, +\infty) \times U(\delta_0).$$

Ураховуючи (4.4.13), одержуємо, що функція $V$ задовольняє всі умови теореми Четаєва про нестійкість (див. теорему 4.2.5), отже, нульовий розв'язок системи (4.4.1) є нестійким за Ляпуновим. □

Розглянемо два приклади.

*Приклад* 4.4.6. Дослідимо на стійкість нульову стаціонарну точку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = e^{x_1+2x_2} - \cos(3x_1), \\ \dot{x}_2 = \sqrt{4+8x_1} - 2e^{x_2}. \end{cases} \tag{4.4.15}$$

Маємо

$$e^{x_1+2x_2} - \cos(3x_1) = x_1 + 2x_2 + O\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \text{коли } |x| \to 0^+,$$
$$\sqrt{4+8x_1} - 2e^{x_2} = 2x_1 - 2x_2 + O\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \text{коли } |x| \to 0^+.$$

Таким чином, маємо справу із системою вигляду (4.4.1), яка задовольняє умову (4.4.2). Зокрема, тут $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Спробуємо застосувати до цієї системи теорему 4.4.1 або теорему 4.4.3. Числа $\lambda_1 = 2$ та $\lambda_2 = -3$ є власними значеннями матриці $A$. З того, що $\lambda_1 > 0$, застосовуючи теорему 4.4.3, одержуємо, що нульова стаціонарна точка є нестійкою за Ляпуновим.

*Приклад* 4.4.7. Дослідимо на стійкість нульову стаціонарну точку системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \ln\left(e^{-3x_1} + 4x_2\right), \\ \dot{x}_2 = \sqrt[3]{1-6x_1} + 2x_2 - 1. \end{cases} \tag{4.4.16}$$

Маємо

$$\ln\left(e^{-3x_1} + 4x_2\right) = -3x_1 + 4x_2 + O\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \text{коли } |x| \to 0^+,$$
$$\sqrt[3]{1-6x_1} + 2x_2 - 1 = -2x_1 + 2x_2 + O\left(x_1^2 + x_2^2\right), \quad \text{коли } |x| \to 0^+.$$

Таким чином, маємо справу із системою вигляду (4.4.1), яка задовольняє умову (4.4.2). Зокрема, тут $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Спробуємо застосувати до цієї системи теорему 4.4.1 або теорему 4.4.3. Числа $\lambda_1 = -1/2 + i\sqrt{7}/2$ та $\lambda_2 = -1/2 - i\sqrt{7}/2$ є власними значеннями матриці $A$. З того, що $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$ та $\operatorname{Re}\lambda_2 < 0$, застосовуючи теорему 4.4.1, одержуємо, що нульова стаціонарна точка є асимптотично стійкою за Ляпуновим.

## 4.5. Класифікація стаціонарних точок лінійної системи другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійну систему

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^2,\ t \in [t_0, +\infty), \tag{4.5.1}$$

де $A$ є дійсною сталою матрицею розміру $2 \times 2$.

Нехай $\lambda_1$, $\lambda_2$ є власними значеннями матриці $A$.

Не обмежуючи загальності, вважаємо, що матрицю $A$ зведено до жорданової або узагальненої жорданової форми (див., наприклад, [12, гл. 3, § 12; гл. 4, § 15]). А саме, розглянемо три випадки:

1. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ і $p_1 = 2$. Маємо $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

2. Нехай $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ і $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow p_1 = 1$. Маємо $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

3. Нехай $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Маємо $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Тут $p_1$ є кратністю $\lambda_1$ в мінімальному поліномі матриці $A$ у випадках 1 і 2, $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \beta \in \mathbb{R}$ у випадку 3.

Далі через $C_1$ і $C_2$ позначатимемо довільні дійсні сталі.

**1.1.** Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $p_1 = 2$. Тоді система (4.5.1) має вигляд

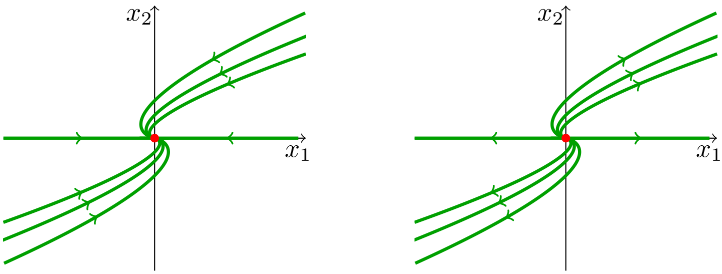
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{t\lambda_1} + C_2 t e^{t\lambda_1}, \\ x_2 = C_2 e^{t\lambda_1} \end{cases}$$

є загальним розв'язком цієї системи.

Фазові портрети зображено на рис. 4.4.




*а* *б*

Рис. 4.4. Асимптотично стійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, $p_1 = 2$ (стійкий вироджений вузол) — *а*; нестійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, $p_1 = 2$ (нестійкий вироджений вузол) — *б*

**1.2.** Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $p_1 = 2$. Тоді система (4.5.1) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 0. \end{cases}$$

Отже,

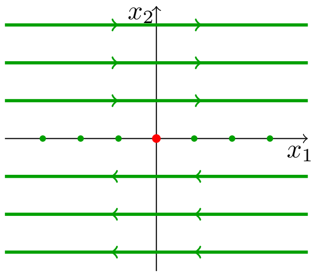
$$\begin{cases} x_1 = C_1 + C_2 t, \\ x_2 = C_2 \end{cases}$$

є загальним розв'язком цієї системи.

Фазовий портрет зображено на рис. 4.5, *а*.

**2.1.** Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $p_1 = 1$. Тоді система (4.5.1) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0. \end{cases}$$



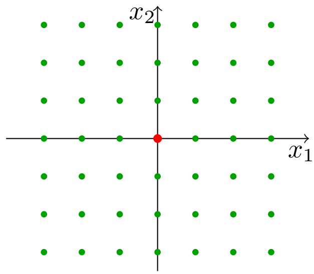




Рис. 4.5. Нестійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $p_1 = 2$ (сім'я прямих) — *а*; стійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $p_1 = 1$ — *б*

Отже,

$$\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2 \end{cases}$$

є загальним розв'язком цієї системи.

Фазовий портрет зображено на рис. 4.5, *б*.

**2.2.** Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $p_1 = 1$. Тоді система (4.5.1) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_1 x_2. \end{cases}$$

Отже,

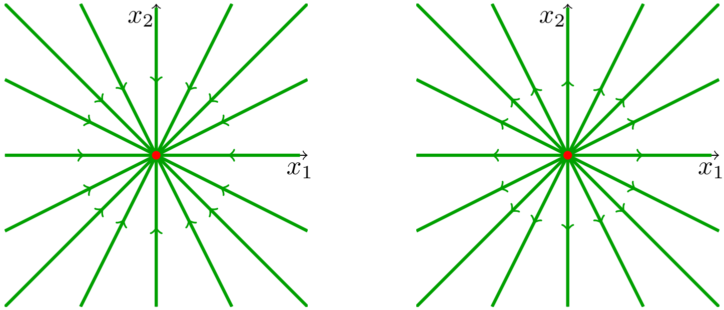
$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{t\lambda_1}, \\ x_2 = C_2 e^{t\lambda_1} \end{cases}$$

є загальним розв'язком цієї системи.

Фазові портрети зображено на рис. 4.6.

**2.3.** Нехай $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Тоді система (4.5.1) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2. \end{cases}$$




*а* *б*

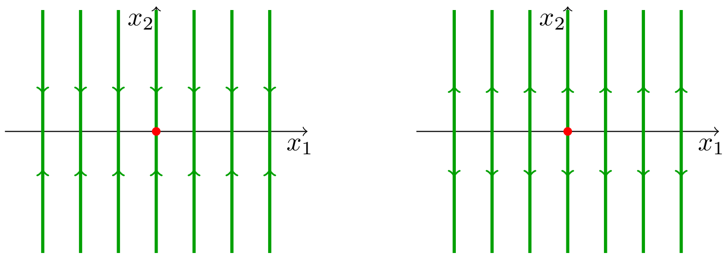
Рис. 4.6. Асимптотично стійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ (стійкий дикритичний вузол) — *а*; нестійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ (нестійкий дикритичний вузол) — *б*

Отже,

$$\begin{cases} x_1 = C_1, \\ x_2 = C_2 e^{t\lambda_2} \end{cases}$$

є загальним розв'язком цієї системи.

Фазові портрети зображено на рис. 4.7.




*а* *б*

Рис. 4.7. Стійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$ (стійка сім'я прямих) — *а*; нестійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ (нестійка сім'я прямих) — *б*

**2.4.** Нехай $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$. Тоді система (4.5.1) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = 0. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{t\lambda_1}, \\ x_2 = C_2 \end{cases}$$

є загальним розв'язком цієї системи.

Фазові портрети зображено на рис. 4.8.

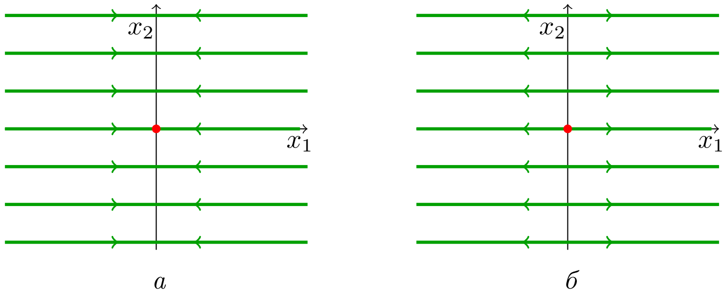



Рис. 4.8. Стійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$ (стійка сім'я прямих) — *а*; нестійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$ (нестійка сім'я прямих) — *б*

**2.5.** Нехай $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$. Тоді система (4.5.1) має вигляд

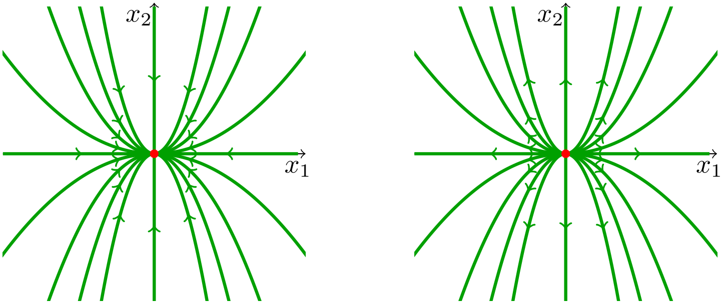
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{t\lambda_1}, \\ x_2 = C_2 e^{t\lambda_2} \end{cases}$$

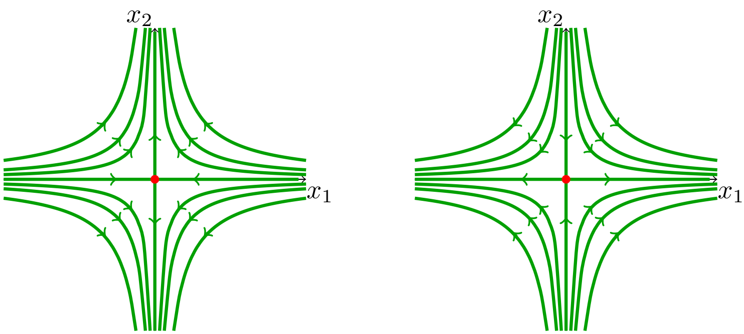
є загальним розв'язком цієї системи.

Фазові портрети зображено на рис. 4.9 та 4.10.




*а* *б*

Рис. 4.9. Асимптотично стійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ (стійкий вузол) — *а*; нестійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ (нестійкий вузол) — *б*




*а* *б*

Рис. 4.10. Нестійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ (сідло) — *а*; нестійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ (сідло) — *б*

**3.1.** Нехай $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha + i\beta$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \beta \in \mathbb{R}$. Тоді система (4.5.1) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} x_1 = e^{\alpha t}\big(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)\big), \\ x_2 = e^{\alpha t}\big( - C_1\sin(\beta t) + C_2\cos(\beta t)\big) \end{cases}$$

є загальним розв'язком цієї системи.

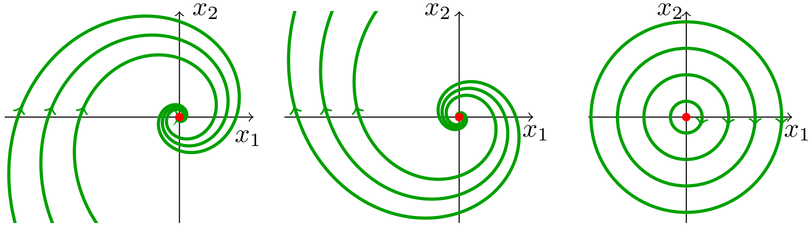
Обравши замість $C_1$ і $C_2$ нові сталі $R > 0$ і $\psi \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\beta\psi) = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}, \quad \sin(\beta\psi) = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}},$$
$$R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}e^{\alpha\psi},$$

одержуємо

$$\begin{cases} x_1 = Re^{\alpha(t-\psi)}\cos\big(\beta(t-\psi)\big), \\ x_2 = -Re^{\alpha(t-\psi)}\sin\big(\beta(t-\psi)\big). \end{cases}$$

Фазові портрети зображено на рис. 4.11.




*а* *б* *в*

Рис. 4.11. Асимптотично стійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\alpha < 0$, $\beta > 0$ (стійкий фокус) — *а*; нестійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (нестійкий фокус) — *б*; стійкий за Ляпуновим нульовий розв'язок, $\alpha = 0$, $\beta > 0$ (центр) — *с*

# Розділ 5

# Елементи теорії керованих систем*

## 5.1. Керовані системи

Розглянемо *керовану систему*

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \ u \in U \subset \mathbb{R}^r, \qquad (5.1.1)$$

де $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}^n$, $u : [0, T] \to U$ є параметром, який називається *керуванням*, або *входом системи*.

**Означення 5.1.1.** Якщо для деяких $x^0$, $x^T \in R^n$ існують неперервне на $[0, T]$ керування $u : [0, T] \to U$ та розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [0, T]$, системи (5.1.1) такі, що $\varphi(0) = x^0$ та $\varphi(T) = x^T$, то кажуть, що *керування* $u$ *переводить* $x^0$ *в* $x^T$ за час $T$.

**Означення 5.1.2.** Система (5.1.1) називається *повністю керованою* за час $T$, якщо для кожної пари $\left(x^0, x^T\right) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ існує неперервне на $[0, T]$ керування $u : [0, T] \to U$, яке переводить $x^0$ в $x^T$ за час $T$.

*У цьому розділі вміщено дещо доопрацьований матеріал навчального посібника [13], написаного авторкою сумісно з Г.М. Скляром.

Нагадаємо деякі поняття та твердження з лінійної алгебри (див. [12, гл. 3, п. 12.3, гл. 5, п. 17.5]).

Вектори $x \in \mathbb{R}^n$ та $y \in \mathbb{R}^n$ називаються *ортогональними* (позначається $x \perp y$), якщо $\langle x, y \rangle = 0$. Уважаємо, що вектор $x \in \mathbb{R}^n$ є ортогональним лінійному підпростору $L$ (позначається $x \perp L$), якщо для кожного $y \in L$ маємо $x \perp y$.

Нехай $L$ є лінійним підпростором $\mathbb{R}^n$. Позначимо

$$L^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \perp L\}.$$

Множина $L^{\perp}$ також є підпростором $\mathbb{R}^n$ та називається *ортогональним доповненням* до $L$. Зрозуміло, що $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = L$.

**Твердження 5.1.3.** *Нехай $L$ є лінійним підпростором $\mathbb{R}^n$. Тоді кожний вектор $x \in \mathbb{R}^n$ однозначно зображується у вигляді $x = x_1 + x_2$ де $x_1 \in L$, $x_2 \in L^{\perp}$. Крім того, об'єднання базисів $L$ та $L^{\perp}$ є базисом $\mathbb{R}^n$.*

Для довільної матриці $A \in \mathfrak{M}(m, n)$ символом $A^*$ позначається спряжена матриця.

Нагадаємо також, що самоспряжена $n \times n$ матриця $A$ ($A = A^*$) називається невід'ємно визначеною ($A \succeq 0$), якщо для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ маємо $x^*Ax \geq 0$; матриця $A$ називається додатно визначеною ($A \succ 0$), якщо для кожного $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ маємо $x^*Ax > 0$.

**Лема 5.1.4.** *Нехай $A \succ 0$. Тоді* $\det A \neq 0$.

*Доведення.* Нехай $A \succ 0$ та $\det A = 0$. Тоді існує $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ таке, що $Ax = 0$, отже, $x^*Ax = 0$, що суперечить умові $A \succ 0$. Лему доведено. □

### 5.1.1. Керованість лінійних систем зі змінними матрицями

Розглянемо *лінійну керовану систему*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in [0, T], \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^r, \tag{5.1.2}$$

де $A(t) \in \mathfrak{M}(n,n)$, $B(t) \in \mathfrak{M}(n,r)$, $t \in [0,T]$.

Нехай $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків (див. означення 2.1.22) системи

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1.3}$$

Позначимо

$$N(T) = \int_0^T \Phi^{-1}(t)B(t)B^*(t)\big(\Phi^{-1}(t)\big)^*\,dt.$$

**Лема 5.1.5.** *Нехай $A \in C[0,T]$, $B \in C[0,T]$, тоді:*

1. *Для будь-якої фундаментальної матриці розв'язків $\Phi$ системи (5.1.3) матриця $N(T)$ є невід'ємно визначеною.*

2. *Для будь-яких фундаментальних матриць розв'язків $\Phi_1$ та $\Phi_2$ системи (5.1.3) відповідні їм матриці $N_1(T)$ та $N_2(T)$ або обидві є додатно визначеними, або обидві не є додатно визначеними.*

*Доведення.* Доведемо пункт 1. Нехай $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\begin{aligned}\xi^* N(T)\xi &= \xi^* \int_0^T \Phi^{-1}(t)B(t)B^*(t)\left(\Phi^{-1}(t)\right)^* dt\xi \\ &= \int_0^T \left(\xi^*\Phi^{-1}(t)B(t)\right)\left(\xi^*\Phi^{-1}(t)B(t)\right)^* dt \\ &= \int_0^T \left|\xi^*\Phi^{-1}(t)B(t)\right|^2 dt.\end{aligned}$$

Отже,

$$\xi^* N(T)\xi = \int_0^T \left|\xi^*\Phi^{-1}(t)B(t)\right|^2 dt \ge 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.1.4}$$

тобто $N(T) \succeq 0$.

Доведемо пункт 2. Згідно з теоремою про зв'язок між фундаментальними матрицями розв'язків системи (5.1.3) (див. теорему

2.1.24) маємо $\Phi_2(t) \equiv \Phi_1(t)C$ на $[0,T]$, де $C \in \mathfrak{M}(n,n)$ є невиродженою. Отже,

$$\begin{aligned} N_2(T) &= \int_0^T \Phi_2^{-1}(t)B(t)B^*(t)\big(\Phi_2^{-1}(t)\big)^* \, dt \\ &= C^{-1} \int_0^T \Phi_1^{-1}(t)B(t)B^*(t)\big(\Phi_1^{-1}(t)\big)^* \, dt \, \big(C^{-1}\big)^* . \end{aligned}$$

З цього співвідношення одразу випливає твердження

$$N_1(T) \succ 0 \Leftrightarrow N_2(T) \succ 0.$$

Лему доведено. □

Доведемо далі критерій повної керованості лінійної системи із змінними матрицями.

**Теорема 5.1.6.** *Нехай $A \in C[0,T]$, $B \in C[0,T]$. Система (5.1.2) є повністю керованою на $[0,T]$ в тому і лише тому випадку, коли виконано умову*

$$N(T) \succ 0. \tag{5.1.5}$$

*Доведення. Достатність* (5.1.5). Нехай $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (5.1.3). Зафіксуємо довільні $x^0 \in \mathbb{R}^n$ та $x^T \in \mathbb{R}^n$ та запишемо розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [0,T]$, задачі Коші для системи (5.1.2) з початковою умовою $x(0) = x^0$ (див. теорему 2.1.33 про розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи):

$$\varphi(t) \equiv \Phi(t)\left(\Phi^{-1}(0)x^0 + \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau\right) \text{ на } [0,T]. \tag{5.1.6}$$

Шукатимемо керування $u$, яке переводить $x^0$ в $x^T$ за час $[0,T]$ у вигляді $u(t) \equiv B^*(t)\left(\Phi^{-1}(t)\right)^* \xi$, де $\xi \in \mathbb{R}^n$ є деякою сталою. Підставляючи $u(\tau)$ та $t = T$ у формулу (5.1.6) та враховуючи умову $x(T) = x^T$, маємо

$$x^T = \varphi(T) = \Phi(T)\Bigg(\Phi^{-1}(0)x^0$$

$$+\int_0^T \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)B^*(\tau)\left(\Phi^{-1}(\tau)\right)^*\xi\,d\tau\Big)$$
$$=\Phi(T)\left(\Phi^{-1}(0)x^0+N(T)\xi\right).$$

Отже,
$$N(T)\xi=\Phi^{-1}(T)x^T-\Phi^{-1}(0)x^0.$$

Згідно з лемою 5.1.4 існує матриця $N^{-1}(T)$, тому звідси випливає
$$\xi=N^{-1}(T)\left(\Phi^{-1}(T)x^T-\Phi^{-1}(0)x^0\right).$$

Таким чином, для будь-яких $x^0\in\mathbb{R}^n$, $x^T\in\mathbb{R}^n$ існує неперервне керування
$$u(t)\equiv B^*(t)\left(\Phi^{-1}(t)\right)^*N^{-1}(T)\left(\Phi^{-1}(T)x^T-\Phi^{-1}(0)x^0\right)\ \text{ на } [0,T], \tag{5.1.7}$$
яке переводить $x^0$ в $x^T$ за час $[0,T]$, отже, система (5.1.2) є повністю керованою на $[0,T]$.

*Необхідність* (5.1.5). Припустимо, що система (5.1.2) є повністю керованою на $[0,T]$, але $N(T)$ не є додатно визначеною. Тоді існує $\xi\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, для якого
$$0=\xi^*N(T)\xi=\int_0^T\left|\xi^*\Phi^{-1}(t)B(t)\right|^2dt.$$

Оскільки функція $\xi^*\Phi^{-1}(t)B(t)$ є неперервною на $[0,T]$, маємо
$$\xi^*\Phi^{-1}(t)B(t)\equiv 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{5.1.8}$$

Позначимо $x^0=0$, $x^T=\Phi(T)\xi$. Оскільки система (5.1.2) є повністю керованою за час $[0,T]$, знайдемо неперервне на $[0,T]$ керування $u$, яке переводить $x^0$ в $x^T$ за час $[0,T]$.

Ураховуючи те, що
$$\varphi(t)\equiv\Phi(t)\int_0^t\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau \quad \text{на } [0,T]$$
є єдиним розв'язком задачі Коші для системи (5.1.2) з визначеним вище $u$ та початковою умовою $x(0)=x^0=0$ (див. теорему

2.1.33 про розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи), маємо

$$\Phi(T)\xi = x^T = \varphi(T) = \Phi(T)\int_0^T \Phi^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau.$$

Помноживши це співвідношення на $\xi^*\Phi^{-1}(T)$ та враховуючи (5.1.8), маємо

$$|\xi|^2 = \xi^*\xi = \int_0^T \xi^*\Phi^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau = 0,$$

що суперечить вибору $\xi$ ($\xi \neq 0$). Одержана суперечність доводить (5.1.5). □

*Приклад* 5.1.7. З'ясуємо, чи є система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + e^{-2t}x_3 \\ \qquad\qquad + \left(e^t + 2\right)u_1 + \left(te^{-t} - e^{-2t}\right)u_2, \quad t \in [0,2], \\ \dot{x}_2 = x_1 - e^{-2t}x_3 \\ \qquad\qquad + \left(e^t - 2\right)u_1 - \left(te^{-t} - e^{-2t}\right)u_2, \quad t \in [0,2], \\ \dot{x}_3 = 2e^t x_1 + 2e^t x_2 + 2e^{2t}u_1 + u_2, \qquad\qquad t \in [0,2], \end{cases} \tag{5.1.9}$$

повністю керованою на $[0,2]$; і, якщо можливо, знайдемо неперервне на $[0,2]$ керування $u$, яке переводить точку $x^0 \in \mathbb{R}$ у точку $x^2 \in \mathbb{R}^3$. Для системи (5.1.9) маємо

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & e^{-2t} \\ 1 & 0 & -e^{-2t} \\ 2e^t & 2e^t & 0 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,2],$$

$$B(t) \equiv \begin{pmatrix} e^t + 2 & te^{-t} - e^{-2t} \\ e^t - 2 & -te^{-t} + e^{-2t} \\ 2e^{2t} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,2].$$

**1.** З'ясуємо спочатку, чи є система (5.1.9) повністю керованою на $[0,2]$. Для цього обчислимо матрицю $N(2)$ та визначимо, чи виконується для неї умова (5.1.5) (див. теорему 5.1.6).

Знайдемо спочатку фундаментальну матрицю розв'язків $\Phi$ лінійної однорідної системи, яка відповідає системі (5.1.9), тобто системі

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + e^{-2t}x_3, \quad & t \in [0,2], \\ \dot{x}_2 &= x_1 - e^{-2t}x_3, \quad & t \in [0,2], \\ \dot{x}_3 &= 2e^t x_1 + 2e^t x_2, \quad & t \in [0,2]. \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

Додавши до першого рівняння цієї системи друге, одержимо

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \quad t \in [0,2],$$

тому

$$x_1 + x_2 = C_1 e^t, \quad t \in [0,2], \tag{5.1.11}$$

де $C_1 \in \mathbb{R}$ є довільною сталою. Підставивши у третє рівняння системи (5.1.10) співвідношення (5.1.11), маємо

$$\dot{x}_3 = 2e^t(x_1 + x_2) = 2C_1 e^{2t}, \quad t \in [0,2].$$

Отже,

$$x_3 = C_1 e^{2t} + C_2, \quad t \in [0,2], \tag{5.1.12}$$

де $C_2 \in \mathbb{R}$ є довільною сталою. Далі, віднявши від першого рівняння системи (5.1.10) друге та скориставшись (5.1.12), одержуємо

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 - \dot{x}_2 &= -(x_1 - x_2) + 2e^{-2t}x_3 \\ &= -(x_1 - x_2) + 2e^{-2t}\left(C_1 e^{2t} + C_2\right), \quad t \in [0,2], \end{aligned}$$

тоді

$$x_1 - x_2 = 2C_1 - 2C_2 e^{-2t} + 2C_3 e^{-t}, \quad t \in [0,2], \tag{5.1.13}$$

де $C_3 \in \mathbb{R}$ є довільною сталою. Таким чином, з (5.1.11), (5.1.12) та (5.1.13) випливає

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}C_1\left(e^t + 2\right) - C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}, \quad & t \in [0,2], \\ x_2 &= \frac{1}{2}C_1\left(e^t - 2\right) + C_2 e^{-2t} - C_3 e^{-t}, \quad & t \in [0,2], \\ x_3 &= C_1 e^{2t} + C_2, & t \in [0,2], \end{aligned}$$

тому

$$\Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} e^t + 2 & -e^{-2t} & e^{-t} \\ e^t - 2 & e^{-2t} & -e^{-t} \\ 2e^{2t} & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2].$$

Обчислимо тепер матрицю $N(2)$. Маємо

$$\Phi^{-1}(t) \equiv \begin{pmatrix} e^{-t}/2 & e^{-t}/2 & 0 \\ -e^t & -e^t & 1 \\ -2 + e^t/2 & -2 - e^t/2 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2]. \qquad (5.1.14)$$

Позначимо

$$\Omega(t) := \Phi^{-1}B(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2]. \qquad (5.1.15)$$

Отже,

$$N(2) = \int_0^2 \Omega(t)\Omega^*(t)\, dt = \int_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & t^2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8/3 \end{pmatrix}.$$

Далі перевіримо виконання умови (5.1.5). Для головних діагональних мінорів матриці $N(2)$ маємо

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8/3 \end{vmatrix} = \frac{8}{3} > 0.$$

Отже, за критерієм Сильвестра (див. [7, гл. 10, § 4, теорема 3]) матриця $N(2)$ додатно визначена, тобто умову (5.1.5) виконано, тому за теоремою 5.1.6 система (5.1.9) повністю керована на $[0, 2]$.

**2.** За формулою (5.1.7) знайдемо керування $u$, яке переводить точку $x^0$ у точку $x^2$ за час $[0, 2]$. Згідно з (5.1.7) маємо

$$u(t) \equiv \Omega^*(t)N^{-1}(2)\left(\Phi^{-1}(2)x^2 - \Phi^{-1}(0)x^0\right)$$

$$\equiv U_2(t)x^2 - U_0(t)x^0 \quad \text{на } [0,2], \tag{5.1.16}$$

де

$$U_0(t) \equiv \Omega^*(t)N^{-1}(2)\Phi^{-1}(0) \quad \text{на } [0,2],$$
$$U_2(t) \equiv \Omega^*(t)N^{-1}(2)\Phi^{-1}(2) \quad \text{на } [0,2].$$

Обчислимо матриці $U_2(t)$, $U_0(t)$. Оскільки

$$N^{-1}(2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix},$$

ураховуючи (5.1.15), маємо

$$\Omega^*(t)N^{-1}(2) \equiv \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2-3t/2 & 3(t-1)/2 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,2].$$

Тому

$$U_0(t) \equiv \Omega^*(t)N^{-1}(2) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -3/2 & -5/2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 \\ -(3t-1)/4 & -(9t-7)/4 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,2],$$
$$U_2(t) \equiv \Omega^*(t)N^{-1}(2) \begin{pmatrix} (2e^2)^{-1} & (2e^2)^{-1} & 0 \\ -e^2 & -e^2 & 1 \\ -2-e^2/2 & -2+e^2/2 & e^{-2} \end{pmatrix}$$
$$\equiv \begin{pmatrix} (4e^2)^{-1} & (4e^2)^{-1} & 0 \\ \mu_1(t) & \mu_2(t) & \mu_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,2],$$

де

$$\mu_1(t) = \left(\frac{9e^2}{4} - 3\right)t + 3 - \frac{11e^2}{4} \qquad \text{на } [0,2],$$
$$\mu_2(t) = \left(\frac{3e^2}{4} - 3\right)t + 3 - \frac{5e^2}{4} \qquad \text{на } [0,2],$$

$$\mu_3(t) = \left(\frac{3}{2e^2} - \frac{3}{2}\right)t + 2 - \frac{3}{2e^2} \qquad \text{на } [0,2].$$

Таким чином, керування (5.1.16), переводить точку $x^0$ у точку $x^2$ за час $[0,2]$. Наприклад, точку $x^0 = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ у точку $x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ e^2/2 \end{pmatrix}$ за час $[0,2]$ переводить керування

$$u(t) \equiv \begin{pmatrix} \left(6 - e^{-2}\right)/4 \\ 3t/4 + (3e^2 - 11)/4 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,2].$$

## 5.1.2. Керованість лінійних систем з диференційовними матрицями

Нехай $A \in C^{n-1}[0,T]$ і $B \in C^{n-1}[0,T]$, де $A(t) \in \mathfrak{M}(n,n)$ і $B(t) \in \mathfrak{M}(n,r)$, $t \in [0,T]$. Позначимо $\delta_A = -L_n^A = A(t) - \mathbb{I}\dfrac{d}{dt}$. Маємо

$$\begin{aligned} &\delta_A^0 B(t) = B(t), && t \in [0,T], \\ &\delta_A^m B(t) = \delta_A\left(\delta_A^{m-1} B(t)\right), && t \in [0,T],\ m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Розглянемо матрицю $(n \times nr)$:

$$\mathbf{K}(t) = \begin{pmatrix} B(t) & \delta_A B(t) & \delta_A^2 B(t) & \cdots & \delta_A^{n-1} B(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0,T].$$

Доведемо ознаку повної керованості лінійної системи з диференційовними матрицями.

**Теорема 5.1.8.** *Нехай $A \in C^{n-1}[0,T]$, $B \in C^{n-1}[0,T]$. Якщо існує $t_0 \in [0,T]$, яке задовольняє умову*

$$\operatorname{rank} \mathbf{K}(t_0) = n, \tag{5.1.17}$$

*то система (5.1.2) є повністю керованою на $[0,T]$.*

*Доведення.* Нехай $t_0 \in [0,T]$ задовольняє умову (5.1.17), але система (5.1.2) не є повністю керованою на $[0,T]$. Нехай також $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (5.1.3). Тоді згідно з теоремою 5.1.6 матриця $N(T)$ не є додатно визначеною, тобто (див. також лему 5.1.5 та (5.1.4)) існує $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, яке задовольняє умову

$$0 = \xi^* N(T) \xi = \int_0^T \left| \xi^* \Phi^{-1}(t) B(t) \right|^2 dt.$$

Оскільки функція $\xi^* \Phi^{-1}(t) B(t)$ є неперервною на $[0,T]$, звідси випливає

$$\xi^* \Phi^{-1}(t) B(t) \equiv 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{5.1.18}$$

Після диференціювання звідси одержимо систему

$$\xi^* \left(\Phi^{-1}(t) B(t)\right)^{(j)} \equiv 0 \quad \text{на } [0,T],\ j = \overline{0,\, n-1}. \tag{5.1.19}$$

Доведемо, що для будь-якого $m = \overline{0, n-1}$ маємо

$$\left(\Phi^{-1}(t) B(t)\right)^{(m)} \equiv \Phi^{-1}(t) (-\delta_A)^m B(t) \quad \text{на } [0,T]. \tag{5.1.20}$$

Для $m = 0$ одержуємо

$$\left(\Phi^{-1}(t) B(t)\right)^{(0)} \equiv \Phi^{-1}(t) B(t) \equiv \Phi^{-1}(t) (-\delta_A)^0 B(t) \quad \text{на } [0,T].$$

Для кожного наступного $m = \overline{1, n-1}$ на $[0,T]$ маємо

$$\begin{aligned}
\left(\Phi^{-1}(t) B(t)\right)^{(m)} &\equiv \left(\left(\Phi^{-1}(t) B(t)\right)^{(m-1)}\right)' \\
&\equiv \left(\Phi^{-1}(t) (-\delta_A)^{m-1} B(t)\right)' \\
&\equiv \left(\Phi^{-1}(t)\right)' (-\delta_A)^{m-1} B(t) + \Phi^{-1}(t) \left((-\delta_A)^{m-1} B(t)\right)'.
\end{aligned} \tag{5.1.21}$$

Оскільки $\Phi^{-1}(t)\Phi(t) \equiv \mathbb{I}$ на $[0,T]$ та $\Phi$ є фундаментальною матрицею розв'язків системи (5.1.2) (тобто $\Phi'(t) \equiv A(t)\Phi(t)$ на $[0,T]$, див. теорему 2.1.23), одержуємо

$$0 \equiv \left(\Phi^{-1}(t)\Phi(t)\right)' \equiv \left(\Phi^{-1}(t)\right)' \Phi(t) + \Phi^{-1}(t) \left(\Phi(t)\right)'$$

$$\equiv \left(\Phi^{-1}(t)\right)'\Phi(t) + \Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t)$$
$$\equiv \left(\left(\Phi^{-1}(t)\right)' + \Phi^{-1}(t)A(t)\right)\Phi(t) \quad \text{на } [0,T].$$

Отже, $\left(\Phi^{-1}(t)\right)' \equiv -\Phi^{-1}(t)A(t)$ на $[0,T]$. Продовжуючи (5.1.21), одержуємо

$$\begin{aligned}\left(\Phi^{-1}(t)B(t)\right)^{(m)} &\equiv -\Phi^{-1}(t)A(t)(-\delta_A)^{m-1}B(t)\\ &\quad + \Phi^{-1}(t)\frac{d}{dt}(-\delta_A)^{m-1}B(t)\\ &\equiv \Phi^{-1}(t)\left(-A(t) + \mathbb{I}\frac{d}{dt}\right)(-\delta_A)^{m-1}B(t)\\ &\equiv \Phi^{-1}(t)(-\delta_A)^m B(t) \quad \text{на } [0,T].\end{aligned}$$

Таким чином, формулу (5.1.20) доведено.

Із системи (5.1.19), враховуючи (5.1.20), одержуємо

$$\xi^*\Phi^{-1}(t)\delta_A^j B(t) \equiv 0 \quad \text{на } [0,T],\ j = \overline{0,\ n-1}. \tag{5.1.22}$$

Звідси, підставляючи в (5.1.22) $t = t_0$, одержуємо

$$\xi^*\Phi^{-1}(t_0)\delta_A^j B(t_0) = 0, \quad j = \overline{0,\ n-1},$$

тобто $\operatorname{rank}\left(\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{K}(t_0)\right) < n$ (оскільки $\xi^* \neq 0$), отже,

$$\operatorname{rank}\mathbf{K}(t_0) < n,$$

що суперечить умові (5.1.17). Теорему доведено. □

*Приклад* 5.1.9. З'ясуємо, чи є система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= tx_1 + \cos t x_2 + t^2 u_2, && t \in [0,\pi],\\ \dot{x}_2 &= t^2 x_2 + (t-1)u_1, && t \in [0,\pi],\\ \dot{x}_3 &= -t^2 x_1 + t^4 x_3 + u_1 - u_2, && t \in [0,\pi],\end{aligned}$$

повністю керованою на $[0,\pi]$.

Перевіримо виконання умови (5.1.17). На $[0, \pi]$ маємо

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} t & \cos t & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ -t^2 & 0 & t^4 \end{pmatrix},$$

$$B(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ t-1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\delta_A B(t) \equiv \begin{pmatrix} (t-1)\cos t & t^3 - 2t \\ t^3 - t^2 - 1 & 0 \\ t^4 & -2t^4 \end{pmatrix},$$

$$\delta_A^2 B(t) \equiv \begin{pmatrix} (t^3 - t - 2)\cos t + (t-1)\sin t & t^4 - 5t^2 + 2 \\ t^5 - t^4 - 4t^2 + 2t & 0 \\ -t^2(t-1)\cos t + t^8 - 4t^3 & -t^5 + 10t^3 - t^8 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$\mathbf{K}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

отже, $\operatorname{rank} K(0) = 3$, тобто ця система задовольняє умову (5.1.17) для $t_0 = 0$. З теореми 5.1.8 одержуємо, що наша система повністю керована на $[0, \pi]$.

З наступного прикладу бачимо, що умова (5.1.17) не є необхідною для повної керованості системи (5.1.2) на $[0, T]$.

*Приклад* 5.1.10. З'ясуємо, чи є система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + |t-1|(t-1)e^t u, \quad & t \in [0, 2], \\ \dot{x}_2 &= x_2 + (t-1)^2 e^t u, \quad & t \in [0, 2], \end{aligned}$$

повністю керованою на $[0, 2]$.

Зрозуміло, що $A(t) \equiv \mathbb{I}$, $B(t) \equiv \begin{pmatrix} |t-1|(t-1) \\ (t-1)^2 \end{pmatrix} e^t$ на $[0, 2]$.

Перевіримо спочатку виконання умови (5.1.17). Маємо

$$K(t) \equiv \begin{pmatrix} |t-1|(t-1) & -2|t-1| \\ (t-1)^2 & -2(t-1) \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2].$$

Звідси одержуємо, що для кожного $t \in [0, 2]$ маємо $\operatorname{rank} K(t) < 2$, тобто для жодного $t \in [0, 2]$ умову (5.1.17) не виконано, тому застосувати теорему 5.1.8 до цієї системи неможливо.

Скористаємось теоремою 5.1.2 для дослідження нашої системи на повну керованість на $[0, 2]$, тобто перевіримо виконання умови (5.1.5). Для цього обчислимо матрицю $N(2)$. Оскільки $A(t) \equiv \mathbb{I}$, маємо $\Phi(t) \equiv e^t\mathbb{I}$, отже, $\Phi^{-1}(t) \equiv e^{-t}\mathbb{I}$ на $[0, 2]$. Позначимо

$$\Omega(t) := \Phi^{-1}(t)B(t) \equiv \begin{pmatrix} |t-1|(t-1) \\ (t-1)^2 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2].$$

Звідси одержуємо

$$\begin{aligned} N(2) &= \int_0^2 \Omega(t)\Omega(t)^*\, dt \\ &= \int_0^2 \begin{pmatrix} (t-1)^4 & (t-1)^3|t-1| \\ (t-1)^3|t-1| & (t-1)^4 \end{pmatrix} dt = \frac{2}{5}\mathbb{I}. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що $N(2) \succ 0$. Отже, умову (5.1.5) для нашої системи виконано, тому за теоремою 5.1.6 вона повністю керована на $[0, 2]$, але $\operatorname{rank} K(t) < 2$, $t \in [0, 2]$, тобто умову (5.1.17) для цієї системи не виконано.

*Таким чином, умова* (5.1.17) *не є необхідною для повної керованості на* $[0, T]$ *системи* (5.1.2).

### 5.1.3. Керованість лінійних систем зі сталими матрицями

Розглянемо систему вигляду (5.1.2) із сталими матрицями:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad t \in [0, T],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r, \tag{5.1.23}$$

де $A \in \mathfrak{M}(n, n)$, $B \in \mathfrak{M}(n, r)$.

Доведемо наступні допоміжні твердження.

Обчислимо для системи (5.1.23) матрицю $\mathbf{K}$. Маємо

$$\mathbf{K}(t) \equiv \mathcal{K} := \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,T].$$

Далі для фундаментальної матриці розв'язків $\Phi(t) \equiv e^{At}$ на $[0,T]$ лінійної однорідної системи, яка відповідає лінійній неоднорідній системі (5.1.23), обчислимо інтегральну матрицю керованості $N(T)$. Ураховуючи теорему 2.4.41 про матрицю, спряжену до матричної експоненти, маємо

$$N(T) = \int_0^T e^{-At} B B^* e^{-A^* t}\, dt.$$

Доведемо критерій того, що для точок $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $x^T \in \mathbb{R}^n$ існує неперервне на $[0,T]$ керування, яке переводить $x^0$ в $x^T$ за час $[0,T]$.

**Теорема 5.1.11.** *Для точок $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $x^T \in \mathbb{R}^n$ існує неперервне на $[0,T]$ керування $u$, яке переводить $x^0$ в $x^T$ за час $[0,T]$ у тому і лише тому випадку, коли*

$$e^{-AT}x^T - x^0 \in L = \operatorname{lin}\{A^s b^j \mid s = \overline{0,\, n-1},\ j = \overline{1,r}\}, \qquad (5.1.24)$$

*де $b^j$ є $j$-м стовпцем матриці $B$.*

*Доведення. Необхідність* (5.1.24). Нехай для точок $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $x^T \in \mathbb{R}^n$ існує неперервне на $[0,T]$ керування $u$, яке переводить $x^0$ в $x^T$ за час $[0,T]$. Цьому керуванню $u$ відповідає єдиний розв'язок $x = \varphi(t)$, $t \in [0,T]$, системи (5.1.23), для якого $x(0) = x^0$, $x(T) = x^T$ (це випливає з теореми 2.1.6 про існування та єдиність розв'язку задачі Коші для лінійної системи):

$$\varphi(t) \equiv e^{At}\left(x^0 + \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau\right) \ \text{на } [0,T].$$

Тому

$$e^{-AT}x^T - x^0 = \int_0^T e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau. \qquad (5.1.25)$$

Згідно з теоремою 2.4.40 про розкладання матричної експоненти в скінченну суму степенів маємо

$$e^{-At} \equiv \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s(-t)A^s \text{ на } \mathbb{R}, \tag{5.1.26}$$

де $p$ є степенем мінімального полінома матриці $A$, $\alpha_s$, $s = \overline{0, p-1}$, є скалярними нескінченно диференційовними на $\mathbb{R}$ функціями, які задовольняють умови (2.4.51) та (2.4.51), тому є лінійно незалежними на $[0, T]$ (див. наслідок 2.1.18).

Підставляючи (5.1.26) у (5.1.25), одержуємо

$$\begin{aligned} e^{-AT}x^T - x^0 &= \int_0^T \left( \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s(-t)A^s Bu(\tau) \right) d\tau \\ &= \sum_{s=0}^{p-1} A^s B \left( \int_0^T \alpha_s(-t)u(\tau)\, d\tau \right). \end{aligned} \tag{5.1.27}$$

Звідси одразу бачимо, що

$$e^{-AT}x^T - x^0 \in L = \operatorname{lin}\{A^s b^j \mid s = \overline{0, n-1},\ j = \overline{1, r}\}.$$

*Достатність* (5.1.24). Нехай $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $x^T \in \mathbb{R}^n$ є такими, що

$$\nu = e^{-AT}x^T - x^0 \in L = \operatorname{lin}\{A^s b^j \mid s = \overline{0, n-1},\ j = \overline{1, r}\}.$$

Будемо шукати неперервне на $[0, T]$ керування $u$, яке переводить $x^0$ в $x^T$ за час $[0, T]$, у вигляді

$$u(t) \equiv \sum_{s=0}^{p-1} \xi^s \overline{\alpha_s(-t)} \quad \text{на } [0, T], \tag{5.1.28}$$

де $\xi^s \in \mathbb{R}^n$, $s = \overline{0, p-1}$. Згідно з наслідком 2.4.17 з того, що $\nu \in L$, випливає

$$\nu = \sum_{s=0}^{p-1} A^s B \gamma^s, \tag{5.1.29}$$

де $\gamma^s \in \mathbb{R}^r$, $s = \overline{0, p-1}$.

Для того щоб керування $u$ вигляду (5.1.28) переводило точку $x^0$ в $x^T$ за час $[0, T]$, досить виконання співвідношення (5.1.27). Підставляючи (5.1.28) та (5.1.29) у (5.1.27), маємо

$$\sum_{s=0}^{p-1} A^s B \gamma^s = \sum_{s=0}^{p-1} \left( A^s B \int_0^T \left( \alpha_s(-\tau) \sum_{j=0}^{p-1} \xi^j \overline{\alpha_j(-t)} \right) d\tau \right)$$
$$= \sum_{s=0}^{p-1} A^s B \sum_{j=0}^{p-1} \left( \xi^j \int_0^T \alpha_s(-\tau) \overline{\alpha_j(-t)}\, d\tau \right), \qquad (5.1.30)$$

яка еквівалентна умові

$$\Gamma = \Xi M, \qquad (5.1.31)$$

де $\Gamma = (\gamma^0, \dots, \gamma^{p-1}) \in \mathfrak{M}(r, p)$, $\Xi = (\xi^0, \dots, \xi^{p-1}) \in \mathfrak{M}(r, p)$, $M = \{\mu_s^j\}_{s=\overline{0,p-1}}^{j=\overline{0,p-1}} \in \mathfrak{M}(p, p)$,

$$\mu_s^j = \int_0^T \alpha_s(-\tau) \overline{\alpha_j(-\tau)}\, d\tau, \quad s, j = \overline{0, p-1}.$$

Покажемо, що $\det M \neq 0$. Розглянемо лінійний простір $C[-T, 0]$, який складається з неперервних на $[-T, 0]$ функцій, із скалярним добутком

$$\langle \eta, \kappa \rangle = \int_{-T}^0 \eta(t) \overline{\kappa(t)}\, dt, \quad \eta, \kappa \in C[-T, 0].$$

Функції $\alpha_s$, $s = \overline{0, p-1}$, належать $C[-T, 0]$ та є лінійно незалежними на $[-T, 0]$ (див. теорему 2.4.40 про розкладання матричної експоненти у скінченну суму степенів і критерій лінійної незалежності системи розв'язків лінійного однорідного рівняння, тобто теорему 2.2.12). Розглянемо лінійний підпростір $\operatorname{lin} \alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ простору $C[-T, 0]$. Маємо $\mu_s^j = \langle \alpha_s, \alpha_j \rangle$. Тому $\det M$ є детермінантом Ґрама лінійно незалежної системи функцій $\alpha_s$, $s = \overline{0, p-1}$) з підпростору $\operatorname{lin} \alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$:

$$\det M = \begin{vmatrix} \langle \alpha_0, \alpha_0 \rangle & \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_0, \alpha_{p-1} \rangle \\ \langle \alpha_1, \alpha_0 \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, \alpha_{p-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \alpha_{p-1}, \alpha_0 \rangle & \langle \alpha_{p-1}, \alpha_1 \rangle & \dots & \langle \alpha_{p-1}, \alpha_{p-1} \rangle \end{vmatrix}.$$

Тому $\det M \neq 0$ (див., наприклад, [7, гл. 9, § 3, теорема 1]).

Отже, з (5.1.31) одержуємо $\Xi = \Gamma M^{-1}$. Таким чином, неперервне керування $u$, яке переводить $x^0$ в $x^T$ за час $[0, T]$, знайдено у вигляді 5.1.28. Теорему доведено. $\square$

З теорем 5.1.8 та 5.1.11 одразу випливає критерій повної керованості системи зі сталими матрицями.

**Наслідок 5.1.12.** *Система* (5.1.23) *є повністю керованою на* $[0, T]$ *тоді і лише тоді, коли* $\operatorname{rank} \mathcal{K} = n$.

З теореми 5.1.2 та наслідку 5.1.12 одразу одержуємо загальний критерій повної керованості системи зі сталими матрицями.

**Наслідок 5.1.13.** *Наступні три умови еквівалентні:*

(i) *система* (5.1.23) *є повністю керованою на* $[0, T]$;

(ii) $\operatorname{rank} \mathcal{K} = n$;

(iii) $N(T) \succ 0$.

*Зауваження* 5.1.14. У випадку повної керованості системи (5.1.23) на $[0, T]$ керування

$$u(t) \equiv B^* e^{-A^* t} N^{-1}(T) \left( e^{-AT} x^T - x^0 \right) \quad \text{на } [0, T] \qquad (5.1.32)$$

переводить $x^0$ в $x^T$ за час $[0, T]$ (див. співвідношення (5.1.7) у доведенні теореми 5.1.6 та (5.1.24)). Крім того, це керування є неперервним на $[0, T]$.

*Приклад* 5.1.15. З'ясуємо, чи існує для системи

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 2x_1 - x_2 + x_3 - u_1 + u_2, \quad && t \in [0,3], \\
\dot{x}_2 &= x_2 + x_3 - u_1 + 2u_2, && t \in [0,3], \\
\dot{x}_3 &= -x_1 + x_2 + x_3 + u_2, && t \in [0,3],
\end{aligned}$$

неперервне на $[0,3]$ керування $u$, яке б переводило точку $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ у точку $x^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ за час $[0,3]$.

Скористаємося теоремою 5.1.11. За цією теоремою нам досить перевірити виконання умови (5.1.24). Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^2B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$L = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Оскільки

$$e^{At} \equiv e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

маємо

$$e^{-3A}x^3 - x^0 = e^{-3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \bigcap L = \varnothing,$$

тобто умову (5.1.24) не виконано, отже, за теоремою 5.1.11 не існує неперервного на $[0,3]$ керування $u(t)$, яке б переводило точку $x^0$ у точку $x^3$ за час $[0,3]$.

*Приклад* 5.1.16. З'ясуємо, чи є система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u_1, & t \in [0, 2\pi], \\ \dot{x}_2 &= -x_3, & t \in [0, 2\pi], \\ \dot{x}_3 &= x_2 + u_2, & t \in [0, 2\pi], \end{aligned} \tag{5.1.33}$$

повністю керованою на $[0, 2\pi]$; і, якщо так, знайдемо неперервне на $[0, 2\pi]$ керування $u$, яке переводить точку $x^0 \in \mathbb{R}^3$ у точку $x^{2\pi} \in \mathbb{R}^3$.

Для системи (5.1.33) маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**1.** З'ясуємо спочатку, чи є система (5.1.33) повністю керованою на $[0, 2\pi]$. Для цього обчислимо матрицю K та визначимо, чи виконується для неї умова (ii) наслідку 5.1.13. Оскільки

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

маємо $\operatorname{rank} K = 3$. Скориставшись наслідком 5.1.13, звідси одержуємо, що система (5.1.33) є повністю керованою на $[0, 2\pi]$.

**2.** За формулою (5.1.32) знайдемо керування $u$, яке переводить точку $x^0$ у точку $x^{2\pi}$. Маємо

$$e^{At} \equiv \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2\pi].$$

Позначивши

$$\Omega(t) \equiv e^{-At} B \equiv \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & \sin t \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2\pi],$$

маємо

$$N(2\pi) = \int_0^{2\pi} \Omega(t)\Omega^*(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 t & \sin t\cos t \\ 0 & \sin t\cos t & \cos^2 t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \left(1-e^{-4\pi}\right)/2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$N^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 2e^{4\pi}\left(e^{4\pi}-1\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\pi & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi \end{pmatrix},$$

згідно з (5.1.32) на $[0, 2\pi]$ одержуємо

$$u(t) \equiv \Omega^*(t)N^{-1}(2\pi)\left(e^{-2\pi A}x^{2\pi} - x^0\right) \equiv \frac{2e^{4\pi-t}}{e^{4\pi}-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\left(e^{-2\pi}x^{2\pi} - x^0\right) + \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}\left(x^{2\pi} - x^0\right).$$

Таким чином, це керування $u(t)$ переводить точку $x^0$ у точку $x^{2\pi}$ за час $[0, 2\pi]$. Наприклад, точку $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ у точку $x^{2\pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ за час $[0, 2\pi]$ переводить керування

$$u(t) \equiv \begin{pmatrix} -2e^{2\pi-t}\left(e^{2\pi}+1\right)^{-1} \\ (3\sin t - 5\cos t)/\pi \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2\pi].$$

## 5.2. Спостережувані системи

Розглянемо *спостережувану систему*

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad (t, x) \in \Omega \subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x, \; u \in U \subset \mathbb{R}^r, \tag{5.2.1}$$

$$y(t) = h\big(x(t)\big), \quad t \in [0,T], \tag{5.2.2}$$

де $f : \Omega \times U \to \mathbb{R}^n$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, $u : [0,T] \to U$ є параметром, який називається *керуванням*, або *входом системи*, $y : [0,T] \to \mathbb{R}^s$ називається *(спостережуваним) виходом системи.*

Припустимо, що вихід $y$ є доступним для вимірювання на $[0,T]$ для довільного неперервного на $[0,T]$ керування $u$. Проблема спостережуваності полягає у відновлюванні за відомими входом (керуванням) $u$ та виходом $y$ початкового стану системи $x(0)$.

**Означення 5.2.1.** Система (5.2.1), (5.2.2) називається *повністю спостережуваною* на $[0,T]$, якщо за довільним неперервним на $[0,T]$ керуванням $u$ з відповідним йому виходом $y$ можливо однозначно відновити початковий стан системи $x(0)$.

## 5.2.1. Спостережуваність лінійних систем зі змінними матрицями

Розглянемо *лінійну спостережувану систему*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \qquad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r, \tag{5.2.3}$$
$$y = C(t)x, \qquad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^s, \tag{5.2.4}$$

де $A(t) \in \mathfrak{M}(n,n)$, $B(t) \in \mathfrak{M}(n,r)$, $C(t) \in \mathfrak{M}(s,n)$, $t \in [0,T]$.

Уведемо матрицю

$$R(T) = \int_0^T K^*(t,0)C^*(t)C(t)K(t,0)\,dt,$$

де $K$ є матрицею Коші (див. означення 2.1.29) системи

$$\dot{x} = A(t)x, \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.2.5}$$

**Лема 5.2.2.** *Нехай $A \in C[0,T]$, $C \in C[0,T]$. Тоді матриця $R(T)$ є невід'ємно визначеною.*

*Доведення.* Нехай $\xi \in \mathbb{R}^n$. Тоді

$$\begin{aligned}\xi^* R(T)\xi &= \int_0^T \xi^* K^*(t,0)C^*(t)C(t)K(t,0)\xi\, dt \\ &= \int_0^T \big(C(t)K(t,0)\xi\big)^*\big(C(t)K(t,0)\xi\big)\, dt \\ &= \int_0^T |C(t)K(t,0)\xi|^2\, dt.\end{aligned}$$

Отже,

$$\xi^* R(T)\xi = \int_0^T |C(t)K(t,0)\xi|^2\, dt \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2.6}$$

тобто $R(T) \succeq 0$. □

Доведемо далі критерій повної спостережуваності лінійної системи зі змінними матрицями.

**Теорема 5.2.3.** *Нехай $A \in C[0,T]$, $B \in C[0,T]$, $C \in C[0,T]$. Система* (5.2.3), (5.2.4) *є повністю спостережуваною на* $[0,T]$ *у тому і лише тому випадку, коли виконано умову*

$$R(T) \succ 0. \tag{5.2.7}$$

*Доведення. Достатність* (5.2.7). Нехай матриця $R(T)$ задовольняє умову (5.2.6) та нехай деякому неперервному на $[0,T]$ керуванню $u$ відповідає вихід $y$. Тоді (див. теорему 2.1.33 про розв'язок задачі Коші лінійної неоднорідної системи) функція

$$x(t) \equiv K(t,0)x(0) + \int_0^t K(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau \quad \text{на } [0,T]$$

є розв'язком системи (5.2.3). Помноживши це співвідношення на $C(t)$, одержуємо

$$y(t) \equiv C(t)x(t)$$

$$\equiv C(t)K(t,0)x(0) + \int_0^t C(t)K(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau \quad \text{на } [0,T].$$

Покладемо

$$\psi(t) \equiv \int_0^t C(t)K(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau \quad \text{на } [0,T].$$

Тоді

$$y(t) \equiv C(t)K(t,0)x(0) + \psi(t) \quad \text{на } [0,T].$$

Помножуючи це співвідношення на $K^*(t,0)C^*(t)$ та інтегруючи у межах від 0 до $T$, одержуємо

$$\begin{aligned}\int_0^T K^*(t,0)C^*(t)y(t)\,dt &= \left(\int_0^T K^*(t,0)C^*(t)C(t)K(t,0)\,dt\right)x(0) \\ &\quad + \int_0^T K^*(t,0)C^*(t)\psi(t)\,dt \\ &= R(T)x(0) + \int_0^T K^*(t,0)C^*(t)\psi(t)\,dt.\end{aligned}$$

Оскільки $R(T) \succ 0$, то за лемою 5.2.2 одержуємо, що $R(T)$ є невиродженою, тому з попередньої рівності однозначно знаходиться $x(0)$:

$$x(0) = R^{-1}(T)\int_0^T K^*(t,0)C^*(t)\left(y(t) - \psi(t)\right)\,dt, \tag{5.2.8}$$

тобто система (5.2.3), (5.2.4) є повністю спостережуваною на $[0,T]$.

*Необхідність* (5.2.7). Нехай система (5.2.3), (5.2.4) є повністю спостережуваною на $[0,T]$, але $R(T) \not\succ 0$. Тоді (див. лему 5.2.2 та (5.2.6)) існує $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, для якого

$$\xi^* R(T)\xi = \int_0^T |C(t)K(t,0)\xi|^2\,dt = 0.$$

Оскільки функція $C(\cdot)K(\cdot,0)\xi$ є неперервною на $[0,T]$, одержуємо

$$C(t)K(t,0)\xi \equiv 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{5.2.9}$$

Позначимо $u(t) \equiv 0$ на $[0,T]$ та розглянемо дві задачі Коші для системи (5.2.3) з такими початковими умовами:

$$x(0) = \xi; \tag{5.2.10}$$

$$x(0) = 0. \tag{5.2.11}$$

Тоді функція $x = \varphi^1(t) \equiv K(t,0)\xi$ на $[0,T]$ є розв'язком задачі Коші (5.2.3), (5.2.10) на $[0,T]$, а функція $x = \varphi^2(t) \equiv 0$ на $[0,T]$ є розв'язком задачі Коші (5.2.3), (5.2.11) на $[0,T]$. Згідно з (5.2.9) обом розв'язкам системи (5.2.3): $\varphi^1$ та $\varphi^2$ відповідає один вихід: $y(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$.

Таким чином, керуванню $u(t) \equiv 0$ на $[0,T]$ та відповідному йому виходу $y(t) \equiv 0$ відповідають два різні початкові стани системи, що суперечить повній спостережуваності системи на $[0,T]$. Теорему доведено. □

*Приклад* 5.2.4. З'ясуємо, чи є система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + \sin t\, x_2 \\ &\qquad + e^t u_1 + \left(e^t - e^{t+\cos t-1}\right) u_2, \quad t \in [0,\pi], \\ \dot{x}_2 &= (1-\sin t)\, x_2 + e^{t+\cos t-1} u_2, \qquad t \in [0,\pi], \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

з виходом

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-t} x_1 + \left(e^{-t} - e^{-t-\cos t+1}\right) x_2, \quad t \in [0,\pi], \\ y_2 &= 2\sin t\; e^{-t-\cos t+1} x_2, \qquad t \in [0,\pi], \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

повністю спостережуваною на $[0,\pi]$; і, якщо так, знайдемо початковий стан цієї системи $x(0)$.

Для даної системи маємо

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 & \sin t \\ 0 & 1-\sin t \end{pmatrix}, \quad B(t) \equiv \begin{pmatrix} e^t & e^t - e^{t+\cos t-1} \\ 0 & e^{t+\cos t-1} \end{pmatrix},$$

$$C(t) \equiv \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-t-\cos t+1} \\ 0 & 2\sin t\; e^{-t-\cos t+1} \end{pmatrix}.$$

**1.** З'ясуємо спочатку, чи є система (5.2.12), (5.2.13) повністю спостережуваною на $[0, \pi]$. Для цього обчислимо матрицю $R(\pi)$ та визначимо, чи виконано для неї умову (5.2.8) (див. теорему 5.2.3).

Знайдемо спочатку матрицю Коші $K(t, \tau)$ лінійної однорідної системи, яка відповідає системі (5.2.12), тобто системі

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + \sin t \; x_2, \quad t \in [0, \pi], \\ \dot{x}_2 &= (1 - \sin t) x_2, \quad t \in [0, \pi]. \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Додавши до першого рівняння цієї системи друге, одержимо

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_1 + x_2,$$

тому

$$x_1 + x_2 = C_1 e^t, \quad t \in [0, \pi],$$

де $C_1 \in \mathbb{R}$ є довільною сталою. З другого рівняння системи (5.2.14) одержуємо

$$x_2 = C_2 e^{t + \cos t}, \quad t \in [0, \pi],$$

де $C_2 \in \mathbb{R}$ є довільною сталою. Отже,

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^t - C_2 e^{t+\cos t}, \quad && t \in [0, \pi], \\ x_2 &= C_2 e^{t+\cos t}, && t \in [0, \pi], \end{aligned}$$

де $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ є довільними сталими, є загальним розв'язком системи (5.2.14). Тому

$$\Phi(t) \equiv \begin{pmatrix} e^t & -e^{t+\cos t} \\ 0 & e^{t+\cos t} \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, \pi]$$

є фундаментальною матрицею розв'язків цієї системи. Оскільки

$$\Phi^{-1}(t) \equiv \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} \\ 0 & e^{-t-\cos t} \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, \pi],$$

маємо

$$K(t,\tau) \equiv \begin{pmatrix} e^{t-\tau} & e^{t-\tau} - e^{t-\tau+\cos t-\cos\tau} \\ 0 & e^{t-\tau+\cos t-\cos\tau} \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,\pi]^2.$$

Позначимо

$$\Psi(t,\tau) \equiv C(t)K(t,\tau) \equiv \begin{pmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} - e^{1-\cos\tau-\tau} \\ 0 & 2\sin t\; e^{1-\cos\tau-\tau} \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,\pi]^2,$$

отже,

$$R(\pi) = \int_0^\pi \Psi^*(t,0)\Psi(t,0)\,dt = \int_0^\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4\sin^2 t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix}.$$

Матриця $R(\pi)$ є додатно визначеною, отже, задовольняє умову (5.2.7). Тому за теоремою (5.2.3) система (5.2.12), (5.2.13) повністю спостережувана на $[0,\pi]$.

**2.** За формулою (5.2.8) знайдемо початковий стан $x(0)$ системи (5.2.12), (5.2.13). Оскільки

$$R^{-1}(\pi) = \frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

згідно з (5.2.9) одержуємо

$$\begin{aligned} x(0) &= R^{-1}(\pi)\int_0^\pi \Psi^*(t,0)\big(y(t)-\psi(t)\big)\,dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix}\big(y(t)-\psi(t)\big)\,dt, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \psi(t) &\equiv \int_0^t \Psi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau \\ &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\sin t \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} & e^{-\tau} - e^{1-\cos\tau-\tau} \\ 0 & e^{1-\cos\tau-\tau} \end{pmatrix} \\ &\qquad\qquad \times \begin{pmatrix} e^{\tau} & e^{\tau} - e^{\tau+\cos\tau-1} \\ 0 & e^{\tau+\cos\tau-1} \end{pmatrix} u(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\sin t \end{pmatrix} \int_0^t u(\tau)\,d\tau \quad \text{на } [0,\pi].$$

Наприклад, для керування

$$u(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,\pi]$$

та виходу

$$y(t) \equiv \begin{pmatrix} \sin t + 1 \\ \sin 2t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,\pi]$$

маємо

$$\psi(t) \equiv \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin 2t - 2\sin t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,\pi],$$

отже,

$$x(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sin^2 t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### 5.2.2. Спостережуваність лінійних систем з диференційовними матрицями

Нехай $A \in C^{n-1}[0,T]$ і $C \in C^{n-1}[0,T]$, де $A(t) \in \mathfrak{M}(n,n)$ і $C(t) \in \mathfrak{M}(s,n)$, $t \in [0,T]$. Позначимо $\delta_A^* = \left(-L_n^A\right)^* = A^*(t) + \mathbb{I}\dfrac{d}{dt}$. Маємо

$$\begin{aligned} &(\delta_A^*)^0 C^*(t) \equiv C^*(t); \\ &(\delta_A^*)^m C^*(t) \equiv \delta_A^*\left((\delta_A^*)^{m-1} C^*(t)\right), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Розглянемо матрицю $(n \times nr)$:

$$\mathbf{Q}(t) \equiv \begin{pmatrix} C^*(t) & \delta_A^* C^*(t) & (\delta_A^*)^2 C^*(t) & \cdots & (\delta_A^*)^{n-1} C^*(t) \end{pmatrix} \text{ на } [0,T].$$

Доведемо ознаку повної спостережуваності лінійної системи з диференційовними матрицями.

**Теорема 5.2.5.** *Нехай $A \in C^{n-1}[0,T]$, $C \in C^{n-1}[0,T]$, $B \in C[0,T]$. Якщо існує $t_0 \in [0,T]$, яке задовольняє умову*

$$\operatorname{rank} \mathbf{Q}(t_0) = n, \tag{5.2.15}$$

*то система (5.2.3), (5.2.4) є повністю спостережуваною на $[0,T]$.*

*Доведення.* Нехай $t_0 \in [0,T]$ задовольняє умову (5.2.15), але система (5.2.3), (5.2.4) не є повністю спостережуваною на $[0,T]$. Нехай також $K$ є матрицею Коші системи (5.2.5). Тоді згідно з теоремою 5.2.3 матриця $R(T)$ не є додатно визначеною, тобто (див. також лему 5.2.2 та (5.2.6)) існує $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, яке задовольняє умову

$$0 = \xi^* R(T)\xi = \int_0^T \left|\xi^* K^*(t,0)C^*(t)\right|^2 \, dt.$$

Оскільки функція $\xi^* K^*(t,0)C^*(t)$ є неперервною на $[0,T]$, звідси випливає

$$\xi^* K^*(t,0)C^*(t) \equiv 0 \quad \text{на } [0,T]. \tag{5.2.16}$$

Після диференціювання звідси одержимо систему

$$\xi^* \big(K^*(t,0)C^*(t)\big)^{(j)} \equiv 0 \quad \text{на } [0,T], \ j = \overline{0, n-1}. \tag{5.2.17}$$

Доведемо, що для будь-якого $m = \overline{0, n-1}$ маємо

$$\big(K^*(t,0)C^*(t)\big)^{(m)} \equiv K^*(t,0)(\delta_A^*)^m C^*(t) \quad \text{на } [0,T]. \tag{5.2.18}$$

Для $m = 0$ одержуємо

$$\big(K^*(t,0)C^*(t)\big)^{(0)} \equiv K^*(t,0)C^*(t) \equiv K^*(t,0)(-\delta_A^*)^0 C^*(t) \ \text{ на } [0,T].$$

Для кожного наступного $m = \overline{1, n-1}$ на $[0,T]$ маємо

$$\begin{aligned} \big(K^*(t,0)C^*(t)\big)^{(m)} &\equiv \Big(\big(K^*(t)C^*(t)\big)^{(m-1)}\Big)' \\ &\equiv \big(K^*(t,0)(\delta_A^*)^{m-1}C^*(t)\big)' \end{aligned}$$

$$\equiv \left(K^*(t,0)\right)'(\delta_A^*)^{m-1}C^*(t) + K^*(t,0)\left((\delta_A^*)^{m-1}C^*(t)\right)'. \quad (5.2.19)$$

Оскільки $\left(K(t,0)\right)' \equiv A(t)K(t,0)$ на $[0,T]$ (див. теорему 2.1.31), маємо $\left(K^*(t,0)\right)' \equiv K^*(t,0)A^*(t)$ на $[0,T]$. Продовжуючи (5.2.19), одержуємо

$$\begin{aligned} K^*(t,0)C^*(t))^{(m)} &\equiv K^*(t,0)A^*(t)(\delta_A^*)^{m-1}C^*(t) \\ &\quad + K^*(t,0)\frac{d}{dt}\left((\delta_A^*)^{m-1}C^*(t)\right) \\ &\equiv K^*(t,0)\left(A(t) + \mathbb{I}\frac{d}{dt}\right)(\delta_A^*)^{m-1}C^*(t) \\ &\equiv K^*(t,0)(\delta_A^*)^{m}C^*(t) \quad \text{на } [0,T]. \end{aligned}$$

Таким чином, формулу (5.2.18) доведено.

Із системи (5.2.17), враховуючи (5.2.18), одержуємо

$$\xi^*K^*(t,0)(\delta_A^*)^jC^*(t) \equiv 0 \quad \text{на } [0,T],\ j = \overline{0,\, n-1}, \qquad (5.2.20)$$

Звідси, підставляючи в (5.2.20) $t = t_0$, маємо

$$\xi^*K^*(t_0,0)(\delta_A^*)^jC^*(t_0) = 0, \quad j = \overline{0,\, n-1},$$

тобто $\operatorname{rank}\left(K^*(t_0,0)Q(t_0)\right) < n$ (оскільки $\xi^* \neq 0$), отже,

$$\operatorname{rank}\mathbf{Q}(t_0) < n,$$

що суперечить умові (5.2.15). Теорему доведено. □

*Приклад* 5.2.6. З'ясуємо, чи є система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + e^{-2t}x_3 + e^{t}u_1 + e^{2t}u_2, && t \in [0,5], \\ \dot{x}_2 &= x_1 - e^{-2t}x_3 + e^{-t}u_1, && t \in [0,5], \\ \dot{x}_3 &= 2e^{t}x_1 + 2e^{t}x_2 + 2u_1 + u_2, && t \in [0,5], \end{aligned}$$

з виходом

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{t}x_1 + e^{t}x_2 - x_3, && t \in [0,5], \\ y_2 &= \left(8 - 2e^{t}\right)x_1 + \left(8 + 2e^{t}\right)x_2 + \left(1 - 4e^{-t}\right)x_3, && t \in [0,5], \end{aligned}$$

повністю спостережуваною на $[0,5]$.

Перевіримо виконання умови (5.2.15) з $t_0 = 0$. Маємо

$$A^*(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2e^t \\ 1 & 0 & 2e^t \\ e^{-2t} & -e^{-2t} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^*(t) \equiv \begin{pmatrix} e^t & 8-2e^t \\ e^t & 8+2e^t \\ -1 & 1-4e^{-t} \end{pmatrix},$$

$$\delta_A^* C^*(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2e^t \\ 0 & 2e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(\delta_A^*)^2 C^*(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 4e^t \\ 0 & 4e^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,5].$$

Тому

$$\mathbf{Q}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 10 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

отже, $\operatorname{rank} \mathbf{Q}(0) = 3$, тобто умову (5.2.15) з $t_0 = 0$ виконано. З теореми 5.2.5 одержуємо, що наша система повністю спостережувана на $[0,5]$.

Аналогічно доведенню того факту, що умова (5.1.17) не є необхідною для повної керованості системи (5.1.2) на $[0,T]$ (див. приклад 5.1.10), можна довести, що умова (5.2.15) не є необхідною для повної спостережуваності системи (5.2.3), (5.2.4) на $[0,T]$.

*Задача* 5.2.7. Довести, що умова (5.2.15) не є необхідною для повної спостережуваності системи (5.2.3), (5.2.4) на $[0,T]$.

## 5.2.3. Спостережуваність лінійних систем зі сталими матрицями

Розглянемо систему вигляду (5.2.3), (5.2.4) із сталими матрицями:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^r, \tag{5.2.21}$$

$$y = Cx, \qquad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2.22}$$

де $A \in \mathfrak{M}(n,n)$, $B \in \mathfrak{M}(n,r)$, $C \in \mathfrak{M}(s,n)$ є сталими матрицями.

Обчислимо для системи (5.2.21), (5.2.22) алгебраїчну матрицю спостережуваності $\mathbf{Q}$. Нехай

$$\mathbf{Q}(t) \equiv \mathcal{Q} := \begin{pmatrix} C^* & A^*C^* & (A^*)^2C^* & \cdots & (A^*)^{n-1}C^* \end{pmatrix}.$$

Обчислимо інтегральну матрицю спостережуваності $R(T)$. Застосовуючи теорему 2.4.41 про матрицю, спряжену до матричної експоненти, і той факт, що $K(t,0) \equiv e^{At}$, одержуємо

$$R(T) = \int_0^T e^{A^*t} C^* C e^{At}\, dt.$$

Доведемо критерій повної спостережуваності системи зі сталими матрицями.

**Теорема 5.2.8.** *Система* (5.2.21), (5.2.22) *є повністю спостережуваною на* $[0,T]$ *тоді і лише тоді, коли* $\operatorname{rank} \mathcal{Q} = n$.

*Доведення.* Припустимо, що $\operatorname{rank} \mathcal{Q} < n$. Тоді рядки матриці $\mathcal{Q}$ є лінійно залежними, тобто існує $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, яке задовольняє умову $\xi^* \mathcal{Q} = 0$. Отже,

$$\xi^*(A^*)^j C^* = 0, \quad j = \overline{0,\, n-1}. \tag{5.2.23}$$

Згідно з (2.4.56) маємо

$$e^{A^*t} \equiv \sum_{s=0}^{p-1} \overline{\alpha_s(t)} (A^*)^s \text{ на } \mathbb{R},$$

де $p$ є степенем мінімального полінома $A$, $\alpha_s$, $s = \overline{0, p-1}$ є нескінченно диференційовними на $\mathbb{R}$ функціями. Звідси, враховуючи (5.2.23), одержуємо

$$\xi^* e^{A^*t} C^* \equiv \sum_{s=0}^{p-1} \overline{\alpha_s(t)} \xi^* (A^*)^s C^* \equiv 0 \quad \text{на } [0, T].$$

Отже,

$$\xi^* R(T) \xi = \int_0^T \xi^* e^{A^*t} C^* C e^{At} \xi \, dt = 0,$$

тобто $R(T)$ не є додатно визначеною, тому (див. теорему 5.2.3) система (5.2.21), (5.2.22) не є повністю спостережуваною на $[0, T]$.

Таким чином, ми довели: якщо система (5.2.21), (5.2.22) є повністю спостережуваною на $[0, T]$, то $\operatorname{rank} Q = n$.

Якщо $\operatorname{rank} Q = n$, то система (5.2.21), (5.2.22) є повністю спостережуваною на $[0, T]$ за теоремою 5.2.5. □

З цієї теореми та теореми 5.2.3 одразу випливає загальний критерій повної спостережуваності системи (5.2.21), (5.2.22).

**Теорема 5.2.9.** *Наступні три умови є еквівалентними:*

(i) *система (5.2.21), (5.2.22) є повністю спостережуваною на $[0, T]$;*

(ii) $\operatorname{rank} \mathcal{Q} = n$;

(iii) $R(T) \succ 0$.

*Зауваження* 5.2.10. У випадку повної спостережуваності системи (5.2.21), (5.2.21) на $[0, T]$ початковий стан системи можна знайти за формулою

$$x(0) = R^{-1}(T) \int_0^T e^{A^*t} C^* \left(y(t) - \psi(t)\right) dt, \tag{5.2.24}$$

де

$$\psi(t) \equiv C e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) \, d\tau \quad \text{на } [0, T]$$

(див. співвідношення (5.2.8) у доведенні теореми 5.2.3).

*Приклад* 5.2.11. З'ясуємо, чи є система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_3, & t &\in [0, 2\pi], \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u, & t &\in [0, 2\pi], \\ \dot{x}_3 &= x_1, & t &\in [0, 2\pi], \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

з виходом

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2, & t &\in [0, 2\pi], \\ y_2 &= x_1, & t &\in [0, 2\pi], \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

повністю спостережуваною на $[0, 2\pi]$; і, якщо так, то знайдемо початковий стан $x(0)$ цієї системи.

Для даної системи маємо

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**1.** З'ясуємо спочатку, чи є система (5.2.25), (5.2.26) повністю спостережуваною на $[0, 2\pi]$. Для цього обчислимо матрицю $\mathcal{Q}$ та визначимо, чи виконується для неї умова (ii) теореми 5.2.21.

Оскільки

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

маємо $\operatorname{rank} \mathcal{Q} = 3$. Із теореми (5.2.9), випливає, що система (5.2.25), (5.2.26) повністю спостережувана на $[0, 2\pi]$.

**2.** За формулою (5.2.24) знайдемо початковий стан $x(0)$ системи (5.2.25), (5.2.26). Маємо

$$e^{At} \equiv \begin{pmatrix} \cos t & 0 & -\sin t \\ 0 & e^t & 0 \\ \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2\pi]$$

і $K(t, \tau) \equiv e^{A(t-\tau)}$ на $[0, 2\pi]^2$ Позначивши

$$\Psi(t, \tau) \equiv CK(t, \tau) \equiv Ce^{A(t-\tau)}$$

$$\equiv \begin{pmatrix} 0 & e^{t-\tau} & 0 \\ \cos(t-\tau) & 0 & -\sin(t-\tau) \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,2\pi]^2,$$

маємо

$$\begin{aligned} R(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \Psi^*(t,0)\Psi(t,0)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos^2 t & 0 & -\cos t\sin t \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ -\cos t\sin t & 0 & \sin^2 t \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \left(e^{4\pi}-1\right)/2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$R^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 1/\pi & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(e^{4\pi}-1\right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\pi \end{pmatrix},$$

згідно з (5.2.24) одержуємо

$$\begin{aligned} x(0) &= R^{-1}(2\pi)\int_0^{2\pi} \Psi^*(t,0)\big(y(t)-\psi(t)\big)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 & (\cos t)/\pi \\ 2e^t\left(e^{4\pi}-1\right)^{-1} & 0 \\ 0 & -(\sin t)/\pi \end{pmatrix} \big(y(t)-\psi(t)\big)\,dt, \end{aligned}$$

де

$$\psi(t) \equiv \int_0^t \Psi(t,\tau)Bu(\tau)\,d\tau \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^t e^{t-\tau}u(\tau)\,d\tau \quad \text{на } [0,2\pi].$$

Наприклад, для керування

$$u(t) \equiv 1 \quad \text{на } [0,2\pi]$$

та виходу

$$y(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0,2\pi]$$

маємо

$$\psi(t) \equiv \begin{pmatrix} e^t - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, 2\pi],$$

отже,

$$x(0) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (\cos^2 t)/\pi \\ \dfrac{2\left(e^t - e^{2t}\right)}{e^{4\pi} - 1} \\ -(\sin 2t)/(2\pi) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1 - e^{2\pi}}{1 + e^{2\pi}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 5.3. Стабілізація лінійних керованих систем

Розглянемо лінійну керовану систему із сталими матрицями (5.1.23). Через $b^j$ позначимо $j$-й стовпець матриці $B$, $j = \overline{1, r}$. Позначимо також через $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ різні власні значення матриці $A$, а через $n_1, \ldots, n_k$ — їх кратності в характеристичному поліномі цієї матриці.

**Означення 5.3.1.** Будемо вважати, що система (5.1.23) є *стабілізовною*, якщо можна знайти керування, яке має вигляд $u = Px$, де $P \in \mathfrak{M}(r, n)$, таке що всі розв'язки $x = \varphi(t)$, $t \in [0, +\infty)$, системи (5.1.23) задовольняють умову $\varphi(t) \to 0$, коли $t \to +\infty$.

Нагадаємо деякі поняття та твердження з лінійної алгебри (див. [12, гл. 3, п. 12.3, гл. 5, п. 17.5]).

Множина

$$\mathfrak{R}(\lambda_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda_j \mathbb{I})^{n_j} x = 0\}$$

є лінійним підпростором $\mathbb{R}^n$ та називається *кореневим підпростором матриці* $A$, який відповідає власному значенню $\lambda_j$, $j = \overline{1, k}$.

**Твердження 5.3.2.** *Кожний вектор $x \in \mathbb{R}^n$ однозначно зображується у вигляді $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$, де $x_j \in \mathfrak{R}(\lambda_j)$, $j = \overline{1, k}$. Крім* *того, об'єднання базисів усіх кореневих підпросторів матриці $A$ є базисом $\mathbb{R}^n$.*

**Лема 5.3.3.** *Простір $L = \mathrm{lin}\{A^s b^j \mid s = \overline{0, n-1},\ j = \overline{1, r}\}$ є інваріантним відносно матриці $A$, а простір $L^\perp$ — відносно матриці $A^*$.*

*Доведення.* Доведемо спочатку, що простір $L$ є інваріантним відносно матриці $A$. Нехай $x \in L$, тобто

$$x = \sum_{j=1}^{r} \sum_{s=0}^{n-1} \alpha_{js} A^s b^j.$$

Тоді

$$Ax = \sum_{j=1}^{r} \sum_{s=1}^{n-1} \alpha_{j(s-1)} A^s b^j + \sum_{j=1}^{r} \alpha_{j(n-1)} A^n b^j.$$

Скориставшись лемою 2.4.17, звідси одразу одержуємо, що $Ax \in L$. Таким чином, простір $L$ є інваріантним відносно матриці $A$.

Доведемо тепер, що простір $L^\perp$ є інваріантним відносно матриці $A^*$. Дійсно, нехай $y \in L^\perp$. Тоді

$$\forall x \in L \quad y^* x = 0,$$

отже,

$$\forall x \in L \quad (A^* y)^* x = y^* A x = 0,$$

оскільки

$$\forall x \in L \quad Ax \in L.$$

Таким чином, простір $L^\perp$ є інваріантним відносно матриці $A^*$. Лему доведено. □

**Лема 5.3.4.** *Якщо $z_0 \in \mathfrak{R}(\lambda_j)$ для деякого $j = \overline{1, k}$, то*

$$e^{At} z_0 = e^{\lambda_j t} \sum_{m=0}^{n_j - 1} \frac{t^m}{m!} z_m \quad \text{на } \mathbb{R}, \tag{5.3.1}$$

*де $z_m = (A - \lambda_j \mathbb{I})^m z_0$, $m = \overline{0, n_j - 1}$.*

*Доведення.* Скористаємося розвиненням $e^{(A-\lambda_j\mathbb{I})t}$ у степеневий ряд (див. теорему 2.4.36 про подання матричної експоненти степеневим рядом):

$$e^{(A-\lambda_j\mathbb{I})t} \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} (A-\lambda_j\mathbb{I})^m \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Звідси, враховуючи умову $(A-\lambda_j\mathbb{I})^{n_j} z_0 = 0$, одержуємо

$$\begin{aligned} e^{(A-\lambda_j\mathbb{I})t} z_0 &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} (A-\lambda_j\mathbb{I})^m z_0 \\ &\equiv \sum_{m=0}^{n_j-1} \frac{t^m}{m!} (A-\lambda_j\mathbb{I})^m z_0 \\ &\quad + \left( \sum_{m=n_j}^{\infty} \frac{t^m}{m!} (A-\lambda_j\mathbb{I})^{m-n_j} \right) (A-\lambda_j\mathbb{I})^{n_j} z_0 \\ &\equiv \sum_{m=0}^{n_j-1} \frac{t^m}{m!} z_m \quad \text{на } \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

За теоремою 2.4.37 про множення матричної експоненти на числову маємо

$$e^{(A-\lambda_j\mathbb{I})t} \equiv e^{-\lambda_j t} e^{At} \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Тому з (5.3.2), одержуємо (5.3.1). Лему доведено. □

**Лема 5.3.5.** *Нехай $\mathcal{P} \in \mathfrak{M}(m,m)$, $\mathcal{S} \in \mathfrak{M}(m,r)$, $\rho_j$, $j = \overline{1,q}$, є різними власними значеннями матриці $\mathcal{P}$, нехай $\omega \in \mathbb{R}$ задовольняє умову*

$$\omega > \sup\{-\operatorname{Re}\rho_j \mid j = \overline{1,q}\} = -P \tag{5.3.3}$$

*та нехай*

$$\operatorname{rank}[\mathcal{S}, \mathcal{P}\mathcal{S}, \ldots, \mathcal{P}^m\mathcal{S}] = m. \tag{5.3.4}$$

*Тоді виконуються наступні три умови:*

1) *інтеграл*

$$\mathcal{N}_\omega = \int_0^{+\infty} e^{-2\omega t} e^{-\mathcal{P}t} \mathcal{S}\mathcal{S}^* e^{-\mathcal{P}^* t}\, dt \tag{5.3.5}$$

*є збіжним;*

2) *матриця* $\mathcal{N}_\omega$ *є додатно визначеною;*

3) *матриця* $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{P} - \mathcal{S}\mathcal{S}^* \mathcal{N}_\omega^{-1}$ *має оцінку*

$$\left\| e^{\mathcal{G}_\omega t} \right\| \le M_\omega \left(1 + \|\mathcal{P}\|\right)^{m-1} e^{-(\omega+P)t}, \quad t \in [0, +\infty), \tag{5.3.6}$$

*де* $M_\omega > 0$ *є деякою сталою.*

*Доведення.* 1) Доведемо спочатку, що інтеграл (5.3.5) є збіжним. З теореми 2.4.38 про оцінку матричної експоненти одержуємо

$$\left\| e^{-\mathcal{P}t} \right\| \le C\big(1 + \|\mathcal{P}\|\big)^{m-1} \big(1+t\big)^{m-1} e^{-Pt}, \quad t \in [0, +\infty), \tag{5.3.7}$$

$$\left\| e^{-\mathcal{P}^* t} \right\| \le C\big(1 + \|\mathcal{P}\|\big)^{m-1} \big(1+t\big)^{m-1} e^{-Pt}, \quad t \in [0, +\infty), \tag{5.3.8}$$

де $C > 0$ є деякою сталою. Отже,

$$\begin{aligned} \left\| e^{-2\omega t} e^{-\mathcal{P}t} \mathcal{S}\mathcal{S}^* e^{-\mathcal{P}^* t} \right\| &\le C^2 \|\mathcal{S}\|^2 \big(1 + \|\mathcal{P}\|\big)^{2m-2} \\ &\times \big(1+t\big)^{2m-2} e^{-2(\omega+P)t}, \quad t \in [0, +\infty), \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Оскільки $\omega + P > 0$ (див. (5.3.3)), звідси випливає, що інтеграл (5.3.5) збігається.

2) Доведемо тепер, що матриця $\mathcal{N}_\omega$ є додатно визначеною. Для кожного $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ маємо

$$\begin{aligned} \xi^* \mathcal{N}_\omega \xi &= \int_0^{+\infty} e^{-2\omega t} \xi^* e^{-\mathcal{P}t} \mathcal{S}\mathcal{S}^* e^{-\mathcal{P}^* t} \xi \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2\omega t} \left| \xi^* e^{-\mathcal{P}t} \mathcal{S} \right|^2 dt \ge 0. \end{aligned}$$

Припускаючи, що $\mathcal{N}_\omega$ не є додатно визначеною, звідси одержуємо, що існує $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, яке задовольняє умову

$$\xi^* e^{-\mathcal{P}t} \mathcal{S} \equiv 0 \quad \text{на } [0, +\infty).$$

За теоремою 2.4.39 про диференціювання матричної експоненти звідси випливає

$$0 \equiv \xi^* \left(e^{-\mathcal{P}t}\right)^{(j)} \mathcal{S} \equiv \xi^*(-\mathcal{P})^j e^{-\mathcal{P}t}\mathcal{S} \quad \text{на } [0,+\infty),\ j = \overline{1, m-1}.$$

Підставивши $t = 0$ у ці тотожності, маємо

$$\xi^*(\mathcal{P})^j\mathcal{S} = 0, \quad j = \overline{1,\, m-1}.$$

Оскільки $\xi \neq 0$, звідси випливає, що умова (5.3.4) не виконується, що суперечить припущенню цієї леми.

Таким чином, матриця $\mathcal{N}_\omega$ є додатно визначеною, отже (див. лему 5.1.4), $\det \mathcal{N}_\omega \neq 0$.

3) Доведемо тепер, що матриця $\mathcal{G}_\omega$ задовольняє умову (5.3.6). Розглянемо співвідношення

$$\mathcal{P}\mathcal{N}_\omega + \mathcal{N}_\omega\mathcal{P}^* + 2\omega\mathcal{N}_\omega = \int_0^{+\infty} \Big(e^{-2\omega t}\mathcal{P}e^{-\mathcal{P}t}\mathcal{S}\mathcal{S}^*e^{-\mathcal{P}^*t}$$
$$+\, e^{-2\omega t}e^{-\mathcal{P}t}\mathcal{S}\mathcal{S}^*e^{-\mathcal{P}^*t}\mathcal{P}^* + 2\omega e^{-2\omega t}e^{-\mathcal{P}t}\mathcal{S}\mathcal{S}^*e^{-\mathcal{P}^*t}\Big)\, dt$$
$$= -e^{-2\omega t}e^{-\mathcal{P}t}\mathcal{S}\mathcal{S}^*e^{-\mathcal{P}^*t}\Big|_0^{+\infty}.$$

Скориставшись оцінкою (5.3.9) та умовою (5.3.3), звідси одержуємо

$$\mathcal{P}\mathcal{N}_\omega + \mathcal{N}_\omega\mathcal{P}^* + 2\omega\mathcal{N}_\omega = \mathcal{S}\mathcal{S}^*.$$

Помноживши це співвідношення на $\mathcal{N}_\omega^{-1}$, маємо

$$\mathcal{P} + \mathcal{N}_\omega\mathcal{P}^*\mathcal{N}_\omega^{-1} + \mathcal{N}_\omega 2\omega\mathcal{N}_\omega^{-1} = \mathcal{S}\mathcal{S}^*\mathcal{N}_\omega^{-1}.$$

Отже,

$$\mathcal{G}_\omega = \mathcal{P} - \mathcal{S}\mathcal{S}^*\mathcal{N}_\omega^{-1} = \mathcal{N}_\omega\left(-\mathcal{P}^* - 2\omega\mathbb{I}\right)\mathcal{N}_\omega^{-1}.$$

Застосовуючи теорему 2.4.32 про функцію від матриці, подібної заданій, та (5.3.8), одержуємо

$$\left\|e^{\mathcal{G}_\omega t}\right\| = \left\|\mathcal{N}_\omega e^{(-\mathcal{P}^*-2\omega\mathbb{I})t}\mathcal{N}_\omega^{-1}\right\| = e^{-2\omega t}\left\|\mathcal{N}_\omega e^{-\mathcal{P}^*t}\mathcal{N}_\omega^{-1}\right\|$$
$$\leq N_\omega\big(1 + \|\mathcal{P}\|\big)^{m-1}\big(1 + |t|\big)^{m-1}e^{-2(\omega+P)t}, \quad t \in [0,+\infty),$$

де $N_\omega > 0$ є деякою сталою. Тому матриця $\mathcal{G}_\omega = \mathcal{P} - \mathcal{S}\mathcal{S}^*\mathcal{N}_\omega^{-1}$ задовольняє умову (5.3.6). Лему доведено. □

Доведемо тепер критерій стабілізовності лінійної керованої системи.

**Теорема 5.3.6.** *Для того щоб система* (5.1.23) *була стабілізовною, необхідно та досить, щоб виконувалася умова*

$$\forall j = \overline{1,k} \quad \Big(\operatorname{Re}\lambda_j \geq 0 \Rightarrow \mathfrak{R}(\lambda_j) \subset L\Big), \tag{5.3.10}$$

*де* $L = \operatorname{lin}\{A^s b^j \mid s = \overline{0,n-1},\ j = \overline{1,r}\}$.

*Доведення.* Нехай $l = n - m$ і $\dim L = m$, тоді $\dim L^{\perp} = l$. Нехай також $\{\nu_j\}_{j=\overline{1,m}}$ є базисом $L$, $\{\eta_j\}_{j=\overline{1,l}}$ є базисом $\dim L^{\perp}$. За твердженням 5.1.3 маємо $\{\nu_i, \eta_j\}_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,l}}}$ є базисом $\mathbb{R}^n$. Тому матриця $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$, де $F_1 = \begin{pmatrix} \eta_1^* \\ \vdots \\ \eta_l^* \end{pmatrix}$, $F_2 = \begin{pmatrix} \nu_1^* \\ \vdots \\ \nu_m^* \end{pmatrix}$, є невиродженою.

*Достатність* (5.3.10). Після застосування перетворення $z = Fx$, де $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, $z_j = F_j x$, $j = 1, 2$, до системи (5.1.23) маємо

$$\dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, \quad t \in [0, +\infty), \tag{5.3.11}$$

де $\mathcal{A} = FAF^{-1}$, $\mathcal{B} = FB$. Оскільки лінійне перетворення з матрицею $F$ є невиродженим, розв'язок $x(t)$, $t \in [0, +\infty)$, системи (5.1.23) та відповідний йому розв'язок $z(t) \equiv Fx(t)$, $t \in [0, +\infty)$, системи (5.3.11) або одночасно прямують до нуля, коли $t \to +\infty$, або одночасно не прямують до нуля, коли $t \to +\infty$. Отже, для доведення нашого твердження досить показати, що умова (5.3.10) є достатньою для стабілізації системи (5.3.11). З'ясуємо, який вигляд має матриця $\mathcal{A}$. Маємо

$$\dot{z}_1 = F_1\dot{x} = F_1Ax + F_1Bu.$$

Оскільки $b^j \in L$, $j = \overline{1,r}$, одержуємо $F_1B = 0$. Тому

$$\dot{z}_1 = F_1Ax. \tag{5.3.12}$$

За лемою 5.3.3 простір $L^{\perp}$ є інваріантним відносно $A^*$. Тому

$$L^{\perp} \ni A^*\eta_j = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^j \eta_i, \quad j = \overline{1,l},$$

отже,

$$F_1 A = \mathcal{A}_{11} F_1,$$

де $\mathcal{A}_{11} = \{\alpha_i^j\}_{i=\overline{1,l}}^{j=\overline{1,l}}$. Продовжуючи (5.3.12), звідси одержуємо

$$\dot{z}_1 = \mathcal{A}_{11} F_1 x = \mathcal{A}_{11} z_1.$$

Далі розглянемо $z_2$:

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = F_2 \dot{x} &= F_2 A x + F_2 B u \\ &= F_2 A F^{-1} z + F_2 B u = \mathcal{A}_{21} z_1 + \mathcal{A}_{22} z_2 + \mathcal{B}_2 u, \end{aligned}$$

де перші $l$ стовпців матриці $F_2 A F^{-1}$ утворюють матрицю $\mathcal{A}_{21} \in \mathfrak{M}(m,l)$, а наступні $m$ стовпців утворюють матрицю $\mathcal{A}_{22} \in \mathfrak{M}(m,m)$; $\mathcal{B}_2 = F_2 B$. Таким чином, $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$ є блоковими матрицями:

$$\mathcal{A} = FAF^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & 0 \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = FB = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{B}_2 \end{pmatrix}, \qquad (5.3.13)$$

тобто систему (5.3.11) можливо записати у вигляді:

$$\dot{z}_1 = \mathcal{A}_{11} z_1, \qquad t \in [0, +\infty), \qquad (5.3.14)$$

$$\dot{z}_2 = \mathcal{A}_{21} z_1 + \mathcal{A}_{22} z_2 + \mathcal{B}_2 u, \qquad t \in [0, +\infty). \qquad (5.3.15)$$

Система (5.3.14) називається *некерованою частиною системи* (5.1.23), а система (5.3.15) — *керованою частиною системи* (5.1.23).

Запишемо довільний розв'язок системи (5.1.23) (див. наслідок 2.4.45 про розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи зі сталими коефіцієнтами):

$$x(t) \equiv e^{At} x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau \quad \text{на } \mathbb{R}, \qquad (5.3.16)$$

де $x^0 = x(0) \in \mathbb{R}^n$. За теоремою 2.4.40 про розкладання матричної експоненти в скінченну суму степенів маємо

$$e^{A(t-\tau)} \equiv \sum_{s=0}^{p-1} \alpha_s(t-\tau)A^s \quad \text{на } \mathbb{R}^2,$$

де $p$ є степенем мінімального полінома матриці $A$, $\alpha_s \in C^\infty(\mathbb{R})$, $s = \overline{0, p-1}$. Отже,

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\ \forall i = \overline{1, r} \quad e^{A\xi}b^i \in L.$$

Оскільки $\{\eta_j\}_{j=\overline{1,l}}$ є базисом $\dim L^\perp$, маємо

$$F_1 e^{A(t-\tau)}B \equiv 0 \quad \text{на } \mathbb{R}^2. \tag{5.3.17}$$

Скориставшись (5.3.16), звідси одержуємо, що розв'язок системи (5.3.14) $z_1(t)$, $t \in [0, +\infty)$, має вигляд

$$z_1(t) \equiv F_1 x(t) \equiv F_1 e^{At}x^0 \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Застосовуючи твердження 5.3.2, маємо $x^0 = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, де $\xi_j \in \mathfrak{R}(\lambda_j)$, $j = \overline{0, k}$. Отже,

$$z_1(t) \equiv F_1 \sum_{j=1}^{k} e^{At}\xi_j \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Скориставшись лемою 5.3.4, звідси одержуємо

$$\begin{aligned} z_1(t) &\equiv \sum_{j=1}^{k} F_1 e^{\lambda_j t} \sum_{m=0}^{n_j-1} \frac{t^m}{m!}\xi_{jm} \\ &\equiv \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j t} \sum_{m=0}^{n_j-1} \frac{t^m}{m!}F_1\xi_{jm} \quad \text{на } \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

де $\xi_{jm} = (A - \lambda_j \mathbb{I})^m \xi_j \in \mathfrak{R}(\lambda_j)$, $m = \overline{1, n_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$. З умови (5.3.10) випливає, що якщо $\operatorname{Re}\lambda_j \geq 0$, то $F_1\xi_{jm} = 0$, $m = \overline{1, n_j - 1}$, $j = \overline{1, k}$. Тому, продовжуючи (5.3.18), одержуємо

$$z_1(t) \equiv \sum_{\substack{j=\overline{1,k} \\ \operatorname{Re}\lambda_j < 0}} e^{\lambda_j t} \sum_{m=0}^{n_j - 1} \frac{t^m}{m!} F_1 \xi_{jm} \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Позначивши $-2\lambda = \max\{\operatorname{Re}\lambda_j \mid \operatorname{Re}\lambda_j < 0 \wedge j = \overline{1, k}\}$, звідси маємо

$$|z_1(t)| \leq R|z_1(0)|(1 + |t|)^{n-1} e^{-2\lambda t} \leq Q|z_1(0)|e^{-\lambda t} \quad \text{на } [0, +\infty),$$

де $R > 0$, $Q > 0$ є деякими сталими незалежними від $z_1(t)$, отже,

$$|z_1(t)| \to 0, \quad \text{коли } t \to +\infty. \tag{5.3.19}$$

Таким чином, за умови (5.3.10) кожний розв'язок $z_1 = z_1(t)$, $t \in [0, +\infty)$, системи (5.3.14) задовольняє умову (5.3.19).

Зафіксуємо довільний розв'язок $z_1(t)$, $t \in [0, +\infty)$, системи (5.3.14) та розглянемо систему (5.3.15) з цим $z_1(t)$. Оберемо будь-яке $\omega > 0$ так, щоб воно задовольняло умову

$$\omega > -M = \max\{-\operatorname{Re}\mu_j \mid j = \overline{1,\, s}\}, \tag{5.3.20}$$

де $\mu_j$, $j = \overline{1, s}$, є різними власними значеннями матриці $\mathcal{A}_{22}$, та розглянемо матрицю

$$N_\omega = \int_0^{+\infty} e^{-2\omega} e^{-\mathcal{A}_{22}t} \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_2^* e^{-\mathcal{A}_{22}^* t}\, dt.$$

Ураховуючи співвідношення

$$FA^j B = \mathcal{A}^j \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{A}_{22}^j \mathcal{B}_2 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0, n-1},$$

невиродженість матриці $F$ та лему 2.4.17, одержуємо

$$\operatorname{rank}[\mathcal{B}_2, \mathcal{A}_{22}\mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{A}_{22}^{m-1}\mathcal{B}_2] = \operatorname{rank}[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$$

$$= \dim L = m. \tag{5.3.21}$$

Тому за лемою 5.3.5 матриця $N_\omega$ додатно визначена, отже (див. лему 5.1.4), вона невироджена.

Розглянемо керування

$$u = -\mathcal{B}_2^* N_\omega^{-1} z_2 \tag{5.3.22}$$

та покажемо, що це керування стабілізує систему (5.3.11).

Підставляючи (5.3.22) у (5.3.15), маємо

$$\dot{z}_2 = \left(\mathcal{A}_{22} - \mathcal{B}_2\mathcal{B}_2^* N_\omega^{-1}\right) z_2 + \mathcal{A}_{12} z_1.$$

Звідси, позначивши $G_\omega = \mathcal{A}_{22} - \mathcal{B}_2\mathcal{B}_2^* N_\omega^{-1}$, одержуємо

$$z_2(t) \equiv e^{G_\omega t} z_2(0) + \int_0^t e^{G_\omega (t-\tau)} \mathcal{A}_{12} z_1(\tau)\, d\tau \text{ на } \mathbb{R}.$$

Тому

$$|z_2(t)| \le \left\| e^{G_\omega t} \right\| \, |z_2(0)| + \int_0^{|t|} \left\| e^{G_\omega (t-\tau)} \right\| \, \|\mathcal{A}_{12}\| \, |z_1(\tau)|\, d\tau \quad \text{на } \mathbb{R}.$$

Скориставшись оцінками (5.3.6) та (5.3.19), звідси одержуємо

$$\begin{aligned} |z_2(t)| &\le K_\omega \left(1 + \|\mathcal{A}_{22}\|\right)^{m-1} |z(0)| e^{-(\omega+M)t} \left(1 + \int_0^t e^{(\omega+M-\lambda)\tau}\, d\tau\right) \\ &\le C_\omega \left(1 + \|\mathcal{A}_{22}\|\right)^{m-1} |z(0)| \left(e^{-(\omega+M)t} + e^{-\lambda t}\right)(1+t) \ \text{ на } \mathbb{R}, \end{aligned}$$

де $K_\omega > 0$ та $C_\omega > 0$ є деякими сталими. З (5.3.20) випливає, що $\omega + M > 0$, тому

$$|z_2(t)| \to 0, \quad \text{коли } t \to +\infty.$$

Скориставшись (5.3.19), одержуємо, що за умови (5.3.10) керування (5.3.22) стабілізує систему (5.3.11), отже, керування

$$u = -\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathcal{B}_2^* N_\omega^{-1} \end{pmatrix} F x, \tag{5.3.23}$$

де **0** означає нульову матрицю розміру $r \times l$, стабілізує (5.1.23). Достатність (5.3.10) доведено.

*Необхідність* (5.3.10). Нехай $u = Px$ є керуванням, яке стабілізує систему (5.1.23), тобто кожний розв'язок $x(t)$, $t \in [0, +\infty)$, системи

$$\dot{x} = Ax + BPx, \quad t \in [0, +\infty), \tag{5.3.24}$$

задовольняє умову

$$x(t) \to 0, \quad \text{коли } t \to +\infty. \tag{5.3.25}$$

Зафіксуємо довільне $x^0 \in \mathfrak{R}(\lambda_j)$, де $j = \overline{1,k}$, таке, що $\operatorname{Re}\lambda_j \geq 0$, та доведемо, що $x^0 \in L$, тобто $x^0 \perp L^\perp$. Розглянемо задачу Коші для системи (5.3.24) з початковою умовою $x(0) = x^0$. За наслідком 2.4.45 про розв'язок задачі Коші для лінійної неоднорідної системи зі сталими коефіцієнтами маємо

$$x(t) \equiv e^{At}x^0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} BPx(\tau)\, d\tau \quad \text{на } [0, +\infty).$$

З (5.3.17) одержуємо

$$F_1 x(t) \equiv F_1 e^{At} x^0 + \int_0^t F_1 e^{A(t-\tau)} BPx(\tau)\, d\tau \equiv F_1 e^{At} x^0 \text{ на } [0, +\infty).$$

Скориставшись лемою 5.3.4, звідси одержуємо

$$\begin{aligned} F_1 x(t) &\equiv F_1 e^{\lambda_j t} \sum_{m=0}^{n_j-1} \frac{t^m}{m!} x_m^0 \\ &\equiv e^{\lambda_j t} \sum_{m=0}^{n_j-1} \frac{t^m}{m!} F_1 x_m^0 \equiv e^{\lambda_j t} \varphi(t) \quad \text{на } [0, +\infty), \end{aligned}$$

де $x_m^0 = (A - \lambda_j \mathbb{I})^m x^0$, $m = \overline{0, n_j - 1}$, $\varphi(t) \equiv \sum_{m=0}^{n_j-1} \frac{t^m}{m!} F_1 x_m^0$ є поліномом з векторними коефіцієнтами. За умови (5.3.25) звідси одержуємо

$$\left| e^{\lambda_j t} \varphi(t) \right| \to 0, \quad \text{коли } t \to +\infty.$$

Отже, $\varphi(t) \equiv 0$ на $\mathbb{R}$, тому $F_1 x^0 = 0$, тобто $x^0 \perp L^\perp$. Отже, $x^0 \in L$. Необхідність (5.3.10) доведено. $\square$

З теореми 5.3.6 та наслідку 5.1.13 одразу одержуємо наслідок.

**Наслідок 5.3.7.** *Якщо система* (5.1.23) *є повністю керованою, то то вона є стабілізовною.*

*Зауваження* 5.3.8. Для того щоб практично знайти керування, яке стабілізує систему (5.1.23), треба:

1) перевірити виконання умови (5.3.10);

2) якщо умову (5.3.10) виконано, знайти базиси просторів $L$ та $L^\perp$ та побудувати матрицю $F$ (див. початок доведення теореми 5.3.6);

3) за допомогою заміни $z = Fx$ знайти матриці $\mathcal{A}_{22}$, $\mathcal{B}_2$ (див. (5.3.13));

4) знайти власні значення $\mu_j$, $j = \overline{1, s}$, матриці $\mathcal{A}_{22}$ та знайти $\omega > 0$, яке задовольняє умову (5.3.20);

5) обчислити матриці $N_\omega$ та $N_\omega^{-1}$;

6) за формулою (5.3.23) знайти керування, яке стабілізує систему (5.1.23).

*Приклад* 5.3.9. З'ясуємо, чи є стабілізовною система

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + 2x_3 + u_1, && t \in [0, +\infty),\\
\dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_3 + u_1, && t \in [0, +\infty),\\
\dot{x}_3 &= -2x_1 + 3x_3 - u_2, && t \in [0, +\infty),
\end{aligned} \tag{5.3.26}$$

і, якщо так, знайдемо керування, яке її стабілізує.

Для цієї системи маємо

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**1.** З'ясуємо спочатку, чи є стабілізовною система (5.3.26). Для цього перевіримо виконання умови (5.3.15) (див. теорему 5.3.6). Знайдемо простір $L$. Маємо

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A^2B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -3 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Тому

$$L = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Далі знайдемо власні значення матриці $A$. Маємо $\lambda_1 = -1$ (кратність $\lambda_1$ дорівнює 1), $\lambda_2 = 1$ (кратність $\lambda_2$ дорівнює 2). Далі знайдемо $K(\lambda_2)$ (див. теорему 5.3.6). Маємо

$$\left(A - \mathbb{I}\right)^2 x = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 x = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in K(\lambda_2).$$

Отже,

$$K(\lambda_2) = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = L.$$

Тому умову (5.3.15) виконано, отже (див. теорему 5.3.6), система (5.3.26) є стабілізовною.

**2.** Знайдемо керування, яке стабілізує систему (5.3.26) за формулою (5.3.23).

Маємо $L^{\perp} = \operatorname{lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, отже,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(див. початок доведення теореми 5.3.6), тоді

$$F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матриці $\mathcal{A}_{22}$ та $\mathcal{B}_2$ (див. (5.3.18)). Оскільки $\dim L = 2$, матриця $\mathcal{A}_{22}$ має розмір $2 \times 2$, і матриця $\mathcal{B}_2$ має також розмір $2 \times 2$. Маємо

$$\mathcal{A}_{22} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матриця $\mathcal{A}_{22}$ має власне значення $\mu_1 = 1$ (кратність $\mu_1$ дорівнює 2). Тому $\omega = 1$ задовольняє умову (5.3.20). Оскільки

$$e^{-\mathcal{A}_{22}t} \equiv e^{-t}\begin{pmatrix} 1+2t & -4t \\ t & 1-2t \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, +\infty),$$

маємо

$$\Omega_\omega(t) \equiv e^{-\omega t}e^{-\mathcal{A}_{22}t}\mathcal{B}_2 \equiv e^{-2t}\begin{pmatrix} 2+4t & 4t \\ 2t & 2t-1 \end{pmatrix} \quad \text{на } [0, +\infty).$$

Отже,

$$\begin{aligned} N_\omega &= \int_0^{+\infty} \Omega_\omega(t)\Omega_\omega^*(t)\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-4t}\begin{pmatrix} 32t^2+16t+4 & 16t^2 \\ 16t^2 & 8t^2-4t+1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

тоді

$$N_\omega^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає

$$\mathcal{B}_2^* N_\omega^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тому за формулою (5.3.23) маємо

$$\begin{aligned} u(t) &\equiv -\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t) \\ &\equiv \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix} x(t) \quad \text{на } [0, +\infty). \end{aligned}$$

# Список літератури


[1] *Golub G. H., Van Loan C. F.* Matrix Computations. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2013.

[2] Handbook of Mathematical Functions with Formulas Graphs and Mathematical Tables, *Eds. Abramowitz M. and Stegun I. A.* Applied Mathematics Series, **55**. Washington D.C., New York: United States Department of Commerce, National Bureau of Standards. Dover Publications, 1972.

[3] *Hartman P.* Ordinary Differential Equations. Philadelphia: SIAM, 2002.

[4] *Robbins H.* A Remark on Stirling's Formula. The American Mathematical Monthly. V. **62**, 1955, P. 26-29. https://doi.org/10.2307/2308012.

[5] *Zabczyk J.* Mathematical Control Theory. An Introduction. Boston: Birkhäuser, 2008.

[6] *Бибиков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Высшая школа, 1991.

[7] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц, Москва: Наука, 1966.

[8] *Голубев В. В.* Лекции по аналитичекой теории дифференциальных уравнений. Москва-Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.

[9] *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. Ч. 1. Київ: Либідь, 1993.

[10] *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. Ч. 2. Київ: Либідь, 1994.

[11] *Ляшко І. І., Боярчук О. К., Гай Я. Г., Калайда О. Ф.* Диференціальні рівняння. Київ: Вища шлола, 1981.

[12] *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. Москва: Наука, 1970.

[13] *Скляр Г. М., Фардигола Л. В.* Елементи теорії керованих систем. Харків: ХДУ, 1998.

[14] *Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. Київ: Вища школа, 1994.

[15] *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. Київ: Либідь, 2003.

[16] *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950.

[17] *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва: Наука, 1964.

[18] *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Наука, 1965.

[19] *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. Москва: Наука, 1965.

[20] *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

# Предметний покажчик

# Список позначень

*Навчальне видання*

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ НИЗЬКИХ ТЕМПЕРАТУР
ІМЕНІ Б. І. ВЄРКІНА

ФАРДИГОЛА Лариса Василівна

# КУРС ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Київ, Науково-виробниче підприємство
«Видавництво "Наукова думка" НАН України», 2022

Художнє оформлення *Л. О. Середи*
Технічний редактор *Т. С. Березяк*

Підп. до друку 22.11.2022. Формат 60×90/16. Папір офс.
Гарн. Ум. друк. арк. 13,8. Обл.-вид. арк. 13,5.
Тираж 000 прим.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників
і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 2440 від 15.03.2006 р.
01601 Київ 1, вул. Терещенківська, 3