

Нерастягивающие биекции между единичными
шарами банаховых пространств
Заварзина Алеся Олеговна
Научный руководитель: Кадец Владимир Михайлович

Метрическое пространство M называется пластичным, если каждая нерастягивающая биекция $F: M \rightarrow M$ является изометрией. Для произвольного банахова пространства X открытым остается вопрос о том, является ли пластичным его единичный шар B_X . В [4] и [1] соответственно, доказаны пластичность M , при условии, что M вполне ограничено и пластичность B_X в случае, когда X строго выпукло. Таким образом, пластичными являются единичные шары всех конечномерных нормированных пространств, гильбертовых пространств, а также пространств L_p , где $1 < p < \infty$. Следующая теорема отвечает на поставленный выше вопрос для пространства ℓ_1 , которое не является строго выпуклым.

Теорема 1 ([3, Theorem 1]). *Единичный шар пространства ℓ_1 является пластичным.*

Также нерешенной остается следующая более общая задача. Пусть X, Y - произвольные банаховы пространства. При каких дополнительных условиях нерастягивающая биекция $F: B_X \rightarrow B_Y$ является изометрией? В этом направлении удалось получить следующие результаты:

Теорема 2 ([5, Theorem 3.1]). *Пусть $F: B_X \rightarrow B_Y$ - нерастягивающая биекция. Если Y строго выпукло, тогда F является изометрией.*

Теорема 3 ([5, Theorem 3.5]). *Пусть $F: B_X \rightarrow B_{\ell_1}$ - нерастягивающая биекция. Тогда F является изометрией.*

Теорема 4 ([5, Theorem 3.8]). *Пусть Y конечномерно, $F: B_X \rightarrow B_Y$ - нерастягивающая биекция. Тогда F является изометрией.*

Теорема 5 ([2, Theorem 3.1]). *Пусть $Z_i, i \in I$ - фиксированный набор строго выпуклых банаховых пространств, Z - ℓ_1 -сумма набора $Z_i, i \in I$, и $F: B_X \rightarrow B_Z$ - нерастягивающая биекция. Тогда F является изометрией.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Cascales B., Kadets V., Orihuela J., Wingler E.J. *Plasticity of the unit ball of a strictly convex Banach space*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, **110(2)**(2016), 723–727.
- [2] Kadets V., Zavarzina O. *Non-expansive bijections to the unit ball of ℓ_1 -sum of strictly convex Banach spaces*, [arXiv:1711.00262](https://arxiv.org/abs/1711.00262), to appear in Bulletin of the Australian Mathematical Society.
- [3] Kadets V., Zavarzina O. *Plasticity of the unit ball of ℓ_1* , Visn. Hark. nac. univ. im. V.N. Karazina, Ser.: Mat. prikl. mat. meh., **83** (2017), 4–9.
- [4] Naimpally S. A., Piotrowski Z., Wingler E. J. *Plasticity in metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., **313** (2006), 38–48.
- [5] Zavarzina O. *Non-expansive bijections between unit balls of Banach spaces*, <https://projecteuclid.org/euclid.afa/1515812424>, published online in Annals of Functional Analysis.